یونٹ 28

قطعہ دائرے میں زاویہ

ANGLES IN A SEGMENT A CIRCLE

طلباء کے آموزشی حاصلات

مندرجہ ذیل اثباتی مسائل اور ان کے نتائج صریح سمجھ اور متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے لیئے استعمال کر سکیں۔

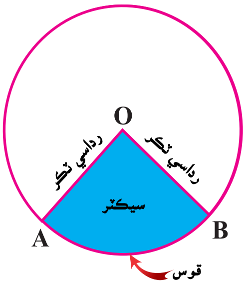
- کسی دائرے میں قوس صغیرہ کا مرکزی زاویہ پیمائش میں متعلقہ قوس کبیرہ سے بننے والے زاویہ سے دوگنا ہوتا ہے۔
- دائرے کے ایک ہی قطعہ میں کوئی بھی دو زاویے برابر ہوتے ہیں
- زاویہ
  - نصف دائرے میں قائمہ زاویہ ہوتا ہے
  - نصف دائرے بڑے قطعہ میں قائمہ زاویہ سے چھوٹا ہوتا ہے (یعنی حادہ زاویہ)
  - نصف دائرے سے چھوٹے قطعہ میں قائمہ زاویہ سے بڑا ہوتا ہے (یعنی منفرجہ زاویہ)
- دائرے میں محصور کسی چوکور کے متقابلہ زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

28.1 قطعہ دائرہ میں زاویہ (Angle in a segment of a circle):

ہم پہلے ہی دائرے سے متعلق اصطلاحات کا مطالعہ کر چکے ہیں جیسے وتر، قوس صغیرہ اور قوس کبیرہ وغیرہ
اب ہمیں قطعہ دائرہ میں زاویہ سے متعلق مسائل کو سمجھنے سے کے لیئے کچھ اور اصطاحات کی وضاحت کرنا ہے۔

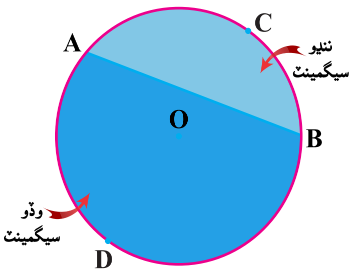
تعریفیں (Definition):

i. قطاع دائرہ (Sector of a circle):



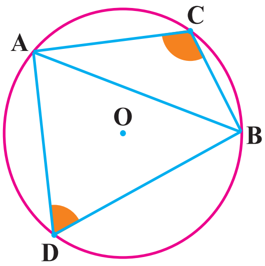
قطاع دائرہ، دائروی علاقے کا حصہ رداسی قطعات سے گھرا ہوا ہو اور قوس جو ان کو قطع کرتا ہے۔ دی گئی شکل میں AOB دیے ہوئے دائرے کا قطاع ہے جس کا مرکز O ہے۔

ii. قطعہ دائرہ (Segment of a circle):



قطعہ دائرہ، دائروی علاقے کا حصہ جو ایک قوس اور وتروں سے گھرا ہوا ہو۔
ایسا قطعہ، قطعہ کبیرہ کہلاتا ہے اگر اس کی قوس، قوس صغیرہ ہو۔ متعلقہ شکل میں قطعہ صغیرہ ACB اور ADB قطعہ کبیرہ ہے۔

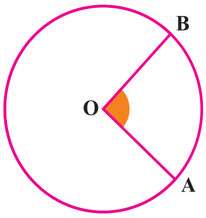
iii. قطعہ دائرہ میں زاویہ (Angle in a segment of circle):



قطعہ دائرہ میں زاویہ ایسا زاویہ ہے جو قطعہ قوس کے سروں کے نقاط کی علاوہ کسی ایک نقطے پر قطعہ کے وتر سے بناتا ہے۔ متصلہ شکل میں، $\angle ACB$ قوس صغیرہ کا زاویہ ہے جب کہ، $\angle ADB$ قوس کبیرہ کا زاویہ ہے۔

نوٹ: قطعہ دائرہ میں زاویہ قطعہ قوس کا محصور زاویہ بھی کہلاتا ہے یا صرف قوس بننے والا زاویہ

iv. قوس کا مرکزی زاویہ (Central angle of an arc):



دائرے کے مرکز پر قوس سے بننے والا زاویہ دائرے کی قوس کا مرکزی زاویہ کہلاتا ہے۔ شکل میں $\angle ACB$ قوس AB کا مرکزی زاویہ ہے

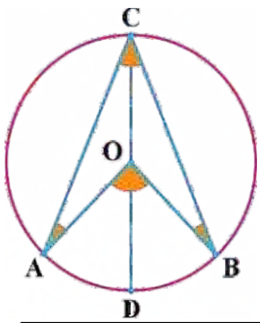
مندرجہ ذیل اثباتی مسائل اور ان کے نتائج صریح سمجھ اور متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے لیئے استعمال کرنا۔

مسئلہ 28.1:

کسی دائرے میں قوس صغیرہ کا مرکزی زاویہ پیمائش میں متعلقہ قوس کبیرہ سے بننے والے زاویہ کا دوگنا ہوتا ہے۔

یا

کسی دائرے میں قوس صغیرہ کا مرکزی پیمائش میں متعلقہ قوس کبیرہ کے محصور زاویے کا دوگنا ہوتا ہے۔



معلوم: دائرہ جس کا مرکز O ہے، $\angle AOB$ قوس AB صغیرہ کا مرکزی زاویہ ہے۔

زاویہ $\angle ACB$ قوس ACB کبیرہ کا متقابلہ زاویے $\angle AOB$ ہے۔

مطلوب: $m\angle AOB = 2m\angle ACB$

عمل: $\overline{CO}$ کھینچیں اور اسے دائرے پر نقطہ D تک بڑھائیں

ثبوت:

بیانات	دلائل
ΔAOC میں، $\overline{OA} \cong \overline{OC}$	ایک ہی دائرے کے رداسی قطعات
اب $m\angle OAC = m\angle OCA$ ...(i)	متماثل اضلاع کے مخالف زاویے
$m\angle AOD = m\angle OAC + m\angle OCA$	مثلث کا بیرونی زاویہ مخالف اندرونی زاویوں کا مجموعہ ہے
$= 2m\angle OCA$ ...(ii)	مساوات (i) کی رو سے
اس طرح $m\angle BOD = 2m\angle OCB$ ...(iii)	ایک ہی جیسے طریقہ کار سے
اب $m\angle AOB = m\angle AOD + m\angle BOD$	زاویوں کی جمع کا موضوعہ
$= 2m\angle OCA + 2\, m\angle OCB$	مساوات (ii) اور (iii) کی رو سے
$= 2(m\angle OCA + m\angle OCB)$	2 مشترک لینے سے
$m\angle AOB = 2\, m\angle ACB$	زاویوں کی جمع کا موضوعہ

Q.E.D

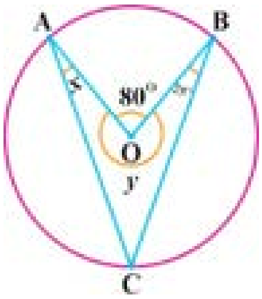
نتیجہ صریح 1:

قوس کبیرہ کا مرکزی زاویے کی پیمائش متقابلہ قوس صغیرہ کے محصور زاویے کا دوگنا ہے

نتیجہ صریح 2:

نصف دائرے کے مرکزی زاویے کی پیمائش متقابلہ نصف دائرے کے محصور زاویے کا دوگنا ہے

مثال 1: متعلقہ شکل میں، نقطہ O دائرے کا مرکز ہے۔ x کی قیمت معلوم کریں اگر $m\angle AOB = 80^\circ$ اور $m\angle OBC = 25^\circ$



حل: شکل میں $\overset{\frown}{AB}$ کا مرکزی زاویہ $\angle AOB$ ہے۔ اور متقابلہ کا محصور $\overset{\frown}{ACB}$ زاویہ $\angle ACB$ ہے

$\because$ $\overset{\frown}{AB}$ کا مرکزی زاویہ متقابلہ $\overset{\frown}{ACB}$ کے محصور زاویہ کا دوگنا ہے

$\therefore$ $m\angle AOB = 2m\angle ACB$

یعنی $80^\circ = 2m\angle ACB$

$m\angle ACB = 40^\circ$

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ ایک نقطہ کے گرد تمام زاویوں کا مجموعہ 360° ہوتا ہے۔

لہذا

$80^\circ + y = 360^\circ$

$\Rightarrow \quad y = 280^\circ$

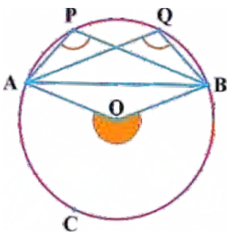
چوکور AOBC میں

$\Leftarrow \quad x + y + 25^\circ + m\angle ACB = 360^\circ$

$\Leftarrow \quad x + 280^\circ + 25^\circ + 40^\circ = 360^\circ$

$x + 345^\circ = 360^\circ$

$\Leftarrow \quad x = 15^\circ$



مسئلہ 28.2: دائرے کا ایک ہی قطعہ میں کوئی بھی دو زاویے برابر ہوتے ہیں۔

معلوم: دائرے کا ایک ہی قطعہ APQB میں دو زاویے $\angle APB$ اور $\angle AQB$ ہیں جس کا مرکز O ہے۔

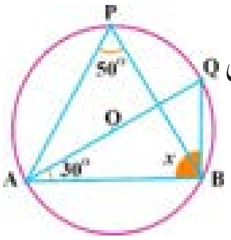
مطلوب: $m\angle APB = m\angle AQB$

عمل: O کو A اور B سے ملائیں۔ جبکہ $\overset{\frown}{ACB}$ کا مرکزی زاویہ $\angle AOB$ ہے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\overset{\frown}{ACB}$ کا مرکزی زاویہ $\angle AOB$ ہے	عمل
$\angle APB$ اور $\angle AQB$ دائرے کے ایک ہی قطعہ کے زاویے ہیں	معلوم
اب $m\angle AOB = 2m\angle APB$	قوس کبیرہ کا مرکزی زاویہ متقابلہ قوس صغیرہ کے محصور زاویہ کا دو گناہ ہے
$m\angle AOB = 2m\angle AQB$	ایک جیسے طریقہ کار سے خاصیت
$2m\angle APB = 2m\angle AQB$	متعدیت کی رو سے
$m\angle APB = m\angle AQB$	دونوں اطراف کو 2 سے تقسیم کرنے سے

نتیجہ صرح 1: کوئی بھی زاویے قطعہ کبیرہ میں برابر ہوتے ہیں۔



مثال: متعلقہ شکل میں دائرے کے ایک ہی قطعہ APQB میں دو زاویے $\angle Q$ اور $\angle P$ ہیں۔ دائرے کا مرکز O ہے۔ x یا $m\angle ABQ$ کی قیمت معلوم کریں جب کہ زاویوں کی پیمائش شکل میں ظاہر کی گئی ہے۔

حل:

$\angle P$ اور $\angle Q$ ایک ہی قطعہ کے زاویے ہیں

$\therefore \quad m\angle Q = m\angle P$

یعنی $\quad m\angle Q = 50^\circ \qquad (\because m\angle P = 50^\circ)$

ΔABQ میں

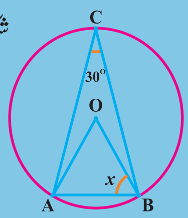
$m\angle A + m\angle Q + x = 180^\circ$

یعنی $\quad 30^\circ + 50^\circ + x = 180^\circ$

$\Rightarrow \quad x = 100^\circ$

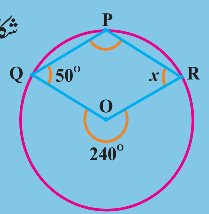
مشق 28.1

شکل 1



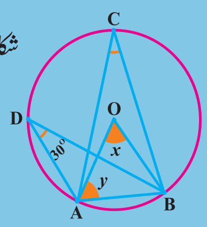
1. شکل 1 میں ۔ نقطہ O دائرے کا مرکز ہے۔ x معلوم کریں
جبکہ $m\angle C = 30^\circ$

شکل 2



2. شکل 2 میں، نقطہ O دائرے کا مرکز ہے۔ x معلوم کریں
جبکہ $m\angle Q = 50^\circ$

شکل 3



3. شکل 3 میں نقطہ O دائرے کا مرکز ہے۔ $x + y$ معلوم کریں
جبکہ $m\angle D = 30^\circ$

4. دو متماثل دائروں کی دو متماثل قوس کبیرہ کے محصور زاویے متماثل ہیں۔ ثابت کریں

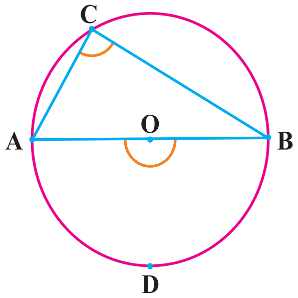
5. ثابت کریں کہ دائرے میں قوس کبیرہ اور اُس کی متقابلہ قوس صغیرہ کے محصور زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

مسئلہ 28.3 (a):

تصف دائرے میں واقع زاویہ، C قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

یا

نصف دائرے میں محصور زاویہ، قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔



معلوم: مرکز O کے ایک دائرے میں ADB نصف دائرہ کا مرکزی $\angle AOB$ زاویہ ہے۔

$\angle ACB$ متقابلہ نصف دائرے کا محصور زاویہ ہے

مطلوب: $\angle ACB$ قائمہ زاویہ ہے

ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\angle AOB = 180^\circ$ ...(i)	نصف دائرے کا مرکزی زاویہ
اب $m\angle AOB = 2m\angle ACB$	نصف دائرے کا مرکزی زاویہ متقابلہ نصف دائرے محصور زاویہ کا دو گنا ہے۔
$\Rightarrow 2m\angle ACB = 180^\circ$	مساوات (i) کی رو سے
یا $m\angle ACB = 90^\circ$	دونوں اطراف 2 سے تقسیم کرنے سے
یعنی $\angle ACB$ قائمہ زاویہ ہے	قائمہ زاویہ کی تعریف کی رو سے

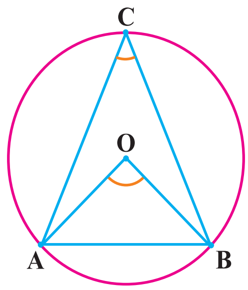
Q.E.D

مسئلہ 28.3 (b)

نصف دائرے سے بڑے قطعہ میں واقع زاویہ، قائمہ زاویہ سے چھوٹا ہوتا ہے۔

یا

قوس کبیرہ میں محصور زاویہ حادہ زاویہ ہوتا ہے۔



معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے ACB ایک زاویہ ہے

جو نصف دائرے سے بڑے قطعہ $\angle ACB$ میں ہے۔

$\angle AOB$ متقابلہ قوس صغیرہ AB کا مرکزی زاویہ ہے

مطلوب: $\angle ACB$ ایک حادہ زاویہ ہے

ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\angle AOB < 180^\circ$ ...(i)	قوس صغیرہ کا مرکزی زاویہ
اب $m\angle AOB = 2m\angle ACB$	قوس صغیرہ کا مرکزی زاویہ متقابلہ قوس کبیرہ کے محصور زاویہ کا دو گنا ہے
$\Rightarrow 2m\angle ACB < 180^\circ$	مساوات (i) استعمال کرتے ہوئے
$m\angle ACB < 90^\circ$	دونوں اطراف 2 سے تقسیم کرنے سے
یعنی $\angle ACB$ حادہ زاویہ ہے	حادہ زاویہ کی تعریف کی رو سے

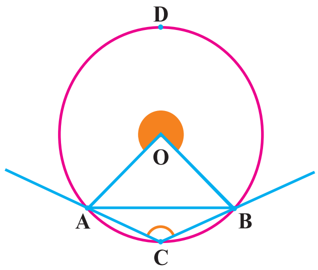
Q.E.D

مسئلہ :28.3 (c)

نصف دائرے سے چھوٹے قطعہ میں واقع زاویہ قائمہ زاویہ متناظرہ زاویہ سے بڑا ہوتا ہے۔

یا

قوس صغیرہ میں محصور زاویہ منفرجہ زاویہ ہوتا ہے۔



معلوم: ایک دائرہ جس کا O مرکز ہے۔ قوس صغیرہ AB کا محصور زاویہ $\angle ACB$ ہے۔

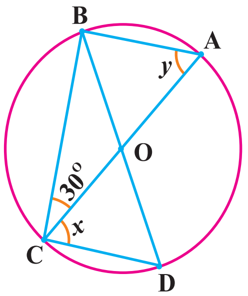
$\angle AOB$ متقابلہ قوس کبیرہ ADB کا مرکزی زاویہ ہے۔

مطلوب: $\angle ACB$ منفرجہ زاویہ ہے

ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\angle AOB > 180^\circ$ ...(i)	قوس کبیرہ کا مرکزی زاویہ
اب $m\angle AOB = 2m\angle ACB$	قوس کبیرہ کا مرکزی زاویہ متقابلہ قوس صغیرہ کے محصور زاویے سے دوگنا ہے
$\Rightarrow 2m\angle ACB > 180^\circ$	مساوات (i) استعمال کرتے ہوئے
یا $m\angle ACB > 90^\circ$	دونوں اطراف 2 سے تقسیم کرنے سے
یعنی $\angle ACB$ منفرجہ زاویہ ہے	منفرجہ زاویے کی تعریف کی رو سے

Q.E.D



شکل 1

مثال: شکل 1 میں، نقطہ O دائرے کا مرکز ہے۔ x اور y کی قیمتیں معلوم کریں۔
جبکہ $m\angle BCO = 30^\circ$، $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ قطر ہیں۔

حل:

$\because$ $\overline{BD}$ قطر ہے

$\therefore$ $\angle BCD$ نصف دائرے کا محصور زاویہ ہے

پس $m\angle BCD = 90^\circ$

$\Rightarrow x + 30^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow x = 60^\circ$

$\overline{AC}$ قطر ہے

$m\angle CBA$ نصف دائرے کا محصور زاویہ ہے

پس $m\angle CBA = 90^\circ$

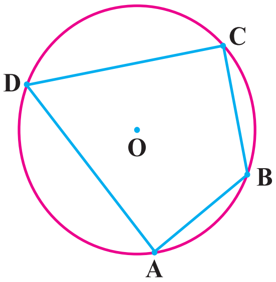
ΔABC میں،

$30^\circ + m\angle CBA + y = 180^\circ$

$\Rightarrow 30^\circ + 90^\circ + y = 180^\circ$

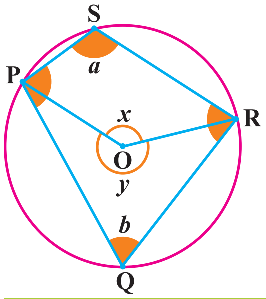
$\Rightarrow y = 60^\circ$

محصور چوکور یا دوری چوکور:



ایک چوکور یادوری چوکور کہلاتا ہے۔ اگر اس کے تمام راس ایک ہی دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔ شکل میں ABCD ایک دوری چوکور ہے

مسئلہ 28.4: دائرے میں محصور کسی چوکور کے متقابلہ زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں



معلوم: دائرے PQRS میں محصور چوکور ہے۔ دائرے کا مرکز O ہے۔

مطلوب:

$$m\angle Q + m\angle S = 180^\circ$$
$$m\angle P + m\angle R = 180^\circ$$

عمل: $\overline{OP}$ اور $\overline{OR}$ کھینچیں جبکہ $\angle POR$ یا $\angle x$ قوس $\overset{\frown}{PR}$ کا مرکزی زاویہ اور $\angle y$ متقابلہ قوس $\overset{\frown}{PQR}$ کا مرکزی زاویہ ہے۔

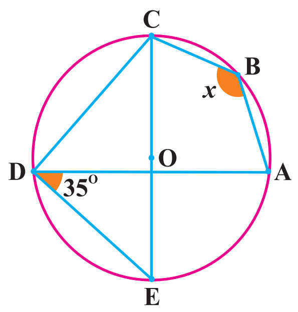
ثبوت:

بیانات	دلائل
قوس $\overset{\frown}{PR}$ کے محصور زاویے $\angle a$ یا $\angle S$	تعریف کی رو سے
$\angle y$ متقابلہ قوس $\overset{\frown}{PQR}$ کا مرکزی زاویہ	عمل
$m\angle y = 2m\angle a$	قوس کبیرہ کا مرکزی زاویہ متقابلہ قوس صغیرہ محصور زاویہ دو گنا ہے۔
اب $\Rightarrow \quad m\angle a = \frac{1}{2}m\angle y \ldots(\text{i})$	دونوں اطراف 2 سے تقسیم کرنے سے
$\angle Q$ یا $\angle b$ قوس $\overset{\frown}{PQR}$ کے محصور زاویہ ہے	تعریف کی رو سے
$\angle x$ متقابلہ قوس $\overset{\frown}{PR}$ کا مرکزی زاویہ ہے	عمل
لہٰذا $m\angle x = 2m\angle b$	قوس صغیرہ کا مرکزی زاویہ متقابلہ قوس کبیرہ کے محصور زاویہ کا دو گنا ہوتا ہے۔
یعنی $m\angle b = \frac{1}{2}m\angle x \ldots(\text{ii})$	دونوں اطراف کو 2 سے تقسیم کرنے سے
اب $m\angle a + m\angle b = \frac{1}{2}m\angle x + \frac{1}{2}m\angle y$	مساوات (i) اور مساوات (ii) کو جمع کرنے سے
$= \frac{1}{2}(m\angle x + m\angle y)$	$\frac{1}{2}$ مشترک لینے سے
$= \frac{1}{2}(360^\circ)$	ایک نقطے کے گرد تمام زاویں کا مجموعہ 360° ہے
یعنی $m\angle a + m\angle b = 180^\circ$	
یا $m\angle Q + m\angle S = 180^\circ$	$\because \angle a \cong \angle S$ اور $\angle b \cong \angle Q$
اس طرح $m\angle P + m\angle R = 180^\circ$	ایک جیسے طریقہ کار سے

Q.E.D

نتیجہ صریح: دائرے میں محصور متوازی الاضلاع مستطیل ہوتا ہے

مثال: دی گئی شکل میں O دائرے کا مرکز ہے۔ CE اس کا قطر ہے ABCD اور دوری چوکور ہے. x کی قیمت معلوم کریں اگر $m\angle ODE = 35^\circ$



حل:

$\angle CDE$ نصف دائرے کا محصور زاویہ ہے

$\therefore$

یعنی

$$m\angle CDE = 90^\circ$$
$$35^\circ + m\angle ADC = 90^\circ$$
$$\Rightarrow \quad m\angle ADC = 55^\circ$$

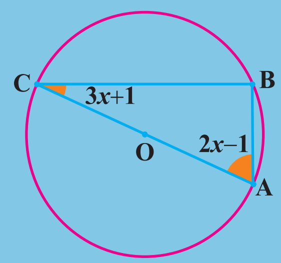
اب

دوری چوکور ABCD میں

$$x + m\angle ADC = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \quad x + 55^\circ = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \quad x = 180^\circ - 55^\circ$$
$$\Rightarrow \quad x = 125^\circ$$

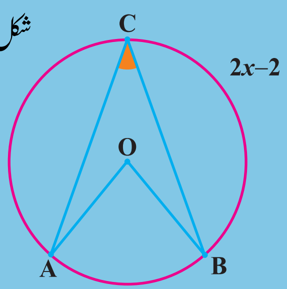
مشق 28.2

شکل 1



1. شکل 1 میں، O دائرے کا مرکز ہے۔ جب کہ $\overline{AC}$ اس کا قطر ہے۔
x معلوم کریں

شکل 2



2. شکل 2 میں ABC دائرے کی قوس کبیرہ ہے۔
جس کا مرکز O ہے اور $\angle C$ اس کا محصور زاویہ ہے
x کی قیمت معلوم کریں جب کہ $x \in \mathbb{R}$

3. دائرے میں، دائرے کی قوس صغیرہ کے محصور زاویہ کی پیمائش $7x-1$ ہے کی قیمت معلوم کریں جبکہ $x \in \mathbb{R}$

4. ثابت کریں کہ دائرے میں محصور معین (Rhombus) مربع ہوتا ہے۔

5. ثابت کریں کہ دوری چوکور (cyclic quadrilateral) کا بیرونی زاویہ مخالف اندرونی زاویے کے برابر ہوتا ہے۔

اعادہ مشق 28

1. درست جواب پر ✓ کا نشان لگائیں

i. ....کا محصور زاویہ منفرجہ ہوتا ہے۔

(a) قوس صغیرہ (b) قوس کبیرہ (c) نصف دائرہ (d) ان میں سے تمام

ii. ....دائروی علاقہ ہے جو قوس اور اس کے وتر سے گھِرا ہوتا ہے

(a) قطاع (b) قطعہ (c) قوس کبیرہ (d) محیط

iii. اگر $2x$ قوس صغیرہ کا محصور زاویہ ہے تو متقابلہ قوس کبیرہ کا مرکزی زاویہ............ہے۔

(a) x (b) $2x$ (c) $3x$ (d) $4x$

iv. اگر ایک ہی قطع کے محصور زاویوں کی پیمائش $2x$ اور 60° ہے تو $x =$ ....

(a) 120° (b) 60° (c) 20° (d) 30°

v. دائرے کی قوس صغیرہ کا محصور زاویہ، زاویہ......ہوتا ہے

(a) حادہ (b) منفرجہ (c) قائمہ (d) عکس

vi. دائرے کی قوس کبیرہ کا محصور زاویہ، زاویہ ________ ہوتا ہے۔

(a) حادہ (b) منفرجہ (c) قائمہ (d) عکس

vii. دوری چوکور کے مخالف زاویوں کا مجموعہ........ہے۔

(a) 90° (b) 180° (c) 270° (d) 360°

viii. دائرے میں محصور متوازی الاضلاع..........ہوتا ہے۔

(a) پتنگ (b) ذوزنقہ (c) مستطیل (d) معین

ix. ایک قوس کا مرکزی زاویہ متقابلہ قوس کے محصور زاویے سے..........ہوتا ہے۔

(a) کم (b) بڑا (c) کم یا برابر (d) بڑا یا برابر

x. ایک دائرے کی تمام قوسیں کے مرکزی زاویوں کا مجموعہ......ہے۔

(a) 90° (b) 180° (c) 360° (d) 1000°

خلاصہ

- دائروی علاقہ جو دو رداسی قطعات اور ایک قوس سے گھِرا ہوتا ہے قطاع کہلاتا ہے
- دائروی علاقہ جو ایک قوس اُس کے وتر سے گھِرا ہوتا ہے قطعہ کہلاتا ہے
- دائرے کے قطعہ میں زاویہ وہ قطعہ کا محصور زاویہ بھی کہلاتا ہے۔
- ایک قوس سے مرکز پر بننے والا زاویہ مرکزی زاویہ کہلاتا ہے۔
- قوس صغیرہ (یا قوس کبیرہ) کا مرکزی زاویہ متقابلہ کبیرہ (یا صغیرہ) زاویے سے بالا ترتیب دوگنا ہوتا ہے۔
- دائرے کے ایک ہی قطعہ میں دو زاویے برابر ہوتے ہیں
- نصف دائرے میں محصور زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔
- قوس صغیرہ میں محصور زاویہ منفرجہ زاویہ ہوتا ہے
- دوری چوکور کے تمام راس ایک ہی دائرے پر ہوتے ہیں
- دوری چوکور کے مخالف زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔