یونٹ نمبر 21

جزوی کسور
PARTIAL FRACTION

طلباء کے آزموزشی حاصلات

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- واجب، غیر واجب اور ناطق کسر کی تعریف کر سکیں۔
- ایک الجبری کسر کو جزوی کسوری میں تحلیل کر سکیں جب اس کا مخرج مبنی ہو ایسے
  - یک درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار نہ ہو،
  - یک درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار ہو،
  - دو درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار نہ ہو،
  - دو درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار ہو۔

تعارف: ناطق کسر کو دو یا دو سے زائد کسور کے مجموعہ یا فرق میں توڑا جائے تو اس کسور کو جزوی کسور کہتے ہیں۔ جزوی کسور صرف اس صورت میں ہوتیں ہیں جن کثیر رقمی کے شمار کنندہ کا درجہ لازمی کثیر رقمی کے نسب نما کے درجہ سے کم ہو۔
مثال کے طور پر

(i) $\frac{2x+3}{(x-1)(x+4)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+4}$

(ii) $\frac{-(4x^2+x+11)}{(x^2+1)(x-3)}=\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{5}{x-3}$

21.1 واجب کسور، غیر واجب کسور ناطق کسر کو بیان کرنا

Rational Fraction: ناطق کسر

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{p}{q}$ شکل ناطق عدد کہلاتا ہے
جبکہ $q\neq 0$ اور $p,q\in Z$
اس طرح دو کثیر رقموں کا خارج قیمت ناطق $\frac{P(x)}{Q(x)}, Q(x)\neq 0$ الجبرائی اظہاریہ کہلاتا ہے۔
یہ عام طور پر ناطق کسر کہلاتی ہے۔

مثال:

(i) $\frac{2x^3-5x^2-3x-10}{x^2-1}$ (ii) $\frac{5x+8}{3x^2-2x-1}$

Proper fractions: واجب کسور

ناطق کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ واجب کسر کہلاتی ہے اگر شمار کنندہ $P(x)$ کا درجہ نسب نما $Q(x)$ کے درجے سے کم ہو۔

مثال:

(i) $\frac{9x^2-9x+6}{(x-1)(2x-1)(x+2)}$ (ii) $\frac{6x+27}{3x^3-9x}$

Improper fractions: غیر واجب کسور

ناطق کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ غیر واجب کسر کہلاتی ہے اگر شمار کنندہ $P(x)$ کا درجہ نسب نما $Q(x)$ کے درجے سے بڑا ہے۔

مثال:

(i) $\frac{2x^3-5x^2-3x-10}{x^2-1}$ (ii) $\frac{6x^3-5x^2-7}{3x^2-2x-1}$

(iii) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

مزید کسی بھی غیر واجب کسر کو کثیر رقتی کے مجموعے اور واجب کسر میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

مثلاً

$$\frac{3x^2-2x+1}{x+2}=3x-8+\frac{17}{x+2}.$$

جبکہ $\frac{3x^2-2x+1}{x+2}$ غیر واجب کسر ہے $3x-8$ کثیر رقتی اور $\frac{17}{x+2}$ واجب کسر ہے

غیر واجب کسر کو کثیر رقتی کے مجموعے اور واجب کسر میں تحلیل کرنے کے لیئے شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم دینے کی ضرورت ہوتی ہے۔

21.2 کسر کی جزوی کسور یں تحلیل

ناطق کسر کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے کے لیئے یہ ضروری ہے کہ ناطق کسر لازمی واجب کسر ہو۔ اگر نہیں ہے تو اُسے بذریعہ تقسیم لازمی واجب کسر میں تحلیل کہا جانا چاہیے

21.2. (i) ایک الجبری کسر کی جزوی کسر میں تحلیل جب کہ اس کا مخرج جز ہو۔

یک درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار نہ ہو **Non- repeated linear factors,**

یک درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار ہو **Repeated linear factors,**

دو درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار نہ ہو **Non- repeated quadratic factors,**

دو درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار ہو **Repeated quadratic factors.**

پہلی صورت: مخرج میں یک درجی اجزائے ضربی کی تکرار نہ ہو

$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ ناطق کسر ہے جبکہ اس کا نسب نما $Q(x)$ یک درجی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جس میں تکرار نہیں ہے۔ جسے یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_2).....(x-a_n)$$

اب $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ کو یوں تحلیل کیا جاتا ہے جسے نیچے دیا گیا ہے۔

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\frac{A_3}{x-a_3}+...+\frac{A_n}{x-a_n}.$$

یہاں مستقلات $A_1, A_2, A_3,..., A_n$ معلوم کیئے جاتے ہیں مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 1:

$\frac{11-3x}{(x-1)(x+3)}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں۔

حل:

فرض کریں کہ

$$\frac{11-3x}{(x-1)(x+3)}=\frac{A_1}{(x-1)}+\frac{A_2}{(x+3)}\quad \text{(i)}$$

یہاں A_1 اور A_2 غیر معلوم مستقلات ہیں جو معلوم کیئے جاتے ہیں

مساوات (i) سے

$$\frac{11-3x}{(x-1)(x+3)}=\frac{A_1(x+3)+A_2(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

دونوں اطراف $(x-1)(x+3)$ سے ضرب دینے سے

$$11-3x=A_1(x+3)+A_2(x-1) \quad \text{(ii)}$$

مستقلات A_1 اور A_2 معلوم کرنے ہیں۔ A_1 حاصل کرنے کے لیے x کی قیمت کا انتخاب کیا گیا ہے۔

مساوات (ii) کی دونوں اطراف میں $x=1$ درج کریں

$$11-3(1)=A_1(1+3)+A_2(0)$$

$\Rightarrow \quad 8=4A_1$

$\Rightarrow \quad A_1=2$

A_2 حاصل کرنے کے لیے مساوات (ii) کی دونوں اطراف میں $x=-3$, درج کریں

$$11-3(-3)=A_1(0)+A_2(-3-1)$$

$\Rightarrow \quad 20=-4A_2$

$\Rightarrow \quad A_2=-5$

آخر میں مساوات (ii) میں مستقلات A_1 اور A_2 کی قیمتیں درج کرنے سے

ہم نے حاصل کیا $\quad \frac{11-3x}{(x-1)(x+3)}=\frac{2}{x-1}-\frac{5}{x+3}.$

مثال 2:

$\frac{6x^3+5x^2-7}{2x^2-x-1}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں

حل:

دی گئی ناطق کسر غیر واجب کسر ہے لہٰذا شمار کنندہ کو نسب سے تقسیم کرکے واجب کسر میں تبدیل کیا جاتا ہے۔

$$\frac{6x^3+5x^2-7}{2x^2-x-1}=\frac{6x^3+5x^2-7}{(x-1)(2x+1)}=3x+4+\frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)} \quad \text{(i)}$$

اظہاریہ $\frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے پر غور کریں

فرض کریں $\quad \frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{2x+1} \quad \text{(ii)}$

A_1 اور A_2 نامعلوم مستقلات ہیں جن کو معلوم کیا جاتا ہے

مساوات (ii) سے

$$\frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)}=\frac{A_1(2x+1)+A_2(x-1)}{(x-1)(2x+1)}$$

دونوں اطراف $(x-1)(2x+1)$ کو سے ضرب دینے سے

$$7x-3=A_1(2x+1)+A_2(x-1) \qquad \text{(iii)}$$

مستقلات A_1 اور A_2 معلوم کرتے ہیں

A_1 حاصل کرنے کے لیئے x کی قیمت کا انتخاب کیا گیا ہے

مساوات (iii) میں $x=1,$ درج کریں

ہم نے حاصل کیا $7(1)-3=A_1(2+1)+A_2(0)$

$$4=3A_1$$

$$A_1=\frac{4}{3}$$

A_2 حاصل کرنے کے مساوات (iii) میں $x=-\frac{1}{2},$ درج کریں

ہم نے حاصل کیا $7\left(-\frac{1}{2}\right)-3=A_1(0)+A_2\left(-\frac{1}{2}-1\right)$

$$-\frac{13}{2}=-\frac{3}{2}A_2$$

$$A_2=\frac{13}{3}$$

مساوات (ii) میں مستقلات A_2 اور A_1 کی قیمتیں درج کرنے سے

$$\frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)}=\frac{4}{3(x-1)}+\frac{13}{3(2x+1)}.$$

آخر کار مساوات (i) ہوئی

$$\frac{6x^3+5x^2-7}{2x^2-x-1}=3x+4+\frac{4}{3(x-1)}+\frac{13}{3(2x+1)}.$$

EXERCISE: 21.1 مشق

مندرجہ ذیل کو جزوی کسور میں تحلیل کریں

1. $\dfrac{12}{x^2-9}$
2. $\dfrac{4(x-4)}{x^2-2x-3}$
3. $\dfrac{x^2-3x+6}{x(x-2)(x-1)}$
4. $\dfrac{3(2x^2-8x-1)}{(x+4)(x+1)(2x-1)}$
5. $\dfrac{x^2+9x+8}{x^2+x-6}$
6. $\dfrac{x^2-x-14}{x^2-2x-3}$
7. $\dfrac{3x^3-2x^2-16x+20}{(x-2)(x+2)}$

دوسری صورت II: مخرج میں یک درجی اجزائے ضربی تکرار ہو۔

$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ایک ناطق کسر ہے جبکہ اس کا نصب نما $Q(x)$ یک درجی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے۔ جس میں تکرار ہے جسے یوں $Q(x)=(x-a)^n$ لکھ سکتے ہیں۔

اب $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ یوں تحلیل کیا جاتا ہے۔

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^1}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

مستقلات $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ معلوم کیا جاتا ہے مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعے طریقہ کار کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال ۱:

$\dfrac{2x+3}{(x-2)^2}$ کو جزوی کسر میں تحلیل کریں

حل:

$$\frac{2x+3}{(x-2)^2}=\frac{A_1}{(x-2)}+\frac{A_2}{(x-2)^2} \quad \text{(I)}$$

A_1 اور A_2 غیر معلوم مستقلات ہیں جن کو معلوم کیا جاتا ہے

مساوات (i) سے

$$\frac{2x+3}{(x-2)^2}=\frac{A_1(x-2)+A_2}{(x-2)^2}$$

دونوں اطراف کو $(x-2)^2$ ضرب دینے سے

ہم نے حاصل کیا $2x+3=A_1(x-2)+A_2$

$$2x+3=A_1x-2A_1+A_2 \quad \text{(ii)}$$

A_1 اور A_2 مستقلات معلوم کرنے کے لیئے مساوات (ii) میں x ہم قسم قوتوں کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے ہمیں ملا

$$2=A_1$$

$$3=-2A_1+A_2$$

$$3=-2(2)+A_2 \qquad (\because A_1=2)$$

$$7=A_2$$

آخر میں A_1 اور A_2 کی قیمتیں مساوات (i) میں رکھنے سے

$$\frac{2x+3}{(x-2)^2}=\frac{2}{(x-2)}+\frac{7}{(x-2)^2}.$$

مثال ۲:
$\dfrac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں

حل: فرض کریں

$$\frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}=\frac{A_1}{(x+3)}+\frac{A_2}{(x-1)}+\frac{A_3}{(x-1)^2} \qquad \text{(I)}$$

A_1 ، A_2 اور A_3 غیر معلوم مستقلات میں جنہیں معلوم کیا جاتا ہے

مساوات (I) کی دونوں اطراف کو $(x+3)(x-1)^2$ سے ضرب دینے سے

$$5x^2-2x-19=A_1(x-1)^2+A_2(x+3)(x-1)+A_3(x+3) \qquad \text{(ii)}$$
$$5x^2-2x-19=A_1x^2+2A_1x+A_1+A_2x^2+2A_2x-3A_2+A_3x+3A_3$$
$$5x^2-2x-19=(A_1+A_2)x^2+(A_3+2A_2-2A_1)x+(A_1-3A_2+3A_3) \qquad \text{(iii)}$$

مستقلات A_1, A_2 اور A_3 حاصل کرنے کے لیئے کی x قیمت کا انتخاب کیا گیا ہے A_1 حاصل کرنے کے لیئے

مساوات (ii) کی دونوں اطراف میں $x=-3,$ درج کریں

$$5(-3)^2-2(-3)-19=A_1(-4)^2+A_2(0)(-4)+A_3(0)$$
$$\Rightarrow \quad 32=16A_1$$
$$\Rightarrow \quad A_1=2$$

مساوات (iii) کی دونوں اطراف کی ہم قسم قوتوں کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے،

$$5=A_1+A_2$$
$$\Rightarrow \quad 5=(2)+A_2 \qquad (A_1=2)$$
$$\Rightarrow \quad A_2=3$$

مساوات (iii) میں x کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے،

$$-2=A_3+2(3)-2(2)$$
$$-2=A_3+2$$
$$A_3=-4$$

آخر کار مستقلات A_1, A_2 اور A_3 کی قیمتیں مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$\frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}=\frac{2}{(x+3)}+\frac{3}{(x-1)}-\frac{4}{(x-1)^2}.$$

EXERCISE: 21.2 مشق

جزوی کسور میں تحلیل کریں

1. $\dfrac{4x-3}{(x+1)^2}$

2. $\dfrac{x^2+7x+3}{x^2(x+3)}$

3. $\dfrac{5x^2-30x+44}{(x-2)^3}$

4. $\dfrac{18+21x-x^2}{(x-5)(x+2)^2}$

5. $\dfrac{x^2-x+3}{(x-1)^3}$

تیسری صورت: مخرج میں دو درجی اجزائے ضربی کی تکرار نہ ہو

$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ایک ناطق کسر ہے جبکہ اس کا مخرج $Q(x)$ دو درجی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جس میں تکرار نہیں ہے۔

اب $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ یوں تحلیل کیا جاتا ہے

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+A_2}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_3x+A_4}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\ldots+\frac{A_{2n-1}x+A_{2n}}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

مستقلات $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n}$ معلوم کیا جاتا ہے

مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 1: $\dfrac{7x^2+5x+13}{(x+1)(x^2+2)}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں

حل: فرض کریں

$$\frac{7x^2+5x+13}{(x+1)(x^2+2)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2x+A_3}{x^2+2} \qquad \text{(i)}$$

نامعلوم مستقلات A_1، A_2 اور A_3 معلوم کرنے ہیں

مساوات (i) کی دونوں اطراف $(x+1)(x^2+2)$ کو سے ضرب دینے سے

$$7x^2+5x+13=A_1(x^2+2)+(A_2x+A_3)(x+1) \qquad \text{(ii)}$$

$$7x^2+5x+13=A_1x^2+2A_1+A_2x^2+A_2x+A_3x+A_3$$

$$7x^2+5x+13=(A_1+A_2)x^2+(A_2+A_3)x+(2A_1+A_3) \qquad \text{(iii)}$$

مستقلات A_1، A_2 اور A_3 معلوم کرنے میں A_1 حاصل کرنے کے لیئے مساوات (ii) میں $x=-1,$ درج کریں

$$7(-1)^2+5(-1)+13=A_1((-1)^2+2)+(A_2(-1)+A_3)(-1+1)$$

$$\Rightarrow \quad 15=3A_1$$

$$\Rightarrow \quad A_1=5$$

مساوات (iii) کی دونوں اطراف کی ہم قسم قوتوں کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

$7=(A_1+A_2)$ ، $5=(A_2+A_3)$

$7=(5+A_2)$ $\quad \Rightarrow \quad 5=(2+A_3)$

$2=A_2$ $\quad \Rightarrow \quad 3=A$

آخر میں مستقلات A_1، A_2 اور A_3 کی قیمتیں درج کرنے سے ہمیں ملا

$$\frac{7x^2+5x+13}{(x+1)(x^2+2)}=\frac{5}{(x+1)}+\frac{2x+3}{(x^2+2)}.$$

مثال 2: $\dfrac{2x+7}{(x^2+3)(x^2+6)}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں

حل:

فرض کریں

$$\frac{2x+7}{(x^2+3)(x^2+6)}=\frac{A_1x+A_2}{x^2+3}+\frac{A_3x+A_4}{x^2+6} \qquad \text{(i)}$$

یہاں غیر معلوم مستقلات A_1، A_2، A_3 اور A_4 معلوم کرتے ہیں

مساوات (i) دونوں اطراف $(x^2+3)(x^2+6)$ کو سے ضرب دینے سے

$$\Rightarrow 2x+7=(x^2+6)(A_1x+A_2)+(x^2+3)(A_3x+A_4)$$

$$\Rightarrow 2x+7=(A_1+A_3)x^3+(A_2+A_4)x^2+(6A_1+3A_3)x+(6A_2+3A_4) \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (ii) کی دونوں اطراف کی ہم قسم قوتوں کے عددی سروں کو موازنہ کرنے سے ہمیں ملا

$$A_1+A_3=0 \qquad \text{(iii)}$$
$$A_2+A_4=0 \qquad \text{(iv)}$$
$$6A_1+3A_3=2 \qquad \text{(v)}$$
$$6A_2+3A_4=7 \qquad \text{(vi)}$$

مساوات (i) اور مساوات (iv) ساتھ ساتھ حل کرنے سے ہمیں ملا۔ $A_3=-\dfrac{2}{3}$ اور $A_1=\dfrac{2}{3}$,

اسی طرح۔ $A_4=-\dfrac{7}{3}$ $\quad A_2=\dfrac{7}{3}$

آخر میں مستقلات A_1, A_2, A_3 اور A_4 کی قیمتیں مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$\frac{2x+7}{(x^2+3)(x^2+6)}=\frac{\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}}{x^2+3}+\frac{-\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}}{x^2+6}=\frac{2x+7}{3(x^2+3)}-\frac{2x+7}{3(x^2+6)}.$$

مشق EXERCISE: 21.3

جزوی کسور میں تحلیل کریں

1. $\dfrac{x^2-x-13}{(x^2+7)(x-2)}$
2. $\dfrac{6x-5}{(x^2+10)(x+1)}$
3. $\dfrac{15+5x+5x^2-4x^3}{x^2(x^2+5)}$
4. $\dfrac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+3)}$
5. $\dfrac{x^2-x+2}{(x+1)(x^2+3)}$

چوتھی صورت: مخرج میں دو درجی اجزائے ضربی کی تکرار ہو۔

فرض کریں $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ایک ناطق کسر ہے اس کا مخرج $Q(x)$ ناقابل تخفیف دو درجی اجزائے ضربی ہے جن میں تکرار ہے۔ مختصر کرنے کی غرض سے اسے لیا گیا ہے۔ $Q(x)=(ax^2+bx+c)^n$

اب $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ یوں تحلیل کیا جاتا ہے

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+A_2}{ax^2+bx+c}+\frac{A_3x+A_4}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_{2n-1}x+A_{2n}}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

یہاں مستقلات $A_1, A_2, A_3,\ldots, A_n$ معلوم کئے جاتے ہیں

مندرجہ ذیل مثالوں سے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 1: $\dfrac{5x^2+2}{(x^2+x+1)^2}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں

حل: فرض کریں

$$\frac{5x^2+2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{A_1x+A_2}{x^2+x+1}+\frac{A_3x+A_4}{(x^2+x+1)^2} \qquad \text{(i)}$$

یہاں A_1, A_2, A_3 اور A_4 غیر معلوم مستقلات اور معلوم کرنے ہیں

مساوات (i) کی دونوں اطراف کو $(x^2+x+1)^2$ سے ضرب دینے سے

$$5x^2+2=(x^2+x+1)(A_1x+A_2)+A_3x+A_4$$

$$5x^2+2=x^3A_1+x^2A_1+x^2A_2+xA_1+xA_2+xA_3+A_2+A_4$$

$$0.x^3+5x^2+0.x+2=x^3A_1+x^2(A_1+A_2)+x(A_1+A_2+A_3)+(A_2+A_4) \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (ii) کی دونوں اطراف کی ہم قسم قوتوں کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

$$A_1=0 \qquad \text{(iii)}$$

$$A_1+A_2=5 \qquad \text{(iv)}$$

$$A_1+A_2+A_3=0 \qquad \text{(v)}$$

$$A_2+A_4=2 \qquad \text{(vi)}$$

مساوات (iv) میں $A_1=0,$ درج کرنے سے ہمیں $A_2=5.$ ملا

اس طرح مساوات (v) میں A_1 اور A_2 کی قیمتیں درج کرنے سے ہمیں ملا

$$0+5+A_3=0$$

$$\Rightarrow \qquad A_3=-5$$

دوبارہ، مساوات (vi) میں A_2 کی قیمت درج کرنے سے

$$5+A_4=2$$

$$\Rightarrow \qquad A_4=-3$$

آخر میں مساوات (i), میں مستقلات A_1, A_2, A_3 اور A_4 قیمتیں مساوات (i) میں درج کرنے سے ہمیں ملا

$$\frac{5x^2+2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{0.x+5}{x^2+x+1}+\frac{-5x-3}{(x^2+x+1)^2}.$$

مثال 2:

$\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)^2}$ کو جزوی کسر میں تحلیل کریں

حل:

فرض کریں

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2x+A_3}{\left(x^2+1\right)}+\frac{A_4x+A_5}{\left(x^2+1\right)^2} \qquad (i)$$

یہاں A_1, A_2, A_3, A_4 اور A_5 نامعلوم مستقلات معلوم کئے جانے ہیں

مساوات (i) کی دونوں اطراف کو $x\left(x^2+1\right)^2$ سے ضرب دینے سے

$$x^4+x^3+x^2+x+1=A_1\left(x^2+1\right)^2+x\left(A_2x+A_3\right)\left(x^2+1\right)+x\left(A_4x+A_5\right)$$

$$x^4+x^3+x^2+x+1=A_1x^4+2A_1x^2+A_1+A_2x^4+A_2x^2+A_3x^3+A_3x+A_4x^2+A_5x$$

$$x^4+x^3+x^2+x+1=\left(A_1+A_2\right)x^4+A_3x^3+\left(2A_1+A_2+A_4\right)x^2+\left(A_3+A_5\right)x+A_1 \qquad \text{(ii)}$$

مستقلات A_1, A_2, A_3, A_4 اور A_5 معلوم کرنے کے لیے ہم مساوات (i) کی ہم قسم قوتوں کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے ہمیں ملا

$$1=A_1+A_2 \qquad \text{(iii)}$$
$$1=A_3 \qquad \text{(iv)}$$
$$1=2A_1+A_2+A_4 \qquad \text{(v)}$$
$$1=A_3+A_5 \qquad \text{(vi)}$$
$$1=A_1 \qquad \text{(vii)}$$

مساوات (iii) میں A_1 کی قیمت درج کرنے سے

$$1=A_1+A_2$$
$$\Rightarrow \quad 1=\left(1+A_2\right)$$
$$\Rightarrow \quad 0=A_2$$

مساوات (vi) میں A_3 کی قیمت درج کرنے سے

$$1=1+A_5$$
$$0=A_5$$

مساوات (v) میں A_1 اور A_2 کی قیمت درج کرنے سے

$$1=2(1)+(0)+A_4$$
$$-1=A_4$$

آخر میں مساوات (i) میں A_1, A_2, A_3, A_4 اور A_5 قیمتیں درج کرنے سے ہمیں ملا

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{\left(x^2+1\right)}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

EXERCISE: 21.4 مشق

مندرجہ ذیل جزوی کسور میں تحلیل کریں

1. $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2(1-x)}$ 2. $\dfrac{x^2+x+2}{x^2(x^2+3)^2}$ 3. $\dfrac{x^2}{(1+x)(1+x^2)^2}$

4. $\dfrac{7}{(x+1)(2+x^2)^2}$ 5. $\dfrac{49}{(x-2)(3+x^2)^2}$

REVIEW EXERCISE 21 اعادہ مشق

1. درست جواب پر نشان لگائیں

i. غیر واجب کسر کو واجب میں تبدیل کیا جا سکتا ہے بذریعہ ________

(a) جمع (b) ضرب

(c) تفریق (d) تقسیم

ii. $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ کی جزوی کسر ________ ہو سکتی ہے

(a) $\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x+b}+\dfrac{C}{x+c}$ (b) $\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}$

(c) $\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x+c}$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

iii. $\dfrac{x-3}{x^3+3x}$ کا جزوی کسر ________ ہے

(a) $\dfrac{-1}{x}-\dfrac{x-1}{x^2+3}$ (b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+1}{x^2+3}$

(c) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x+1}{x^2+3}$ (d) $\dfrac{-1}{x}+\dfrac{x+1}{x^2+3}$

iv. $\dfrac{x^3+1}{(x-1)(x+2)}$ ایک ________ ہے

(a) واجب کسر (b) غیر واجب کسر

(c) اکائی (d) متقل رقم

v. کسر $\dfrac{2x+5}{x^2+5x+6}$ ________ جانی جاتی ہے۔

(a) واجب (b) غیر واجب (c) دونوں واجب اور غیر واجب (d) ان میں سے کوئی نہیں

2. واجب غیر واجب اور ناطق کسور کی تعریف بیان کریں

3. مندرجہ ذیل دی گئی کسور کو جزوی کسور میں تحلیل کریں

(i) $\dfrac{5x+8}{(x-1)(x+2)}$ (ii) $\dfrac{9x^2+5x+7}{x(x+2)(x-5)}$

(iii) $\dfrac{x^2+2x+3}{(x^2+1)(x-2)}$ (iv) $\dfrac{x^3+8x^2+9}{(x^2+x+1)(x+1)}$

(v) $\dfrac{x+5}{(x^2+1)^2(x-3)}$ (vi) $\dfrac{7x+3}{(x-1)^2(x+2)}$