یونٹ 29

عملی جیومیٹری-دائرے

PRACTICAL GEOMETRY - CIRCLES

طلباء کے سیکھنے کے نتائج (SLOs)

اس یونٹ کو مکمل کے بعد طلباءاس قابل ہو جائیں گے کہ :

- دیئے گئے دائرے کا مرکز متعین کرنا
- تین غیر ہم خط نقاط سے گزرتاہوادائرہ کھینچنا۔
- دائرہ مکمل کرنا۔
  - مرکز معلوم کر کے۔
  - بغیر مرکز معلوم کئے: جب اس کے محیط کاایک حصہ دیا گیاہو۔
- دیئے گئے مثلث کا محاصر دائرہ
- دیئے گئے مثلث کا محصور دائرہ۔
- دیئے گئے مثلث کا جانبی دائرہ۔
- دیئے گئے ایک دائرہ کا مساوی الاضلاع کا محاصر کھینچنا
- دیئے گئے مثلث میں مساوی الاضلاع محصور مثلث کھینچنا
- دیئے گئے دائرے کا مساوی الاضلاع کے محصور مثلث بنانا
- دیئے گئے دائرے کا محاصر مربع بنانا۔
- دیئے گئے دائرے کا محاصر منظم مسدس بنانا
- دیئے گئے دائرے کا محصور منظم مسدس بنانا۔
- دیئے گئے نقطہ P سے مرکز کو استعمال کیئے بغیر دی گئی قوس کا مماس کھینچنا جب نقطہ
  - قوس کا وسطی نقطہ ہو۔
  - قوس کے آخری سرے پر واقع ہو۔
  - قوس کے باہر واقع ہو۔
- کسی نقطہ P سے دیئے گئے دائرے پر مماس کھینچنا جب P واقع ہو۔
  - محیط پر
  - دائرے سے باہر
- ایک دائرے کے دو مماس کھینچنا جو دیئے گئے زاویے پر باہم ملتے ہیں۔
- کھینچنا
  - دو مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس یا بیرونی مماس
  - دو مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس یا اندرونی مماس کھینچنا
- کھینچنا
  - دو غیر مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس یا بیرونی مماس
  - دو غیر مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس یا اندرونی مماس
- مماس کھینچنا
  - دو غیر مساوی چھوتے ہوئے دائروں کا۔
  - دو غیر مساوی قطع کرتے ہوئے دائروں کا۔
- دائرہ کھینچنا جو چھوتا ہو۔
  - دیئے گئے زاویہ کے دونوں بازوں کو
  - دو متقاطع خطوط کو اور ان کے درمیان دیئے گئے نقطہ میں گزرے۔
  - تین متقاطع خطوط کو۔

تعارف:

ہم جانتے ہیں کہ عملی جیومیٹری، جیومیٹری کی ایک اہم شاخ ہے جو آرکیٹیکچر، کمپیوٹر گرافکس، آرٹ وغیرہ میں استعمال ہوتی ہے۔ ہم پہلے ہی پچھلی جماعتوں میں زاویے، مثلث، مستطیل، کثیر الاضلاع بنانا سیکھ چکے ہیں آئیں اب ہم دائرے اور اس کی متعلقہ اشکال بنانا سیکھتے ہیں۔

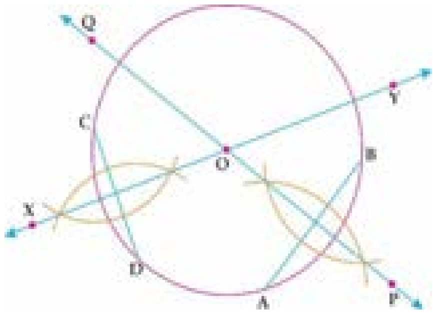
29.1 دائرے بنانا (Construction of Circles):

ہم جانتے ہیں کہ دائرہ پرکار کی مدد سے آسانی سے بنایا جاسکتا ہے جبکہ اُس مرکز اور رداس دیا ہوا ہو۔اس سیکشن میں ہم ایسے دائرے بنانا بھی سیکھیں گے جن مرکز اور رداس نہیں دیئے گئے ہوں۔

29.1 (i) دیے گئے دائرے کا مرکز متعین کرنا (Locate the center of a grin circle)

دیئے گئے دائرے کا مرکز متعین کرنے کے لیے ہم اس حقیقت کو سامنے رکھیں کہ ایک دائرے دو غیر متوازی وتر کے عمودی ناصف ایک دوسرے کو دائرے کے مرکز پر قطع کرتے ہیں۔

دیئے گئے دائرے کا مرکز متعین کرنے کا طریقہ کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔



مثال: دیے گئے دائرے کا مرکز متعین کرنا جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

معلوم: ایک دائرہ

مطلوب: دیے گئے دائرہ کا مرکز متعین کرنا

مراحل عمل:

(i) دیئے گئے دائرہ کے دو متوازی وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کھینچیں

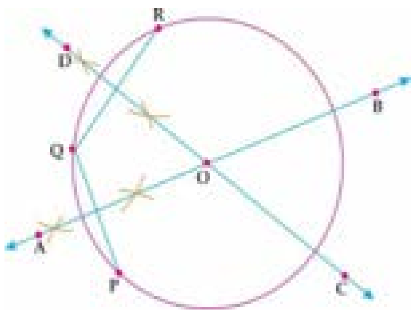
(ii) وتر $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{PQ}$ کھینچیں

(iii) وتر $\overline{CD}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{XY}$ کھینچیں

(iv) دونوں عمودی ناصف O اور O ایک دوسرے کو نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔

29.1 (ii) تین غیر اہم خط نقاط سے گزرتا ہوا دائرہ کھینچنا

ایک دائرہ دیے گئے تین غیر ہم خط نقاط سے گرتا ہو کھینچنے کے لیئے ہمیں سب سے پہلے مرکز کا متعین کرنا ہو گا پھر دائرہ کھینچا جیسا مندرجہ ذیل مثال سے وضاحت کی گئی ہے۔



مثال: تین غیر اہم خط نقاط P، Q اور R سے گزرتا ہوا دائرہ کھینچیں۔

معلوم: تین غیر ہم خط نقاط P، Q اور R

مطلوب: P، Q اور R سے گزرتے ہوئے ایک دائرہ کھینچنا

مراحل عمل:

(i) کوئی بھی تین غیر ہم خط نقاط P، Q اور R

(ii) $\overline{PQ}$ اور $\overline{QR}$ کھینچیں۔

(iii) $\overline{PQ}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{AB}$ کھینچیں

(iv) $\overline{QR}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{CD}$ کھینچیں۔

(v) دونوں عمودی ناصف $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ ناصف ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں جو کہ مطلوبہ دائرے کا مرکز ہے۔

(vi) O کو مرکز مان کر رداس $m\overline{OP}$ یا $m\overline{OQ}$ یا $m\overline{OR}$ کے برابر ایک دائرہ کھینچیں

یہ مطلوبہ دائرہ ہے۔

29.1(iii) دائرہ مکمل کرنا

- مرکز معلوم کر کے
- بغیر مرکز معلوم کئے

جب اس سے محیط کا ایک حصہ دیا گیا ہو

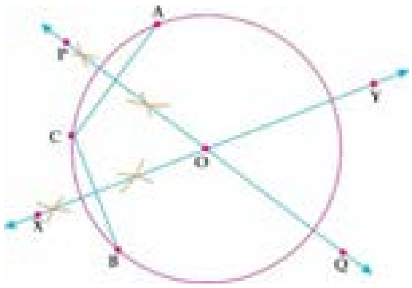
(a) مرکز معلوم کر کے دائرہ مکمل کرنا جب اس کے محیط کا ایک حصہ دیا گیا ہو

ہم ایک دائرہ مکمل کر سکتے ہیں جب اس کے محیط کا ایک حصہ یا دی ہوئی قوس کے کسی بھی تین نمبر ہم خط نقاط کی مدد سے مرکز معلوم کر کے مندرجہ ذیل مثال سے طریقے کار کی وضاحب کی گئی ہے۔

مثال: مرکز معلوم کر کے دائرہ مکمل کریں جس کی قوس دی گئی ہو۔

معلوم: محیط کا ایک حصہ یا ایک قوس دی ہوئی ہے

مطلوب: دائرہ مکمل کرنا جس کی قوس دی ہوئی ہے۔



مراحل عمل:

(i) ایک قوس AB کھینچیں

(ii) A اور B کے علاوہ قوس AB پر نقطہ C لیں

(iii) $\overline{AC}$ اور $\overline{BC}$ کھینچیں ۔

(iv) $\overline{AC}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{PQ}$ کھینچیں ۔

(v) $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{XY}$ کھینچیں

(vi) $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{XY}$ دونوں ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں جو کہ دائرہ کا مرکز ہے۔

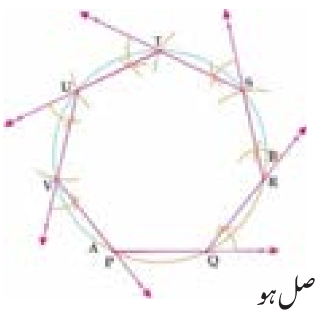
(vii) O کو مرکز مان کر رداسی قطعہ $m\overline{AO}$ یا $m\overline{OB}$ یا $m\overline{OC}$ کے برابر دائرہ کا باقی حصہ کھینچیں۔

پس ہمیں دی ہوئی قوس AB سے مکمل دائرہ ملا

(b) بغیر مرکز معلوم کئے دائرہ مکمل کرنا جب اس کے محیط کا ایک حصہ دیا گیا ہو۔

ہم مرکز معلوم کئے بغیر دائرہ مکمل کر سکتے ہیں۔ منظم الکثیر الاضلاع کی مدد سے جب ایک قوس دی گئی ہو۔

ہم اندرونی اور بیرونی زاویوں کی مدد سے جو کہ متماثل ہیں منظم الاضلاع کھینچ سکتے ہیں مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے طریقہ کار کی وضاحت کی گئی ہے۔



مثال: مرکز معلوم کئے بغیر دائرہ مکمل کریں جس کی قوس AB دی گئی ہو۔

معلوم: دائرہ کی ایک قوس AB

مطلوب: AB قوس کا دائرہ مکمل کرنا۔

مراحل عمل:

(i) دی گئی $\overset{\frown}{AB}$ قوس کے دو متماثل وتر $\overline{PQ}$ اور $\overline{QR}$ کھینچیں

(ii) $\angle Q$ کے متماثل بیرونی $\angle R$ کھینچیں اور $\overline{PQ}$ کے متماثل $\overline{ST}$ کھینچیں۔

(iii) $\angle R$ کے متماثل بیرونی $\angle S$ کھینچیں اور $\overline{PQ}$ کے متماثل $\overline{ST}$ کھینچیں۔

(iv) اس ہی طریقے کار سے ہمیں نقاط S، T، U اور V ملتے ہیں لہذا ہمیں منظم سبع حاصل ہو

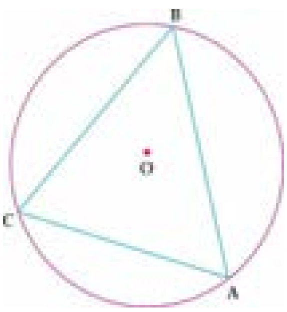
(v) PQRSTU اور V کی نقاطی قوس بنائیں یہ نقاطی قوسیں دائرہ مکمل کرتی ہیں۔

مشق نمبر 29.1

1. کسی دائروی اشیاء کی مدد سے دائرہ کھینچیں۔اس کا مرکز تعین کریں
2. تین غیر ہم خط نقاط X، Y، Z لیں اور ان تینوں نقاط سے گزرتا ہوا دائرہ کھینچیں۔
3. کسی دائروی جسیم کی مدد سے قوس صغیرہ AB کھینچیں۔ مرکز معلوم کرکے دائرہ مکمل کریں۔
4. کسی دائروی جسم کی مدد سے قوس کبیرہ ABC کھینچیں۔ مرکز معلوم کئے بغیر دائرہ مکمل کریں۔
5. کسی دائروی جسم کی مدد سے قوس کبیرہ AB کھینچیں۔ مرکز معلوم کئے بغیر دائرہ مکمل کریں۔

29.2 کثیر الاضلاع سے منسلک دائرے (Circles all acted to polygan)

کثیر الاضلاع کے تین یا تین سے زیادہ اطراف کی بند شکل ہوتی ہے مثال کے طور پر مثلث ، چوکور، مخمیس، مسدس وغیرہ کثیر الاضلاع سے منسلک دائرے ایسے دائرے ہیں جو کثیر الاضلاع کے تمام رداسوں سے گزرتے ہوں یا کثیر الاضلاع اطراف کو چھوتے ہوں۔



29.2 (i) دی گئی مثلث کا محاصر دائرہ

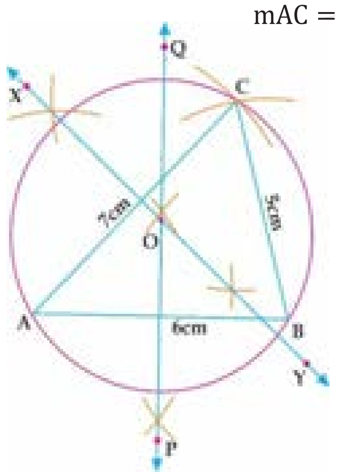
ایک مثلث کا محاصر دائرہ (Circum Circle of Triangle)

ایک دائرہ جو مثلث کے تمام راسوں سے گزرتا ہے وہ مثلث کا محاصر دائرہ کہلاتا ہے۔
شکل میں کا محاصر دائرہ ΔABC دیا گیا ہے جس کا مرکز O ہے جو محاصر مرکز کہلاتا ہے

مثال: ΔABC کا محاصر دائرہ کھینچیں جس میں $m\overline{AB} = 6cm$ ، $m\overline{BC} = 5cm$ اور $m\overline{AC} = 7cm$

معلوم: مثلث ABC ہے جس میں $m\overline{AB} = 6\text{ cm}$ ، $m\overline{BC} = 5cm$ اور $m\overline{AC} = 7cm$

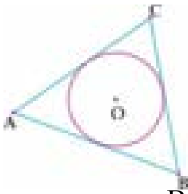
مطلوب: ΔABC کا محاصرہ دائرہ کھینچنا



مراحل عمل:

(i) دیئے گئے مواد کی مدد سے ΔABC بنائیں
(ii) $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{PQ}$ کھینچیں
(iii) $\overline{AC}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{XY}$ کھینچیں
(iv) دونوں عمودی ناصف $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{XY}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔
(v) O کو مرکز ماں کر رداس $m\overline{OA}$ یا $m\overline{OB}$ یا $m\overline{OC}$ کے برابر ایک دائرہ کھینچیں جو A، B اور C سے گزرتا ہے۔
یہ مثلث کا مطلوبہ محاصر دائرہ ہے۔

29.2 (ii) دیئے گئے مثلث کا محصور دائرہ یا مثلث کا محصور دائرہ:
(Inscribed circle or in-circle of Triangle)

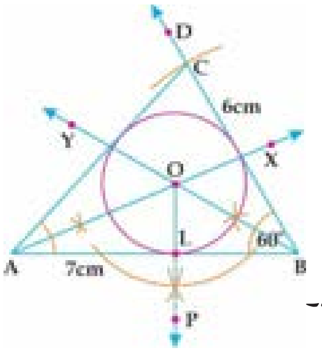


ایک دائرہ جو مثلث کی تمام اطراف چھوتا ہے وہ مثلث کا محصور دائرہ کہلاتا ہے۔
متعلقہ شکل میں ΔABC مثلث کا محصور دائرہ جس کا مرکز O ہے جو اندرونی مرکز (In-center) کہلاتا ہے۔

مثال: ΔABC کا محصور دائرہ کھینچیں جس میں $m\overline{AB} = 7cm$، $m\angle B = 60°$ اور $m\overline{BC} = 6\ cm$

معلوم: مثلث جس میں ABC $m\overline{AB} = 7cm$، $m\angle B = 60°$ اور $m\overline{BC} = 6cm$

مطلوب: ΔABC کا محصور دائرہ کھینچنا



مراحل عمل:

(i) دیئے گئے مواد کی مدد سے ΔABC بنائیں۔

(ii) $\angle A$ کا اندرونی ناصف $\overrightarrow{AX}$ کھینچیں

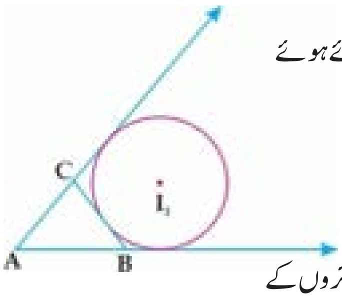
(iii) $\angle B$ کا اندرونی ناصف $\overrightarrow{BY}$ کھینچیں

(iv) دونوں اندرونی ناصف $\overrightarrow{AX}$ اور $\overrightarrow{BY}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

(v) نقطہ O سے $\overline{AB}$ پر عمود $\overrightarrow{OP}$ کھینچیں۔ $\overrightarrow{OP}$ کو $\overline{AB}$ نقطہ L پر قطع کرتا ہے۔

(vi) O کو مرکز مان کر اور رداس $m\overline{OL}$ برابر دائرہ بنائیں جو ΔABC کی تینوں اطراف کو چھوتا ہے یہ مطلوب دائرہ محصور دائرہ ہے

29.2 (iii) دیئے گئے مثلث کا جانبی دائرہ:
جانبی دائرہ **(Escribed Circle or Ex-circle)**



دائرہ جو مثلث کی ایک بیرونی ضلع کو چھوتا ہے اور دائرے کے دو بڑھائے ہوئے اطراف کو اندرونی طرف سے چھوتا ہے یہ جانبی دائرہ کہلاتا ہے۔

دی ہوئی شکل میں مثلث ΔABC میں راس A مقابل جانبی دائرہ ہے جس کا مرکز I_1 ہے جو جانبی دائرہ کا مرکز (ex-circle) کہلاتا ہے۔

اس ہی طرح I_2 اور I_3 ΔABC کے راس B اور C کے مقابل جانبی دائروں کے مرکز ہیں۔

مثال: ΔABC کے راس A کے مقابل جانبی دائرہ کھینچیں جبکہ $m\overline{AB} = 5cm$، $m\angle A = 30°$، $m\angle B = 60°$

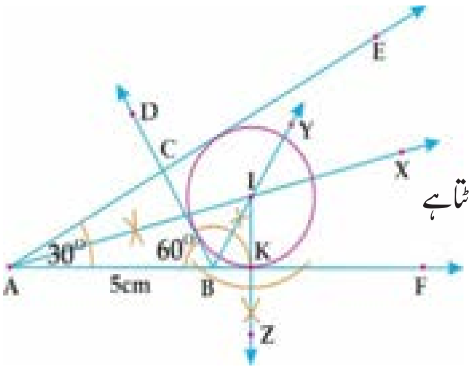
معلوم: مثلث ABC جس میں $m\overline{AB} = 5cm$، $m\angle A = 30°$ اور $m\angle B = 60°$

مطلوب: ΔABC کے راس A کے مقابل ایک جانبی دائرہ کھینچیں

مراحل عمل:

(i) دیئے گئے مواد کی مدد سے ΔABC بنائیں

(ii) $\overline{AC}$ کو C سے پرے اور $\overline{AB}$ کو B سے پرے بڑھائیں بالترتیب جو دو بیرونی زاویے جو BCE اور CBF بناتے ہیں



(iii) $\angle A$ کا اندرونی ناصف $\overrightarrow{AX}$ کھینچیں

(iv) $\angle CBF$ کا اندرونی ناصف $\overrightarrow{BY}$ کھینچیں

(v) دونوں ناصف $\overrightarrow{AX}$ اور $\overrightarrow{BY}$ ایک دوسرے کو نقطہ I پر قطع کرتے ہیں

(vi) $\overrightarrow{AF}$ پر ایک عمود $\overrightarrow{IZ}$، I کھینچیں جو $\overrightarrow{AF}$ کو نقطہ K پر کاٹتا ہے

(vii) I کو مرکز مان کر رداس $m\overline{IK}$ کے برابر ایک دائرہ کھینچیں جو $\overline{BC}$ کو بیرونی اور AE اور $\overrightarrow{AF}$ اندرونی چھوتا ہے

یہ ΔABC کے راس A مقابل مطلوبہ جانبی دائرہ ہے۔

29.2 ایک دائرے کا مساوی الاضلاع کا محاصر کھینچنا

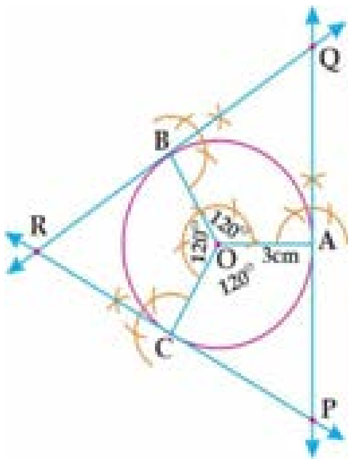
ہم دیئے گئے دائرے کے گرد ایک مساوی الوضلاع مثلث کھینچیں گے در حقیقت اگر دائرے کو تین مماثل قوسین میں تقسیم کیا جائے اور نقاط تقسیمی پر مماس کھینچیں جائے جو دائرے کے گرد مساوی الاضلاع مثلث الاضلاع ہونگے

یہ طریقہ مندرجہ ذیل مثال سے واضح کیا گیا ہے

مثال: 3cm اداس کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے اور دائرے کا مساوی الاضلاع محاصر مثلث کنھچیں

معلوم: 3cm اداس کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے

مطلوب: دیئے گئے دائرے کا مساوی الاضلاع محاصر مثلث کھینچا



مراحل عمل:

(i) 3cm رداس کا دائرہ کنھیچیں جس کا مرکز O ہے

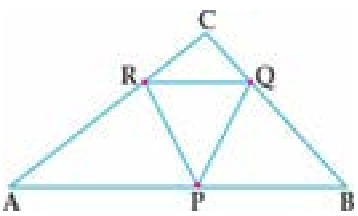
(ii) مرکز زاویے کو تین متماثل زاویوں میں تقسیم کرتی ہوئے دائرے کو تین متماثل قوسین $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ اور $\overset{\frown}{AC}$ میں تقسیم کریں۔

(iii) نقاط B,A اور C پر قائمہ زاویے بناتے ہوئے ان نقاط پر مماس کھینچیں۔

(iv) یہ مماس ایک دوسرے کو نقاط Q,P اور R پر قطع کرتے ہیں۔

اب PQR مطلوبہ مساوی الاضلاع مثلث ہے۔

29.2 (v) دیئے گئے مثلث میں مساوی الاضلاع محصور مثلث کھینچنا

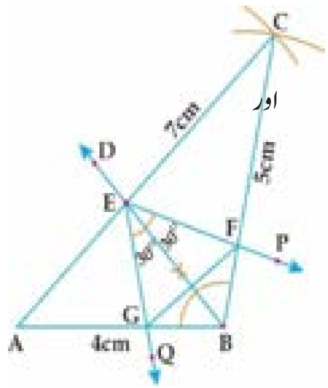


ہم جانتے ہیں اگر مساوی الاضلاع مثلث کے تمام راس کی دیئے گئے مثلث کے تمام راس کی دیئے گئے مثلث کے مختلف اضلاع پر واقع ہوتے ہیں تو یہ دیئے گئے ΔABC مثلث کا مساوی الاضلاع محصور مثلث PQR کہا جاتا ہے۔

مثال: ΔABC میں مساوی الاضلاع محصور مثلث کھینچیں جبکہ $m\overline{AB} = 4cm$، $m\overline{BC} = 5cm$ اور $m\overline{AC} = 7cm$

معلوم: ایک مثلث ABC جس میں $m\overline{AB} = 4cm$، $m\overline{BC} = 5cm$ اور $m\overline{AC} = 7cm$

مطلوب: ΔABC میں مساوی الاضلاع محصور مثلث کھینچنا



مراحل عمل:

(i) دیئے گئے مواد سے ΔABC بنائیں۔

(ii) $\angle B$ کا اندرونی ناصف $\overrightarrow{BD}$ کھینچیں جو مناسب زاویہ ہے (عموماً بڑے سے بڑا زاویہ)۔

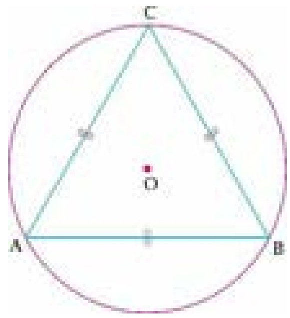
(iii) اندرونی ناصف $\overrightarrow{BD}$ نقطہ E پر $\overline{AC}$ کو قطع کرتا ہے۔

(iv) نقطہ E پر 30^o درجہ پیمائش دو زاویے BEP اور BEQ کھینچیں

(v) $\overrightarrow{EP}$ اور $\overrightarrow{EQ}$ بالترتیب $\overline{BC}$ اور $\overline{AB}$ کو نقاط F اور G پر قطع کرتے ہیں

(vi) $\overline{FG}$ کھینچیں

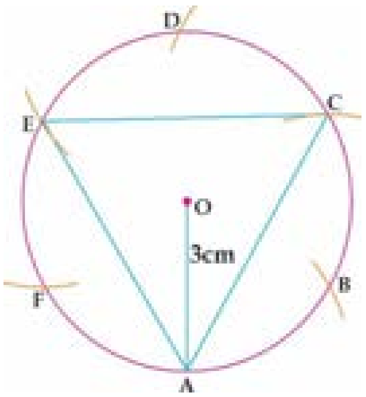
اب ΔABC اب کا مطلوبہ مساوی الاضلاع محصور مثلث EFG ہے



29.2 (vi) دائرے کا مساوی الاضلاع کے محصور مثلث بنانا

دائرے کا مساوی الاضلاع محصور مثلث

ایک مثلث دائرے کا مساوی الاضلاع محصور مثلث کہلاتا ہے اور اس کے تمام راس دائرے سے گزرتے ہیں۔ متعلقہ شکل میں مثلث دائرے کا مساوی الاضلاع محصور مثلث ABC ہے جس کا مرکز O ہے۔



مثال: محصور مثلث بنائیں اور جس کا رداس $3cm$ ہے

معلوم: $3cm$ رداس کا دائرہ جس کا مرکز O ہے

مطلوب: دیئے گئے دائرے کا مساوی الاضلاع محصور مثلث کھینچنا

مراحل عمل:

(i) $3cm$ رداس ایک دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے

(ii) دائرہ پر ایک نقطہ A لیں، نقطہ A سے شروع کریں اور دائرہ کو چھ متماثل حصوں میں B, C, D, E اور F پر تقسیم کریں۔

(iii) $\overline{AC}$، $\overline{AE}$ اور $\overline{CE}$ کھینچیں

اب AEC دیئے گئے دائرے کا مطلوبہ مساوی الاضلاع محصور مثلث ہے۔

مشق 29.2

.1 ΔABC بنائیں اور ہر صورت میں اس کے محاصر دائرے کھینچیں

(i) $m\angle A = 50°$ اور $m\overline{AC} = 6cm,\ m\overline{AB} = 5.5cm$

(ii) $m\overline{AC} = 5cm$ اور $m\overline{BC} = 4.5cm,\ m\overline{AB} = 6cm$

.2 ΔPQR بنائیں اور ہر صورت میں اس کے محصور دائرے کھینچیں

(i) $m\overline{RP} = 5.5cm$ اور $m\overline{QR} = 6.5cm,\ m\overline{PQ} = 5cm$

(ii) $m\angle Q = 50°$ اور $m\angle P = 60°,\ m\overline{PQ} = 6cm$

.3 ΔXYZ بنائیں اور ہر صورت میں Y کے مقابل جانبی دائرہ کھینچیں

(i) $m\angle Y = 30°$ اور $m\overline{YZ} = 5cm,\ m\overline{XY} = 4.5cm$

(ii) $m\overline{XZ} = 2.5cm$ اور $m\overline{YZ} = 6cm,\ m\overline{XY} = 5.5cm$

.4 3.5cm رداس کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے اور اس دائرے کا مساوی الاضلاع محاصر مثلث بنائیں۔

.5 ΔPQR میں مساوی الاضلاع محصور مثلث کھینچیں جبکہ
$m\overline{PR} = 8cm$ اور $m\overline{QR} = 5.5cm,\ m\overline{PQ} = 4.5cm$

.6 دائرے کا مساوی الاضلاع محصور مثلث بنائیں جس کا مرکز O اور رداس 3.8cm ہے

29.2 (vii) دیئے گئے دائرہ کا محاصر مربع بنانا:

دیئے گئے دائرے کے محاصر یا محصور مربع، مسدس یا کوئی اور کثیر الاضلاع بنانے سے پہلے ہمیں دائرے سے منسلک منظم کثیر الاضلاع سے تعلق مندرجہ ذیل مسائل ضرور جاننا چاہیے۔

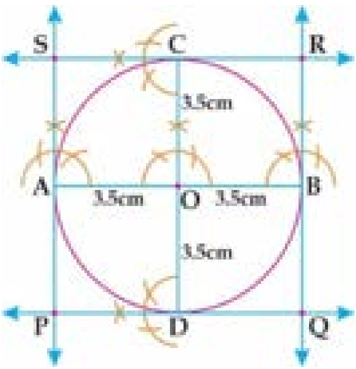
اگر دائرے کا محیط n برابر قوسیں میں تقسیم کیا جائے تو

(i) نقاطِ تقسیمی دائرے کے منظم محصور n- الاضلاع کے راس ہیں۔

(ii) ان نقاط سے گزرنے والے دائرے کے مماس دائرے کے محاصر منظم کثیر الاضلاع کی n- اطراف ہوتیں ہیں۔

اس کا مطلب ہے کہ اگر ہم دیئے ہوئے دائرے کے محاصر یا محصور مربع، منظم مخمس، منظم مسدس وغیرہ بناتے ہیں تو ہمیں دائری کو بالترتیب چار، پانچ، چھ وغیرہ برابر حصوں میں تقسیم کرنا پڑتا ہے۔

آئیں ہم مندرجہ ذیل مثال: کی مدد سے سیکھتے ہیں کہ کیسے دائرہ کا محاصر مربع بناتے ہیں۔



مثال: دائرے کا محاصر مربع بنائیں جس کا 3.5cm رداس اور مرکز O ہے۔

معلوم: دائرہ جس کا رداس 3.5cm اور مرکز O ہے۔

مطلوب: دائرے کا محاصر مربع بنانا

مراحل عمل:

(i) 3.5cm رداس کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے۔

(ii) ایک قطر $\overline{AB}$ کھینچیں

(iii) دوسرے قطر $\overline{CD}$ کھینچیں جو $\overline{AB}$ پر عمود ہے

(iv) نقاط A، B، C اور D پر مماس کھینچیں۔

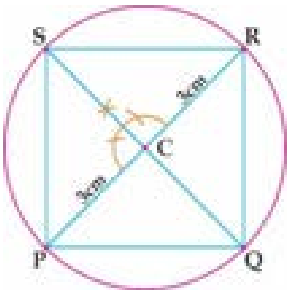
(v) یہ مماس ایک دوسرے کو نقاط P، Q، R اور S قطع کرتے ہیں دیئے گئے دائرے کا مطلوبہ محاصر مربع PQRS ہے۔

آئیں ہم مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے سیکھتے ہیں کہ کیسے دائرہ کا محصور مربع بناتے ہیں۔

مثال: دائرے کا محصور بنائیں جس کا رداس 3cm اور مرکز C ہے۔

معلوم: ایک دائرہ جس کا رداس 3cm اور مرکز C ہے۔

مطلوب: دائرے کا محصور مربع بنائیں۔



مراحل عمل:

(i) 3cm کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز C ہے

(ii) $\overline{PR}$ قطر کھینچیں

(iii) $\overline{QS}$ قطر کھینچیں جو $\overline{PR}$ پر عمود ہے۔

(iv) دائرے کو نقاط P، Q، R اور S پر چار برابر حصوں میں تقسیم کریں۔

(v) $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RS}$ اور $\overline{SP}$ کھینچیں یہ دائرے کا مطلوبہ محصور مربع PQRS ہے۔

29.2 (viii) دیئے گئے کا محاصر منظم مسدس بنانا

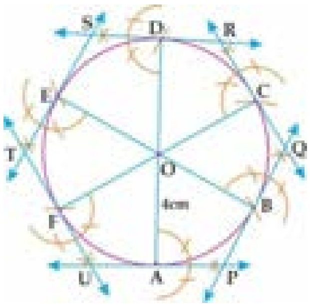
مندرجہ ذیل مثال کی مدد دیئے گئے دائرے کا محاصر منظم مسدس بنانے کے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال: 4cm رداس کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے۔دائرہ کا محاصر منظم مسدس بنائیں۔

معلوم: رداس کا دائرہ جس کا مرکز O ہے

مطلوب: دائرے کا محاصر منظم مسدس بنانا۔

مراحل عمل:



(i) 4cm رداس کا ایک دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے

(ii) دائرہ پر نقطہ A لیں۔

(iii) A سے شروع کریں اور $m\overline{OA}$ رداس کے برابر دیئے گئے دائرے پر نقاط A، B، C، D اور F پر چھ قوسیں لگائیں اور دائرے کو چھ برابر حصوں میں تقسیم کریں

(iv) اب نقاط پر مماس کھینچیں

(v) ایک مماس ایک دوسرے کو نقاط P، Q، R، S، T اور U پر قطع کرتے ہیں۔
دیئے گئے دائرہ کا PQRSTU مطلوبہ محاصر مسدس ہے۔

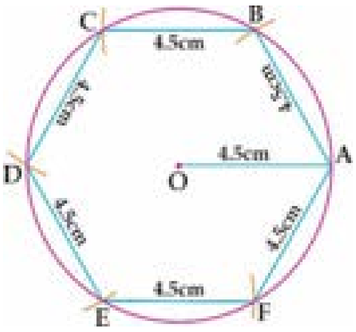
29.2 (ix) دیئے گئے دائرے کا محصور منظم مسدس بنانا

مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے محصور منظم مسدس بنانے کے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال: 4.5 cm رداس کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے۔دائرے کا محصور منظم مسدس بنانا

معلوم: 4.5 cm رداس کا دائرہ جس کا مرکز O ہے۔

مطلوب: دیئے گئے دائرے کا محصور منظم مسدس بنانا



مراحل عمل:

(i) O کو مرکز مان کر 4.5cm دائرہ کھینچیں

(ii) دائرے پر ایک نقطہ A لیں

(iii) A سے شروع کریں اور رداس $m\overline{AO}$ یا 4.5cm کے برابر دیئے گئے دائرے پر نقاط A، B، C، D، E اور F پر چھ قوسیں لگائیں دائرے کو چھ برابر حصوں میں تقسیم کریں

(iv) $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$، $\overline{DE}$، $\overline{EF}$ اور $\overline{AF}$ کھینچیں

یہ دیئے گئے دائرہ کا مطلوبہ محصور منظم مسدس ABCDEF ہے۔

مشق 29.3

1. 4.2cm رداس کا دائرہ جس کا مرکز C ہے اس کا محاصر مربع بنائیں
2. 3.6cm رداس کا دائرہ جس کا مرکز O ہے اس کا محصور مربع بنائیں
3. 4.8cm رداس کا دائرہ جس کا مرکز O ہے اس کا محاصر منظم مسدس بنائیں
4. 4.4cm رداس کا دائرہ جس کا مرکز C ہے اس کا محصور منظم مخمس بنائیں
5. 4.3cm کا دائرہ جس کا مرکز O ہے اس کا محصور منظم مخمس بنائیں (اشارہ: مرکز پر پانچ متماثل زاوے کھینچیں)

3. 29 دائرے کا مماس (Tangents to a circle):

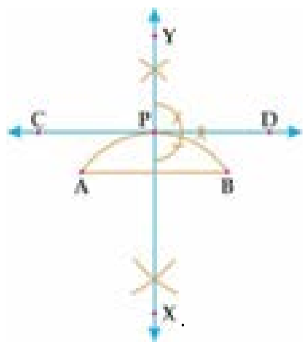
دائرے کا مماس ایک ایسا خط ہوتا ہے جو دائرے کسی ایک نقطے کو چھوتا ہے۔ دائرے کا مماس اور رداس قطع ہمیشہ کسی نقطے پر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔

29.3 (i) دیئے گئے نقطہ P سے مرکز کو استعمال کئے بغیر دی گئی قوس کا مماس کھینچا جب نقطہ

* قوس کا وسطی نقطہ ہو
* قوس کے آخری سرے پر واقع ہو
* قوس کے باہر واقع ہو

صورت 1: جب نقطہ P قوس کا وسطی نقطہ ہو

دیئے گئے نقطہ P سے مرکز کو استعمال کئے بغیر دی گئی قوس کا مماس کھینچا جب نقطہ P قوس کا وسطی نقطہ ہو مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے۔



مثال: ایک قوس AB لیں مرکز کو استعمال کئے بغیر $\overset{\frown}{AB}$ قوس کے وسطی نقطہ P سے قوس $\overset{\frown}{AB}$ کا مماس کھینچیں

معلوم: نقطہ P قوس $\overset{\frown}{AB}$ کا وسطی نقطہ ہے

مطلوب: مرکز کو استعمال کئے بغیر P سے $\overset{\frown}{AB}$ مماس کھینچیں

مراحل عمل:

(i) ایک قوس AB لیں

(ii) وتر AB کھینچیں

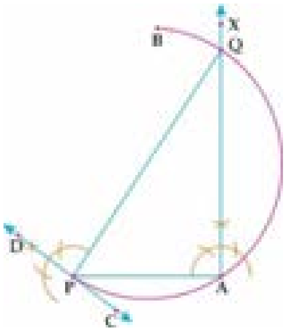
(iii) $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{XY}$ کھینچیں جو قوس کو نقطہ P پر کاٹتا ہے۔

(iii) $\overleftrightarrow{XY}$ پر $\overleftrightarrow{CD}$ ایک عمودی نقطہ P پر کھینچیں پس $\overleftrightarrow{CD}$ مطلوبہ مماس ہے۔

صورت 2: جب نقطہ P قوس کے آخری سرے پر واقع ہو

دیئے گئے نقطہ P سے مرکز کو استعمال کئے بغیر دی گئی قوس کا مماس کھینچا جب نقطہ P قوس کے آخری سرے پر واقع ہو۔
مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال: ایک قوس $\widehat{PAB}$ لیں قوس $\widehat{PAB}$ کے آخری سرے پر واقع نقطہ P سے مرکز کو استعمال کئے بغیر مماس کھینچیں۔



معلوم: نقطہ P، قوس $\widehat{PAB}$ کا آخری سرے پر واقع ہے

مطلوب: مرکز استعمال کئے بغیر قوس $\widehat{PAB}$ کے آخری سرے واقع نقطہ P سے مماس کھینچیں۔

مراحل عمل:

(i) کسی مناسب رداس کی قوس $\widehat{PAB}$ کھینچیں۔

(ii) وتر $\overline{AP}$ کھینچیں

(iii) نقطہ A پر $\overline{PA}$ کا عمود $\overrightarrow{AX}$ کھینچیں جو دی گئی قوس کو نقطہ Q پر کاٹتا ہے۔

(iv) قوس کا قطر $\overline{PQ}$ کھینچیں

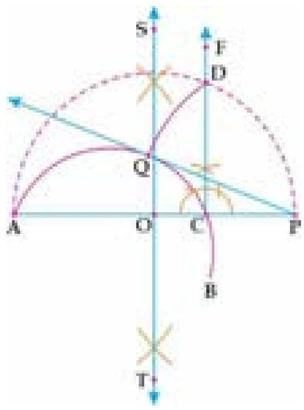
(v) نقطہ P پر $\overline{PQ}$ کا عمود $\overrightarrow{CD}$ کھینچیں

لہذا $\overleftrightarrow{CD}$ مطلوبہ مماس ہے۔

صورت 3: جب نقطہ P قوس کے باہر واقع ہے

دیئے گئے نقطہ P سے مرکز کو استعمال کئے گئے بغیر قوس کا مماس کھینچیں جب نقطہ P قوس کے باہر واقع ہے۔ مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال: قوس AB لیں۔ نقطہ P سے قوس AB کا مماس کھینچیں جو قوس کے باہر مرکز کو استعمال کئے بغیر ہے۔



معلوم: ایک نقطہ قوس $\widehat{AB}$ کے باہر

مطلوب: نقطہ P سے ایک قوس AB کا مماس کھینچنا مرکز کو استعمال کئے بغیر

مراحل عمل:

(i) اپنی پسند کی ایک قوس AB کھینچیں

(ii) قوس $\widehat{AB}$ کے باہر ایک نقطہ P لیں

(iii) $\overline{AP}$ کھینچیں جو دیئے گئے قوس کو C پر کاٹتا ہے۔

(iv) $\overline{AP}$ کا عمودی ناصف $\overline{ST}$ کھینچیں جو $\overline{AP}$ کو نقطہ O پر کاٹتا ہے

(v) O کو مرکزی مان کر اور رداس $m\overline{AO}$ یا $m\overline{OP}$ کے برابر نصف دائرہ کھینچیں۔

(vi) نقطہ C پر $\overline{AP}$ کا عمودی ناصف $\overleftarrow{CF}$ کھینچیں جو نصف دئرہ کو نقطہ D پر کاٹتا ہے۔

(vii) P کو مان کر اور $m\overline{PD}$ کے برابر رداس کی قوس کھینچیں جو $\widehat{AB}$ قوس کو نقطہ Q پر کاٹی ہے۔

(viii) $\overrightarrow{PQ}$ کھینچیں

پس $\overrightarrow{PQ}$ مطلوبہ مماس ہے۔

29.3 (ii) کسی نقطہ P سے دیئے گئے دائرے پر مماس کھینچنا جب P واقع ہو۔

- P محیط پر
- P دائرے سے باہر

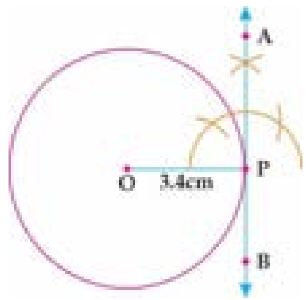
صورت ا : جب نقطہ P محیط پر واقع ہو

دیئے ہوئے دائرے پر نقطہ P سے مماس کھینچنا جب کہ نقطہ P محیط پر واقع ہے مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے

مثال: O کو مرکز مان کر 3.4cm رداس کا دائرہ کھینچیں
دائرے کے محیط P پر مماس کھینچیں

معلوم: 3.4cm رداس کا دائرہ جس کا مرکز O ہے اور نقطہ P اس کے محیط پر واقع ہے

مطلوب: نقطہ P سے دائرہ کا مماس کھینچنا



مراحل عمل:

(i) نقطہ O کو مرکز مان کر 3.4cm رداس کا دائرہ کھینچیں

(ii) اس کے محیط پر نقطہ P لیں

(ii) $\overline{OP}$ کھینچیں

(iii) نقطہ P سے $\overline{OP}$ پر عمود $\overleftrightarrow{AB}$ کھینچیں

پس $\overleftrightarrow{AB}$ مطلوبہ مماس ہے

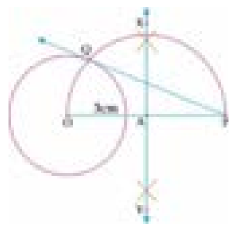
صورت 2 : جب نقطہ P دائرے سے باہر واقع ہے

نقطہ P سے دیئے ہوئے دائرہ کا مماس کھینچنا جو کہ دائرے باہر واقع ہے کو مندرجہ ذیل مثال سے کھینچنے کے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال: 3cm کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے۔دائرے کے باہر نقطہ P سے دائرے پر مماس کھینچیں۔

معلوم: 3cm رداس کا ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے۔دائرے کے باہر نقطہ P

مطلوب: دائرے کے باہر نقطہ P سے دائرے کا مماس کھینچنا۔



مراحل عمل:

(i) O کو مرکز مان کر 3cm کا دائرہ کھینچیں

(ii) دائرے کے باہر ایک نقطہ P لیں

(iii) $\overline{OP}$ کھینچیں

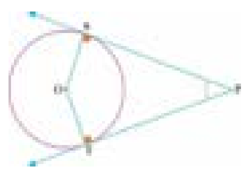
(iv) $\overline{OP}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{XY}$ کھینچیں جو اسے نقطہ A پر کاٹتا ہے

(v) A کو مرکز مان کر رداس $m\overline{AO}$ کے برابر نصف دائرہ کھینچیں جو دیئے گئے دائرے کو نقطہ Q پر کاٹتا ہے۔

(vi) $\overrightarrow{PQ}$ کھینچیں

پس $\overleftrightarrow{PQ}$ مطلوبہ مماس ہے

9.3 (iii) ایک دائرے کے دو مماس کھینچنا جو دیئے گئے زاویے پر باہم ملتے ہیں



غور کریں ایک دائرے کا مرکز O ہے۔ $\overrightarrow{PS}$ اور $\overrightarrow{PT}$ دائرے کے دو مماس ہیں

جبکہ مماس کے درمیان زاویہ $\angle P$ ہے۔

یہاں چونکہ $m\angle PSO = 90^\circ$ $(\because \overline{OS} \perp \overrightarrow{PS})$

اور چونکہ $m\angle PTO = 90^\circ$ $(\because \overline{OT} \perp \overrightarrow{PT})$

چوکور PSOT میں

یعنی
$$m\angle P + m\angle PSO + m\angle O + m\angle PTO = 360^\circ$$
$$m\angle P + 90^\circ + m\angle O + 90^\circ = 360^\circ$$
$$\Rightarrow m\angle P + m\angle O = 180^\circ$$
یعنی $\Rightarrow m\angle O = 180^\circ - m\angle P$

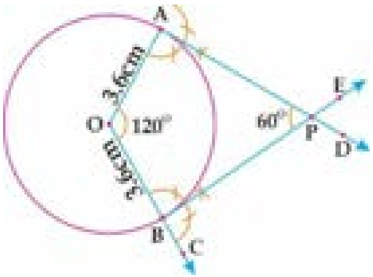
دائرے کا مرکزی زاویہ جو نقاط صلاپ کو ملاتا ہے۔ مماس کے درمیان زاویے کا سپلیمینٹ ہوتا ہے۔
اس حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے ہم ایک دائرے کے دو مماس بنائیں گے جو ایک دوسرے کو ایک دیئے گئے زاویہ پر ملینگے

مثال: 3.6cm رداس کا ایک دائرے پر دو مماس کھینچیں جس کا مرکز O ہے جو 60° کے زاویے پر باہم ملتے ہیں۔

معلوم: 3.6cm رداس کا ایک دائرہ جس مرکز O ہے جبکہ مماس کے درمیان زاویہ 60° ہے

مطلوب: دیئے گئے دائرے پر تو مماس کھینچنا جو باہم 60° پر ملتے ہیں

مراحل عمل:



(i) O کو مرکز مان کر 3.6cm رداس کا دائرہ کھینچیں

(ii) دائرے پر ایک نقطہ A لیں اور اُس O سے ملائیں

(iii) 120° کا زاویہ $\angle AOC$ کھینچیں (یعنی $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$)
یوں $\overline{OC}$ سے دیئے گئے دائرے کو نقطہ B پر کاٹتا ہے۔

(iv) نقطہ A پر $\overline{OA}$ کا عمود $\overrightarrow{AD}$ کھینچیں

(v) نقطہ B پر $\overline{OB}$ کا عمود $\overrightarrow{BE}$ کھینچیں

(vii) دونوں $\overrightarrow{AD}$ اور $\overrightarrow{BE}$ ایک دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہیں
پس $\overrightarrow{AP}$ اور $\overrightarrow{BP}$ مطلوبہ مماس ہیں جبکہ $m\angle P = 60^\circ$.

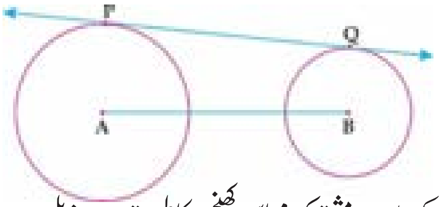
مشق 29.4

1. صغیرہ قوس $\widehat{PQ}$ لیں $\widehat{PQ}$ کے وسطی نقطے A سے مماس کھینچیں مرکز کو استعمال کئے بغیر
2. کبیرہ قوس $\widehat{PQR}$ لیں۔ $\widehat{PQR}$ کے آخری سرے پر واقع نقطہ Q سے مماس کھینچیں مرکز کو استعمال کیئے بغیر۔
3. صغیرہ قوس $\widehat{XY}$ لیں۔ $\widehat{XY}$ کے باہر نقطے Z سے مماس کھینچیں مرکز کو استعمال کئے بغیر۔
4. 2.9cm رداس کا دائرہ کھینچیں جس میں مرکز C دائرے کا نقطہ P سے دائرہ کا مماس کھینچیں۔
5. 3.2cm رداس کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز P ہے۔ نقطہ Q سے دائرے کا مماس کھینچیں جو کہ مرکز P سے 8cm کے فاصلے پر ہے۔
6. 3.3 رداس کا ایک دائرہ پر دو مماس کھینچیں جبکہ مرکز C ہے وہ باہم زاویے پر ملتے ہیں
(i) 50° (ii) 63°

29.3 (iv) کھینچنا

* دو مساوی دائرں کے راست مشترکہ مماس یا بیرونی مماس۔
* دو مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس یا نیرونی مماس کھینچنا راست۔

(a) دو مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس یا بیرونی مماس کھینچنا راست مشترکہ مماس
:(Direct Common Tangent)



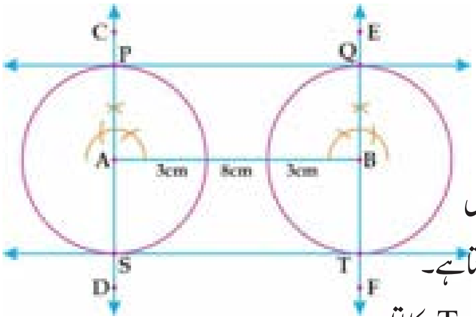
ایک مشترک مماس راست مشترکہ مماس کہہ تا ہے یا دو دائروں کا بیرونی مماس کہلاتا ہے۔ اگر یہ دیئے گئے دونوں دائروں کے مرکزوں کو ملانے والی قطعہ خط کو قطع نہیں کرتی ہیں

شکل میں $\overleftrightarrow{PQ}$ دونوں دائروں کے راست مشترکہ مماس ہیں جن کے مراکز A اور B ہیں۔ نوٹ: $\overleftrightarrow{PQ}$ قطع نہیں کرتا ہے $\overline{AB}$ کو۔ دو مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس کھینچیں کا طریقہ مندرذیل مثال سے واضح کیا گیا ہے۔

مثال: دو مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس کھینچیں جن کے مراکز نقطہ A اور B پر ہیں اور ہر ایک کارداس 3cm ہے اور $m\overline{AB} = 8cm$ ہے۔

معلوم: دو مساوی دائرے ہر ایک کا رداس 3cm اور مراکز A اور B ہیں اور $m\overline{AB} = 8cm$

مطلوب: دیئے گئے دائروں کے راست مشترکہ مماس کھینچنا



مراحل عمل:

(i) $\overline{AB}$ کا 8cm کھینچیں

(ii) A اور B کو مرکز مان کر 3cm رداس کے دو مساوی دائرے کھینچیں

(iii) نقطہ A پر $\overline{AB}$ پر عمود $\overleftrightarrow{CD}$ کھینچیں جو دائرے کو نقطہ P اور S پر کاٹتا ہے۔

(iv) نقطہ B پر $\overline{AB}$ پر عمود $\overleftrightarrow{EF}$ کھینچیں جو دوسرے دائرے کو نقطہ Q اور T پر کاٹتا ہے۔

(v) $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{SP}$ کھینچیں

(vi) پس $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{ST}$ دیئے گئے دائروں کے مطلوبہ راست مشترکہ مماس ہیں۔

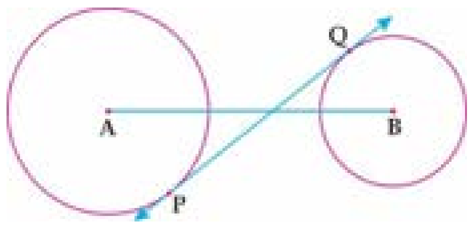
(b) دو مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس یا اندرونی مماس کھینچنا

معکوس مشترکہ مماس (Transverse Common Tangent):

ایک مشترکہ مماس معکوس مشترکہ مماس یا دو دائروں کا اندرونی مماس کہلاتا ہے اگر یہ دیئے گئے دائروں کے مراکز کو ملانے والی قطعہ خط کو قطع کرتا ہے۔

شکل میں PQ دو دیئے گئے دائروں کا معکوس مشترکہ مماس ہے جن کے مراکز A اور B ہیں۔

نوٹ: $\overleftrightarrow{PQ}$ قطع کرتا ہے $\overline{PB}$ کو۔ دو مساوی دائروں کا معکوس مشترکہ مماس کھینچے کا طریقہ مندرجہ ذیل مثال سے واضح کیا گیا ہے۔



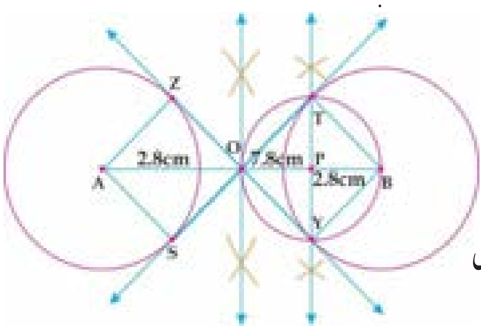
مثال: دو مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس کھینچیں جن کے رداس 2.8cm اور مراکز A اور B ہیں جبکہ $m\overline{AB} = 7.8cm$ ہے۔

طریقہ - I

معلوم: دو دائرے جن کے مراکز A اور B ہیں اور ہر ایک کا رداس 2.8cm جبکہ $m\overline{AB}=7.8cm$ ہے۔

مطلوب: دیئے گئے دائروں کے دو معکوس مشترکہ مماس کھینچنا۔

مراحل عمل:



(i) 7.8cm کا $\overline{AB}$ کھینچیں

(ii) A اور B کو مرکز مان کے 2.8cm رداس کا ہر دائرہ کھینچیں

(iii) $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف کھینچیں جو نقطہ O پر اس سے ملتا ہے

(iv) $\overline{OB}$ کا عمودی ناصف کھینچیں جو نقطہ P پر اس سے ملتا ہے

(v) نقطہ P کو مرکز مان کر اور $m\overline{OP}$ کے برابر رداس کا دائرہ کھینچیں جو مرکز B کے دائرے کو نقاط T اور Y پر کاٹتا ہے۔

(vi) $\overline{BT}$ اور $\overline{BY}$ کھینچیں

(vii) سیٹ اسکوائر کی مدد $\overline{AZ}||\overline{BY}$ اور $\overline{AS}||\overline{BT}$ کھینچیں

(viii) $\overleftrightarrow{ST}$ اور $\overleftrightarrow{YZ}$ کھینچیں

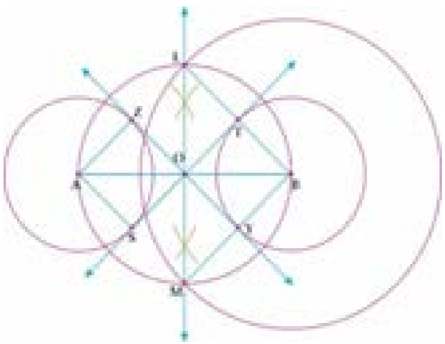
پس $\overleftrightarrow{ST}$ اور $\overleftrightarrow{YZ}$ مطلوبہ معکوس مشترکہ مماس ہیں

طریقہ - 2

معلوم: دو دائرے جن کے مراکز A اور B ہیں اور ہر ایک کا رداس 2.8cm ہے جبکہ $m\overline{AB} = 7.8cm$ ہے۔

مطلوب: دیئے گئے دائروں کے دو معکوس مشترکہ مماس کھینچنا۔

مراحل عمل:



(i) 7.8cm کا $\overline{AB}$ کھینچیں

(ii) A اور B کو مرکز مان کر 2.8cm رداس کا ہر دائرہ کھینچیں

(iii) $\overline{AB}$ کو نقطہ O پر دو برابر حصوں میں تقسیم کریں۔ O کو مرکز مان کر $m\overline{AO}$ کے برابر رداس کا ایک دائرہ کھینچیں۔

(iv) B کو مرکز مان کر اور 5.6cm (2.8cm کا دوگنا) رداس کا دائرہ کھینچیں جو پچھلے دائرے جس کا مرکز O ہے اُس کو نقطہ L اور M پر کاٹتا ہے۔

(v) $\overline{BL}$ اور $\overline{BM}$ کھینچیں جو چھوٹے دائرہ جس کا مرکز B ہے کو بالترتیب نقطہ T اور Y پر کاٹتا ہے۔

(vi) سیٹ اسکوئر کی مدد سے $\overline{AS}||\overline{BT}$ اور $\overline{AZ}||\overline{BY}$ کھینچیں

(vii) $\overleftrightarrow{ST}$ اور $\overleftrightarrow{YZ}$ کھینچیں۔

پس $\overleftrightarrow{ST}$ اور $\overleftrightarrow{YZ}$ مطلوبہ معکوس مشترکہ مماس ہیں

29.3 (v) کھینچنا

* دو غیر مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس یا بیرونی مماس۔
* دو غیر مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس یا اندرونی مماس۔

(a) دو غیر مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس یا بیرونی مماس کھینچنا۔

مندرجہ ذیل مثال دو غیر مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس کھینچنا کا مناسب طریقہ ہے۔

مثال: 3.4cm اور 2.1cm رداس کے دیئے گئے دائروں کے راست مشترکہ مماس کھینچیں جبکہ ان کے مراکز کے درمیان فاصلہ 7.5cm ہے۔

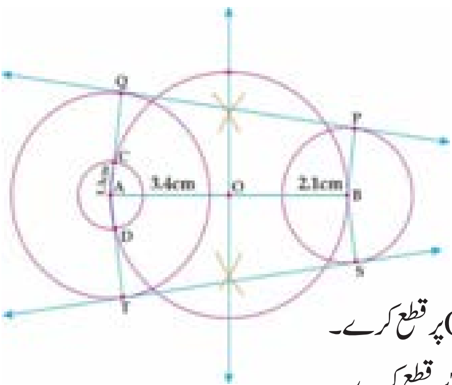
طریقہ - 1

معلوم: A اور B مرکز کے دو دائرے جن کے رداس بالترتیب 3.4cm اور 2.1cm ہیں جبکہ $m\overline{AB}=7.5cm$

مطلوب: دیئے گئے دائروں کے راست مشترکہ مماس کھینچنا۔

مراحل عمل:

(i) 7.5cm کا $\overline{AB}$ کھینچیں۔



(ii) A اور B کو مرکز مان کر بالترتیب 3.4 سنٹی میٹر اور 2.1 سنٹی میٹر رداس کے دو دائرے کھینچیں۔

(iii) $\overline{AB}$ کو نقطہ O پر دو برابر حصوں میں تقسیم کریں۔ O کو مرکز مان کر $m\overline{AO}$ کے برابر رداس کا دائرہ کھینچیں۔

(iv) بڑے دائرے کا مرکز کو مرکز مان کر 1.3 سنٹی میٹر (3.4-2.1=1.3) رداس کا ایک دائرہ کھینچیں جو پچھلے دائرے کو نقاط C اور D پر کاٹتا ہے۔

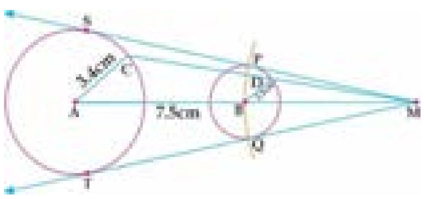
(v) $\overline{AB}$ کھینچیں اور اس قدر بڑھائیں کہ دیئے گئے ہم مرکز دائرے کو نقطہ O پر قطع کرے۔

(vi) $\overline{AO}$ کھینچیں اور اس قدر بڑھائیں کہ دیئے گئے ہم مرکز دائرے کو نقطہ T پر قطع کرے۔

(vii) سیٹ اسکوائر کی مدد سے $\overline{AQ} \parallel \overline{BP}$ کھینچیں اور اس قدر بڑھائیں کہ دیئے گئے ہم مرکز دائرے کو نقطہ O پر قطع کرے۔ اور $\overline{AT} \parallel \overline{BS}$ کھینچیں۔

(viii) $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{ST}$ کھینچیں۔

اب $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{ST}$ مطلوبہ راست مشترکہ مماس ہیں۔



طریقہ - 2

معلوم: A اور B مرکز کے دو دائرے جن کے رداس بالترتیب 3.4cm اور 2.1cm ہیں جبکہ $m\overline{AB} = 7.5cm$ ۔

مطلوب: دیئے گئے دائروں کے راست مشترکہ مماس کھینچنا۔

مراحلِ عمل:

(i) 7.5cm کا $\overline{AB}$ کھینچیں۔

(ii) A اور B کو مرکز مان کر بالترتیب 3.4cm اور 2.1cm رداس کے دائرے کھینچیں۔

(iii) دائرہ جس کا مرکز A پر نقطہ C لیں اور $\overline{AC}$ کھینچیں

(iv) سیٹ اسکوائر کی مدد سے $\overline{BD}||\overline{AC}$ کھینچیں۔

(v) $\overline{CD}$ کھینچیں اور اسے D کے آگے تک بڑھائیں۔

(vi) $\overline{AB}$ بڑھائیں جو $\overleftrightarrow{CD}$ کو نقطہ M پر قطع کرے۔

(vii) M کو مرکز مان کر اور رداس mMB کے برابر ایک قوس کھینچیں۔ جو دائرہ جس کا مرکز B کو نقاط P اور Q پر کاٹتی ہے۔

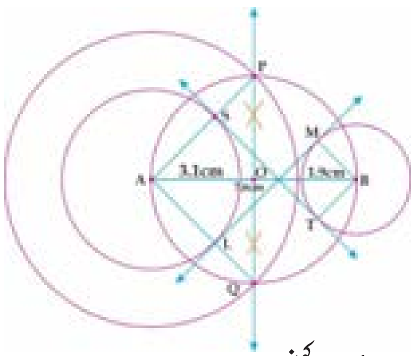
(viii) $\overline{MP}$ کھینچیں اور اسے اس قدر بڑھائیں کہ دوسرے دائرے پر نقطہ S پر ملے.

(ix) $\overline{MQ}$ کھینچیں اور اسے اس قدر بڑھائیں کہ دوسرے دائرے پر نقطہ T پر ملے۔

پس $\overleftrightarrow{SP}$ اور $\overleftrightarrow{TQ}$ دیئے گئے دائروں کے مطلوبہ راست مشترکہ مماس ہیں۔

(b) دو غیر مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس یا اندرونی مماس کھینچنا۔

مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے ہم دو غیر مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس کھینچنے کے طریقے کی وضاحت کرتے ہیں۔



مثال: دو دائرے کے معکوس مشترکہ مماس کھینچیں جن کے مرکز A اور B رداس 3.1cm اور 1.9cm ہیں جبکہ ان کے مراکز کے درمیان فاصلہ 7.6cm ہے۔

معلوم: دو دائرے جن کے مراکز A اور B بالترتیب رداس 3.1cm اور 1.9cm ہیں اور $m\overline{AB}=7.6cm$

مطلوب: دیئے گئے دائروں کے معکوس مشترکہ مماس کھینچنا۔

مراحلِ عمل:

(i) 7.6cm کے $\overline{AB}$ کھینچیں۔

(ii) A اور B کو مرکز مان کر بالترتیب 3.1cm اور 1.9cm رداس کے دو دائرے کھینچیں۔

(iii) نقطہ O پر $\overline{AB}$ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کریں اور O کو مرکز مان کر $m\overline{OA}$ کے برابر رداس کا ایک دائرہ بنائیں۔

(iv) A کو مرکز مان (سب سے بڑے دائرے کا مرکز) اور 5cm (3.1cm+1.9cm=5cm) رداس کا دائرہ کھینچیں جو پچھلی دائرے کو نقاط P اور Q پر کاٹتا ہے۔

(v) $\overline{AP}$ کھینچیں جو سب سے بڑے دائرے کو نقطہ S پر کاٹتا ہے۔

(vi) $\overline{AQ}$ کھینچیں جو سب سے بڑڈے دائرے کو نقطہ L پر کاٹتا ہے۔

(vii) $\overline{BT}\|\overline{AP}$ اور $\overline{BM}\|\overline{AQ}$ کھینچیں۔

(viii) $\overleftrightarrow{ST}$ اور $\overleftrightarrow{LM}$ کھینچیں

پس $\overleftrightarrow{ST}$ اور $\overleftrightarrow{LM}$ مطلوبہ معکوس مشترکہ مماس ہیں

(vi) 29.3

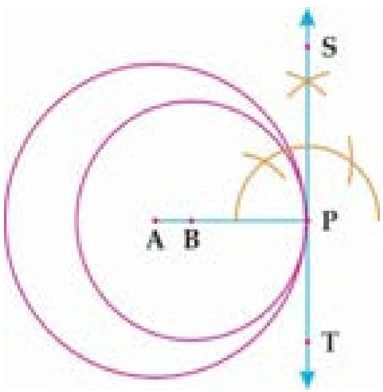
* دو غیر مساوی چھوتے ہوئے دائروں کا مماس کھینچنا۔
* دو غیر مساوی قطع کرتے ہوئے دائروں کا مماس کھینچنا۔

(a) دو غیر مساوی چھوتے ہوئے دائروں کا مماس کھینچنا۔

دو صورتیں ہیں۔

صورت نمبر 1: جب دائرے اندرونی طور پر چھوتے ہیں

طریقے کی وضاحت مندرجہ ذیل مثال سے کی گئی ہے۔



مثال: 3 سنٹی میٹر اور 2 سنٹی میٹر رداس کے دو غیر مساوی دائریں کا مماس کھینچیں جن مراکز بالترتیب A اور B ہیں۔ جبکہ دائرے کے اندرونی طور پر چھوتے ہیں۔

معلوم: مرکز A اور B کے دو دائرے جن کے رداس بالترتیب 3 سنٹی میٹر اور 2 سنٹی میٹر ہیں جو اندرونی طور پر چھوتے ہیں۔

مطلوب: ان دو دائروں کا مماس کھینچنا۔

مراحل عمل: (i) نقطہ A کو مرکز مان کر 3 سنٹی میٹر کے بڑا دائرہ کھینچیں۔

(ii) دائرے پر کوئی نقطہ P لیں اور $\overline{AP}$ کھینچیں۔

(iii) $\overline{AP}$ پر نقطہ P سے 2 سنٹی میٹر کے فاصلہ پر ایک نقطہ B لیں۔

(iv) نقطہ B کو مرکز مان کر 2 سنٹی میٹر رداس کا دائرہ کھینچیں جو بڑے دائرے کو نقطہ P پر چھوتا ہے۔

(v) $\overline{AP}$ پر ایک عمود $\overleftrightarrow{ST}$ نقطہ P پر کھینچیں۔

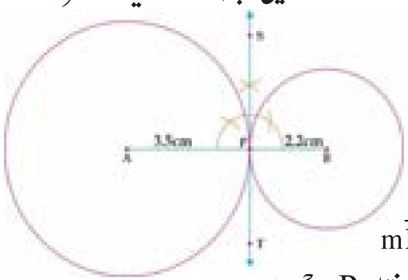
پس $\overleftrightarrow{ST}$ مطلوبہ مماس ہے۔

صورت 2: جب دائرے بیرونی طور پر چھوتے ہیں

طریقے کی وضاحت مندرجہ ذیل مثال سے کی گئی ہے۔

مثال: 3.5 سنٹی میٹر اور 2.2 سنٹی میٹر رداس کے دو غیر مساوی دائروں کا مماس کھینچیں جن کے مرکز بالترتیب A اور B ہیں دونوں دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور چھوتے ہیں

معلوم: 3.5 سنٹی میٹر اور 2.2 سنٹی میٹر رداس کے دو دائرے جن کے مرکز A اور B ہیں جبکہ دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں۔



مطلوب: ان دو دائروں کا مماس کھینچنا۔

مراحل عمل:

(i) A, B کو مرکز مان کر 3.5 سنٹی میٹر کا دائرہ کھینچیں۔

(ii) دائرے پر نقطہ P لیں۔

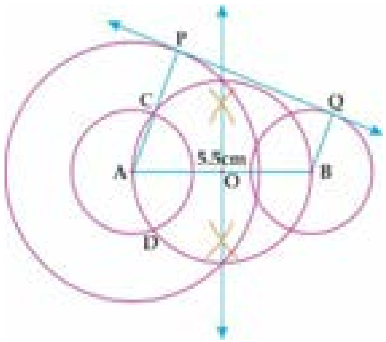
(iii) $\overline{AP}$ کھینچیں اور اسے نقطہ B تک بڑھائیں اس طرح سنٹی میٹر $m\overline{PB}=2.2$

(iv) P کو مرکز مان کر 2.2 سنٹی میٹر رداس کی ایک دائرہ کھینچیں جو پہلے دائرے کو نقطہ P پر چھوتا ہے۔

(v) $\overline{AP}$ پر نقطہ P پر طور $\overleftrightarrow{ST}$ کھینچیں.

پس $\overleftrightarrow{ST}$ مطلوبہ مماس ہے۔

(b) دو غیر مساوی قطع کرتے ہوئے دائروں کا مماس کھینچنا۔



طریقے کی وضاحت مندرجہ ذیل مثال سے کی گئی ہے۔

مثال: 4 سنٹی میٹر اور 2 سنٹی میٹر رداس کے دو غیر مساوی قطع کرتے ہوئے دائرے کا مماس کھینچنا جن کے مرکز بالترتیب A اور B ہیں اس طرح کہ $mAB = 5.5$ سنٹی میٹر

معلوم: 4 سنٹی میٹر اور 2 سنٹی میٹر رداس کے دو غیر مساوی قطع کرتے ہوئے دائرے جن کے مراکز بالترتیب A اور B ہیں اور $m\overline{AB} = 5.5$ سنٹی میٹر

مطلوب: دونوں دائروں کا مماس کھینچنا۔

مراحل عمل:

(i) 5.5 سنٹی میٹر کا $\overline{AB}$ کھینچیں۔

(ii) A اور B کو مرکز مان کر بالترتیب 4 سنٹی میٹر اور 2 سنٹی میٹر رداس کے دائرے کھینچیں

(iii) A کو مرکز مان کر (بڑے دائرے کا مرکز) 2 سنٹی میٹر (2 سنٹی میٹر - 4 سنٹی میٹر = 2 سنٹی میٹر) رداس کا دائرہ کھینچیں۔

(iv) $\overline{AB}$ کو نقطہ O پر دو برابر حصوں میں تقسیم کریں۔ O کو مرکز مان کر $m\overline{AO}$ کے برابر رداس کا دائرہ کھینچیں جو مرکز A کے چھوٹے دائرے کو نقطہ C اور D پر کاٹتا ہے

(v) $\overline{AC}$ کھینچیں اور اسے اس قدر بڑھائیں کہ یہ بڑے باہم مرکز دائرے کو جس کا مرکز A ہے اور نقطہ P پر ملے۔

(vi) سیٹ اسکوائر کی مدد سے $\overline{BQ} \| \overline{AP}$ کھینچیں۔

(vii) $\overline{PQ}$ کھینچیں۔ پس $\overline{PQ}$ مطلوبہ مماس ہے۔

29.3 (vii) دائرہ کھینچنا جو چھوتا ہو۔

* دیے گئے زاویہ کے دونوں بازوں کو
* دو متقاطع خطوط کو اور ان کے درمیاں دیے گئے نقطہ میں گذرے
* تین قاطع خطوط کو

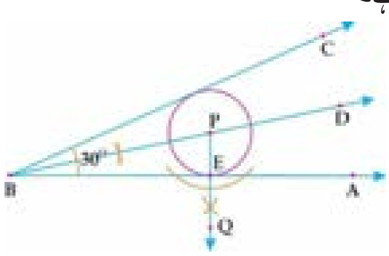
(a) دائرہ کھینچنا جو دیے کے زاویہ کے دونوں بازوں کو چھوتا ہے

مندرہ ذیل دی گئی مثال سے دائرہ کھینچنے کی وضاحت کرتے ہیں جو دیئے گئے زاویہ کے دونوں بازوں کو چھوتا ہے۔

مثال: دائرہ کھینچنا جو 30° کی پیائش کا زاویہ ABC کے دونوں بازوں چھوتا ہے۔

معلوم: 30° کی پیائش کا زاویہ ABC

مطلوب: دائرہ کھینچنا جو زاویے کے دونوں بازوں کو چھوتا ہے



مراحل عمل:

(i) 30° کا زاویہ ABC کھینچیں

(ii) ABC کے پر کوئی نقطہ $\overrightarrow{BD}$ لیں

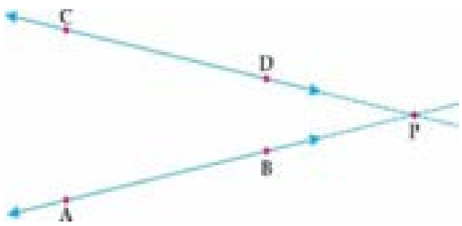
(iii) $\overrightarrow{BD}$ پر کوئی نقطہ P لیں

(iv) نقطہ P سے $\overrightarrow{BA}$، کھینچیں جو اسے نقطہ E پر کاٹتا ہے۔

(v) P کو مرکز مان کر $m\overline{PE}$ کے برابر رداس کا دائرہ کھینچیں جو $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ کو چھوتا ہے۔

یہ دائرہ مطلوبہ دائرہ ہے۔

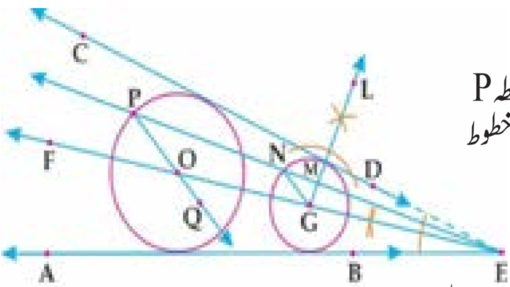
(b) دائرہ کھینچنا جو دو ہم نقطہ خطوط کو چھوتے اور ان کے درمیان دیئے گئے نقطے سے گذرے۔



ہم نقطہ خطوط/ملاتی خطوط (Converging Lines):

دو یا دو سے زیادہ خطوط جو ایک دوسرے کے قریب سے قریب تر ہوتے جاتے ہیں اور آخر کار ایک نقطے پر مل جاتے ہیں ہم نقطہ خطوط/ ملاتی خطوط کہلاتے ہیں۔ متعلقہ شکل میں دو خطوط $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ ہم نقطہ خطوط ہیں اور وہ آخر میں نقطہ P پر ملتے ہیں۔

مثال: ایک دائرہ کھینچیں جو ہم نقطہ خطوط ملاتی خطوط کے درمیاں نقطہ P سے گذرتا ہے اور دونوں خطوط کو چھوتا ہے۔



معلوم: دو ہم نقطہ خطوط $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ اور ان دونوں کے درمیان نقطہ P

مطلوب: ایک دائرہ کھینچیں جو نقطہ P سے گذرتا ہے اور دی گئی ہم نقطہ خطوط ملاتی خطوط کو چھوتا ہے۔

مراحل عمل:

(i) دو ہم نقطہ خطوط/ملاتی خطوط $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کھینچیں جو نقطہ E پر ملتے ہیں

(ii) ان خطوط کے درمیان کوئی ایک نقطہ P لیں

(iii) $\angle E$ کا اندرونی ناصف $\overline{EF}$ کھینچیں

(iv) $\overline{EF}$ پر کوئی نقطہ G لیں

(v) نقطہ G سے $\overline{EC}$ پر عمود نقطہ M ملتا ہوا ایک عمود $\overline{GC}$ کھینچیں۔

(vi) G کو مرکز مان کر اور $m\overline{GM}$ کے برابر رداس کا دائرہ کھینچیں جو دونوں ہم نقطہ خطوط/ملا قاتی خطوط کو چھوتا ہے

(vii) $\overline{EP}$ کھینچیں جو اس دائرے کو نقطہ N پر کاٹتا ہے

(viii) $\overline{NG}$ کھینچیں اور $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overline{NG}$ بھی کھینچیں

(ix) $\overline{PQ}$ نقطہ O پر $\overline{EF}$ کو کاٹتا ہے

(x) O کو مرکز مان کر ایک دائرہ $m\overline{OP}$ کے برابر رداس کا کھینچیں جو نقطہ P سے گذرتا ہے اور دو ہم نقطہ خطوط کو چھوتا ہے۔

پس یہ مطلوبہ دائرہ ہے۔

(c) ایک دائرہ کھینچنا جو تین ہم نقطہ خطوط/ملاتی خطوط کو چھوتا ہے۔

ایک مستوی میں تین ہم نقطہ خطوط کو چھوتا ہوا دائرہ کھینچنا نہ ممکن ہے تاہم یہ خلا میں ممکن ہے جو اس کتاب کا مقصد نہیں ہے۔

مشق 29.5

.1 دو مساوی دائرے کھینچیں ہر ایک کا رداس 3.3 سنٹی میٹر ہے اور مرکز A اور B ہیں جبکہ $m\overline{AB} = 7.8$ سنٹی میٹر

(a) ان دائروں کے راست مشترکہ مماس کھینچیں

(b) ان دائروں کے معکوس مشترکہ مماس کھینچیں

.2 3.3 سنٹی میٹر اور 2.1 سنٹی میٹر دو غیر مساوی دائرے کھینچیں جس کے مرکز بالترتیب A اور B ہیں جبکہ $m\overline{AB}=8$ سنٹی میٹر ہے

(a) ان دائروں کے راست مشترکہ مماس کھینچیں۔

(b) ان دائروں کے معکوس مشترکہ مماس کھینچیں۔

.3 3.8 سنٹی میٹر اور 2.2 سنٹی میٹر رداس کے دو غیر مساوی دائروں کا مماس کھینچیں جن کے مرکز بالترتیب A اور B ہیں جبکہ

(i) دائرے اندرونی طور پر چھوتے ہیں

(ii) دائرے بیرونی طور پر چھوتے ہیں

(iii) ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوئے دائرے اور سنٹی میٹر $m\overline{AB}=5.6$

.4 دائرہ کھینچیں جو زاویے کے دونوں بازوں کو چھوتا ہے زاویے کی پیمائش (i) 35° (ii) 40°

.5 دائرہ کھینچیں جو ہم نقطہ خطوں / ملاقاتی خطوط PQ اور ST کے درمیان نقطہ M سے گذرتا ہے اور جبکہ دونوں خطوط کو چھوتا بھی ہے۔

اعادہ مشق 29

درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں

(i) غیر متوازی ______________ کا عمودی ناصف دائرے کے مرکز پر قطع کرتا ہے۔

(a) رداس قطعات (b) وتر (c) مماس (d) ان میں کوئی نہیں

(ii) ______________ دائرے ایک نقطے سے گذر سکتے ہیں

(a) ایک (b) دو (c) تین (d) لا متناہی

(iii) ______________ دائرے غیر ہم خط نقاط سے گذر سکتے ہیں

(a) ایک (b) دو (c) تین (d) لا متناہی

(iv) منظم کثیر الاضلاع کے ______________ زاویے پیمائش میں برابر ہوتے ہیں۔

(a) اندرونی (b) بیرونی (c) a اور b دونوں (d) ان میں کوئی نہیں

(v) منظم مسدس کا ہر اندرونی زاویہ پیمائش میں ______________ برابر ہوتا ہے۔

(a) 90° (b) 108° (c) 120° (d) 135°

(vi) ایک دائرہ مثلث کی تمام اطراف کو چھوتا ہے ______________ کہلاتا ہے

(a) محاصر (b) محور (c) جانبی (d) تین دائرے (Tricircle)

(vii) ایک جو دائرے کی ایک بیرونی ضلع کو چھوتا ہے اور بڑھی ہوئی اندرونی اضلاع کو چھوتا ہے ______________ کہلاتا ہے۔

(a) جانبی (b) محاصر (c) محور (d) تین دائرے (Tricircle)

(viii) محور دائرے کا مرکز ______________ کہلاتا ہے

(a) جانبی مرکز (b) محور مرکز (c) مرکز نما (d) عمودی مرکز

(ix) ایک مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ایک دوسرے کو ______________ پر قطع کرتے ہیں

(a) محصور مرکز (b) جانبی مرکز (c) مرکز نما (d) محاصر مرکز

(x) ایک مثلث کے زاویوں کا اندرونی ناصف کا نقطہ قطع ______________ کہلاتا ہے

(a) جانبی مرکز (b) محاصر مرکز (c) مرکز نما (d) محصور مرکز

(xi) اگر دائرے کا محصور منظم مسدس ہے تو مسدس کے ہر ضلع کی لمبائی دائرے کے رداس کے ________ ہے

(a) $<$ (b) $>$ (c) $=$ (d) $\leq$

(xii) مماس اور رداسی قطعہ کے درمیان نقط ملاپ پر زاویہ ______________ ہوگا

(a) قائمہ (b) منفرجہ (c) حادہ (d) عکسی زاویہ

(xiii) دائرے کا مرکزی زاویہ جو نقاط ملاپ کو ملاتا ہے۔ مماس کے درمیانی زاویے ______________ ہوتا ہے

(a) مربع (b) مکعب (c) سپلیمینٹ (d) کمپلیمینٹ

(xiv) ______________ مشترکہ مماس دائروں کے مرکز کو ملانے والی قطعہ خط کو قطع نہیں کرتے ہیں

(a) اندرونہ (b) معکوس (c) براہ راست (d) عمودی

(xv) دو مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس ______________ ہوتے ہیں

(a) متقاطع (b) منطبق (c) برابر (d) متوازی

(xvi) مساوی دائروں کے ______________ مشترکہ مماس دائروں کے مراکز کو ملانے والے قطعہ خط وسطی نقطے پر قطع کرتے ہیں۔

(a) راست (b) معکوس (c) بیرونہ (d) متوازی

(xvii) اگر 5 سنٹی میٹر اور 2 سنٹی میٹر رداس کے دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوٹے ہیں تو ان کے مراکز کے درمیان فاصلہ ______________ ہوتا ہے

(a) 5 سنٹی میٹر (b) 10 سنٹی میٹر (c) 3 سنٹی میٹر (d) 7 سنٹی میٹر

(xviii) اگر 5 سنٹی میٹر اور 2 سنٹی میٹر رداس کے دو دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر چھوٹے ہیں تو ان کے مراکز کے درمیان فاصلہ ______________ ہوتا ہے

(a) 5 سنٹی میٹر (b) 10 سنٹی میٹر (c) 3 سنٹی میٹر (d) 7 سنٹی میٹر

(xix) دو یا دو سے زیادہ باہم نقطہ خطوط ہمیشہ ایک دوسرے کو قطع ______________ کرتیں ہیں

(a) ایک نقطہ (b) دو نقاط (c) ایک سے زیادہ نقطے (d) ان میں سے کوئی نہیں

(xx) تین یا تین سے زیادہ بند اطراف شکل ______________ کہلاتی ہے

(a) مخمس (b) مسدس (c) صبع (d) کثیر الاضلاع

خلاصہ

- دائرے کا مرکز متعین کیا جا سکتا ہے دو غیر متوازی وتروں کے عمودی ناصف کھینچ کر جو ایک دوسرے کو مرکز پر ملاتے ہیں
- تین غیر ہم خط نقاط سے صرف ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہے
- مرکز معلوم کئے بغیر ایک دائرہ مکمل کیا جا سکتا ہے۔ منظم اکثیر الاضلاع کی مدد سے جب ایک دی گئی ہو محاصر دائرہ ہمیشہ کسی اکثر اضلاع کے تمام راسوں سے گذرتا ہے
- مثلث کا محصور مثلث ہمیشہ تمام اضلاع کو چھوتا ہے
- ایک مثلث کا جانبی دائرہ مثلث کے ایک ضلع بیرونی طور پر چھوتا ہے اور دو بڑھائے گئے اضلاع کو اندرونی طور پر ہے
- ایک مثلث کے تین جانبی دائرے بنائے جا سکتے ہیں
- مماس ایک خط جو دائرے کو صرف ایک نقطے کو چھوتا ہے
- قاطع ہمیشہ دائرے کو دو نقاط پر کاٹتا ہے
- دائرے کا مماس ہمیشہ رداسی قطعہ پر نقطہ ملاپ پر عمود ہوتا ہے
- محیط کے ایک نقطے سے صرف اور صرف دائرے کا ایک مماس کھینچا جا سکتا ہے
- دائرے کے باہر کسی نقطے سے صرف اور صرف دائرے کے دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں
- دائرے کے مرکزی زاویہ جو نقاط ملاپ کو ملاتا ہے مماس کے درمیاں زاوے کا سپلیمینٹ ہوتا ہے
- اگر ایک خط ایک سے زیادہ دائروں پر مماس ہے یہ مشترکہ مماس کہلاتا ہے
- راست مشترکہ مماس دیئے گئے دو دائروں کے مراکز کو ملانے والے قطعہ خط کو قطع نہیں کرتا ہے
- معکوس مشترکہ مماس دیئے گئے دو دائروں کے مراکز کو ملانے والے قطعہ خط ہمیشہ قطع کرتا ہے
- اگر دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں تو ان کے مراکز کے درمیاں فاصلہ ان کے رداسوں مجموعہ کے برابر ہوتا ہے
- اگر دو دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر چھوتے ہیں تو ان کے مراکز کے درمیان فاصلہ ان کے رداسوں درمیان فرق کے برابر ہوتا ہے
- باہم نقطہ خطوط ایک دوسرے کے قریب سے قریب تر سوتے ہو جاتے ہیں اور آخر کار ایک نقطہ پر مل جاتے ہیں۔

30
یونٹ نمبر

تکونیات کا تعارف

PYTHAGORAS THEOREM

طلباء کے آموزشی حاصلات

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- سکسا جسیمل (Senagesined System) میں زاویے کی پیمائش کر سکیں (ڈگری، منٹ اور سیکنڈ)
- زاویے کو "D°M' S سے کسر اعشاریہ (دو درجہ اعشاریہ تک) میں اور کسر اعشاریہ سے "D°M' S تبدیل کر سکیں۔
- ریڈین کی تعریف (دائروی نظام میں ایک زاویے کی پیمائش) اور ریڈین اور ڈگری پیمائش کے درمیان تعلق کو ثابت کر سکیں۔
- $l = r\Theta$ ثابت کر سکیں۔ جبکہ r دائرے کا رداس۔ l دائروی قوس کی لمبائی اور Θ مرکزی زاویہ جس کی پیمائش ریڈین میں ہو۔
- قطاع دائرے کا رقبہ $\frac{1}{2}l\,\theta$ یا $\frac{1}{2}r^2\theta$ ثابت کر سکیں۔
- تعریف اور پہچان کر سکیں۔
  - عمومی زاویہ (ہم بازو زاویے)
  - زاویے کی معیاری صورت
- ربعات (Quadrants) اور ابعی زاویوں (Auadrental Angle) کی پہچان کر سکیں۔
- ایک اکائی دائرے کی مدد سے تکونیاتی نسبتوں اور ان کی معکوس نسبتوں کی تعریف کر سکیں۔
- تکونیاتی نسبتوں °30، °45 اور °60 کی قیمتوں کو دہرا سکیں۔
- مختلف ربعوں میں تکونیاتی نسبتوں کی علامات کی پہچان کر سکیں۔
- اگر ایک تکونیاتی نسبت دی گئی ہو تو باقی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کر سکیں۔
- تکونیاتی نسبتوں اور کی قیمتیں معلوم کر سکیں۔
- تکونیاتی متطابقات (Trigonometric Identities) کو ثابت کر سکیں اور انہیں مختلف تکونیاتی روابط (Relationship) کو ثابت کرنے کے لیے استعمال کر سکیں۔
- زاویہ صعود اور زاویہ نزول معلوم کر سکیں۔
- زاویہ صعود اور زاویہ نزول پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔

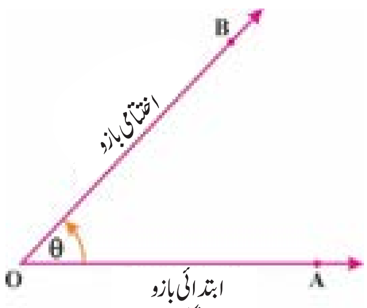
تعارف:

لفظ Trigonometry یونانی لفظ سے بنا ہے Tri (تین)، gono (زاویہ) اور metron (پیائش) ہے۔
تکونیاتی Trigonometry کا مطلب مثلثوں کی پیائش ہے۔ ریاضی کی اس شاخ کو یونانیوں نے 330 قبل مسیح میں متعارف کیا تھا۔ اس کا تعلق مثلثوں کے حل سے ہے اس کا وسیع اطلاق طبعیات، نیویگیشن، فلکیات، سروینگ وغیرہ میں ہوتا ہے۔

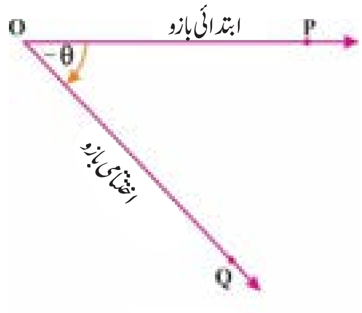
ایک زاویے کی پیائش (Measurement of an Angle):

زاویہ دو شعاعوں کا یونین ہوتا ہے جن کا ایک مشترکہ نقطہ راس کہلاتا ہے۔ یہ شعاع کو ابتدائی بازو اور دوسری شعاع کو اختتامی بازو کہلاتی ہے۔

زاویہ کی پیائش ابتدائی بازو سے اختتامی بازو کی طرف گھماؤ کی سمت پر منحصر ہوتا ہے۔ گھڑی کی مخالف سمت میں پیائش کیے گئے زاویے کو مثبت زاویہ تصور کیا جاتا ہے جیسا کہ شکل (a) میں دکھایا گیا ہے اور گھڑی کی سمت میں پیائش کیے گئے زاویے کو منفی زاویہ تصور کیا جاتا ہے جیسا کہ (b) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (a)



شکل (b)

ایک زاویہ معیاری صورت میں کہلاتا ہے اگر اس کا ابتدائی طرف مثبت x-محور (*x-axis*) پر ہو اور اس کا راس مرکز (origin) پر ہو۔

30.1 (i) زاویے کی سیکا جیسیمل نظام میں پیائش (ڈگری، منٹ اور سیکنڈ):

اگر ابتدائی شعاع $\overrightarrow{OA}$ گھڑی کی مخالف سمت میں ایک چکر مکمل کرتی ہے تو 360 ڈگری یا 360° کا زاویہ بناتی ہے یعنی دائرے کا محیط کو برابر قوسین میں تقسیم کیا جائے۔ دائرے مرکز پر اس طرح کی ایک قوس سے ایک ڈگری کا زاویہ بنتا ہے اور 1° سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہر ڈگری کو 60 برابر حصوں میں تقسیم کیا جائے تو ہر حصہ امنٹ کہلاتا ہے یوں $1'$ ظاہر کیا جاتا ہے ہر منٹ 60 برابر حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اور ہر حصہ 1 سیکنڈ کہلاتا ہے اور یوں $1''$ ظاہر کیا جاتا ہے۔
پس ایک منٹ 60 واں حصہ ایک ڈگری کا ہوتا ہے اور 1 سیکنڈ 360 واں حصہ ایک ڈگری کا ہوتا ہے۔ اس نظام جس میں زاویے کی پیائش ڈگری، منٹ اور سیکنڈ میں کی جاتی ہے سیکا جیسیمل نظام کہلاتا ہے۔ ایک مکمل چکر کا 360 واں حصہ ایک ڈگری ہوتا ہے اور یہ یوں $\frac{1}{360}$ ظاہر کیا جاتا ہے اسے مزید یوں تقسیم کیا جاتا ہے۔

$1^\circ = 60$ منٹ $= 60'$
$1' = 60$ سیکنڈ $= 60''$
مثلاً 30 ڈگری، 20 منٹ اور 10 سیکنڈ کو علامتی طور پر یوں لکھا جاتا ہے: $30^\circ\ 20'\ 10''$

30.1 (ii) زاویے کو کسر اعشاریہ (دو درجہ اعشاریہ تک) میں کسر اعشاریہ سے میں تبدیل کرنا:

اس سیکشن میں ہم منٹ اور سیکنڈ کو ڈگری میں تبدیل کرتے ہیں منٹ کو 60 سے اور سیکنڈ کو 3600 سے تقسیم کر کے۔ مختصر کرنے کے بعد ہمیں مطلوبہ شکل حاصل ہوتا ہے۔

مثال 1:

$30^\circ\ 30'\ 10''$ کو ڈگری میں تبدیل کریں اور کسر اعشاریہ کی شکل میں لکھیں۔

حل: چونکہ

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$$

$$\therefore \quad 30' = \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$$

$$1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$$

اور

$$10'' = \left(\frac{10}{3600}\right)^\circ = \left(\frac{1}{360}\right)^\circ$$

$$\therefore \quad 30^\circ 30' 10'' = \left(30 + \frac{1}{2} + \frac{1}{360}\right)^\circ$$

$$= [30 + 0.5 + 0.003]^\circ$$

$$= 30.503^\circ$$

$$= 30.50^\circ$$ (دو درجہ اعشاریہ تک)

مثال 2:

12.51° کو $D^\circ M' S''$ شکل میں تبدیل کریں۔

حل:

$$12.51^\circ = 12^\circ + (0.51)^\circ$$

$$= 12^\circ + (0.51 \times 60)' \qquad (1^\circ = 60')$$

$$= 12^\circ + (30.6)'$$

$$= 12^\circ + 30' + (0.6)'$$

$$= 12^\circ 30' + (0.6 \times 60)'' \qquad (1' = 60'')$$

$$= 12^\circ 30' 36''$$

30.1 (iii) ریڈین کی تعریف (دائروی نظام میں ایک زاویے کی پیائش) اور ریڈین اور ڈگری پیائش کے درمیان تعلق ثابت کرنا۔

زاویے کی پیائش کا ایک اور اکائی ریڈین ہے جو کہ قوس کی لمبائی اور دائرے کے رداس کی نسبت کے برابر ہے

یعنی $\theta = \frac{l}{r}$ جبکہ θ ریڈین میں مرکزی زاویہ ہے اور l قوس کی لمبائی اور r دائرہ کا رداس ہے

نظام جس میں زاویے کی پیائش ریڈین میں کی جاتی ہی دائروی نظام کہلاتا ہے پس زاویے کی پیائش کو دائروی نظام میں 1 ریڈین کہا جاتا ہے اگر یہ قوس سے بناہے جو دائرے کے رداس کے برابر ہوتی ہے۔

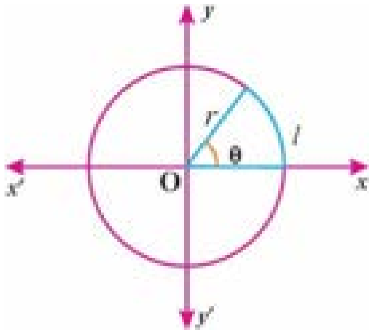


Fig: 30.1

ہمارے پاس $\theta = \frac{l}{r}$,

جبکہ $l = r$

تو $\theta = \frac{l}{l}$

$$\boxed{\theta = 1 \quad \text{ریڈین}}$$

اس لیے ایک مکمل چکر میں قوس کی لمبائی دائرے کا محیط ہوتی ہے

یعنی $l = 2\pi r$

اب،

$$\theta = \frac{l}{r}$$

$$\theta = \frac{2\pi r}{r}$$

$$\boxed{\theta = 2\pi \quad \text{ریڈین}}$$

پس ایک مکمل چکر میں زاویے کے پیائش 2π ریڈین ہے

ڈگری اور یڈین میں تعلق

ہم جانتے ہیں کہ ایک مکمل چکر میں زاویے کی پیائش ڈگری میں $360°$ ہوتی ہے اور ریڈین میں 2π ہوتی ہے۔

اس طرح

$$360° = 2\pi \text{ ریڈین}$$

$$\Rightarrow \quad 180° = \pi \text{ ریڈین}$$

$$\Rightarrow \quad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ ریڈین} \approx 0.01745 \text{ ریڈین}$$

$$\text{یا} \quad 1 \text{ ریڈین} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57.3°$$

ڈگری	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
ریڈین	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

مثال 1

مندرجہ ذیل کو ریڈین پیائش میں تبدیل کریں۔

(a) $120°$ (b) $10° 30'$ (c) $24° 32' 30''$

حل(a):

ہم جانتے ہیں

$\because \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ ریڈین

$\therefore \quad 120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180}$ ریڈین

$\Rightarrow \quad 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ ریڈین

حل (b): ہم جانتے ہیں

$\because \quad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$

$\therefore \quad 30' = \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$

اب $\quad 10^\circ 30' = \left(10 + \frac{30}{60}\right)^\circ = \left(10 + \frac{1}{2}\right)^\circ = \left(\frac{21}{2}\right)^\circ$

$\therefore \quad = \frac{21}{2} \times \frac{\pi}{180}$ ریڈین $\quad$ ($\because 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ ریڈین)

$\Rightarrow \quad = \frac{7\pi}{120}$ ریڈین

حل (c): $24^\circ 32' 30''$

$= 24^\circ + \left(\frac{32}{60}\right)^\circ + \left(\frac{30}{3600}\right)^\circ \qquad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ and $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$

$= \left(24 + \frac{32}{60} + \frac{30}{3600}\right)^\circ = \left(24 + \frac{8}{15} + \frac{1}{120}\right)^\circ$

$= \left(\frac{24 \times 120 + 64 + 1}{120}\right)^\circ$

$= \left(\frac{2945}{120}\right)^\circ \qquad$ ($\because 1^\circ \cong \frac{\pi}{180}$ ریڈین)

$\left(\frac{2945}{120}\right)^\circ = \frac{2945}{120} \times \frac{\pi}{180}$ ریڈین

اب $\quad \therefore \quad = \frac{589}{4320}\pi$ ریڈین

تو $\quad 24^\circ 32' 30'' = \frac{589}{4320}\pi$ ریڈین

مشق 30.1

1. مندرجہ ذیل ڈگری میں تبدیل کریں اور اعشاریہ میں لکھیں

(i) $32^\circ\ 15'$ (ii) $10^\circ\ 30'$ (iii) $8^\circ\ 15'\ 30''$

(iv) $45^\circ\ 21'\ 36''$ (v) $25^\circ\ 30'$ (vi) $18^\circ\ 6'\ 21''$

2. مندرجہ ذیل زاویوں کو $D^\circ\ M'\ S''$ میں تبدیل کریں

(i) 32.25° (ii) 47.36° (iii) 57.325°

(iv) 67.58° (v) 22.5° (vi) 225.60°

3. مندرجہ ذیل زاویوں کو ڈگری میں ظاہر کریں

(i) $\frac{\pi}{4}$ ریڈین (ii) $\frac{\pi}{3}$ ریڈین (iii) $-\frac{3\pi}{4}$ ریڈین

(iv) 3 ریڈین (v) $\frac{3}{\pi}$ ریڈین (vi) 4.5 ریڈین

4. مندرجہ ذیل زاویوں کو ریڈین میں تبدیل کریں

(i) 30° (ii) 45° (iii) 60°

(iv) $\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ$ (v) -225 (vi) $60^\circ\ 35'\ 48''$

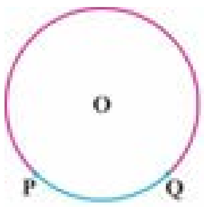
30.2 دائرے کا قطاع (Sector of circle):

تعریف:

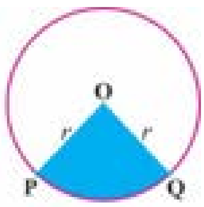
(i) دائرے کے محیط کا ایک قوس (arc) کہلاتا ہے۔

(ii) دائرے کا ایک حصہ جو دو رداسی قطعات اور ایک قوس سے گھیرا ہوا ہو دائرے کا قطاع کہلاتا ہے

مندرجہ ذیل اشکال اوپر دی گئی تعریفوں کو سمجھنے میں مدد کرتی ہیں۔



شکل 30.2(i)



شکل 30.2(ii)

شکل 30.2(i) میں PQ ایک قوس ہے اور شکل 30.2(ii) میں POQ ایک قطاع (Sector) ہے۔

30.2(i) $l = r\theta$ ثابت کرنا۔ جبکہ r دائرے کا رداس، l دائروی قوس کی لمبائی اور θ مرکزی زاویہ جس کی پیمائش ریڈین میں ہو

r رداس کی دائرے میں، l قوس کی لمبائی θ مرکزی زاویے کے درمیان راست تناسب ہے۔

(شکل 30.3 میں دکھایا گیا ہے)

یعنی $l \propto \theta$

$\Rightarrow l = c\theta$ ...(i)

ایک مکمل چکر کے لیے

$$l = 2\pi r$$

اور

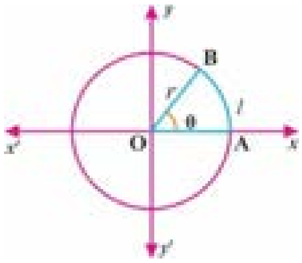
$$\theta = 2\pi$$

مساوات (i) سے ہمیں ملا

$$2\pi r = c(2\pi)$$

$$\Rightarrow \quad c = r$$

لہٰذا مساوات (i) ہوتی ہے $l = r\theta$



شکل 30.3

نوٹ: (i) l اور r کی پیمائش ایک جیسی اکائی میں کی جاتی ہے

(ii) θ کی پیمائش ریڈین میں کی جاتی ہے۔

مثال 1: 5 سینٹی میٹر رداس کے دائرے کی ایک قوس کی لمبائی معلوم کریں جو $\frac{2\pi}{5}$ ریڈین کا دائرہ بناتی ہے۔

حل:

$$r = 5\text{cm},\ \theta = \frac{2\pi}{5} \text{ ریڈین} \quad \text{اور} \quad l = ?$$

چونکہ

$$l = r\theta$$

$$\therefore \quad l = 5 \times \frac{2\pi}{5}$$

$$\Rightarrow \quad l = 2\pi \cong 2\left(\frac{22}{7}\right) \approx 6.28\text{cm.}$$

مثال 2:

ایک لڑکا بائیسکل کے 10 چکروں میں کتنی دور تک سفر کرے گا اگر سائیکل کے ہر پہیہ کا قطر 56 سینٹی میٹر ہے۔

حل:

ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{ایک چکر} = 2\pi \text{ ریڈین}$$

$$\therefore \quad \text{10 چکر} = 20\pi \text{ ریڈین}$$

یعنی

$$\theta = 20\pi \text{ ریڈین}$$

پہیے کا قطر

$$d = 56 \text{ سینٹی میٹر}$$

$$\therefore \quad r = \frac{d}{2} = \frac{56}{2} \text{ سینٹی میٹر} = \frac{56}{2\times 100} \text{ میٹر} \qquad \because (\text{1 میٹر} = \text{100 سینٹی میٹر})$$

$$l = r\theta$$

$$\therefore \quad l = \frac{56}{2\times 100} \times 20\pi$$

$$\Rightarrow \quad l \approx \frac{56}{2\times 100} \times 20 \times \frac{22}{7} \qquad \left(\because \pi \cong \frac{22}{7}\right)$$

$$\Rightarrow \quad l \approx 17.6\text{m.}$$

پس 10 چکروں میں 17.6 میٹر سفر کرے گا۔

مثال 3:

r کی قیمت معلوم کریں جبکہ $l = 4$ سینٹی میٹر اور $\theta = \frac{1}{4}$ ریڈین

حل:

$l = 4$ سینٹی میٹر

$\theta = \frac{1}{4}$ ریڈین

اور $r = ?$

$l = r\theta$

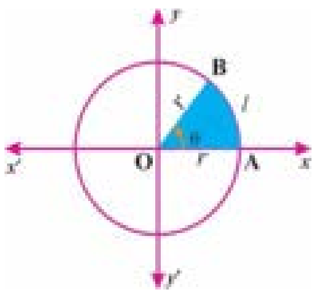
$\therefore \quad r = \frac{l}{\theta}$

$\Rightarrow \quad r = \left(4 \div \frac{1}{4}\right) = 4 \times \frac{4}{1} = 16$

30.2(ii) قطاع دائرے کا رقبہ $\frac{1}{2}lr$ یا $\frac{1}{2}r^2\theta$ ثابت کرنا

ثبوت:

غور کریں: رداس r کے دائرے کا مرکز O، $\overline{AB}$ ہے۔ ایک قوس جو مرکز پر θ ریڈین کا زاویہ بناتی ہے جیسا کہ شکل 30.4 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 30.4

ہم جانتے ہیں کہ

دائرے کا رقبہ $= \pi r^2$

ایک چکر کا زاویہ $= 2\pi$ ریڈین

قطاع دائرے کا زاویہ $= \theta$ ریڈین

تو ایلیمنٹری جیومیٹری کی رو سے بذریعہ قانونِ تناسب ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{\text{قطاع AOB کا رقبہ}}{\text{دائرے کا رقبہ}} = \frac{\text{قطاع کا زاویہ}}{\text{دائرے کا زاویہ}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{قطاع AOB کا رقبہ}}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \text{قطاع AOB کا رقبہ} \quad \frac{\pi r^2 \times \theta}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \text{قطاع AOB کا رقبہ} \quad \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$\text{یا} \quad \text{قطاع AOB کا رقبہ} \quad \frac{1}{2}r\theta \times r$$

$$\Rightarrow \quad \text{قطاع AOB کا رقبہ} = \frac{1}{2}rl \qquad (\because \; r\theta = l)$$

پس ثابت ہوا

مثال 1: 5 سینٹی میٹر رداس کے دائرے قطاع کا رقبہ معلوم کریں جبکہ مرکزی زاویہ 60° ہے۔

حل:

$r = 5$ سینٹی میٹر

$\theta = 60^\circ = 60\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ ریڈین

اور قطاع کا رقبہ $= ?$

$\because$ قطاع کا رقبہ $= \dfrac{1}{2} r^2 \theta$

$\therefore$ قطاع کا رقبہ $= \dfrac{1}{2}(5)^2 \times \dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow$ قطاع کا رقبہ $\approx \dfrac{1}{2} \times 25 \times \dfrac{22}{7 \times 3}$ $\qquad \pi \approx \dfrac{22}{7}$

$\Rightarrow$ قطاع کا رقبہ $= 13.09$ مربع سینٹی میٹر

مثال 2: قطاع کا رقبہ معلوم کریں جس کا رداس 4 سینٹی میٹر اور مرکزی زاویہ 12 ریڈین ہے۔

حل:

$r = 4$ سینٹی میٹر

$\theta = 12$ ریڈین

اور قطاع کا رقبہ $= ?$

$\because$ قطاع کا رقبہ $= \dfrac{1}{2} r^2 \theta$

$\therefore$ قطاع کا رقبہ $= \dfrac{1}{2}(4)^2 \times 12$

$\Rightarrow$ قطاع کا رقبہ $= 16 \times 6 = 96$ مربع سینٹی میٹر

مشق 30.2

1. θ معلوم کریں اگر

(i) $r =$ 5 سینٹی میٹر اور $l =$ 20 سینٹی میٹر

(ii) $r =$ 2 سینٹی میٹر اور $l =$ 30.2 سینٹی میٹر

(iii) $r =$ 2.87 سینٹی میٹر اور $l =$ 6 سینٹی میٹر

(iv) $r =$ 2.5 سینٹی میٹر اور $l =$ 4.5 سینٹی میٹر

2. l معلوم کریں اگر

(i) $\theta =$ 2.1 ریڈین اور $r =$ 1.01 سینٹی میٹر

(ii) $\theta =$ 2 ریڈین اور $r =$ 5.1 سینٹی میٹر

(iii) $\theta = 30^\circ$ اور $r = 6$ سینٹی میٹر

(iv) $\theta = 60^\circ\, 30'$ اور $r =$ 15 سینٹی میٹر

3. r معلوم کریں اگر

(i) $l =$ 2 میٹر اور $\theta = 60^\circ$

(ii) $l = \dfrac{7}{4}$ میٹر اور $\theta =$ 3.5 ریڈین

(iii) $l =$ 4 سینٹی میٹر اور $\theta = \dfrac{1}{4}$ ریڈین

(iv) $l =$ 15.4 سینٹی میٹر اور $\theta = 180^\circ$

4. اکائی دائرے کی قوس کی لمبائی معلوم کریں اگر متقابل مرکزی زاویے کی پیمائش

(i) 30° (ii) 45° (iii) 60° (iv) 90°

5. ایک قوس کے متقابل مرکزی زاویہ $\frac{\pi}{6}$ ریڈین ہے۔ دائرے کا رداس 5 سینٹی میٹر تو معلوم کریں۔

(i) قوس کی لمبائی (ii) دائروی قطاع کا رقبہ

6. 10 سینٹی میٹر رداس کے ایک دائرے پر ایک نقطہ گردش کر رہا ہے۔ اگر یہ 3.5 چکر مکمل کرتا ہے۔ معلوم کریں کہ نقطہ نے کتنا فاصلہ طے کیا ہے۔

7. 4 سینٹی میٹر رداس کے دائرے کے قطاع کا رقبہ معلوم کریں۔ جس کا مرکزی زاویہ $\frac{\pi}{4}$ ہے۔

8. اگر 21 سینٹی میٹر فلائی وہیل کے رم پر نقطہ 5040 میٹر کا سفر ایک منٹ میں طے کرتا ہے تو ایک سیکنڈ میں وہیل کتنا ریڈین گھومتا ہے۔

9.

10. 12 سینٹی میٹر رداس کے دائرے میں ایک قوس کا متقابل مرکزی زاویہ 84° ہے۔ اس قوس کی لمبائی اور قطاع کا رقبہ معلوم کریں۔

30.3 تکونیاتی نسبتیں (Trigonometric Ration)

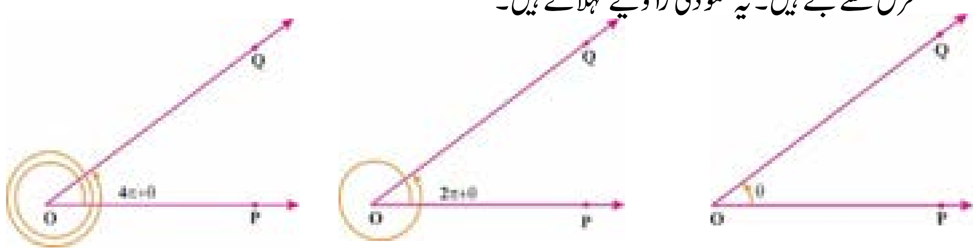
30.3(i) تعریف اور پہچان کرنا:

(a) عمودی زاویہ (ہم بازو زاویے)

(b) زاویے کی معیاری صورت

30.3.1(a) عمودی زاویے (ہم بازو زاویے) General Angle (Co-terminal Angles)

زاویے جن کے ابتدائی اور اختتامی بازوں ایک جیسے ہوں ہم بازوں زاویے کہلاتے ہیں اور یہ 2π ڈیڑین کے فرق سے بنتے ہیں۔ یہ عمودی زاویے کہلاتے ہیں۔



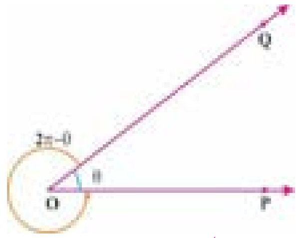
ریڈین $m\angle POQ = \theta$، جبکہ $0 \le \theta < 2\pi$

(i) θ ریڈین ، (0 چکر)

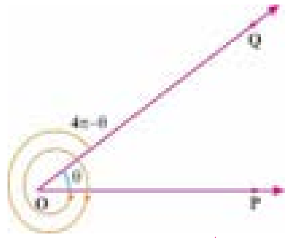
(ii) $(2\pi+\theta)$ ، (ایک چکر کے بعد)

(iii) $(4\pi+\theta)$ ، (دو چکروں کے بعد)

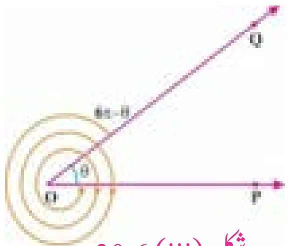
پس θ، $2\pi+\theta$ اور $4\pi+\theta$ اور ہم بازوں زاویے شکل 30.5 میں دکھائے گئے ہیں۔ تاہم اگر گردش گھڑی کی سمت میں ہے جیسا کہ نیچے شکل میں دکھایا گیا ہے



شکل 30.6 (i)



شکل 30.6 (ii)



شکل 30.6 (iii)

(i) $2\pi-\theta$ ریڈین (کوئی چکر نہیں)

(ii) $4\pi-\theta$ ریڈین (ایک چکر کے بعد)

(iii) $6\pi-\theta$ ریڈین (دو چکروں کے بعد)

ریڈین $m\angle POQ=\theta$، جبکہ $0\le\theta<2\pi$

پس θ، $2\pi+\theta$ اور $4\pi+\theta$ ہم بازوں زاویے شکل 30.6 میں دکھائے گئے ہیں۔

مثال:

مندرجہ ذیل کونسے زاویے 120° کے ساتھ ہم بازو زاویہ ہیں

-240°، 480°، $\frac{14\pi}{3}$ اور $-\frac{14\pi}{3}$

حل:

ہاں -240°، 120° کا ہم بازو زاویہ ہے $\quad 120^\circ-(-240^\circ)=120^\circ+240^\circ=360^\circ$

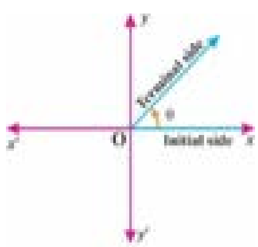
ہاں 480°، 120° کا ہم بازو زاویہ ہے $\quad 480^\circ-120^\circ=360^\circ$

ہاں $\frac{14\pi}{3}$، 120° کا ہم بازو زاویہ ہے $\quad \frac{14\pi}{3}-120^\circ=\frac{14\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=\frac{12\pi}{3}=4\pi$

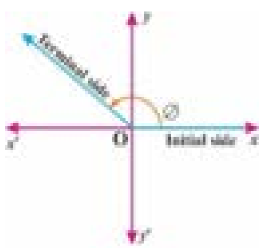
یہ 2π کا عاد نہیں ہے $\quad 120^\circ-\left(\frac{14\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}+\frac{14\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}$

لہذا $\frac{14\pi}{3}$ ، 20° کا ہم بازو زاویہ نہیں ہے

30.3(i)(b) ایک زاویہ معیاری صورت (Stanton Position) میں کہلاتا ہے اگر اس کا راس محور پر ہو اور ابتدائی بازو مثبت x– محور پر جیسا کہ شکل 30.7 میں دکھایا گیا ہے۔

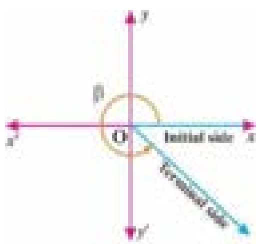


شکل 30.7 (i)



شکل 30.7 (ii)

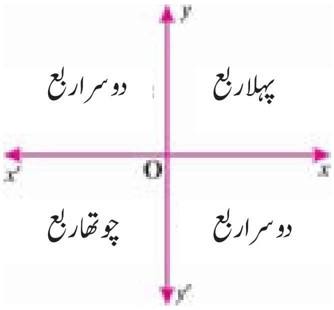
شکل 30.7 (iii)



شکل 30.7 (iv)

30.3(ii) ربعات (Quadrants) اور ربعی زاویوں (Quadrants Angles) کی پہچان کرنا۔

مستطیلی عددی نظام میں دو محور ایک مستوی کو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں ہر حصہ ربع (Quadrants) کہلاتا ہے۔ جس سے چار ربعات بنتے ہیں جیسا کہ شکل 30.5 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 30.8

پہلے ربع میں زاویے 0° اور 90° کے درمیان

یعنی $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

دوسرے ربع میں زاویے 90° اور 180° کے درمیان

یعنی $90^\circ < \theta < 180^\circ$

تیسرے ربع میں زاویے 180° اور 270° کے درمیان

یعنی $180^\circ < \theta < 270^\circ$

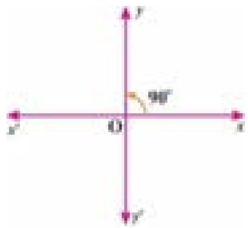
چوتھے ربع میں زاویے 270° اور 360° کے درمیان

یعنی $270^\circ < \theta < 360^\circ$

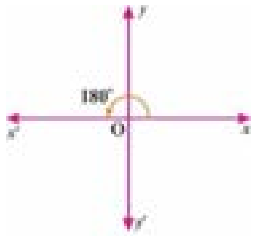
ربع میں زاویہ معیاری صورت میں ہوتا ہے اگر اس کا اختتامی بازو ربع میں ہوتا ہے۔

30.3(ii)(b) ربعی زاویے (Quadrants Angles)

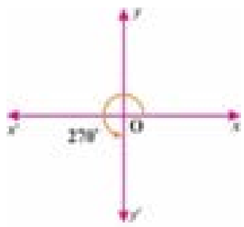
اگر معیاری زاویے کے اختتامی بازو x- محور یا y- محور پر واقع ہو تو یہ ربعی زاویہ کہلاتا ہے۔ مثلاً 90°، 180°، 270° اور 360° جو کہ مندرجہ ذیل اشکال میں دکھائے گئے ہیں۔



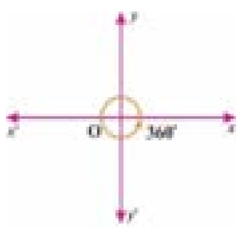
شکل 30.9 (i)



شکل 30.9 (ii)



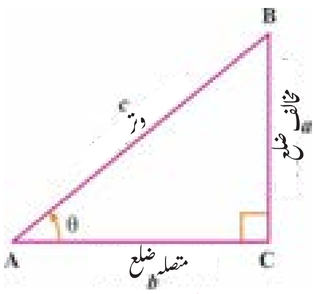
شکل 30.9 (iii)



شکل 30.9 (iv)

30.3(iii) ایک اکائی دائرے کی مدد سے تکونیاتی نسبتوں اور ان کی معکوس نسبتوں کی تعریف کرنا۔

ہم پہلے ہی پچھلی جماعتوں میں قائمۃ الزاویہ مثلث ABC کے کسی حادہ زاویہ θ کے لیے تکونیاتی نسبتوں کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔ جیسا کہ نیچے دی گئی ہیں۔



شکل 30.10

1. $\sin\theta = \dfrac{\text{مخالف ضلع کی لمبائی}}{\text{وتر کی لمبائی}} = \dfrac{a}{c}$

2. $\cos\theta = \dfrac{\text{متصلہ ضلع کی لمبائی}}{\text{وتر کی لمبائی}} = \dfrac{b}{c}$

3. $\tan\theta = \dfrac{\text{مخالف ضلع کی لمبائی}}{\text{متصلہ ضلع کی لمبائی}} = \dfrac{a}{b}$

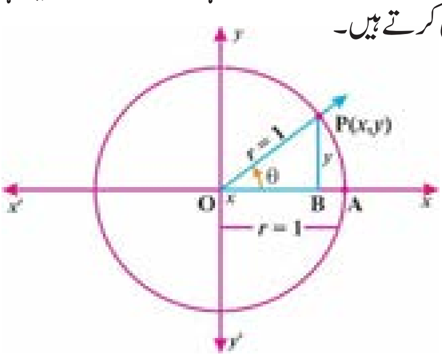
اور ان کے معکوس بالترتیب ہیں

4. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{وتر کی لمبائی}}{\text{مخالف ضلع کی لمبائی}} = \dfrac{}{\sin\theta} = \dfrac{c}{a}$

5. $\sec\theta = \dfrac{\text{وتر کی لمبائی}}{\text{متصلہ ضلع کی لمبائی}} = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{c}{b}$

6. $\cot\theta = \dfrac{\text{متصلہ ضلع کی لمبائی}}{\text{مخالف ضلع کی لمبائی}} = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{b}{a}$

دائرے کے ہر نقطہ کے متقابل ہمیشہ ایک زاویہ ہوتا ہے۔
فرض کریں $P(x, y)$ اکائی دائرے میں پہلے ربع (Quadrants) میں ایک نقطہ ہے اور θ متقابلہ زاویہ ہے جیسا کہ شکل 30.1 میں دکھایا گیا ہے۔ ہم تکونیاتی نسبتوں کو یوں بیان کرتے ہیں۔



شکل 30.11

$\sin\theta = \dfrac{|\overline{BP}|}{|\overline{OP}|} = \dfrac{y}{1} = y,$

$\cos\theta = \dfrac{|\overline{OB}|}{|\overline{OP}|} = \dfrac{x}{1} = x,$ اور

اب $x \neq 0$ بشرطیکہ $\tan\theta = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{OB}} = \dfrac{y}{x},$

اور اس ہی طرح،

بشرطیکہ $y \neq 0$ $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

بشرطیکہ $x \neq 0$ $\sec\theta = \dfrac{1}{x}$

بشرطیکہ $y \neq 0$ $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{y}$

معکوس نسبتیں نیچے دی گئی ہیں۔

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ یا $\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ یا $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$

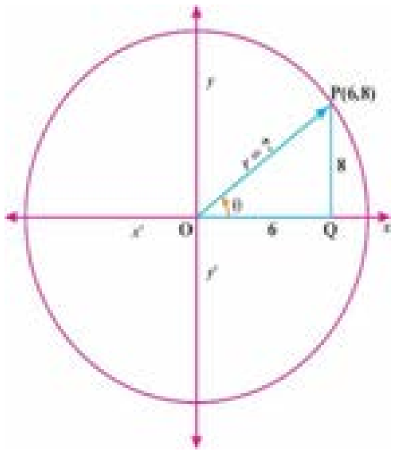
$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ یا $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

نوٹ:
- تمام تکونیاتی نسبتیں x اور y کی صورت میں تکونیاتی تفاعل کہلاتی ہیں۔
- تفاعل $\cos\theta$ اور $\sin\theta$ دائرے تفاعل بھی کہلاتے ہیں۔

مثال:

زاویہ θ کے لیے تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں۔ اگر نقطہ P (6,8) کے اختتامی بازو پر ہے۔

حل:



شکل 30.12

یہاں $P(x, y) = (6,8)$

جیسا کہ شکل 30.12 میں دکھایا گیا ہے $\Rightarrow$ $y = 8$ اور $x = 6$

مسئلہ فیثا غورث کی مدد سے

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore \quad r^2 = (6)^2 + (8)^2$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{100} = 10,$$ جبکہ $r = |\overline{OP}|$

پس تمام چھ تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں ہیں

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \qquad \sec\theta = \frac{5}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$ اور $$\cot\theta = \frac{3}{4}$$

30.3 (iv) تکونیاتی نسبتوں 30°، 45° اور 60° کی قیمتوں کا اعادہ کے لیے

تکونیاتی نسبتوں 30°، 45° اور 60° کی قیمتیں معلوم کرنا ہم پہلے سیکھ چکے ہیں۔ جو نیچے جدول میں دی گئی ہیں

θ	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

اب ہم معکوس تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں اوپر دی گئی جدول کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\operatorname{cosec}30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sec30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \qquad \csc 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \qquad \cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{cosec}\,60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ اور

30.3(v) مختلف ربعوں میں تکونیاتی نسبتوں کی علامت پہچاننا

اگر θ ربعی زاویہ نہیں ہے تو تکونیاتی نسبتوں کی علامت اُس کے اختتامی بازو پر نقطہ $P(x,y)$ کے مطابق معلوم کی جاسکتی ہیں۔

1. اگر θ پہلے ربع میں واقع ہے تو نقطہ $P(x,y)$ اُس کے اختتامی بازو پر واقع ہے x اور y - محور (Cordinates) مثبت ہوتے ہیں یعنی $x>0$ اور $y>0$

$\therefore$ تمام تکونیاتی نسبتیں / تفاعل پہلے ربع میں مثبت ہوتے ہیں

2. دوسرے ربع میں $x<0$ اور $y>0$ اس لیے $\sin\theta$ اور $\text{cosec}\,\theta$ دوسرے ربع میں مثبت ہوتے ہیں اور باقی تمام نسبتیں منفی ہوتی ہیں

3. تیسرے ربع میں $x<0$ اور $y<0$ اس لیے $\tan\theta$ اور $\cot\theta$ تیسرے ربع میں مثبت ہوتے ہیں اور باقی تمام نسبتیں منفی ہوتی ہیں

4. چوتھے ربع میں $x>0$ اور $y<0$ مثبت ہوتے ہیں اس لیے $\cos\theta$ اور $\sec\theta$ چوتھے ربع میں مثبت ہوتے ہیں اور باقی تمام نسبتیں منفی ہوتی ہیں۔

مثال: مندرجہ ذیل تکونیاتی نسبتوں / تفاعل کی علامات معلوم کریں

(i) $\cos 120^\circ$ (ii) $\sin 1030^\circ$ (iii) $\tan 229^\circ$ (iv) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (v) $\text{cosec}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

حل:

(i) $\cos 120^\circ$

$\because$ 120° دوسرے ربع میں واقع ہے اور $\cos\theta$ منفی دوسرے ربع میں منفی ہے۔

$\therefore$ $\cos 120^\circ$ منفی ہے

(ii) $\sin(720^0 + 310^0) = \sin 1030^\circ$

$\because$ یہ 310° چوتھے ربع میں واقع ہے اور چوتھے ربع میں $\sin\theta$ منفی ہے

$\therefore$ پس $\sin 1030^\circ$ منفی ہے

(iii) $\tan 229^\circ$

$\because$ 229° تیسرے ربع میں واقع ہے اور $\tan\theta$ تیسرے ربع میں مثبت ہے

$\therefore$ $\tan 229^\circ$ مثبت ہے۔

(iv) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{-\pi}{4}$ چوتھے ربع میں واقع ہے اور $\tan\theta$ چوتھے ربع میں منفی ہے

$\tan\frac{-\pi}{4}$ منفی ہے

(v) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\because$ $\frac{-\pi}{3}$ چوتھے ربع میں واقع ہے اور $\operatorname{cosec}\theta$ چوتھے ربع میں منفی ہے

$\therefore$ $\operatorname{cosec}\frac{-\pi}{3}$ منفی ہے

30.3(v) اگر ایک تکونیاتی نسبت کی قیمت دی گئی ہو تو باقی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کریں

اس طریقے کو مندرجہ ذیل مثالوں سے سمجھایا گیا ہے

مثال 1: اگر $\sin\theta = \frac{3}{5}$ تو باقی تمام تکونیاتی نسبتیں / تفاعل معلوم کریں

چونکہ $\sin\theta = \frac{y}{r}$

شکل 30.13 کی مدد سے

$$\frac{3}{5} = \frac{y}{r}$$

$\Rightarrow$ $y = 3$ اور $r = 5$

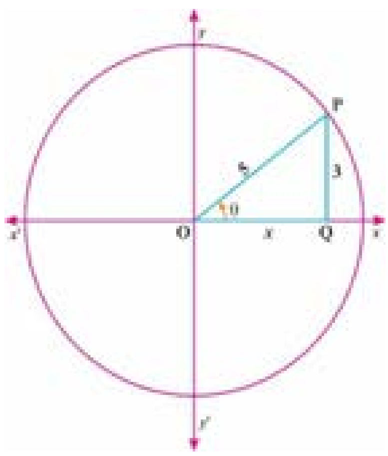
چونکہ

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + (3)^2 = (5)^2$$
$$x^2 + 9 = 25$$
$$x^2 = 25 - 9$$
$$\Rightarrow x^2 = 16$$
$$\Rightarrow x = 4$$

اب

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$
$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

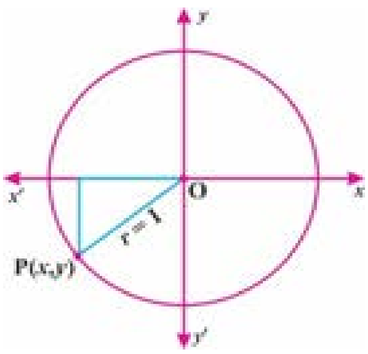
$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{4}$$
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{3}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$$
$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$



مثال 2: اگر $\tan\theta = 1$ اور θ تیسرے ربع میں واقع ہے باقی تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں معلوم کریں

حل:

شکل 30.14 کی مدد سے



شکل 30.14

$$\therefore \quad \tan\theta = 1$$

$$\therefore \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} = 1,$$

$$\Rightarrow \quad y = x$$

$$\because \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$\therefore \quad x^2 + x^2 = 1 \qquad \because \ y = x$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

یہاں ہم منفی قیمت لیتے ہیں کیونکہ θ تیسرے ربع میں واقع ہے

$y = \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ اور $x = \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

اس لیے باقی تکونیاتی تفاعل ہیں

$\cot\theta = 1$،

$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$،

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = -\sqrt{2}$،

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

اور $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\sqrt{2}$

مثال 3: اکائی دائرے کی مدد سے باقی تکونیاتی نسبتوں / تفاعل معلوم کریں اگر

(i) $\cos\theta = \frac{2}{3}$ اور θ پہلے ربع میں واقع ہے

(ii) $\sin\theta = 0.6$ اور $\tan\theta$ منفی ہے

حل:

$\cos\theta = x = \frac{2}{3}$، $\quad \therefore \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{3}{2}$،

چونکہ θ پہلے ربع میں واقع ہے $\quad \therefore$ جبکہ $(x, y) \in Q_1$

اور $x^2 + y^2 = 1$ (معلوم)

یہاں $x = \cos\theta$ اور $y = \sin\theta$

$$\therefore \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

یہاں ہم مثبت قیمت لیتے ہیں کیونکہ θ پہلے ربع میں واقع ہے

$$\therefore \quad y = \frac{\sqrt{5}}{3} = \sin\theta \quad ; \qquad \therefore \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{3}{\sqrt{5}} \,,$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}; \qquad \therefore \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \text{اور}$$

پس مطلوبہ تکونیاتی نسبتیں ہیں

1. $\sec\theta = \dfrac{3}{2}$ 2. $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 3. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

4. $\tan = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ اور $= \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

حل (ii): لہٰذا

$$\sin y = 0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \qquad \therefore \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3} = 1.6,$$

لہٰذا $\sin\theta > 0$ اور $\tan\theta < 0$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\therefore \quad x^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \pm\frac{4}{5}$$

یہاں ہم منفی قیمت لیں گے کیونکہ $p(\theta)$ دوسرے ربع میں ہے۔

$$\therefore \quad x = \cos\theta = -\frac{4}{5} = -0.8 \quad \text{اور} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{5}{4} = -1.25$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = -\frac{3}{4} = -0.75 \quad \text{اور} \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = -\frac{4}{3} = 1.3 \quad \text{اب}$$

پس مطلوبہ باقی تکونیاتی نسبتیں ہیں

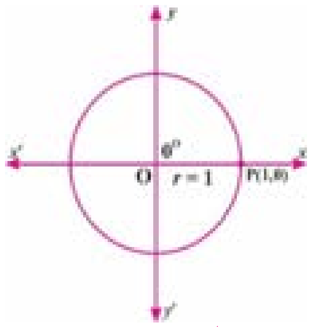
1. $\operatorname{cosec}\theta = 1.6$ 2. $\cos\theta = -0.8$ 3. $\sec\theta = -1.25$

4. $\tan\theta = -0.75$ 5. $\cot\theta = -1.3$

30.3 (vii) تکونیاتی نسبتوں اور کی قیمتیں معلوم کریں $0°, 90°, 180°, 270°$ اور $360°$

ہم پہلے ہی سیکشن 30.3(ii)(b) میں ربعی زاویے زیر بحث کر چکے ہیں۔
یہاں ہم تکونیاتی نسبتوں کے ربعی زاویے معلوم کرینگے

جب $\theta = 0°$



شکل 30.15

اکائی دائرے میں نقطہ $P(1,0)$ زاویہ $0°$ کے اختتامی بازو پر واقع ہے۔

$\therefore$ یہاں $r = 1$ اور $x = 1,\ y = 0$ جبکہ اکائی دائرے کارداس r ہے۔

$\therefore \quad \sin 0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0\ ; \qquad \therefore \quad \operatorname{cosec}0° = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

$\therefore \quad \cos 0° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1\ ; \qquad \therefore \quad \sec 0° = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$

$\therefore \quad \tan 0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0\ ; \qquad \therefore \quad \cot 0° = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

جب $\theta = 90°$

اکائی دائرے میں نقطہ $P(0,1)$ زاویہ کے اختتامی بازو $90°$ پر واقع ہے اور مثبت طور y - محور پر واقع ہے۔

$\therefore$ یہاں $x = 0, y = 1$ اور $r = 1.$

$\therefore \quad \sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1;$

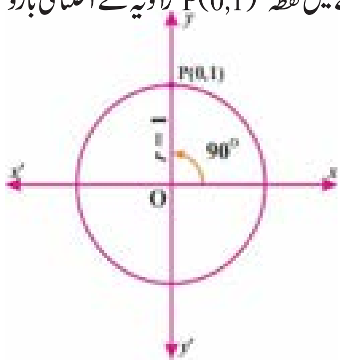
$\operatorname{cosec}90° = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$

$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0;$

$\sec 90° = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

$\tan 90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

$\cot 90° = \frac{x}{y} = 0$ اور

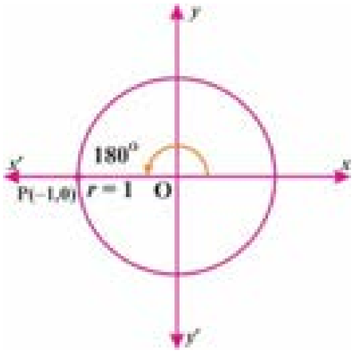


شکل 30.16

جب $\theta = 180°$

اکائی دائرے میں، نقطہ $P(-1,0)$ زاویہ 180° کے اختتامی بازو پر واقع ہے اور منفی x-محور پر واقع ہے۔
اس صورت میں

$$P(-1,0) \Rightarrow x=-1,\ y=0 \quad \text{اور} \quad r=1$$



شکل 30.17

$$\sin 180^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec} 180^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} \quad (\text{ناقابل تعریف})$$

$$\cos 180^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1;$$

$$\sec 180^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

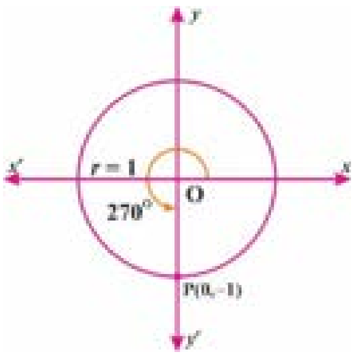
$$\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0;$$

$$\cot 180^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} \quad (\text{ناقابل تعریف})$$

جب $\theta = 270^\circ$

اکائی دائرے میں، نقطہ $P(0,-1)$ زاویہ 180° کے اختتامی بازو پر واقع ہے اور منفی y-محور پر واقع ہے۔
اس صورت میں

$$\therefore \quad P(0,-1) \Rightarrow x=0, y=-1 \quad \text{اور} \quad r=1$$



شکل 30.18

$$\therefore \quad \sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1;$$

$$\operatorname{cosec} 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cos 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$\sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} \quad (\text{ناقابل تعریف})$$

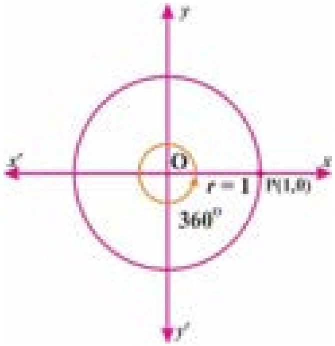
$$\tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} \quad (\text{ناقابل تعریف})$$

$$\cot 270^\circ = \frac{0}{-1} = 0 \quad \text{اور}$$

جب $\theta = 360^\circ$

اکائی دائرے میں، نقطہ $P(1,0)$ زاویہ 360° کے اختتامی بازو پر واقع ہے اور مثبت x-محور پر واقع ہے۔
اس صورت میں

$$P(1,0) \Rightarrow x=1,\ y=0 \quad \text{اور} \quad r=1$$



شکل 30.19

$\therefore$ $\sin 360^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$;

$\operatorname{cosec} 360^\circ = \frac{1}{\sin 360^\circ} = \frac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

$\cos 360^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$;

$\sec 360^\circ = \frac{1}{\cos 360^\circ} = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 360^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$;

اور $\cot 360^\circ = \frac{1}{\tan 360^\circ} = \frac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

تمام نتائج کے خلاصے سے ہمیں یہ جدول ملتی ہے

360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	0°	θ
0	−1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	sin
1	0	−1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	cos
0	−∞	0	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	tan
∞	−1	∞	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	cosec
1	∞	−1	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	sec
∞	0	∞	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	cot

مشق 30.3

1. مندرجہ ذیل زاویوں کے عمومی زاویے معلوم کریں۔

(i) 55° (ii) $\frac{\pi}{6}$ (iii) -45° (iv) $\frac{-3\pi}{4}$

2. مندرجہ ذیل زاویوں کے ربعات کی شناخت کریں

(i) $\frac{8\pi}{5}$ (ii) 75° (iii) -818° (iv) 1090° (v) $\frac{7\pi}{6}$ (vi) $-\frac{5\pi}{4}$

3. مندرجہ ذیل کی علامت معلوم کریں۔

(i) $\cos 120^\circ$ (ii) $\sin 340^\circ$ (iii) $\sec 200^\circ$

(iv) $\operatorname{cosec} 198^\circ$ (v) $\tan\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ (vi) $\cot\left(\frac{-2}{3}\pi\right)$

4. θ، کس ربع میں واقع ہے اگر

(i) $\sin\theta > 0$ اور $\cos\theta < 0$ (ii) $\cos\theta < 0$ اور $\tan\theta > 0$

(iii) $\sec\theta < 0$ اور $\sin\theta < 0$ (iv) $\sec\theta < 0$ اور $\cot\theta > 0$

(v) $\tan\theta < 0$ اور $\cos\theta < 0$ (vi) $0 < \cot\theta < 1$

5. اگر $\cos\theta = \frac{3}{5}$ اور $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi,$ تو بقیہ تمام تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں .

6. بقیہ تکونیاتی نسبتیں / تفاعل معلوم کریں اگر :

(i) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ اور θ دوسرے ربع میں واقع ہے

(ii) $\cos\theta = \frac{2}{3}$ اور θ چوتھے ربع میں واقع ہے

(iii) $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ اور θ دوسرے ربع میں واقع ہے

(iv) $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{2}$ $\sec\theta =$ اور θ پہلے ربع میں واقع ہے

(v) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ اور $\tan\theta$ مثبت ہے

7. قیمتیں معلوم کریں .

(i) $\tan 30^\circ \tan 60^\circ + \tan 45^\circ \cot 45^\circ$ (ii) $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ}$ (iii) $\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin 45^\circ + \cot 45^\circ}$

(iv) $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$ (v) $\dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}$ (vi) $\dfrac{\tan 45^\circ + \cot 45^\circ}{\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ}$

30.4 تکونیاتی متطابقات (Trigonometric Identities):

متطابق ایسی مساوات ہوتی ہے جو متغیر کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہو (سوائے جہاں قیمت واضح نہ ہو)

30.4.1 تکونیاتی متطابقات (Trignometric Identities) کو ثابت کرنا اور انہیں مختلف تکونیاتی روابط کو ثابت کرنے کے لیے استعمال کرنا۔

ایک اکائی دائرے میں قائمہ الزاویہ مثلث متعلق کسی بھی حقیقی عدد θ کے لیے۔ ہمارے پاس مندرجہ ذیل بنیادی تکونیاتی متطابقات ہیں۔

(i) $\sin\theta + \cos\theta = 1$ (ii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ (iii) $\operatorname{cosec}\theta = 1 + \cot\theta$

(i) **ثبوت**

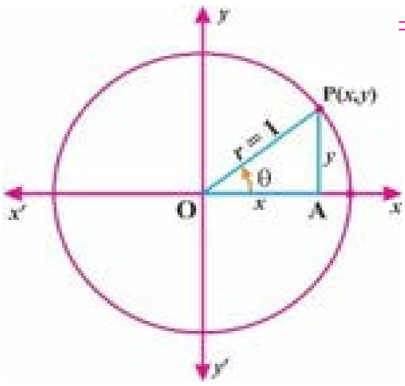
اکائی دائرے میں ΔOAP، پر غور کریں جس میں $m\angle AOP = \theta$ ریڈین معیاری صورت میں

فرض کریں $P(x, y)$ زاویے کے اختتامی بازو پر ایک نقطہ ہے

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے ہمارے پاس $x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad [\because \; x = \cos\theta$ اور $y = \sin\theta]$

پس ثابت ہو



شکل 30.20

(ii) **ثبوت:** مسئلہ فیثاغورث

$$1 = x^2 + y^2$$

دونوں اطراف x^2 سے تقسیم کرنے سے ہمیں ملا

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{x^2} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta,$$

$$\Rightarrow \boxed{\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta} \quad (\text{بشرطیکہ } x = \cos\theta \neq 0)$$

پس ثابت ہوا

(iii) **ثبوت:** مسئلہ فیثاغورث

$$1 = x^2 + y^2$$

دونوں اطراف y^2 سے تقسیم کرنے سے ہمیں ملا

$$\frac{1}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} + 1, \quad \text{یا} \quad \left(\frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2 = (\cot\theta)^2 + 1, \quad (\text{بشرطیکہ} \quad \sin\theta \neq 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta} \quad \left(\because \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta\right)$$

پس ثابت ہوا

مثال 1: ثابت کریں $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

پس ثابت ہوا: $L.H.S = (\sin\theta + \cos\theta)^2$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

$= 1 + 2\sin\theta\cos\theta \qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= R.H.S$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\because$ $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = 1+2\sin\theta\cos\theta$

پس ثابت ہوا

مثال 2: ثابت کریں $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

ثبوت:

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= \sin\theta \\
&= \sqrt{(\sin\theta)^2} \\
&= \sqrt{\sin^2\theta}, \\
&= \sqrt{1-\cos^2\theta}, \quad \left[\therefore\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\right]
\end{aligned}$$

R.H.S =

$\therefore$ R.H.S = L.H.S

$\therefore$ $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

پس ثابت ہوا

مثال 3:

ثابت کریں $\dfrac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta} = \dfrac{\sin\theta+\tan\theta}{\sin\theta-\tan\theta}$, ($\cos\theta \neq 0$ بشرطیکہ)

ثبوت:

$$\text{L.H.S} = \frac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta},$$

$$= \frac{1+\dfrac{1}{\cos\theta}}{1-\dfrac{1}{\cos\theta}},$$

$$\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta-1}$$

$$= \frac{\sin\theta(\cos\theta+1)}{\sin\theta(\cos\theta-1)} \quad (\sin\theta \neq 0 \text{ بشرطیکہ})$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta-\sin\theta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} \quad (\cos\theta \neq 0 \text{ بشرطیکہ})$$

$$= \frac{\sin\theta + \tan\theta}{\sin\theta - \tan\theta}$$

$$= \text{R.H.S}$$

$\because$ $\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

$\therefore$ $\dfrac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta} = \dfrac{\sin\theta + \tan\theta}{\sin\theta - \tan\theta}$

پس ثابت ہوا

مثال 4: ثابت کریں $\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$

ثبوت :

$$\text{L.H.S} = \sin\theta,$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta, \quad (\cos\theta \neq 0 \text{ بشرطیکہ})$$

$$= \tan\theta \cdot \cos\theta,$$

$$= \text{R.H.S}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

$\therefore$ $\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$

پس ثابت ہوا

مشق 30.4

1- مندرجہ ذیل تکونیاتی متطابقات کو ثابت کریں

(i) $\sin^2\theta = \left(\sec^2\theta - 1\right)\cos^2\theta \qquad (\cos\theta \neq 0)$

(ii) $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta + \sec\theta \qquad (\cos\theta \neq 0)$

(iii) $\tan\theta = \sin\theta\sqrt{1+\tan^2\theta} \qquad (\cos\theta \neq 0)$

(iv) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

(v) $\sin^3\theta = \sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta$

(vi) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \qquad (\cos\theta \neq 1)$

(vii) $\sqrt{\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}} = \dfrac{\sec\theta+1}{\tan\theta} \qquad (\tan\theta \neq 0)$

(viii) $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta \qquad (\tan\theta \neq 0)$

(ix) $\operatorname{cosec}\theta \cot\theta = \dfrac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta}{\sin\theta + \tan\theta}$ ، $(\sin\theta \neq 0)$

(x) $\sin^2\theta = \dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$, $(\cos\theta \neq 0)$

(xi) $\cos^2\theta = \dfrac{\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta}$, $(\sin\theta \neq 0)$

(xii) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \sin\theta\cos\theta\cot\theta = 1$, $(\sin\theta \neq 0$ یا $\cos\theta \neq 0)$

.2 پہلے اظہاریے کو دوسرے اظہاریے میں تبدیل کریں

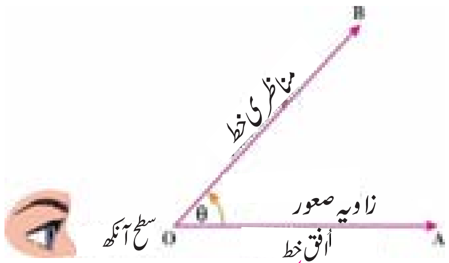
(i) $(\sec\theta+1)(\sec\theta-1)$ کو $\tan^2\theta$ میں

(ii) $\dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ کو $\tan\theta$ میں

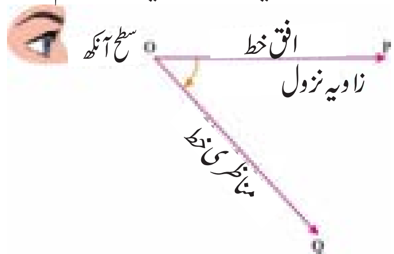
(iii) $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ کو $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ میں

30.5 زاویہ صعود اور زاویہ نزول (Angles of Elevation and Depression)

30.5 (i). زاویہ صعود اور زاویہ نزول معلوم کرنا



شکل 30.21: (i)



شکل 30.21 (ii)

جب ایک جسم مشاہدے کی آنکھ کی سطح سے اوپر ہو تو گھڑی کی مخالف سمت میں افقی خط سے مناظری خط کی جانب زاویہ صعود ہوتا ہے جیسا کہ شکل میں 30.2(i) دکھایا گیا ہے۔ جب ایک جسم مشاہدے کی آنکھ کی سطح سے نیچے ہو تو گھڑی کی سمت میں افقی خط سے مناظری خط کی جانب زاویہ نزول ہوتا ہے جیسا کہ شکل 30.2(ii) میں دکھایا گیا ہے

ہماری روز مرہ زندگی میں یہ فاصلہ معلوم کرنے کے لیئے استعمال کیا جاتا ہے زاویے کا تعلق مشاہدے سے دور جسم جو مشاہدے کے مقام سے اوپر ہو یا نیچے ہو اس میں زاویہ صعود یا نزول کے استعمال پر مشتمل ہوتا

30.5 (ii) زاویہ صعود اور نزول پر مشتمل روز مرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1: ایک بجلی کے کھمبے کی چوٹی سے زمین پر ایک نقطے پر اپنی بنیاد سے 18 میٹر دور زاویہ صعود 30° ہے بجلی کے کھمبے کی بلندی معلوم کریں

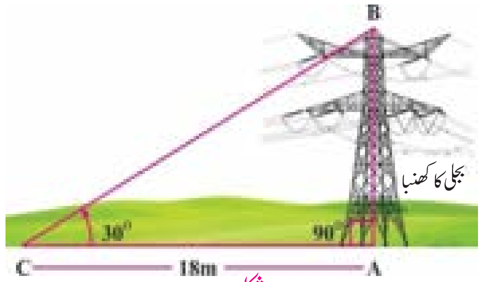
حل زاویہ صعود ایک نقطہ P کھمبے کی چوٹی B (آنکھ کی سطح سے اوپر) 30° ہے اور فرض کریں کھمبے کی اونچائی h ہے کھمبا نقطہ P سے 18 میٹر فاصلے پر ہے۔ ΔPAB میں ہمارے پاس $\theta = 30^\circ$ $|\overline{PA}| = 18\text{ m}$ ہے

$$\therefore \quad \tan 30^\circ = \frac{h}{|PA|} = \frac{h}{18}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{18}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{18}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} \text{ میٹر}$$



شکل 30.22

پس بجلی کے کھنبے کی اونچائی $6\sqrt{3}$ میٹر ہے

مثال 2: ایک جسم کی بُلندی معلوم کریں اگر سورج کا زاویہ صعود 19 ہے اور جسم کے سائے کی لمبائی 1.7 میٹر ہے۔

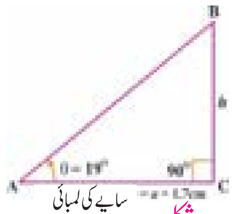
حل: سورج کا ذریعہ صعود 19° یعنی $\theta=19^\circ$ اور سایے کی لمبائی میٹر $a = 1.7$ جیساکہ شکل میں دکھایا گیا ہے تو

$$\tan 19^\circ = \frac{h}{a} = \frac{h}{1.7}$$

$$\Rightarrow \quad h = (1.7)\cdot \tan 19^\circ$$

$$\Rightarrow \quad h = (1.7)\cdot(0.3443) = 0.585\text{m}$$

پس جسم کی مطلوبہ اونچائی 0.585 میٹر ہے



شکل 30.23

مثال 3: ٹاور کی اونچی سے جہاز کی قریبی بندرگاہ کا زاویہ نزول اُس کے پائی کے خط پر 40° ہے اگر ٹاور کی اونچی 35 میٹر ہے۔ جہاز اور ٹاور کے پائے کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

حل: فرض کریں 'x' فاصلہ ہے جہاز کا لفظ B سے ٹاور کا پایا نقطہ A تک جیسا کہ شکل دکھایا گیا ہے اور "h" ٹاور کی اونچی ہے۔

یہاں

$h =$ 35 میٹر (ٹاور کی اونچائی)

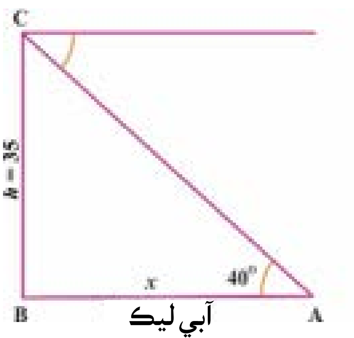
$\theta = 40^\circ$ (زاویہ نزول)

اور $x = ?$

ΔABC میں

$$\tan 40^\circ = \frac{h}{x} = \frac{35}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{35}{\tan 40^\circ} = \frac{35}{0.8391} = 41.71\text{m (تقریباً)}$$



شکل 30.24

پس جہاز اور ٹاور کے پائے کے درمیان فاصلہ 41.71 میٹر (تقریباً) ہے۔

مشق 30.5

1. 102 میٹر اونچے روشنی کے مینار سے جہاز کا زاویہ نزول $30^\circ 18'$ ہے۔ جہاز روشنی کے مینار سے کتنے فاصلے پر ہے۔
2. ایک سیڑھی زمین کے ساتھ 65° کا زاویہ بناتی ہے اور دیوار پر 6 میٹر کی بلندی تک پہنچتی ہے۔ سیڑھی کی لمبائی معلوم کریں۔
3. زاویہ صعود معلوم کریں جب ایک 6 میٹر بانس $2\sqrt{3}$ میٹر لمبائی کا سایہ بناتا ہے۔
4. ایک مقام سے پہاڑی کی چوٹی کا زاویہ صعود 30° کا ہے۔ اس مقام 210 میٹر پہاڑی کی طرف چلنے سے چوٹی کا زاویہ صعود 45° ہو جاتا ہے۔ پہاڑی کی بلندی معلوم کریں
5. ایک مشاہدے کا مطابق ایک غبارہ زمین سے 4280 میٹر اوپر ہے اور فارم ہاؤس 9613 میٹر دور ہے۔ غبار سے مشاہدہ کیا جائے تو فارم ہاؤس کے زاویہ نزول معلوم کریں۔

اعادہ مشق 30

1. درست جواب پر $(\sqrt{})$ کا نشان لگائیں۔

i. پچائش کے نظام میں جو زاویہ ریڈین میں پیائش ________ کہا جاتا ہے کہتا ہے

(a) CGS نظام (b) سکسا جیمل نظام
(c) MCS نظام (d) دائروی نظام

ii. دو غیر ہم خط شعاعوں کا یونین کا مشترکہ راس ________ کہلاتا ہے

(a) ایک زاویہ (b) ایک ڈگری
(c) ایک منٹ (d) ریڈین

iii. $10^0 =$ ________.

(a) $600''$ (b) $3600''$ (c) $600'$ (d) 600

iv. $5\frac{\pi}{4}$ ریڈین $=$ ________.

(a) 115° (b) 225° (c) 135° (d) 45°

v. $\frac{1}{2}\sec 45^\circ =$ ________.

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{2}$

vi. $\operatorname{cosec}\theta \cdot \sin\theta =$ ________.

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) 0.5

vii. $\sec^2\theta - \tan^2\theta =$ ________.

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\cos^2\theta$

.viii اکائی دائرے میں لفظ p(x,y) کے لیے $\sin\theta =$ __________.

(a) x (b) $-x$ (c) y (d) $-y$

.ix اگر $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ اور θ تیسرے اربع میں واقع ہے تو $\tan\theta =$ __________.

(a) -1 (b) 1 (c) ± 1 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

.x اگر ایک جسم مشاہدہ کی سطح سے اوپر ہے تو افقی خط اور دیکھنے والے کے مناظری خط کے درمیان __________ کہلاتا ہے۔

(a) زاویہ نزول (b) زاویہ صعود

(c) زاویہ منفرجہ (d) ان میں کوئی نہیں

.2 زاویہ اور معیاری صورت میں زاویے کے وضاحت کریں۔

.3 $70^{o}\,30'\,90''$ کو ریڈین میں تبدیل کریں۔

.4 (7200)' میں کتنے ڈگری ہوتے ہیں۔

.5 $\frac{2\pi}{3}$ ریڈین کو ڈگری پیمائش میں تبدیل کریں۔

.6 $\frac{3}{\pi}$ ریڈین کو "$D^{o}M'S''$" شکل میں تبدیل کریں۔

.7 r معلوم کریں جب کہ $l=7cm$ اور $\theta = \frac{\pi}{4}$

.8 θ معلوم کریں جب کہ قوس کی لمبائی دائرے کے رداس کے برابر ہے۔

.9 ثابت کریں کہ $(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta)=1$

.10 قطاع دائرے کا رقبہ معلوم کریں جبکہ r=2cm اور $\theta=3$ ریڈین

خلاصہ

- دائرے کے محیط کی 360 برابر حصوں میں تقسیم اور ہر حصے کا مرکز پر بنانے والا زاویہ ایک ڈگری کہلاتا ہے اور اسے 1^{o} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- دائرے کے مرکز پر بننے والا اس طرح کہ قوس کی لمبائی اور دائرے کی رداس برابر ہیں تو زاویہ کی پیمائش ایک ریڈین ہے۔
- ریڈین / ڈگری کی مزید تقسیم

  $1^{o} = \frac{\pi}{180}$ ریڈین ≈ 0.01745 ریڈین

- دائرے کی قوس کی لمبائی معلوم کرنے کا کلیہ $l = r\theta$ ہے۔
- قطاع کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ $= \frac{1}{2}lr$ or $= \frac{1}{2}r^2\theta$.

- زاویے جن کے ابتدائی اور اختتامی بازو ایک جیسے ہوں ہم بازو اوے کہلاتے ہیں اور یہ 2π ریڈین کے فرق سے بنتے ہیں۔ یہ عمومی زاویے بھی کہلاتے ہیں۔
- ایک زاویہ معیاری صورت میں کہلاتا ہے اگر اس کا راس مبداء پر ہو اور اس کے ابتدائی بازو مثبت x-محور پر ہو۔
- مستطیلی محور نظام (Rectangular coordinate system) میں محور ایک مستوی کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں ہر حصہ ربع (Quadrant) کہلاتا ہے جس سے چار ربعات بنتے ہیں
  زاویے 0° سے 90° کے درمیاں پہلے ربع میں ہوتے ہیں
  زاویے 90° سے 180° کے درمیاں ییرے ربع میں ہوتے ہیں
  زاویے 180° سے 270 درمیان تیرے ربع میں ہوتے ہیں
  زاویے 270° سے 360 درمیان چوتھے ربع میں ہوتے ہیں
- اگر معیاری زاویے کا اختتامی بازو x - محور اور y - محور پر واقع ہوتے ہیں تو یہ ربعی زاویے کہلاتے ہیں
- زاویہ θ کی چھ بنیادی تکونیاتی نسبتیں ہوتی ہیں $\sin\theta$، $\cos\theta$، $\tan\theta$، $\operatorname{cosec}\theta$، $\sec\theta$ اور $\cot\theta$
- معکوس نسبتیں نیچے دی گئی ہیں

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{یا} \quad \sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{یا} \quad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \quad \text{یا} \quad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

- مطابق (Identity) ایسی مساوات ہوتی ہے جو متغیر کی تمام قیمتوں کے لیئے درست ہوتی (سوائے جہاں قیمت واضح نہ ہو)
- تین بنیادی تکونیاتی متطابقات ہیں

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
(iii) $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

- جب ایک جسم مشاہد کی آنکھ کی سطح سے اوپر ہو تو گھڑی کی مخالف سمت میں افق خط سے مناظری خط کی جانب زاویہ صعود ہوتا ہے
- جب ایک جسم مشاہد کی آنکھ کی سطح سے نیچے ہو تو گھڑی کی سمت میں افقی خط سے مناظری خط کی جانب زاویہ نزول ہوتا ہے۔

جوابات

مشق 17.1

1. (i) $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ (ii) $B=\{4,6,8,9,10\}$
(iii) $C=\{7,11,13\}$ (iv) $D=\{9,11,13,15\}$
(v) $E=\{-11,11\}$ (vi) $F=\{\ \}$ یا $\varnothing$

2. (i) $A=\{x\mid x\in\mathbb{Q}\wedge 5<x<6\}$ (ii) $B=\{x\mid x$ مثبت تقسیم ہے 12 کا $\}$
(iii) $C=\{x\mid x\in\mathbb{Z}\wedge -40\le x\le 40\}$ (iv) $D=\{x\mid x\in\mathbb{E}\wedge -4\le x\le 4\}$
(v) $E=\{x\mid x$ پہلے پانچ قدرتی نمبروں کا مربع ہے $\}$
(vi) $F=\{x\mid x$ منفی طاق عدد ہے $\}$

3. (i) $A=\{x\mid x\in\mathbb{W}\wedge x<0\}$ (ii) A = لڑکیوں کے کالج میں لڑکوں کے طلباء کا سیٹ
(iii) $A=\{x\mid x\in\mathbb{N}\wedge 2x+1=2\}$ (iv) $A=\{x\mid x\in\mathbb{R}\wedge x^2=-1\}$
(v) A = پاکستان کی خواتین صدر کا سیٹ

4. i. متناہی ii. متناہی iii. غیر متناہی iv. متناہی v. غیر متناہی

5. (i) تین تحتی سیٹ ہیں: $\{a,i\},\{e,u\}$ اور $\{i,o\}$ مترادف سیٹ: $\{1,2,3,4,5\}$
غیر واجب تحتی سیٹ ہے $\{-2,-1,0,1,2\}$
(ii) تین تحتی سیٹ ہیں $\{-1,0\},\{+1,+2\}$ اور $\{0,+2\}$ مترادف سیٹ: $\{a,b,c,d,e\}$
غیر واجب تحتی سیٹ ہے $\{-2,-1,0,1,2\}$

6. $\{x\mid x\in\mathbb{Z}\wedge -1<x<1\}$ ؛ $\{x\mid x\in\mathbb{N}\wedge x^2=16\}$

7. (i) $P(A)=\{\varnothing,\{5\},\{10\},\{15\},\{5,10\},\{5,15\},\{10,15\},\{5,10,15\}\}$
(ii) $P(B)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{0,1,2\},\{0,2,3\},\{0,1,3\},\{1,2,3\},\{0,1,2,3\}\}$

8. i. ممکن نہیں ii. یکتا سیٹ iii. خالی سیٹ

مشق 17.2

1. i. ڈس جوائنٹ سیٹ ii. اوورلیپنگ iii. جزا
iv. مکمل سیٹ v. جزا

2. i. $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8,10\}$ ii. $B\cap A=\{2,4,6\}$ iii. $A-B=\{1,3,5\}$
iv. $B-A=\{8,10\}$ v. $A\Delta B=\{1,3,5,8,10\}$

3.

i. $A' = \{6,7,8,9,10\}$

ii. $B' = \{2,4,6,8,10\}$

iii. $A' \cup B' = \{2,4,6,7,8,9,10\}$

iv. $A' \cap B' = \{6,8,10\}$

v. $(A \cup B)' = \{6,8,10\}$

vi. $(A \cap B)' = \{2,4,6,7,8,9,10\}$

vii. $A' \Delta B' = \{2,4,7,9\}$

viii. $(A \Delta B)' = \{1,3,5,6,8,10\}$

ix. $A - B' = \{1,3,5\}$

x. $A' - B = \{6,8,10\}$

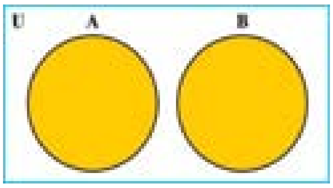
5.

i. $A \cap B = \{6n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ii. $A \cup C = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ iii. $B \cap C = \{12n \mid n \in \mathbb{N}\}$

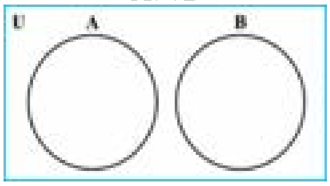
مشق 17.4

(i)

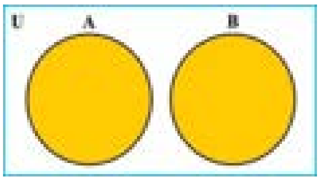
$A \cup B$



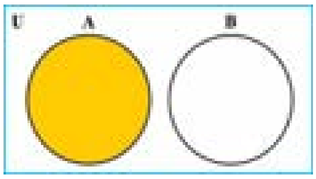
$A \cap B$



$A \Delta B$

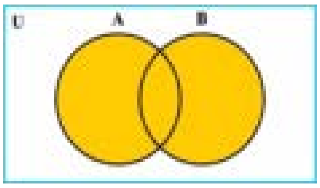


$A - B$

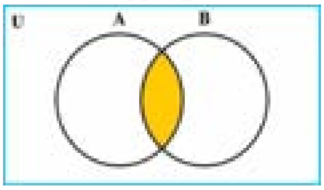


(ii)

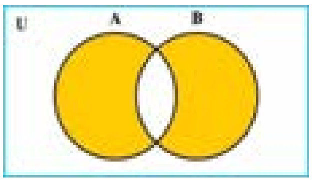
$A \cup B$



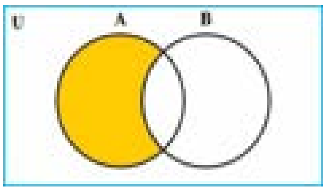
$A \cap B$



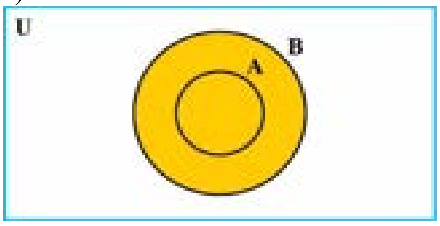
$A \Delta B$



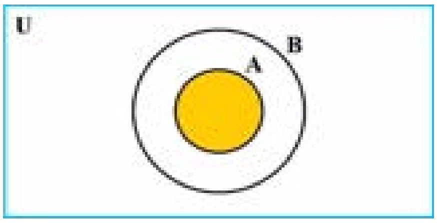
$A - B$



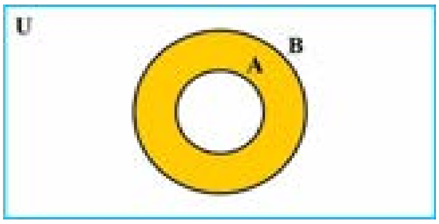
(iii) $A \cup B$



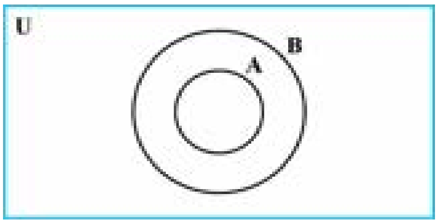
$A \cap B$



$A \Delta B$



$A - B$



مشق 17.5

1. i. $y = 17$ اور $x = 16$ ii. $y = 2$ اور $x = 1$ iii. $y = 1$ اور $x = 3$

2. $n(P \times Q) = 150$, $n(Q \times P) = 150$, $n(P \times P) = 100$

3.
(i) $A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$
(ii) $B \times C = \{(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),(3,3),(3,5)\}$
(iii) $A \times (B \cup C) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,5)(2,1),(2,2),(2,3),(2,5)\}$
(iv) $B \times (A \cup C) = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,5)(3,1),(3,2),(3,3),(3,5)\}$
(v) $(A \cap B) \times (B \cap C) = \{(2,3)\}$

4.
(i) $R_1 = \{(5,2),(5,3)\}, R_2 = \{(5,1),(6,3)\}, R_3 = \{(6,2)\}$
(ii) $R_1 = \{(2,5)\}, R_2 = \{(3,5)\}, R_3 = \{(2,5),(3,5)\}, R_4 = \{(3,5),(1,5),(3,6)\}$
(iii) $R_1 = \varnothing, R_2 = \{(1,1),(1,2)\}, R_3 = \{(2,1),(2,3)\}, R_4 = \{(1,2),(2,2),(3,3)\},$
$R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$
(iv) $R_1 = \varnothing, R_2 = \{(5,5)\}, R_3 = \{(5,6)\}, R_4 = \{(6,5)\}, R_5 = \{(6,6)\},$
$R_6 = \{(5,5),(5,6)\}, R_7 = \{(5,5),(6,5)\}, R_8 = \{(5,5),(6,6)\},$
$R_9 = \{(5,6),(6,5)\}, R_{10} = \{(5,6),(6,6)\}, R_{11} = \{(6,5),(6,6)\},$
$R_{12} = \{(5,5),(5,6),(6,5)\}, R_{13} = \{(5,5),(6,5),(6,6)\},$
$R_{14} = \{(5,5),(5,6),(6,6)\}, R_{15} = \{(5,6),(6,5),(6,6)\},$
$R_{16} = \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\},$

5. ثنائی روابط کی تعداد: 2^{12}

6. (i) $R_1=\{(0,2),(0,4),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$

(ii) $R_2=\{(1,8),(3,6)\}$

(iii) $R_3=\{(3,2)\}$

7. i. ثنائی ربط کا ڈومین $=\{1,3,5,7,9\}$ ii. ثنائی ربط کا حلقہ اثر $=\{3,4,5,6\}$

8. i. ثنائی ربط کا حلقہ اثر $=\{0,1,2,3\}$
ثنائی ربط کا ڈومین $=\{2,5,8,11\}$
ii. ثنائی ربط کا حلقہ اثر $=\{6,7,8,9,...\}$
ثنائی ربط کا ڈومین $=\{0.1,2,3,4,...\}$

9. ثنائی ربط کا حلقہ اثر $f=\{1,2,3,4\}$
ثنائی ربط کا ڈومین $f=\{5,6,7,8\}$
قدرتی اعداد کا سیٹ کوڈومین ہے fکا۔
$f(2)=6, f(4)=8$

10. i. تفاعل نہیں ہے ii. تفاعل نہیں ہے
iii. ان ٹو تفاعل iv. ان ٹو تفاعل
v. دونوں ون-ون اور آن ٹو تفاعل

11. i. آن ٹو تفاعل ii. ون-ون مطابقت
iii. نہ ون - ون عمل اور نہ ون۔ون مطابقت

12. i. $f=\{(a,x),(b,y),(c,y)\}$ ii. $g=\{(p,a),(q,b),(r,c),(s,a)\}$
iii. $h=\{(a,q),(b,r),(c,s)\}$ iv. $k=\{(x,a),(y,c),(z,b)\}$

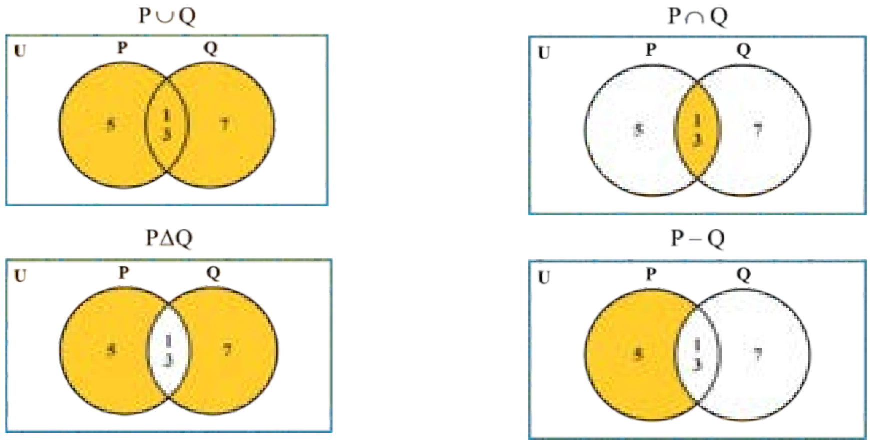
جائزہ مشق 17

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i.	d	ii.	b	iii.	c	iv.	c	v.	d
vi.	c	vii.	b	viii.	c	ix.	a	x.	b
xi.	a	xii.	a	xiii.	d	xiv.	c	xv.	c
xvi.	b	xvii.	c	xviii.	d	xix.	c	xx.	b

2. (a) $A\cup B=\{1,2,4,5,6\}$ (b) $A\cap B=\{2\}$ (c) $A\Delta B=\{1,4,5,6\}$
(d) $A-B=\{1,5\}$ (e) $A'=\{3,4,6\}$ (f) $B'=\{1,3,5\}$

5.



6. (a) $R_1=\{(a,a),(a,c)\}, R_2=\{(c,a),(c,c)\}$

(b) $R_1=\{(b,b),(b,d)\}, R_2=\{(d,b),(d,d)\}$

(c) $R_1=\{(a,b)\}, R_2=\{(a,d),(c,b)\}, R_3=\{(c,b),(c,d)\}$

(d) $R_1=\{(a,c),(b,d)\}, R_2=\{(c,c),(d,c)\}$

7. (a) $f_1=\{(1,6),(2,8),(5,6)\}$ (b) $f_2=\{(1,6),(2,6),(5,6)\}$

مشق 18.1

1. i. 5:2 ii. 3:5 iii. 2:9 iv. 1:10 v. 3:8 vi. 35:52

2. i. 5:3 ii. 3:5 iii. 3:8 iv. 5:8

3. 6:17 4. $a=8$ 5. مطلوبہ عدد 6 ہے

6. $\frac{47}{81}$

7. i. $x=45$ ii. $x=\frac{7}{6}$ iii. $x=38$ iv. $x=a^2-b^2$ v. $x=4$

مشق 18.2

1. (i) $y=\frac{10}{3}x$ (ii) $y=20$ (iii) $x=\frac{9}{2}$

2. (i) $V=\frac{5}{8}T$ (ii) $V=\frac{75}{4}$ (iii) $T=16$ 3. $V=216$ جب $U=6$, $U=5$ جب $V=125$

4. F = 375 **5.** $x = 10$ جب $y = 3$ **6.** V = 4 جب P = 81

7. i. $r = 5$ جب $F = \frac{32}{25}$ ii. F = 24 جب $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$

8. $x = \frac{1}{8}$ **9.** $d = \frac{1}{2}$ **10.** $y = \frac{18}{5}$

مشق 18.3

1. (i) 18 (ii) $(a-b)^2$ (iii) $\frac{(x+y)^2}{x^2 - xy + y^2}$ (iv) $a+b$

2. (i) 1 (ii) $(a-b)$ (iii) $2a^2$ (iv) $a^2 + ab + b^2$

3. (i) 12 (ii) $10a^2b^2$ (iii) $a^2 - b^2$ (iv) $a-b$

4. (i) 15 (ii) 12 (iii) 8 (iv) 31

مشق 18.4

3. (i) $\{3,9\}$ (ii) $\{\ \}$ (iii) $\{\frac{101}{4}\}$ (iv) $\{0,3\}$

مشق 18.5

1. $y = \frac{x^2 z}{24}$, $y = 32$ **2.** $y = \frac{6xu^2}{5vt}$, $y = \frac{64}{5}$ **3.** $w = 360$

4. 3.21 سیکنڈ **5.** 177.8 معکب یونٹس

مشق 18.7

1. 3.068 ایمپیئر **2.** 0.01125 فوٹ کینڈلز **3.** 900 پاؤنڈ **4.** 360000 روپے

5. 5600روپے

جائزہ مشق 18

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i.	d	ii.	b	iii.	a	iv.	b	v.	b
vi.	c	vii.	c	viii.	b	ix.	a	x.	c
xi.	a	xii.	c	xiii.	a	xiv.	a	xv.	c

2. (i) $20m : 1m$ (ii) $500g : 3g$

3. (i) $x = 4$ (ii) $x = 14$ **4.** $y = 48$ **5.** $y = \frac{25}{2}$

7. $x = \frac{7 \pm i\sqrt{15}}{2}$ **8.** $x = 10$ **9.** 3.33 ایمپیئر

مشق 19.1

1. (i) مربعی قالب (ii) کالمی قالب
(iii) قطاری قالب (iv) وتری قالب
(v) میزانیہ قالب

2. i. 3×3 ii. 3×2 iii. 2×3 iv. 3×1 v. 1×1

3. (i) سمیٹرک قالب (ii) اسکیو سمیٹرک قالب
(iii) اسکیو سمیٹرک قالب (iv) سمیٹرک قالب

4. (i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) ممکن نہیں (iii) ممکن نہیں (iv) $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (vii) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (viii) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

5. (i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 2 & 11 & 2 \\ 15 & 10 & -1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 6 & 8 & 7 \\ 5 & 12 & 10 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 9 & 8 & 1 \\ 13 & 6 & -3 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 51 & -36 \end{bmatrix}$ **9.** $d=1$ اور $a=-2, b=1, c=-1$

10. $z=2$ اور $a=-1, b=2, c=3, d=2, x=3, y=3$

11. $AB=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}, BC=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 11 & 8 & 0 \\ 11 & 11 & 2 \\ 8 & 13 & 6 \end{bmatrix}$

مشق 19.2

1. i. 29 ii. 9 iii. 7 iv. 8 v. −59 vi. −105
vii. −84 viii. 184 ix. −42 x. 0 xi. $2x$

2. i. 1 ii. 3 iii. 3 iv. −1 v. 3 vi. −3

3. (i) $x = 3$ **4.** (i) نادر قالب (ii) غیر نادر قالب

5. (i) $\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} -8 & 18 & -4 \\ -5 & 12 & -1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ -18 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

7. (i) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) وجود نہیں رکھتا (iii) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1.2 & 1.4 & 0.8 \\ -0.4 & 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$

8. (i) { (-5,8)} (ii) $\{(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})\}$

جائزہ مشق

1. **(MCQs) کثیر الانتخابی سوالات**

i.	c	ii.	c	iii.	d	iv.	b	v.	d
vi.	a	vii.	c	viii.	b	ix.	a	x.	b

3. (i) 1×3 (ii) 2×3 (iii) 3×2

5. (i) $\begin{bmatrix} 3 & 13 & 17 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 11 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -9 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 73 & 47 & 76 \\ 5 & 13 & 20 \\ 46 & 7 & 16 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} -4 & 29 & 74 \\ -1 & 15 & 37 \\ 3 & 62 & 91 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 5 & 40 & 45 \\ 10 & 5 & 0 \\ -10 & 5 & 35 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 14 & 35 & 56 \\ 7 & 21 & 28 \\ 49 & 14 & 28 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} -10 & 19 & 0 \\ 7 & -19 & -36 \\ -79 & -10 & 20 \end{bmatrix}$ **6.** 368 **8.** $\begin{bmatrix} \frac{-9}{47} & \frac{8}{47} & \frac{18}{47} \\ \frac{21}{94} & \frac{-3}{94} & \frac{5}{94} \\ \frac{7}{47} & \frac{-1}{47} & \frac{-14}{47} \end{bmatrix}$

9. { (1,5)}

مشق 20.1

1. (i) روٹس حقیقی، ناطق اور غیر مساوی ہیں
(ii) روٹس حقیقی، ناطق اور غیر مساوی ہیں
(iii) روٹس کمپلیکس ہیں
(iv) روٹس حقیقی، ناطق اور غیر مساوی ہیں
(v) روٹس کمپلیکس ہیں
(vi) روٹس کمپلیکس ہیں
(vii) روٹس کمپلیکس ہیں
(viii) روٹس کمپلیکس ہیں

2. (i) (b) $k < \frac{9}{4}$ اور (a) $k = \frac{9}{4}$ (ii) (b) $k < 4$ اور (a) $k = 4$
(iii) (a) $k = \pm 2\sqrt{2}$ (b) $k < -2\sqrt{2}$ اور $k > 2\sqrt{2}$ (iv) (b) $k < 3, k \neq 1$ اور (a) $k = 3$
(v) (a) $k = \pm 4$ (b) $k < -4$ اور $k > 4$
(vi) (a) $k = \pm 24$ (b) $k < -24$ اور $k > 24$
(vii) (a) $k = 0$ (b) $k < 0$ اور $k > 0$, $k \neq 2$
(viii) (a) $k = \pm 2$ (b) $k < -2$ اور $k > 2$

3. (i) $m = 3, -2$ (ii) $m = \pm 24$

6. $q = \frac{-5}{3}$ اور $p = 2$

مشق 20.2

1. (i) $4\omega^2$ اور $4, 4\omega$ (ii) $-5\omega^2$ اور $-5, -5\omega$ (iii) $6\omega^2$ اور $6, 6\omega$

2. (i) ω (ii) 4 (iii) 729 (iv) -16

مشق 20.3

1. (i) روٹس کی ضرب اُپت $= -1$ اور روٹس کی جوڑ اُپت $= 1$
(ii) روٹس کی ضرب اُپت $= -2$ اور روٹس کی جوڑ اُپت $= \frac{3}{2}$
(iii) روٹس کی ضرب اُپت $= \frac{-3a^2}{4}$ اور روٹس کی جوڑ اُپت $= a$
(iv) روٹس کی ضرب اُپت $= k$ اور روٹس کی جوڑ اُپت $= \frac{5k}{7}$

2. (i) $m = \frac{2}{3}$ (ii) $m = \frac{1}{8}$

3. (i) $p = \pm 5$ (ii) $p = 0, 1$

4. (i) $m = 3$ (ii) $m = 13$

5. (i) $k=-4$ (ii) $k=-\frac{10}{7}$

6. (i) $p=\frac{3}{2}$ (ii) $p=1$

مشق 20.4

1. (i) $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ (ii) $(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

(iii) $\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$ (iv) $\alpha\beta\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]$

(v) $\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}$ (vi) $\frac{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

2. (i) $\frac{9}{49}$ (ii) $-\frac{99}{98}$ (iii) $\frac{3a+4}{7a^2+3a+2}$ 3. $-\sqrt{\frac{q}{p}}$

4. $\alpha+\beta$ ظاہر کرتا ہے سیدھی لکیر کو اور $\alpha\beta$ ظاہر کرتا ہے ہائپر بولا کو

مشق 20.5

1. (i) $x^2+5x+6=0$ (ii) $x^2+x+1=0$

(iii) $x^2-4x+5=0$ (iv) $x^2-8=0$

2. (i) $3x^2-9x+8=0$ (ii) $36x^2-33x+1=0$

(iii) $x^2-3x+6=0$ (iv) $2x^2-x+1=0$

(v) $2x^2-7x+3=0$

3. $rx^2-qx+p=0$ 4. $x^2-2px+4q=0$ 5. $px^2-(4p-q)x+(4p-2q+r)=0$

6. (i) $3b^2=16ac$ (ii) $b^3+ac(a+c)=3abc$

(iii) $b=0$ (iv) $a=c$

مشق 20.6

1. (i) بقایا2روٹس -1 اور $\frac{1}{2}$ ہیں (ii) بقایا2روٹس -1 اور 2 ہیں

(iii) بقایا2روٹس 6 اور -4 ہیں

2. (i) بقایا2روٹس $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{2}$ ہیں (ii) بقایا2روٹس $\sqrt{5}i$ اور $-\sqrt{5}i$ ہیں

(iii) بقایا2روٹس -1 اور 2 ہیں

3. $m=\frac{7}{3}$ اور بقایا 2 روٹس $\frac{3}{2}$ اور -1 ہیں
4. $a=2$ اور بقایا 2 روٹس 6 اور -1 ہیں
5. $a=49$ اور $b=36$ اور بقایا 2 روٹس 7 اور -3 ہیں

مشق 20.7

1. $\left\{(1,-1),\left(\frac{7}{5},-\frac{1}{5}\right)\right\}$
2. $\left\{(2,0),\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)\right\}$
3. $\left\{(4,3),\left(\frac{25}{8},-\frac{25}{6}\right)\right\}$
4. $\{(-3,0),(1,2)\}$
5. $\{(\pm3,\pm4),(0,5),(-5,0)\}$
6. $\left\{\left(\pm2\sqrt{2},\pm2\sqrt{2}\right),\left(\frac{\pm4\sqrt{5}}{5},\frac{\pm8\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$
7. $\{(1,2),(2,1),(-1,-2),(-2,-1)\}$
8. $\left\{\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\right\}$
9. $\left\{\left(\frac{4}{5},20\right),\left(\frac{1}{5},5\right)\right\}$
10. 7 اور 5 یا 5 اور 7
11. لمبائی = 9 میٹر اور چوڑائی = 4 میٹر
12. 8 اور 6
13. جب وتر 15cm ہے 12cm اور 9cm
14. 10cm اور 13cm ,13cm
15. 25 اور 30

جائزہ مشق 20

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i.	d	ii.	c	iii.	c	iv.	c	v.	c
vi.	b	vii.	a	viii.	b	ix.	c	x.	c

2. (i) ناطق روٹ (ii) حقیقی اور مساوی (iii) فرضی روٹ
(iv) حقیقی اور مساوی
3. (i) $k=\pm4$ (ii) $k<4$ اور $k>-4$ (iii) $k>4$ اور $k>-4$
(iv) $k=\pm4,\ \pm5$ اور اس کے علاوہ k کی قیمتیں جس پر فرق کنندہ کو مکمل مربع کریں۔
4. $9, 9\omega, 9\omega^2$
5. (i) S.O.R = 7 اور P.O.R = 29 (ii) S.O.R = p اور P.O.R = q
(iii) S.O.R = $\frac{7}{5}$ اور P.O.R = $\frac{8}{5}$ (iv) S.O.R = $\frac{11}{9}$ اور P.O.R = $-\frac{28}{9}$
7. $x^2-2x-1=0$
8. $16x^2-10x+1=0$
9. (i) {(2,3), (3,2)} (ii) {(1,6), (-1,-6), (6,1), (-6,-1)}

مشق 21.1

1. $\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x+3}$
2. $\frac{5}{x+1}-\frac{1}{x-3}$
3. $\frac{3}{x}+\frac{2}{x-2}-\frac{4}{x-1}$
4. $\frac{7}{x+4}-\frac{3}{x+1}-\frac{2}{2x-1}$
5. $1+\frac{2}{x+3}+\frac{6}{x-2}$
6. $1-\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+1}$
7. $3x-2+\frac{1}{x-2}-\frac{5}{x+2}$

مشق 21.2

1. $\frac{4}{x+1}-\frac{7}{(x+1)^2}$

2. $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x+3}$

3. $\frac{5}{x-2}-\frac{10}{(x-2)^2}+\frac{4}{(x-2)^3}$

4. $\frac{2}{x-5}-\frac{3}{x+2}+\frac{4}{(x+2)^2}$

5. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}$

مشق 21.3

1. $\frac{2x+3}{x^2+7}-\frac{1}{x-2}$

2. $\frac{x+5}{x^2+10}-\frac{1}{x+1}$

3. $\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2-5x}{x^2+5}$

4. $\frac{1}{x+1}+\frac{2x-2}{x^2-x+3}$

5. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+3}$

مشق 21.4

1. $\frac{1}{4(1-x)}-\frac{(x+1)}{4(x^2+1)}+\frac{(x-1)}{2(x^2+1)^2}$

2. $\frac{1}{9x}+\frac{2}{9x^2}-\frac{(x+2)}{9(x^2+3)}-\frac{(x-1)}{3(x^2+3)^2}$

3. $\frac{1}{4(1+x)}+\frac{(1-x)}{4(x^2+1)}+\frac{x-1}{2(x^2+1)^2}$

4. $\frac{7}{9x+1}+\frac{7(1-x)}{9(x^2+2)}+\frac{7(1-x)}{(x^2+2)^2}$

5. $\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{3+x^2}-7\frac{(x+2)}{8(3+x^2)^2}$

جائزہ مشق 21

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i. d ii. b iii. d iv. b v. a

3. (i) $\frac{13}{3(x-1)}+\frac{2}{3(x+2)}$ (ii) $\frac{-7}{10x}+\frac{33}{14(x+2)}+\frac{257}{35(x-5)}$

(iii) $\frac{11}{5(x-2)}-\frac{6x+2}{x^2+1}$ (iv) $1+\frac{16}{x+1}-\frac{10x+8}{x^2+x+1}$

مشق 22.3

1. (a). A.M. = 11.889, H.M. = 11.194, وسطانیہ = 12, عادہ = 12.
(b). A.M. = 0, G.M. = 0, وسطانیہ = 0, غیر عادہ
(c). A.M. = 13.044, G.M. = 12.837, H.M. = 11.727, وسطانیہ = 12.3.
(d). A.M. = 56.5, G.M. = 56.339, H.M. = 56.180, وسطانیہ = 56, عادہ = 52.
(e). عادہ = AB^+. (f). غیر عادہ
(g). A.M. = B+, وسطانیہ = B+, عادہ = B+.
2. A.M.=172.1, G.M.= 169.551, H.M.= 166.615, وسطانیہ =184.5, عادہ =190.
3. A.M. = کتوں کو پسند کرتے ہیں، وسطانیہ = کتوں کو پسند کرتے ہیں، عادہ = کتوں سے محبت کرتے ہیں
4. کووڈ

5. A.M.=7.149, G.M.=7.106, H.M.=7.061, وسطانیہ =7, Q_1= 6.5, Q_3 = 7.5, عادہ = 7.
6. A.M.=32.5, G.M.=32.303, H.M.=32.102, وسطانیہ=32, Q_1=30, Q_3 = 34, عادہ = 32.
7. A.M. = روپے 9640.
8. A.M. = 36.464, G.M. = 36.087, H.M. = 35.700, وسطانیہ = 36.643, عادہ = 36.929.
9. A.M.=11.9179, G.M.=11.9039, H.M.=11.8897, وسطانیہ=11.9708, عادہ = 12.117.

مشق 22.4

1. (c). –6, (d). 458.125.
2. X غیر تشاکل ہے، Y تشاکل ہے۔
3. $(A.M.)_W = 330$, $(G.M.)_W = 310.902$, $(H.M.)_W = 295.806$.
4. $(A.M.)_W$ = کلوگرام 23.852, $(G.M.)_W$ = کلوگرام 23.850, $(H.M.)_W$ = کلوگرام 23.848

مشق 22.5

1. وسعت= 7, تغیر = 4.490, S.D. = 2.119, M.D. = 1.673.
2. بلے باز-A: وسعت = 185, M.D. = 45.111, تغیر = 3699.222, S.D. = 60.821.
   بلے باز-B: وسعت = 72, M.D. = 21.111, تغیر = 601.555, S.D. = 24.527
   بلے باز - A بلے باز - B سے مستقل مزاج کھلاڑی ہے۔
3. متعلقہ S.D. (آمدنی) = 0.488, متعلقہ S.D. (خرچا) = 0.4945.
   کمائی میں تغیر خرچے میں تغیر سے کم ہے
4. ٹیم -A: متعلقہ S.D. = 1.012, متعلقہ M.D. = 0.528 (تقریباً).
   ٹیم -B: متعلقہ S.D. = 0.866, متعلقہ M.D. = 0.5 (تقریباً).
   ٹیم- A ٹیم - B سے زیادہ مستقل مزاج ہے۔
5. متعلقہ = 2.1, تغیر = 0.196, S.D. = 0.443, M.D. = 0.343 (تقریباً).

جائزہ مشق 22

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات
   i. (c), ii. (c), iii. (b), iv. (a), v. (a), vi. (a), vii. (b), viii. (c), ix. (c), x. (d).

مشق 23.1

2. (i) $x = 25$ (ii) $x = 12$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = 15$
3. $\sqrt{34}$
4. 12
5. 10
6. 6
7. $a = 2\sqrt{5}, b = 2\sqrt{21}, h = \sqrt{35}$
8. 58.31
9. $4\sqrt{3}$
10. 12
11. 30
12. لمبائی =12 اور چوڑائی = 5

جائزہ مشق 23

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات
   i. ii. (a) iii. (b) iv. (b) v. (a) vi. (d) vii. (c)
2. 24
3. $2\sqrt{119}m$
4. (i) $\sqrt{13}$ (ii) $\sqrt{51}$ (iii) $\sqrt{63}$

مشق 24.1

1. $m\overline{\mathrm{CE}} = 10cm$
2. $x = 1$

مشق 24.2

1. $x = 1$; مساوی الاضلاع مثلث
2. $y = 4$ اور $x = 2$
3. $A_2 = 7cm^2$
4. $x = 11cm$

جائزہ مشق 24

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i.	d	ii.	d	iii.	c	iv.	b	v.	a	vi.	b
vii.	c	viii.	c	ix.	d	x.	b	xi.	a	xii.	b

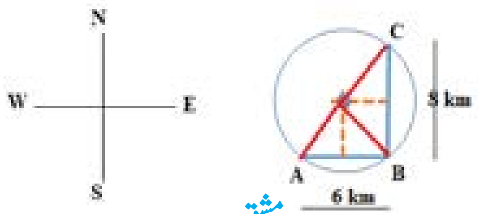
مشق 25.1

1. جی نہیں، کیوں کہ ایک عمودی ناطف تمام غیر ہم خط نقاط سے کبھی بھی ایک جیسے نقطہ سے نہیں گزرے گا۔

2. جی ہاں، یہ ممکن ہے کہ ایک چوکور چار غیر ہم خط نقاط سے کھینچا جا سکتا ہے کیوں کہ چوکور کے مخالف زاویوں کا مجموعہ 180^o ہے۔ لیکن عام طور پر چار ہم خط نقاط سے یہ ممکن نہیں ہے کہ ایک دائرہ ان میں سے گزرے۔

3. اشارہ: 1 اور 2 مثالوں میں دیکھیں۔ 4. اشارہ: 1 اور 2 مثالوں میں دیکھیں۔

5. مسجد کے مقام کا مطوبہ تعین دائرے کا مرکز ہے جو A، B اور C دیہاتوں کو ملانے سے بنتا ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے ہر دیہاتی کو 5 کلومیٹر کا مساوی فاصلہ طے کرنا پڑے گا۔



مشق 25.2

1. مرکز سے وتر اور قطر گزرے گا۔ مسئلہ 25.3 اور 25.2 میں دیکھیں
2. حوالہ کے لیے مسئلہ 25.2 اور 25.3 دیکھیں 3. $C = 10\pi\ cm$ اور $A = 25\pi\ cm.$
4. (a). $6cm.$ (b). $6\sqrt{3}cm.$ تفصیل اور شکل مثال 1 اور 2 میں دیکھیں۔
5. $r = \sqrt{34}cm.$ تفصیل اور شکل مثال 1 اور 2 میں دیکھیں۔

مشق 25.3

1. حوالہ کے لیے مسئلہ 25.4 اور 25.5 دیکھیں 2. حوالہ کے لیے مسئلہ 25.4 اور 25.5 دیکھیں
3. (a). $\sqrt{95}cm$ (b). $\sqrt{39}cm$ (c). $2\sqrt{15}cm$ (d). $2\sqrt{77}cm$
4. (a). 7cm (b). 27.594 cm 5. (a). $2\sqrt{5}$ (b). 6 (c). 5 (d). 10.8 (e). $2\sqrt{51}$ (f). 6

جائزہ مشق 25

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i. (b) ii. (c) iii. (c) iv. (b) v. (b) vi. (a) vii. (a) viii. (b) ix. (a)

مشق 26.1

1. اشارہ: ثبوت کو مثال 1 میں دیکھیں 2. اشارہ: ثبوت کو مثال 1 میں دیکھیں
3. $5\sqrt{3}cm$ یا $\frac{5\sqrt{3}}{2}\ cm.$ d = 6cm, A = 28.2743cm^2 اور C = 18.8495cm (تقریباً).
4. 24cm. 5. $\sqrt{109}cm.$

مشق 26.2

1. اشارہ: حوالہ مسئلہ 26.3 اور نتیجہ صریح سے ہے۔
2. اشارہ: بیان کا ثبوت مسئلہ عکس کی مثال 1 سے ہے۔
3. حوالہ مسئلہ 26.3
4. (a). 6, (b). $2\sqrt{66}$, (c). 7, (d). 11, (e). $\frac{55}{7}$, (f). 14.22 (تقریباً), (g). 4.3, (h). 18.8714 (تقریباً).
5. (a). 6, (b). 4, (c). 6, (d). 1.1547 (تقریباً),(e). 5, (f). 13.

مشق 26.3

1. اشارہ: بیان کا ثبوت مسئلہ عکس 26.4 صورت سے ہے۔
2. اشارہ: بیان کا ثبوت مسئلہ عکس کی مثال 1 سے ہے۔
3. 6cm اور 37.7cm (تقریباً).
4. (a). 70^0 (b). 50^0 **5.** اشارہ: حوالہ مسئلہ 26.4 صورت (A) سے
6. 4cm **7.** 8.5cm

جائزہ مشق 26

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i. (b) ii. (c) iii. (b) iv. (c) v. (b) vi. (b) vii. (a) viii. (d) ix. (a) x. (b) xi. (d)

مشق 27.1

3. $x = 20$ اور $y = 10$ **4.** 114° اور 92° **5.** 30° اور 65° **6.** 120°

جائزہ مشق 27

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i. b ii. c iii. c iv. b v. b vi. c vii. a viii. d ix. a

مشق 28.1

1. 18° **2.** $x < 46°$ **3.** $x > 13°$

مشق 28.2

1. 60° **2.** 70° **3.** 120°

جائزہ مشق 28

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i. (a)	ii. (b)	iii. (d)	iv. (d)	v. (b)
vi. (a)	vii. (b)	viii. (c)	ix. (b)	x. (c)

جائزہ مشق 29

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i. (b)	ii. (d)	iii. (a)	iv. (c)	v. (c)	vi. (b)	vii. (a)
viii. (b)	ix. (d)	x. (d)	xi. (c)	xii. (a)	xiii. (b)	xiv. (c)
xv. (d)	xvi. (b)	xvii. (d)	xviii. (c)	xix. (a)	xx. (d)	

مشق 30.1

1.	(i)	32.25°	(ii)	10.5°	(iii)	8.25°
	(iv)	45.36°	(v)	25.5°	(vi)	18.11°
2.	(i)	$32°15'$	(ii)	$47°21'36''$	(iii)	$57°19'38''$
	(iv)	$-(67°34'48'')$	(v)	$22°30'$	(vi)	$225°36'$

3. (i) 45° (ii) 60° (iii) −135°
(iv) 171.82° (v) 54.67° (vi) 257.73°

4. (i) $\frac{\pi}{6}$ ریڈیان (ii) $\frac{\pi}{4}$ ریڈیان (iii) $\frac{\pi}{3}$ ریڈیان
(iv) $\frac{\pi}{8}$ ریڈیان (v) $\frac{-5\pi}{4}$ ریڈیان (vi) 1.06 ریڈیان

مشق 30.2

1. (i) 4 ریڈیان (ii) 15.1 ریڈیان (iii) 2.09 ریڈیان (iv) 1.8 ریڈیان

2. (i) $l = 2.12$ cm (ii) $l = 10.2$ cm (iii) $l = 3.14$ cm (iv) $l = 15.84$ cm

3. (i) $r = 1.91$ m (ii) $r = 0.5$ m (iii) $r = 16$ cm (iv) $r = 4.9$ cm

4. (i) $l = 0.52$ یونٹ (ii) $l = 0.79$ یونٹ (iii) $l = 1.05$ یونٹ (iv) $l = 1.57$ یونٹ
5. (i) $l = 2.62$ cm (ii) دائرَوی قطاع کا رقبہ $= 6.55\ cm^2$
6. $l = 2.2$ m نقطہ نے فاصلہ طے کیا
7. قطاع کا رقبہ $= 6.28\ cm^2$
8. $\theta = 800$ ریڈیان
9. $\theta = 0.5$ ریڈیان
10. $105.6\ cm^2 =$ اور قطاع کا رقبہ $l = 17.6$ cm

مشق 30.3

1. (i) $-305°$ اور $415°$ (ii) $-\frac{11\pi}{6}$ اور $\frac{13\pi}{6}$
(iii) $-405°$ اور $315°$ (iv) $\frac{5\pi}{4}$ اور $-\frac{11\pi}{4}$

2. (i) Q_4 (ii) Q_1 (iii) Q_3
(iv) Q_1 (v) Q_3 (vi) Q_2

3. منفی نشان ہیں (i), (ii), (iii), (iv), (v) (vi) مثبت نشان

4. (i) Q_2 میں ہے (ii) Q_3 میں ہے (iii) Q_3 میں ہے
(iv) Q_3 میں ہے (v) Q_2 میں ہے (vi) Q_1 یا Q_3 میں ہے

5. (i) $\cot\theta = -\frac{3}{4}$ اور $\tan\theta = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\sec\theta = -\frac{5}{3}$

6. (i) $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ اور $\tan\theta = -\sqrt{3}$, $\sec\theta = -2$, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(ii) $\cot\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ اور $\tan\theta = \frac{-\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{3}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta = \frac{-\sqrt{5}}{3}$, $\sec\theta = \frac{3}{2}$

(iii) $\sec\theta = \frac{-\sqrt{5}}{2}$ اور $\cot\theta = -2$, $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{5}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

(iv) $\tan\theta = \cot\theta = 1$ اور $\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(v) $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ اور $\tan\theta = \sqrt{3}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sec\theta = 2$

7. (i) 2 (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\sqrt{2}-1$

(iv) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ (v) $2-\sqrt{3}$ (vi) 4

مشق 30.5

1. $x = 304.85m$ 2. $L = 4\sqrt{3} \approx 6.93m$ 3. $\theta = 60°$

4. $x = 286.86\ m$ 5. $\theta = 24°$

جائزہ مشق 30

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i.	b	ii.	a	iii.	c	iv.	b	v.	b
vi.	a	vii.	b	viii.	c	ix.	b	x.	b

3. $\frac{2821\pi}{7200}$ rad. 4. 120 درجے 5. 120 درجے

6. 54°40'12" 7. $\frac{28}{\pi}cm$ 8. 1 ریڈیان

10. 6 cm^2