22 یونٹ

بنیادی شماریات
BASIC STATISTICS

طلباء کے سیکھنے کے نتائج

اس یونٹ کو مکمل کرنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- تعددی تقسیم (Frequency distribution) کے بارے میں جانیں اور یہ بھی سیکھیں کہ:
  - ایک گروہی تعدد جدول (Group Frequency Table) کی تشکیل کرنا
  - مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشے (Histogram) کی تشکیل کرنا
  - غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشے کی تشکیل کرنا
  - تعددی کثیر الاضلاع (Frequency Polygon) کی تشکیل کرنا۔
- مجموعی تعددی تقسیم (Cumulative frequency distribution) کے بارے میں جانیں اور یہ بھی سیکھیں کہ:
  - مجموعی تعددی جدول بنانا
  - مجموعی تعددی کثیر الاضلاع بنانا
- مرکزی رجحان کے پیمانوں (Measures of Central Tendency) کے بارے میں جانیں اور یہ سیکھیں کہ:
  - حساب کرنا (گروہی (Grouped) اور غیر گروہی (Ungrouped) مواد (Data) کے لیئے):
  - حسابی اوسط بذریعہ تعریف اور فرضی اوسط سے انحراف (Deviation) کا استعمال کرتے ہوئے۔
  - وسطانیہ (Median)، عادہ (Mode)، ہندسی اوسط (Geometric mean) اور ہم آہنگ اوسط (Harmonic mean)
- حسابی اوسط کی خصوصیات کی شناخت کرنا۔
- وزنی اوسط (Weighted mean) اور متحرک اوسط (Moving mean) کا حساب کرنا۔
- وسطانیہ، چوتھائی (Quartile)، عادہ کا تخمینہ گراف سے لگانا
- انتشاری پیمانوں (Measure of dispersion) کے بارے میں جانیں اور یہ سیکھیں کہ:
  - وسعت (Range) کی وضاحت، شناخت اور پیمائش کرنا، تغیر (Variable)، اوسط انحراف (Mean deviation) اور معیاری انحراف (Standard deviation) کا حساب لگانا۔

تعارف:

شماریات ریاضی کی ایک اہم شاخ ہے جو بامعنیٰ بصیرت اور نمونے حاصل کرنے کے مواد (Data) کی جمع، تنظیم، نمائندگی، تشریح اور تجزیہ سے متعلق ہے جو دانشمندانہ فیصلے لینے اور مؤثر حکمتِ عملی بنانے میں مدد کرتی ہے۔ ہم درجہ بندی کے بنیادی تصورات، تصوری نمائندگی اور سادہ مواد کے مرکزی رجحان کے کچھ پیمانوں کو پہلے ہی جانتے ہیں۔ یہاں ہم ان کو مزید تفصیل سے دریافت کرتے ہیں اور تصورات کو متحرک اوسط اور انتشاری پیمانوں کی طرف بڑھاتے ہیں۔

مواد کسی بھی شماریاتی تحقیقات کی بنیاد ہے اور سوالات پوچھ کر، گنتی اور پیمائش کر کے، رپورٹس، خبروں، مضامین کا حوالہ دے کر دلچسپی کے متغیرات (Variables) پر مواد جمع کیا جاتا ہے۔ مواد کی بالکل بنیادی شکل خام مواد ہے، جو غیر درجہ بند / غیر گروہی ہے اور اس سے کوئی واضح نتیجہ اخذ کرنا مشکل ہے۔ اس طرح کا مواد سروے، انٹرویوز کے سوالنامے کا استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ جسے مواد کے بنیادی ذرائع بھی کہا جاتا ہے۔ خام / غیر گروہی مواد کی درجہ بندی اور ترتیب کے بعد ہم گروہی / درجہ بند مواد کے ذریعے مفید معلومات حاصل کر سکتے ہیں۔ اخبارات، رپورٹس اور مضامین کو ثانوی ذرائع کے طور پر لیا جاتا ہے۔ کیونکہ یہ درجہ بند مواد کی طرف لے جاتے ہیں۔

مواد کو دو اقسام میں تقسیم کیا گیا ہے: خاصیتی (قطعی) یا مقداری (عددی) جنس، بلڈ گروپ، ابرو کا رنگ، درجات، رول نمبر کا مواد خاصیتی مواد ہے۔۔ جبکہ اونچائی، وزن، تنخواہ، حل کی pH اقدار، کمپنی کا سالانہ منافع، کسی مضمون میں طلباء کے نمبر وغیرہ کا مواد مقداری مواد ہے۔

خاصیتی مواد میں مشاہدات کسی عددی اہمیت کے بغیر خالصتاً صفات ہیں، لیکن ان میں درجہ بندی / ترتیب ہو بھی سکتی ہے یا نہیں بھی۔ خاصیتی مواد جس میں آرڈرنگ نہیں ہوتی وہ نومینل (Nominal) ہیں، باقی تمام آرڈینل (Ordinal) ہیں، جنس، خون کا گروپ، آنکھوں کا رنگ، مذہب نومینل مواد ہیں۔ مثال کے طور پر ہم مشاہدات کی بنا پر مرد / عورت کی درجہ بندی نہیں کر سکتے کہ کون زیادہ یا کم ہے۔ طلباء کے گریڈز (A، B، C، فیل) کا مواد، خوراک کا معیار (بہترین، اچھا، منصفانہ، برا، بدترین) کی درجہ بندی کی جا سکتی ہے، اور آرڈینل مواد کی طرف جایا جا سکتا ہے۔

مقداری اعداد و شمار میں مشاہدات عددی اہمیت اور ترتیب کے ساتھ اعداد ہوتے ہیں۔ اعداد صرف عددی یا اعشاریہ شکل میں بھی ہو سکتے ہیں۔ اگر مقداری مواد میں مشاہدات صرف عددی ہیں تو مواد غیر مسلسل (Discrete) ہے۔ ورنہ مسلسل (Continuous) ہے۔ تنخواہ کا مواد (روپوں میں)، اسکول میں فی کلاس طالباء کی تعداد، 4 سکے بیک وقت پھینکتے ہوئے سروں کی تعداد غیر مسلسل مواد ہے۔ اونچائیوں، وزنوں pH کی قدروں کی پیمائش کا مواد مسلسل مواد ہے۔

مواد کی اقسام کے درمیان فرق کرنا انتہائی ضروری ہے تاکہ مواد اعداد و شمار کے مزید تجزیہ کے لیے شماریاتی ٹیسٹ یا کسی اشارے کی پیمائش کرنے کے لیے بہترین طریقے سے استعمال کیا جا سکے۔

22.1 تعددی تقسیم (Frequency distribution):

زیادہ تعداد میں مشاہدات کی ساتھ غیر گروہی مواد سے بامعنی معلومات نکالنے کے لیے ہم مواد کو چھوٹی جماعتوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ جماعتوں کو ایک ہی جگہ پر تمام ملتے جلتے مشاہدات کو شامل کرنے کے لیے بنایا گیا ہے۔ غیر مسلسل جماعتیں ایک عدد / صفت پر

مشتمل ہوتی ہیں جبکہ مسلسل جماعتوں میں تعداد کی ایک حد ہوتی ہے۔ کسی خاص جماعت میں گرنے والے مشاہدات کی تعداد کو اس کا تعدد (Frequency) کہا جاتا ہے۔

تعددی تقسیم گروہی مواد کی ٹیبلر تفصیل ہے، جس میں جماعتیں اور ان کا نسبتاً تعدد (Relative frequency) شامل ہوتے ہیں۔

تعددی تقسیم میں ترتیب دیا گیا مواد غیر گروہی / خام مواد کے مقابلے بنیادی تجزیہ کے لیے واضح سمجھ فراہم کرتا ہے۔

کسی بھی جماعت کی نسبتاً اور فیصد تعدد (percentage frequency)

بالترتیب $\left(\frac{f}{n}\right)$ اور $\left(\frac{f}{n}\times 100\right)$ ہیں، یہاں پر مشاہدات کی کل تعداد ہے۔ تمام نسبتاً تعدد کا مجموعہ 1 ہے، اور فیصد تعدد 100 ہے۔

(i) 22.1 گروہی تعدد جدول (Grouped Frequency Table) تشکیل کرنا:

گروپی تعدد جدول یا تعددی تقسیم بنانے کا طریقہ کار اس بات پر منحصر کرتا ہے کہ ہم گروپوں / جماعتیں کیسے بناتے ہیں ہم تعمیر کے درج ذیل دو طریقوں پر بات کرتے ہیں۔

(a) غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ تعدد جدول:

غیر مسلسل جماعتیں ایسی جماعتوں حوالہ دیتی ہیں جن میں صرف ایک نمبر / خصوصیت شامل ہوتی ہے۔ ہم غیر مسلسل جماعتیں صرف اس وقت استعمال کرتے ہیں جب اعداد و شمار میں کم مشاہدات زیادہ بار دہرائیں۔ غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ تعدد جدول کو غیر مسلسل تعدد جدول بھی کہا جاتا ہے۔ اگر ضرورت ہو تو آخر میں نسبتاً اور فیصد تعدد کو بھی جدول میں شامل کیا جاتا ہے۔

دیئے ہوئے ڈیٹا سیٹ کی مدد سے ہم تین کالموں پر مشتمل غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ تعدد جدول بنانے کے لیے درج ذیل مراحل پر عمل کرتے ہیں۔

1- غیر مسلسل مشاہدات کو جماعتوں کی بنا پر شناخت کریں اور اگر مواد نومینل ہے تو اسے پہلے کالم میں کسی بھی ترتیب سے لکھیں۔ آرڈینل اور مقداری مواد کے لیے، جماعتوں کو صعودی (Ascending) ترتیب میں لکھیں۔

2- دوسرے کالم میں مواد کو جماعتوں میں تقسیم کرنے کے لیے ٹیلی کے نشانات کا استعمال کریں۔

3- تیسرے کالم میں ہر جماعت کا تعدد لکھنے کے لیے ٹیلی کے نشانات کا شمار کریں۔

مثال 1: ایک کلاس کے 30 طلباء کے خون کے گروپس کی تعدد جدول بنائیں۔

A+ O- B+ A+ A- AB+ B– O– O + A- A+ AB- A+ O+ B+
B+ O+ B+O- AB+O- A+ AB+ A+ O+ B- O+ A- AB- O+

حل:

یہاں n=30 اور مواد نومینل ہے۔ آٹھ مسلسل بلڈ گروپ یہ ہیں: A+, AB+, O+, B-, AB- اور O- جو کہ پہلے کالم میں لکھے گئے ہیں۔ اعداد و شمار کی تقسیم کے لیے دوسرے کالم میں ٹیلی کے نشانات درج ہیں اور ان کو استعمال کرتے ہوئے تیسرے کالم میں طلباء کی تعداد کو لکھ کر ہم مطلوبہ گروہی تعدد جدول کی تشکیل کرتے ہیں۔

گروپی تعدد جدول

جماعتیں/ گروہ "بلڈ گروپس"	ٹیلی کے نشانات	تعدد "طلباء کی تعداد"
A+	𝍸 |	6
B+	𝍸	5
AB+	|||	3
O+	𝍸 ||	7
A–	|||	3
B–	|	1
AB–	||	2
O–	|||	3
کل	---	$n = 30$

مثال 2: ایک شاپنگ مال میں 40 تصادفی طور پر منتخب صارفین سے جب یہ پوچھا گیا کہ "آپ خدمات سے کتنا مطمئن ہیں؟" تو ان کے جوابات درج ذیل ہیں۔ ان کے جوابات کا گروپی تعدد جدول بنائیں۔ نسبتا اور فیصد تعدد بھی معلوم کریں۔

نہیں بہت	بہت	بالکل بھی نہیں	کسی حد تک	بہت	نہیں بہت	نہیں بہت	بہت
کسی حد تک	بہت	نہیں بہت	بہت	بہت	بہت	یقین نہیں	بہت
کسی حد تک	نہیں بہت	بہت	بہت	بہت	بالکل بھی نہیں	بہت	یقین نہیں
بہت	بہت	بہت	یقین نہیں	نہیں بہت	نہیں بہت	یقین نہیں	بالکل بھی نہیں
کسی حد تک	بہت	یقین نہیں	نہیں بہت	کسی حد تک	بہت	کسی حد تک	بہت

حل: یہاں n=40 اور مواد آرڈینل ہے۔ صعوی ترتیب میں اطمینان کے پانچ الگ درجے (سب سے کم سے بلند ترین) جماعتیں ہیں۔ ٹیلی کے نشانات اور تعدد کے ساتھ ہم گروہی تعدد جدول حاصل کرتے ہیں۔ نسبتا اور فیصد تعدد کو بھی چوتھے اور پانچویں کالم میں شمار کیا گیا ہے۔

جماعتیں / گروپس اطمینان کے درجے	ٹیلی کے نشانات	تعدد (f)	نسبتا تعدد $\left(\frac{f}{n}\right)$	% فیصد تعدد $\left(\frac{f}{n}\times 100\right)$
بالکل بھی نہیں	$\vert\vert\vert$	3	$\frac{3}{40}=0.075$	$\frac{3}{40}\times 100 = 7.5$
نہیں بہت	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert\vert$	8	0.2	20
یقین نہیں	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$	5	0.125	12.5
کسی حد تک	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert$	6	0.15	15
بہت	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert\vert$	18	0.45	45
کل	---	$n = 40$	1	100

نوٹ:

(a) مثال 2 کے گروپی تعدد جدول سے ہم بآسانی یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ صارفین کی زیادہ تعداد "بہت مطمئن" تھی اور کم تعداد "بالکل بھی مطمئن" نہیں تھی۔

(b) 40 میں سے 18 کے بجائے یہ کہنا زیادہ مناسب اور قابل فہم ہے کہ 45 ٪ صارفین بہت مطمئن تھے۔

مثال 3: ایک شہر کے 45 خاندانوں کے جوابات جب ان سے ان کے استعمال کردہ موبائلوں کی تعداد کے بارے میں پوچھا گیا تو ان کے جوابات درج ذیل ہیں۔ جوابات کی ایک غیر مسلسل تعدد جدول بنائیں۔ جوابات کی نسبتا اور فیصد تعدد بھی معلوم کریں۔

3 1 3 2 2 2 2 1 2 1 2 2 3 3 3 3 4 1 3 0 2 4 3

3 3 2 3 2 2 5 1 6 1 6 2 1 5 3 2 4 2 4 7 4 2

حل: یہاں n=45 اور مواد مقداری اور خصوصاً غیر مسلسل ہے۔ مواد میں اعداد و شمار کی صعودی ترتیب کے الگ الگ نمبر یہ ہیں۔

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 جو کم ہیں اور بار بار دہرائے گئے ہیں۔ پہلے کالم میں یہ 8 جماعتیں ہیں۔

دوسرے کالم میں گن کر ٹیلی کے نشانات لگائیں۔ تیسرے کالم میں تعدد کا شمار کریں تاکہ 45 خاندانوں کے موبائلوں کا جدول غیر مسلسل تعدد جدول حاصل کر سکیں۔

غیر مسلسل تعدد جدول

جماعتیں / گروہ موبائلوں کی تعداد	ٹیلی کے نشانات	تعدد خاندانوں کی تعداد
0	|	1
1	𝍸 ||	7
2	𝍸 𝍸 𝍸	15
3	𝍸 𝍸 ||	12
4	𝍸	5
5	||	2
6	||	2
7	|	1
کل	---	$n = 45$

مثال4: کولڈ رنک کی مقدار کو ایک کمپنی کی 20 تصادفی طور پر منتخب کردہ 1.5L بوتلوں میں ماپا گیا جیسا کہ ذیل میں دیا گیا ہے۔ کولڈ رنک کی پیائش شدہ مقدار کا ایک غیر مسلسل تعدد جدول بنائیں۔ نسبتاً اور فیصد تعدد بھی معلوم کریں۔

1.48	1.51	1.50	1.49	1.49	1.49	1.51	1.48	1.49	1.52
1 51	1 49	1 51	1 50	1 50	1 50	1 51	1 49	1 49	1 50

حل: مواد مقداری ہیں اور خصوصاً مسلسل الگ الگ نمبر یہ ہیں 1.52, 1.51, 1.50, 1.49, 1.48(صعوی ترتیب میں) پانچ جماعتیں ہیں۔ ٹیلی کے نشانات اور تعدد کے ساتھ ہمیں غیر مسلسل تعدد جدول حاصل ہوتا ہے۔ نسبتاً اور فیصد تعدد کو بھی چوتھے اور پانچویں کالم میں شمار کیا گیا ہے۔

جماعتوں کی حد "کولڈ رنک کی مقدار"	ٹیلی کے نشانات	تعدد "بوتلوں کی تعداد"	نسبتاً تعدد $\left(\frac{f}{n}\right)$	% فیصد تعدد $\left(\frac{f}{n}\times 100\right)$
1.48	||	2	$\frac{2}{20} = 0.1$	$\frac{2}{20}\times 100 = 10$
1.49	𝍸 ||	7	0.35	35
1.50	𝍸	5	0.25	25
1.51	𝍸	5	0.25	25
1.52	|	1	0.05	5
کل	---	$n = 20$	1	100

(b) مسلسل جماعتوں کے ساتھ تعدد جدول:

جب مواد مقداری (غیر مسلسل یا مسلسل) ہو اور مشاہدات کو کم تکرار اور زیادہ تغیرات کے ساتھ تعداد کی حد میں تقسیم کرنا ہو تو پھر ہم مسلسل جماعتیں استعمال کرتے ہیں۔ یہ جماعتیں واحد عدد نہیں ہیں بلکہ اعداد کی ایک رینج جن میں سے ہر ایک چند اعداد پر مشتمل ہوتی ہے جو اس جماعت کی حد میں آتے ہیں۔ ایک مسلسل تعدد جدول مسلسل جماعتوں اور ان کے نسبتاً تعدد پر مشتمل ہوتا ہے۔
ہم نے پہلے ہی پچھلی کلاس میں غیر مسلسل مواد کے لیے تعددی تقسیم کا مطالعہ کیا ہے۔ یہاں ہم کسی بھی اعشاری نمبر کے ساتھ غیر

مسلسل اور مسلسل مواد کے لیے بنیادی تصورات کو عام اور استعمال کریں گے۔ ہم پہلے کچھ اہم اصطلاحات کو یاد کرتے ہیں اور ان کی وضاحت کرتے ہیں جو طریقہ کار میں فعال طور پر استعمال ہوتی ہیں۔

وسعت (Range): دیئے گئے مواد میں سب سے زیادہ اور سب سے کم مشاہدے کے درمیان فرق کو وسعت کہتے ہیں۔

وسعت = {سب سے زیادہ مشاہدہ} - {سب سے کم مشاہدہ} ...(1)

جماعتی حدود (Class Limits): یہ وہ اعداد ہیں جو کسی جماعت کی شناخت کے لیے استعمال ہوتے ہیں ہر جماعت کا سب سے چھوٹا عدد اس کی زیریں جماعتی حد (Lower Class Limit(LCL) کہلاتا ہے اور سب سے بڑا عدد اس جماعت کا بلائی جماعتی حد (Upper class limit(UCL) کہلاتا ہے۔ LCL سے UCL تک کے مشاہدات ایک خاص جماعت میں آتے ہیں۔

جماعتی وقفہ / چوڑائی (Class Internal/width): اس کی تعریف جماعت کے سائز / لمبائی کے طور پر کی جاتی ہے، اور کسی بھی دولگاتار LCLs یا UCLs کے درمیان فرق تلاش کر کے اس کو معلوم کیا جاتا ہے ہم عام طور پر جماعت کی مستقل چوڑائی / وقفے کے لیے 'h' استعمال کرتے ہیں اور تمام جماعتوں کے لیے h اس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔

$$h=\frac{1}{10^m}\left\lceil \frac{R}{K}\times 10^m \right\rceil \quad ...(2)$$

یہاں پر K جماعتوں کی تعداد ہے، R وسعت ہے اور m مشاہدات میں زیادہ سے زیادہ اعشاریہ مقامات کی تعداد ہے۔
اگر مواد غیر مسلسل ہے، تو m=0 اگر مواد ایک اعشاریہ تک کی قدروں کے ساتھ مسلسل ہے، تو m=1 وغیرہ $\lceil\ \rceil$ یہ حتمی عددی قدر حاصل کرنے کے لیے زیادہ سے زیادہ حد کا تخمینہ ظاہر کرتا ہے۔ ایک عدد کی حد وہی عدد ہے، جبکہ اعشاریہ عدد کی حد اس سے فوراً بڑا عدد کے۔
مثال کے طور پر: $\lceil 4\rceil=4$، $\lceil 1.6\rceil=2$، $\lceil 1.9\rceil=2$، $\lceil 7.5\rceil=8$

جماعتوں کی تعداد (K):

جماعتوں کی تعداد کو K سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ مشاہدات کی تعداد اور وسعت کے لحاظ سے 5 سے 15 تک ہوتی ہے۔ اسے احتیاط سے منتخب کرنا چاہیے، اگر نہیں دیا گیا ہو، K کی بہت زیادہ قدر کے نتیجے میں ناقص گروہ بندی اور معلومات کا نقصان ہوتا ہے ایچ اسٹر جس (1926) نے مشاہدات (n) کی تعداد کا استعمال کرتے ہوئے جماعتوں کی مطلوبہ تعداد K کا حساب لگانے کے لیے اصول تجویز کیا۔ اسٹر جس اصول کی تعریف اس طرح کی گئی ہے۔

$$K=\lceil 1+3.322\log(n)\rceil \quad ...(3)$$

یہاں پر، Log(n) بیس 10 کے ساتھ n کا لاگر تھم ہے اور یہاں پر $\lceil\ \rceil$ زیادہ سے زیادہ حد کا تخمینہ ہے۔ یہ واضح رہے کہ اسٹر س اصول $15\le n\le 200$ کے لیئے زیادہ موثر ہے۔ مثال کے طور پر، اگر n=25
جماعتیں $K=\lceil 1+3.322\log(25)\rceil=\lceil 5.6439\rceil=6$

جماعتوں کے درمیان فاصلہ (d):

جماعتوں کے درمیان فاصلہ (d) ایک جماعت کے LCL اور اگلی جماعت کے VCL کے درمیان مستقل فرق کو کہتے ہیں، اگر m جماعتوں کے درمیان زیادہ سے زیادہ اعشاریہ ہندسوں کی تعداد ہے، تو:

$$d=\frac{1}{10^m},\ m=0,1,2,... \quad ...(4)$$

غیر مسلسل مواد کے لیئے m=o اور d=1، اگر مواد اعشاریہ کے بعد ایک ہندسہ تک دیا جائے تو m=1، اور d=0.1 دو اعشاریہ تک کے مواد کے لیے $m=2$ $d=0.01$

مسلسل تعدد جدول بنانے کا طریقہ کار:

مقداری مواد کے مسلسل تعدد جدول بنانے کا طریقہ کار یہ ہے:

1- مشاہدات کی تعداد (n) نوٹ کریں اور مواد کی قسم کو شناخت کریں: غیر مسلسل یا مسلسل اس کے علاوہ مواد میں اعشاری مقامات کی زیادہ سے زیادہ تعداد (m) کو نوٹ کریں۔

2- مساوات (1) کا استعمال کرتے ہوئے وسعت کا حساب لگائیں۔ اسٹر جس کے اصول کا استعمال کرتے ہوئے کلاسز کے تعداد (K) مساوات (3) کے ذریعے معلوم کریں اگر نہیں دی گئی۔

3- مساوات (2) کا استعمال کرتے ہوئے جماعتی وقفہ (h) اور مساوات (4) کا استعمال کرتے ہوئے جماعت کے درمیان کا وقفہ (d) کا حساب لگائیں۔ انتہائی حالات میں، ہمیں "h+d" کو جماعت کی چوڑائی کے طور پر لینا پڑے گا یا ایک اور جماعت کا اضافہ کرنا پڑے گا۔

4- اس بات کو یقینی بنانے کے لیے جماعتی حدود کا تعین کریں کہ تمام مشاہدات K جماعتوں میں شامل ہیں۔ ہم LCL شروع کرنے کے طور پر سب سے کم مشاہدے کا بھی استعمال کرسکتے ہیں۔ شروعاتی UCL یہ ہے: UCL = LCL + h-d باقی جماعتوں کے LCLs اور UCLs لگاتار پہلی جماعت کے LCL اور UCL میں L کا اضافہ کرتے ہوئے شمار کریں۔

5- مسلسل تعدد جدول کے پہلے کالم میں جماعت کی حدود کو بطور جماعت لکھیں۔

6- دوسرے کالم میں مواد کو جماعتوں میں تقسیم کرنے کے لیے ٹیلی کے نشانات / فہرست اندراجات کا استعمال کریں۔ ٹیلی کے نشانات کو ترجیح دی جاتی ہے۔

7- تیسرے کالم میں تمام جماعتوں کا تعدد لکھنے کے لیے ٹیلی کے نشانات یا اندراجات شمار کریں۔

مثال 1:

ایک دکان میں بجلی کی کھپت (KWH میں) مسلسل 60 دنوں تک نوٹ کی گئی جیسا کہ ذیل میں بتایا گیا ہے، ٹیلی کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے تعددی تقسیم بنائیں۔

106	107	76	82	109	107	115	93	187	95	139	119	115	128	115
123	125	111	92	86	70	126	$\boxed{68}$	130	129	194	82	90	158	118
123	146	80	136	137	110	141	152	104	111	140	184	$\boxed{204}$	178	75
113	162	131	99	185	181	84	486	100	98	148	90	110	107	78

حل: یہاں n=60 اور مواد غیر مسلسل ہے۔ $R = 204 - 68 = 136$, $m = 0$ اسٹر جس اصول استعمال کرتے ہوئے جماعتوں کی تعداد معلوم کرتے ہیں۔

$$K = \lceil 1 + 3.322 \log(60) \rceil = \lceil 6.9070 \rceil = 7.$$

$$h = \left\lceil \frac{136}{7} \right\rceil = \lceil 19.4285 \rceil = 20, \text{ اور } d = 1.$$

ابتدائی LCL =68 اور ابتدائی UCL = 68+20−1 =87 ان میں h=20 کو شامل کرنے سے ہمیں دیگر تمام حدود مل جاتی ہیں۔ پہلے کالم میں جماعتی حدیں، دوسرے میں ٹیلی کے نشانات اور تیسرے میں تعدد لکھنے سے ہمیں مطلوبہ تعدد جدول ملتا ہے۔

تعدد جدول

جماعتی حدود	ٹیلی کے نشانات	تعدد
68 – 87	𝍸 𝍸	10
88 – 107	𝍸 𝍸 |||	13
108 – 127	𝍸 𝍸 𝍸	15
128 – 147	𝍸 𝍸	10
148 – 167	||||	4
168 – 187	𝍸		6
188 – 207	||	2
کل	---	$n = 60$

مثال2: تار کی ریل کے قطر (ملی میٹر میں) 24 مقامات پر درست سے قریب ترین 0.01mm ملی میٹر پر ماپا جاتا ہے:

2.10, 2.29, 2.32, 2.21, 2.14, 2.22, 2.28, 2.18, 2.17, 2.20, 2.23, 2.13, 2.26, 2.10, 2.21, 2.17, 2.28, 2.15, 2.34, 2.27, 2.11, 2.23, 2.25, 2.16.

تعددی تقسیم کی تعمیر کریں

حل: n=24 ہے اور مواد اعشاریہ کے دو ہندسوں تک مسلسل ہے۔ اس لیے $m = 2$ اور

$$K = [1 + 3.322\log(24)] = 6 \quad \text{اور} \quad R = 2.34 - 2.10 = 0.24$$

$$d = \frac{1}{100} = 0.01, \quad h = \frac{1}{100}\left[\frac{R}{K}\times 100\right] = 0.04$$

ابتدائی LCL=2.10 اور h=0.04, 6 جماعتیں یہ ہیں:

2.10- 2.13, 2.14- 2.17, 2.18-2.21, 2.22-2.25, 2.26-2.29, 2.30-2.33

لیکن 2.34 کو کسی بھی جماعت میں شامل نہیں کیا جا سکتا۔ اس انتہائی صورت میں ہم جماعت کی چوڑائی h+d=0.05 استعمال کرتے ہیں۔ مطلوبہ 6 جماعتیں یہ ہیں: 2.10- 2.14, 2.15-2.19, 2. 2o-2.24, 2.25-2.29, 2.30-2.34,2.35-2.39

اور قطر کی مطلوبہ تعددی تقسیم یہ ہے:

تعدد جدول

جماعتی حدود	2.10 – 2.14	2.15 – 2.19	2.20 – 2.24	2.25 – 2.29	2.30 – 2.34	2.35 – 2.39	کل
ٹیلی کے نشانات	|||	卌	卌 |	卌 |	|||		---
تعدد	3	5	6	6	3	0	$n = 24$

نوٹ: مثال 2 میں ہم 2.34 کو شامل کرنے کے لیئے صرف ایک اور جماعت کو بھی شامل کر سکتے ہیں۔

جماعتی حدود	2.10 – 2.13	2.14 – 2.17	2.18 – 2.21	2.22 – 2.25	2.26 – 2.29	2.30 -2.33	2.34 – 2.37
ٹیلی کے نشانات	||||	卌	||||	||||	卌	|	|
تعدد	4	5	4	4	5	1	1

مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی تعدد جدول میں کچھ اور اہم اصطلاحات یہ ہیں:

حقیقی جماعتی حدود (Class Boundaries): وہ اعداد جو جماعت کو ملحقہ جماعتوں سے الگ کرتے ہیں انہیں حقیقی جماعتی حدود ہیں، ایک جماعت کے لیے اس کی زیریں حقیقی جماعتی حد (Lower Class boundary (LCB)) اور اس جماعت کی بالائی جماعتی حد (Upper Class boundary (UCB)) بالترتیب اس جماعت کے LCL اور UCL سے حاصل کی جاتی ہیں جیسا کہ:

ایک جماعت کے لیے $LCB = LCL - \frac{d}{2}$ اور $UCB = UCL + \frac{d}{2}$ یہاں پر، d جماعتوں کے درمیان فاصلہ ہے۔

جماعتی نشان / وسطی نقاط (Class Marks/Mid Points):

جماعتی نشان / وسطی نقاط، جو کہ x کے طور پر ظاہر کئے جاتے ہیں، دراصل زیریں جماعتی حد (LCL) اور بالائی جماعتی حد جو (UCL) یا زیریں حقیقی جماعتی حد (LCB) اور بالائی حقیقی جماعتی حد (UCB) کی اوسط ہے۔

ایک جماعت کے لیے $x = \frac{LCL+UCL}{2}$ یا $x = \frac{LCB+UCB}{2}$

مجموعی تعدد (Cumulative Frequency):

Cumulative لفظ کا مطلب ہے کچھ بڑھنے کے بعد لگاتار اضافہ ہونا اگر ہم ایک کے بعد ایک جماعت کے تعدد ات جوڑتے چلے جائیں، ہر بار کل میں اگلی جماعت کا تعدد شامل کریں تو ہمیں مجموعی تعدد مل جاتا ہے۔ کسی خاص جماعت کے لیے، مجموعی تعدد اس جماعت تک کی تمام تعددات کا مجموعہ ہے۔

مثال 3: نیچے دی گئی تعدد جدول کے لیئے حقیقی جماعتی حدود، جماعتی نشان اور مجموعی تعدد معلوم کریں۔

جماعتی حدود	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.8	8.9-9.1
تعدد	3	5	9	14	11	6	2

حل: یہاں پر، n=50 اور d=0.1 ہے۔ حقیقی جماعتی حدود، جماعتی نشان اور مجموعی تعدد مندرجہ ذیل جدول میں شمار کیئے گئے ہیں۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی نشان	تعدادات	مجموعی تعدادات
7.1-7.3	7.05-7.35	7.2	3	3
7.4-7.6	7.35-7.65	7.5	5	3+5=8
7.7-7.9	7.65-7.95	7.8	9	17
8.0-8.2	7.95-8.25	8.1	14	31
8.3-8.5	8.25-8.55	8.4	11	42
8.6-8.8	8.55-8.85	8.7	6	48
8.9-9.1	8.85-9.15	9.0	2	n = 50
کل	----	----	**n = 50**	----

نوٹ:

1- ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ایک جماعت کا UCB اور اگلی جماعت کا LCB ایک جیسا ہے۔
2- ابتدائی LCB میں لگاتار h کا اضافہ کرنے سے ہمیں باقی تمام حقیقی جماعتی حدود حاصل ہو جائیں گی۔
3- ہم ابتدائی جماعتی نشان میں h کا اضافہ کرکے باقی تمام جماعتی نشانات حاصل کرسکتے ہیں۔
4- آخری جماعت کی مجموعی تعدد مشاہدات کی کل تعداد ہے۔

مشق 22.1

1- درج ذیل میں مواد کی قسم (غیر مسلسل / مسلسل / نومینل / آرڈینل) اور مشاہدات کی کل تعداد معلوم کریں:

a. 30 دنوں کے لیے ایک شاپنگ مال میں روزانہ آنے والوں کی تعداد۔
b. وقت (فی دن منٹوں میں) ایک شخص نے ایک مہینے تک جم میں گزارا۔
c. 45 کار بیٹریوں کی زندگی (سالوں میں)
d. 2 ماہ کے لیے بجلی کی کھپت (کلوواٹ فی دن میں)
e. ایک کلاس میں 55 طلباء کا وزن (کلوگرام میں)
f. 20 افراد کے ابرو کے رنگ
g. ایک کلاس میں 70 طلباء کے حاصل کردہ گریڈز
h. 10 افراد کے COVID تشخیصی ٹیسٹ کا نتیجہ (مثبت / منفی)
i. ایک اسکول کے 30 اساتذہ کی ازواجی حیثیت
j. آپ کی کلاس کے طلباء کے ڈومیسائیل کا ضلع

2- اسکول سے ملکی دورے پر جانے والے 20 طلباء کے تعلیمی سطح (مطالعہ کی موجودہ کلاس) کا گروہی تعدد جدول بنائیں تعلیمی سطحیں یہ ہیں:

X, IX, VI, VIII, X, X, VIII, VII, IV, V, VI, IX, VI, VIII, VII, VIII, X, IX, IX, IX

3- لینگویج کورس میں شرکت کے لیے 20 طلباء کی طرف سے استعمال کیئے جانے والے نقل و حمل کا طریقہ ذیل میں دیا گیا ہے۔ فیصد تعدد کے ساتھ گروہی تعدد جدول بنائیں۔

بس	پیدل چلنا	پیدل چلنا	بائیک	پیدل چلنا	کار	بس	بائیک	پیدل چلنا	پیدل چلنا
بس	بس	کار	کار	بس	پیدل چلنا	پیدل چلنا	کار	بس	کار

4- 40 خاندانوں کے جوابات کی درجہ بندی ایک گروہی تعددی تقسیم میں کریں کہ وہ کتنی کثرت سے چھٹیاں شہر سے باہر گزارتے ہیں۔ متعلقہ تعدد بھی معلوم کریں۔

اکثر	ہمیشہ	بہت کم	کبھی نہیں	کبھی کبھی	اکثر	بہت کم	کبھی نہیں
کبھی کبھی	کبھی نہیں	بہت کم	کبھی کبھی	ہمیشہ	کبھی کبھی	کبھی کبھی	کبھی کبھی
کبھی نہیں	اکثر	اکثر	کبھی کبھی	ہمیشہ	ہمیشہ	کبھی کبھی	کبھی کبھی
اکثر	اکثر	ہمیشہ	بہت کم	ہمیشہ	کبھی کبھی	بہت کم	اکثر
ہمیشہ	اکثر	کبھی نہیں	کبھی نہیں	کبھی کبھی	ہمیشہ	کبھی نہیں	ہمیشہ

5- مختلف اسکولوں کے پریفیکٹس کی ٹوپی کا تعدد جدول منظم کریں۔

ہرا	بھورا	بھورا	کالا	نیلا	ہرا	بھورا	کالا	نیلا	کالا
لال	کالا	ہرا	لال	نیلا	لال	کالا	لال	ہرا	نیلا

6- ایک کلاس ٹیسٹ میں سے 25 طلباء کے 5 میں حاصل کردہ نمبر یہ تھے: 4.0, 0.5, 4.5, 1.0, 3.5, 3.5, 5.0, 0.5, 4.0,
2.5, 1.0, 2.0, 4.0, 3.5, 0.0, 3.0, 5.0, 1.0, 2.0, 2.0, 4.5, 2.5, 3.0, 3.5, 1.5
غیر مسلسل جماعتوں اور متعلقہ تعدد کے ساتھ تعدد جدول بنائیں۔

7- ٹیسٹ سے ایک دن پہلی کس ویب سائیٹ سے ٹیچر کے لیکچرز کو فی گھنٹہ کتنی بار ڈاؤن لوڈ کیا تھا اس کے نتائج یہ تھے:
1, 1, 2, 1, 3, 3, 4, 1, 4, 1, 2, 3, 3, 2, 4, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 0, 0, 1
مواد کی ایک غیر مسلسل تعدد جدول میں درجہ بندی کریں۔

8- 18 دنوں کے لیئے کلاس میں غیر حاضرین کی تعداد کی مسلسل جماعتوں کے ساتھ تعددی تقسیم بنائیں۔
4, 3, 0, 1, 2, 5, 6, 8, 10, 7, 11, 15, 13, 14, 3, 4, 12, 12

9- 40 کالج طلباء کے قریب ترین پاؤنڈ میں ریکارڈ وزن کی مسلسل تعددی تقسیم بنائیں۔ 138, 148, 146, 146, 119, 164, 152,
173, 158, 154, 150, 144, 142, 140, 165, 132,150, 147, 147, 153, 144, 156, 135, 126, 140, 125, 168,
157, 138, 135, 149, 136, 135, 142, 161, 145,176, 163, 145, 128
حقیقی جماعتی حدود جماعتی نشان اور مجموعی تعدد بھی معلوم کریں:

10- ایک جیسی قدر کے 48 ریزسٹرس کے بیچ میں مزاحمت قدر کی اوہم (OHM) میں یہ ہیں
21.0, 22.4, 22.8, 21.5, 22.6, 21.1, 21.6, 22.3, 22.9, 20.5, 21.8, 22.2, 21.0, 21.7, 22.5, 20.7, 23.2,
22.9, 21.7, 21.4, 22.1, 22.2, 22.3, 21.3, 22.1, 21.8, 22.0, 22.7, 21.7, 21.9, 21.1, 22.6, 21.4, 22.4,
22.3, 20.9, 22.8, 21.2, 22.7,21.6, 22.2, 21.6, 21.3, 22.1, 21.5, 22.0, 23.4, 21.2.
مسلسل تعدد جدول بنائیں۔ اس کے علاوہ، مجموعی اور فیصد تعدد بھی معلوم کریں۔

11- دھات کے 50 بلاکس کا ماس (کلوگرام میں) قریب ترین 0.1 کلوگرام تک جمع کیا گیا جو جہ ذیل میں درج ہیں- ماس کی تعددی تقسیم بنائیں اور متعلقہ اور فیصد شمار کریں۔

8.0	8.3	7.7	8.1	7.4	8.6	7.1	8.4	7.4	8.2	8.4	8.8	7.9	8.1	8.2	7.5	8.3
8.8	8.0	7.7	8.3	8.2	7.9	8.5	7.9	8.0	8.4	7.2	8.7	8.0	9.1	8.5	7.6	8.2
7.8	7.8	8.7	8.5	8.4	8.5	8.1	7.8	8.2	7.7	7.5	8.5	8.1	7.3	9.0	8.6	

22.1(ii) مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشہ (Histogram) بنانا:

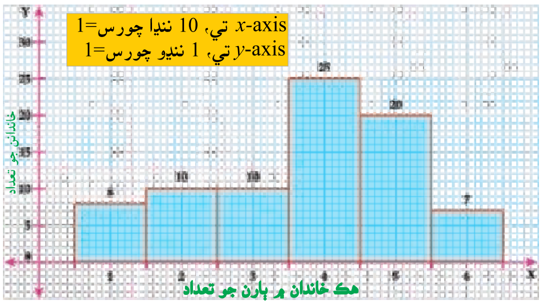
کالمی نقشے کو غیر مسلسل اور مسلسل جماعتوں اور متعلقہ تصورات کے ساتھ تعدد جدولوں کا استعمال کرتے ہوئے مقداری اعداد و شمار کی گرافیکل نمائندگی کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ ایک کالمی نقشہ ملحقہ مستطیلوں کا استعمال کرتے ہوئے بنایا جاتا ہے جس میں

مستطیلوں کی بنیادیں نمبروں کی تقسیم کے ذریعے نشان زد ہوتی ہیں اور مستطیلوں کی اونچائی جماعتی تعدد کے متناسب ہوتی ہیں۔
مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشے میں، مستطیل کا علاقہ اور اونچائی دونوں تعدد کے متناسب ہوتے ہیں۔
غیر مسلسل تعدد جدولوں کے مطابق کالمی نقشے میں مستطیل کی بنیادیں اعداد و شمار میں الگ الگ نمبروں کی نمائندگی کرتی ہیں اور اونچائیوں کو عام طور پر جماعتوں کے تعدد کے طور پر لیا جاتا ہے۔ مستطیلوں کی چوڑائی ایک مقررہ وقفے کے ساتھ لی جاتی ہے۔
مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ مسلسل تعدد جدولوں کے مطابق کالمی نقشے میں مستطیل کی بنیادیں جماعتی حدود کی نمائندگی کرتی ہیں اور اونچائیوں کو عام طور پر جماعتوں کے تعدد کے طور پر لیا جاتا ہے۔ مستطیلوں کی چوڑائی جماعتی وقفے کے برابر لی جاتی ہے۔
کالمی نقشہ کھینچتے وقت محوروں کو واضح طور پر لیبل کیا جانا چاہیے اور پیمانے کی وضاحت کی جانی چاہیے۔ x محور کا O سے شروع ہونا ضروری نہیں ہے۔ Y محور کو O سے شروع ہونا چاہیے تعدد کو مستطیلوں کے اوپر بھی نشان زد کیا جانا چاہیے۔ کالمی نقشے کھینچنے کے طریقہ کار کی وضاحت درج ذیل مثالوں میں کی گئی ہے

مثال 1: 80 خاندانوں کے درج ذیل مواد کا استعمال کرتے ہوئے گاؤں میں فی خاندان بچوں کی تعداد کے لیے کالمی نقشہ بنائیں۔

ایک خاندان میں بچوں کی تعداد	1	2	3	4	5	6
خاندانوں کی تعداد	8	10	10	25	20	7

حل: یہاں مواد ایک غیر مسلسل تعداد جدول کی نمائندگی کرتا ہے۔ x محور پر الگ الگ اعداد 1, 2, 3, 4, 5, 6 سب ایک مقررہ وقفے کے ساتھ مختلف جماعتوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ پھر Y محور پر "O" سے شروع ہونے والی تعدادات کو 25 تک کی تمام تعدادات کو شامل کرنے کے لیے موزوں پیمانے کے ساتھ لکھیں۔ الگ الگ اعداد پر مستطیل کھینچتے ہوئے مساوی چوڑائی اور تعدادات کے برابر اونچائی ہے ہمیں درج ذیل کالمی نقشہ ملتا ہے۔ محوروں کا لیبل لگا ہوا ہے اور پیمانے کی وضاحت کی گئی ہے۔

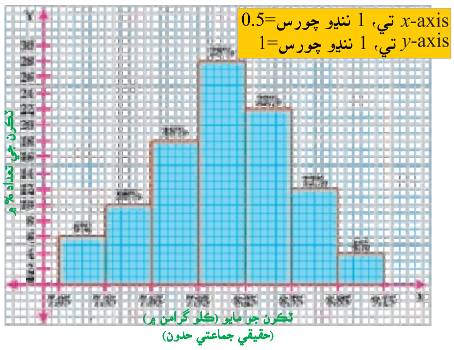


مثال 2: درج ذیل تقسیم کے لیے فیصد تعدد کالمی نقشہ بنائیں

بلاکس کا ماس (کلو گرام میں)	7.1 - 7.3	7.4 - 76	7.7 - 7.9	8.0 - 8.2	8.3 - 8.5	8.6 - 8.8	8.9 - 9.1
بلاکس کی تعداد	3	5	9	14	11	6	2

حل: دیئے گئے مسلسل تعدد جدول میں اعشاریہ کے بعد ایک ہندسے تک مسلسل مواد ہے، لہٰذا $m = 1, n = 50$ اور $d = 0.1$ جماعتی حدود یہ ہیں: 7.65 - 7.95 ،7.35 - 7.65 ،7.05 - 7.35 ،8.85 - 9.15 ،8.55 - 8.85 ،8.25 - 8.55 ،7.95 - 8.25

ان کو x محور پر لکھنا ہے۔ اسی طرح متعلقہ فیصد تعدادات 4, 12, 22. 28, 18, 10, 6 کو Y محور پر متعلقہ پیمانوں کے ساتھ لکھیں۔ باؤنڈری کی بنیاد پر ملحقہ مستطیلیں کھینچتے ہوئے، چوڑائی h=0.3 اور اونچائی فیصد تعدد کے برابر کرنے سے ہمیں مطلوبہ فیصد تعدد ملتا ہے۔



(iii) 22.1 غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشہ بنانا:

غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشے کی صورت میں ملحقہ مستطیل اس لیے بنایا گیا ہے کہ صرف ان کے علاقے (اونچائی نہیں) تعداد کے متناسب ہوں۔ ایسا کرنے کے لیے ہم علاقوں اور تعدد کو یقینی بنانے کے لیے مستطیلوں کی ترتیب شدہ اونچائیوں کی وضاحت کرتے ہیں۔ اگر f^* کسی جماعت کا تعداد اور h^* اس کی چوڑائی ہو تو پھر:

(1) $\qquad \dfrac{f^*}{h^*} =$ مستطیل کی ترتیب شدہ اونچائی

(2) $\qquad f^* = \dfrac{f^*}{h^*} \times h^* =$ تاکہ، مستطیل کا رقبہ–چوڑائی–اونچائی۔

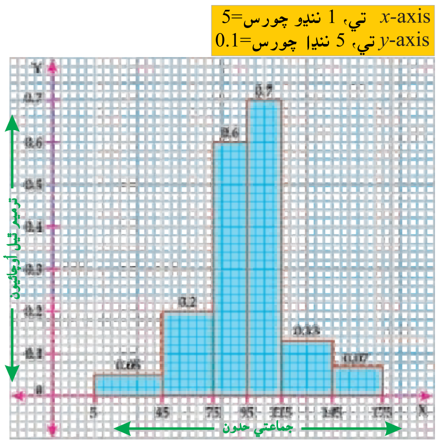
(1) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ترتیب شدہ اونچائیاں f کے متناسب نہیں ہیں، لیکن (2) میں رقبہ اس ضرورت کو پورا کرتا ہی، کالمی نقشے کو غیر مساوی جماعتی، وقفور کے ساتھ بنانے کے مراحل پہلے کی طرح ہی ہیں، لیکن ہمیں Y محور پر ترتیب شدہ اونچائیاں لکھنی چاہیئے۔

مثال: غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ درج ذیل مواد کے لیے کالمی نقشہ بنائیں:

جماعتی حدود	10 - 40	50 - 70	80 - 90	100 - 110	120 - 140	150 - 170
تعداد	2	6	12	14	4	2

حل: ہم مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ دیا گیا مواد غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ تعدد جدول دکھاتا ہے، ہم سب سے پہلے جماعتی حدود اور ترتیب شدہ اونچائیوں کا شمار کرتے ہیں۔ یہاں $d = 10$ ہے۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی وقفے (h^*)	تعداد (f^*)	مستطیلوں کی ترتیب شدہ اونچائی (f^* / h^*)
10 – 40	5-45	40	2	$\frac{2}{40} = 0.05$
50 – 70	45-75	30	6	$\frac{6}{30} = 0.2$
80 – 90	75-95	20	12	0.6
100 – 110	95-115	20	14	0.7
120-140	115-145	30	4	≈ 0.13
150-170	145-175	30	2	≈ 0.07



X محور پر جماعتی حدود اور y محور پر ترتیب شدہ اونچائیوں کو لکھتے ہوئے ہم تمام جماعتوں کے لیے مستطیل کھینچتے ہیں جن کی چوڑائی غیر مساوی جماعتی وقفوں کے برابر ہوتی ہے اور اونچائی مندرجہ بالا جدول میں شمار کردہ ترتیب شدہ اونچائی کے برابر ہوتی ہے۔ اس طرح ہمیں غیر مساوی وقفوں کے ساتھ مطلوبہ کالمی نقشہ ملتا ہے۔

ہر تصدیق کرسکتے ہیں کہ یہاں مستطیل کے علاقے متناسب ہیں اور خاص طور پر تعدادت کے برابر ہیں۔

$40 \times 0.05 = 2 =$ مستطیل کا رقبہ -1

$30 \times 0.2 = 6 =$ مستطیل کا رقبہ -2

$20 \times 0.6 = 12 =$ مستطیل کا رقبہ -3 اور اسی طرح

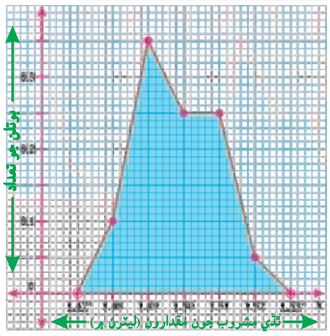
(iv)22.1 تعددی کثیر الاضلاع (Frequency Polygon) بنانا:

تعدادی کثیر الاضلاع تعددی تقسیم میں گروہی مقداری مواد کی گرافیکل نمائندگی کا ایک اور طریقہ ہے۔ ہم اکثر اخبارات میں (خاص طور پر کاروباری حصے میں)، موسم کی پیش گوئی کی خبروں میں، اور کرکٹ میچ کے اعداد و شمار میں ایسے گراف دیکھتے ہیں کثیر الاضلاع لفظ سے مراد پلین (Plane) میں بند ایسی شکل ہے جو کم از کم تین قطعات کو جوڑ کر بنتی ہے مثال کے طور پر، مثلث، مربع، پینٹاگون، وغیرہ یہاں ہم یہ سیکھیں گے کہ یہ ہندسی تصور تعددی تقسیم سے کیسے متعلق ہے۔ تعددی کثیر الاضلاع کا استعمال جدید شماریاتی تجزیہ میں تقسیم کی شکل کے شناخت کے لیے لیا جاتا ہے۔

تعددی کثیر الاضلاع بنانے کے لیے نکات (x,y) کو پلات کیا جاتا ہے، جہاں x کورڈینیٹ (abscissas) جماعتی نشان ہوتے ہیں اور Y کورڈینیٹ (ordinates) جماعتی تعدد ہوتے ہیں دوم ہم دو ڈمی (dumny) جماعتوں کا اضافہ کرتے ہیں، ایک شروع میں اور ایک آخر میں O تعدد کے ساتھ اور x محور پر ان کے لیے متعلقہ نکات کو نشان زد کرتے ہیں آخر میں ہم مطلوبہ بند شکل حاصل کرنے کے لیے گراف پر بکھرے ہوئے نکات کو جوڑتے ہیں، جس سے ہمیں تعددی کثیر الاضلاع ملتا ہے، جس کی بنیاد x محور پر ہوتی ہے اور چوٹیاں تعدد ظاہر کرتی ہے وضاحت کے لیے، بھرے ہوئے نمبر (●) اصلی جماعتوں کے نکات اور خالی نمبر (o) ڈمی جماعتوں کے نکات کو ظاہر کرتے ہیں۔ محوروں پر لیبل لگانا لازمی ہے اور مناسب پیمانے کی وضاحت کریں۔

مثال 1: درج ذیل مواد کے لیئے ایک نسبتا تعددی کثیر الاضلاع کھینچیں۔

x-axis تي، 5 ننيو چورس=0.01
y-axis تي، 5 ننيو چورس=0.05



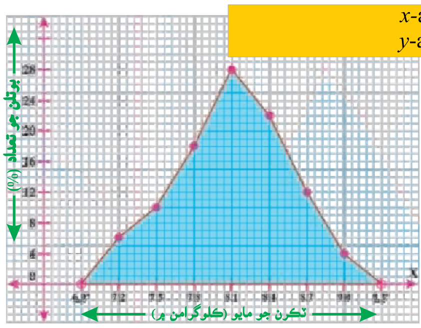
کولڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: دیا گیا مواد غیر مسلسل تعدد جدول ظاہر کرتا ہے۔ الگ الگ عدد: 1.52, 1.51, 1.50, 1.49, 1.48 جماعتی نشان (x) ہیں اور 1, 5, 5, 7, 2 تعدد (y) ہیں سب سے پہلے ہم نسبتا تعدد کا شمار کرتے ہیں، جو یہ ہیں 0.35, 0.25, 0.25, 0.1 اور 0.05 دو ڈمی جماعتوں کے ساتھ پلاٹ لیے گئے نکات یہ ہیں (1.47*, 0)، (1.48,0.1)، (1.49, 0.35)، (1.50, 0.25)، (1.51,0.25)، (1.52,0.05) اور (1.53*0) قطعات کے ذریعے نکات کو جوڑتے ہوئے ہیں نسبتاً تعددی کثیر الاضلاع ملتا ہے۔

مثال 2: درج ذیل تقسیم کے لیئے فیصد تعددی کثیر الاضلاع کھینچیں۔

بلاک کا ماس (کلوگرام میں)	7.1 - 7.3	7.4 - 7.6	7.7 - 7.9	8.0 - 8.2	8.3 – 8.5	8.6 – 8.8	8.9 – 9.1
بلاک کی تعداد	3	5	9	14	11	6	2

x-axis
y-axis



حل: مواد مساوی جماعتی وقفہ h=0.3 کے ساتھ مسلسل تعددی تقسیم ظاہر کرتا ہے، پلاٹ کے نکات (x,y) ہیں، جہاں x جماعتی نشانات کو ظاہر کرتا ہے 7.2، 7.5، 7.8، 8.1، 8.4، 8.7، 9.0 اور y فیصد تعدد ہے 18, 4، 10, 6 12, 22,28

دو ڈمی جماعتی نشانات کو شامل کریں اور مطلوبہ فیصد تعددی کثیر الاضلاع ان کے ذریعے پلاٹ کیا جائے:

(6.9*, 0)، (7.2, 6)، (7.5, 10)، (7.8, 18)، (8.1, 28)، (8.4, 22)، (8.7,12)، (9.0,4) اور (9.3*, 0) مناسب پیمانوں کو مدنظر رکھا جائے۔

22.2 مجموعی تعددی تقسیم:

مجموعی تعددی تقسیم ایک جدول ہے جس میں مجموعی تعدد کی جماعتوں کی شمار کی گئی تعدد کی گنتی کی جاتی ہے۔ ہم تعدد کا شمار پہلے ہی جانتے ہیں۔ وہ مجموعی تعدد جو UCB سے کم مشاہدات کی تعداد کو جمع کرنے سے حاصل ہوا ہے مجموعی تعددات سے (LESS THAN COMUTATIVEFREQUENCY) کہا جاتا ہے، یہ 0 سے شروع ہوتی ہیں اور مشاہدات کی کل تعداد (n) پر ختم ہوتی ہے۔ ہمیں لازمی جماعتوں میں ایک ڈمی UCB شامل کرنی ہے، 0 مجموعی تعدد کے ساتھ مجموعی تعددات سے زیادہ (Greater than commutative frequency) حساب لگانے کے لیئے ہم LCB سے زیادہ جماعتوں والے مشاہدات کو جمع کرتے ہیں یہ n سے شروع ہوتی ہیں اور 0 پر ختم ہوتی ہیں۔ لیکن عام طور پر ہم "مجموعی تعددات سے کم" کو استعمال کرتے ہیں۔ آنے والی بحث میں، آسانی کے لیئے ہم "مجموعی تعدد" کے بجائے "مجموعی تعددات سے کم" کو استعمال کریں گے۔

(i) 22.2 ایک مجموعی تعدد جدول بنائیں:

گروہی مقداری مواد کے مجموعی تعدد جدول بنانے کی مراحل یہ ہیں:

1- بالائی جماعتی حدود اور مجموعی تعددات حاصل کریں۔

2- 0 مجموعی تعدد کے ساتھ شروع میں ایک ڈمی بالائی جماعتی حدود شامل کریں۔

3- متعلقہ مجموعی تعدد کے ساتھ تمام UCBs کو ظاہر کرنے کے لیئے ایک جدول بنائیں۔

مثال 1: درج ذیل مواد کا استعمال کرتے ہوئے ایک مجموعی تعدد جدول بنائیں:

طلباء کے مارکس	1	2	3	4	5
طلباء کی تعداد	2	5	4	3	1

حل: دیئے گئے مواد سے غیر مسلسل تعددی تقسیم ظاہر ہوتی ہے یہاں d=1 اور n=15 ہے۔ CBs حاصل کرنے کے لیے جماعتی حدود میں $\frac{d}{2}$ کا اضافہ کریں اور پھر ہم مجموعی تعددات حاصل کرتے ہیں: U مجموعی تعددات "0" کے ساتھ 0.5 کے برابر شروع میں ایک ڈمی UCB شامل کرنا لازمی ہے۔ مطلوبہ مجموعی تعدد جدول یہ ہے۔

مجموعی تعددات	تعددات	UCBs	جماعتیں
2	2	1.5	1
7	5	2.5	2
11	4	3.5	3
14	3	4.5	4
15 = n	1	5.5	5

طلباء کے مارکس (UCB) سے کم	0.5*	1.5	2.5	3.5	4.5	4.5
طلباء کی تعداد (مجموعی تعدات)	0	2	7	11	14	15

مثال 2: بجلی کی گھپت کے مواد کے لیئے مجموعی تعدد جدول بنائیں:

بجلی کی گھپت (kw14)	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: دیا گیا مواد ایک مسلسل تعددی تقسیم کو ظاہر کرتا ہے۔ یہاں d=1 اور n=60 ہیں۔ UCBs یہ ہیں: 87.5, 107.5, 127.5, 147.5, 147.5, 187.5 اور 207.5 ایک ڈمی UCB 67.5* کا اضافہ شروع میں کر کے ہمیں مندرجہ ذیل مجموعی تعدد جدول حاصل ہوتا ہے۔

بجلی کی گھپت (KwH) سے کم	67.5*	87.5	107.5	127.5	147.5	167.5	187.5	207.5
دنوں کی تعداد	0	10	23	38	48	52	58	60

(ii) 22.2 مجموعی تعددی کثیر الاضلاع بنائیں:

مجموعی تعددی تقسیم کو گرافی طور پر ایک مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کے ذریعے دکھایا جاتا ہے۔ جسے اوگیو (Ogive) بھی کہتے ہیں۔ ہم مجموعی تعدد جدول (x:UCBs اور y مجموعی تعددات) کے نکات (x, y) کی منصوبہ بندی شروع کرتے ہیں، پھر ان کو قطعات کے ذریعے جوڑتے ہیں۔ آخر میں، ہم بند شکل حاصل کرنے کے لیے x محور پر چوٹی کے نقطے سے ایک عمود کھینچتے ہیں، جو کہ مطلوبہ Ogive یا مجموعی تعددی کثیر الاضلاع ہے۔

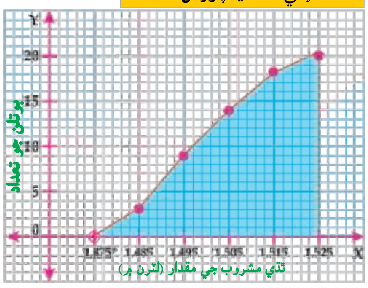
مثال 1: درج ذیل مواد کے لیئے ایک اوگیو (مجموعی تعددی کثیر الاضلاع) بنائیں

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: یہاں n=20 اور d=0.01 ہے۔ UCBs اور مجموعی تعددات کو شمار کرتے ہوئے ہم مجموعی تعدد جدول حاصل کرتے ہوئے ہم مجموعی تعدد جدول حاصل کرتے ہیں، جہاں 1.475 ایک ڈمی شروع ہونے والا UCB ہے۔

کولڈ ڈرنک مقدار (لیٹر میں)	1.475*	1.485	1.495	1.505	1.515	1.525
بوتلوں کی تعداد	0	2	9	14	19	20

x-axis تي، 5 ننڍا چورس =0.01
y-axis تي، 2 ننڍا چورس =5

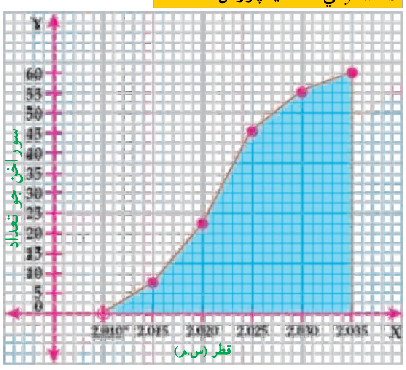


اب ہم نکات (1.475*, 0)، (1.485, 2)، (1.495,9)، (1.505, 14)، (1.515, 19) اور (1.525, 20) کو گراف پر پلاٹ کرتے ہیں، ان کو قطعات کے ذریعے جوڑتے ہیں اور آخر میں مطلوبہ مجموعی تعددی کثیر الاضلاع یا اوگیو حاصل کرنے کے لیے x محور کی طرف آخری نقطے سے ایک عمود بناتے ہیں۔ محوروں کو واضح پیمانوں کی مدد سے لیبل کیا گیا ہے۔

مثال 2: انن میں بور ہونے والے 60 سوراخوں کے قطر (سنٹی میٹر میں) کاسٹنگ جیسے ایک خاص مطالعے میں ماپے گئے ہیں۔ مندرجہ ذیل تقسیم کے لیئے مجموعی تعددی کثیر الاضلاع بنائیں۔

قطر (cm)	2.011– 2.014	2.016 – 2.019	2.021 - 2.024	2.026 – 2.029	2.031 – 2.034
سوراخوں کی تعداد	7	16	23	9	5

x-axis تي، 1 ننڍو چورس =0.001
y-axis تي، 2 ننڍا چورس =5



حل: دیئے گئے مسلسل تعدد جدول میں n=60 اور d=0. 002 ہے۔ UCBs اور مجموعی تعددات کا استعمال کرتے ہوئے ہم ان نکات کے ساتھ مجموعی تعدد جدول حاصل کرتے ہیں:

(2.010*)، (2.010,7)، (2.020,23)، (2.025,46)، (2.030,55) اور (2.035,60)

یہ نکات مطلوبہ اوگیو یا مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کی طرف لے جاتے ہیں۔

مشق 22.2

1- مندرجہ ذیل مواد کے لیئے فیصد کالمی نقشہ، تعددی کثیر الاضلاع مجموعی تعدد جدول اور اوگیو بنائیں۔

طلباء کے مارکس	1	2	3	4	5
طلباء کی تعداد	2	5	4	3	1

2- مندرجہ ذیل مواد کے لیئے ایک غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشہ بنائیں۔

جماعتی حدود	0-39	40-49	50-79	80-99
تعدادت	6	8	12	4

3- مندرجہ ذیل جدول کے لیئے کالمی نقشہ، تعددی کثیر الاضلاع مجموعی تعدد جدول اور اوگیو بنائیں۔

ایک ہفتے میں کمائی گئی رقم	20-40	50-70	80-90	100-110	120-140	150-170
لوگوں کی تعداد	2	6	12	14	4	2

4- مندرجہ ذیل مواد کے لیے کالمی نقشہ، نسبتاً تعددی کثیر الاضلاع اور اوگیو تشکیل کریں۔

جماعتی حدود	10.5-10.9	11.0-11.4	11.5-11.9	12.0-12.9	130-13.4
تعدادت	2	7	10	12	8

22.3 مرکزی رجحان کے پیمانے:

اعداد و شمار میں تمام مشاہدات کا کسی مرکزی نقطے کے گرد جمع ہونے کی صلاحیت کو مرکزی رجحان کہا جاتا ہے۔ مواد کے مرکزی نقطے کو مرکزی رجحان کی پیمائش یا محض اوسط کہا جاتا ہے مرکزی رجحان کا پیمانہ ایک واحد مرکزی نقطے کے ذریعے پورے مواد کی نمائندگی کرتا ہے اور پورے مواد کی ایک جامع شناخت ہے۔

ہم عام طور پر اعداد اور اقسام کی اوسط کے بارے میں اکثر بات کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر درج ذیل جملوں پر غور کریں:

1- "کلاس میں طلباء کی اکثریت نے گریڈ B حاصل کیا۔" یہاں گریڈ B ایک اوسط ہے۔

2- "علی رزانہ جم میں 45 منٹ گزارتا ہے۔" یہاں علی جم میں روزانہ 45 منٹ اوسط وقت گزارتا ہے۔ ظاہر ہے، اس نے 45 منٹ سے زیادہ یا کم گزارے ہوں گے۔

3- "T20 میں بلے باز کا اوسط سکور" جو کہ اس کے تمام T20 اسکورز پر مبنی ہوتا ہے۔ اوسط سکور تمام انفرادی اسکور کو عام کرتا ہے۔

(i) 22.3 مرکزی رجحان کے پیمانوں کا حساب لگانا:

ہم عام طور پر مشاہدات کو جمع کرکے اور پھر مشاہدات کی کل تعداد سے تقسیم کرکے مواد کے مرکزی رجحان کی اوسط کا حساب لگاتے ہیں، جو خاص طور پر حسابی اوسط کہلاتا ہے۔ اوسط کا حساب لگانے کے اور بھی کئی طریقے ہیں ہم یہاں درج ذیل پانچ اقسام پر غور کرتے ہیں۔

1- حسابی اوسط (Arithmetic mean) 2- وسطانیہ (Median) 3- عادہ (Mode)

4- ہندسی اوسط (Geometric mean) 5- ہم آہنگ اوسط (Harmonic mean)

یہ اوسط ایک دوسرے کے ساتھ موازنہ کرتے وقت کچھ فوائد اور نقصانات رکھتے ہیں نیز، اوسط کا بہترین استعمال مواد کی نوعیت پر محضر ہے۔

22.3(i) (a) حسابی اوسط بذریعہ تعریف اور انحراف (Deviation) کا استعمال کرتے ہوئے فرضی اوسط سے۔

حسابی اوسط تمام مشاہدات کے درمیان مساوات کے اصول پر مبنی ہے۔ ہم تمام n مشاہدات کو ان کے مجموعے سے ملاتے ہیں اور پھر رقم کو n برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

اگر $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ n اعداد ہیں، تو ان کا حسابی اوسط ($\bar{x}$ کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے) یہ ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \quad \text{یا} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (1)$$

جہاں "Σ" ایک بڑا یونانی حرف ہے جو مجموعے کے لیئے استعمال ہوتا ہے۔

نوٹ:

1- حسابی اوسط مواد کی حد کے اندر ایک منفرد عدد ہے۔

2- اگر مواد مقداری ہیں تو ہم براہ راست حسابی اوسط نکالتے ہیں جبکہ اگر مواد نومینل یا آرڈینل ہو تو ہم بالترتیب عددی کوڈ یا رینک تفویض کرسکتے ہیں۔

3- حسابی اوسط نومینل مواد کے لیئے مناسب نہیں ہے۔

حسابی اوسط بذریعہ تعریف / براہ راست طریقے سے:

حسابی اوسط کو براہ راست طریقے / ذریعہ تعریف مشاہدات کے مقام یا پیمانے جو تبدیل کیئے بغیر دیئے گئے مواد سے براہ راست حاصل کرتے ہیں۔ براہ راست طریقے / تعریف کے مطابق ہم درج ذیل کلیات (formulas) کا استعمال کرتے ہیں:

(غیر گروہی مواد) $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\dfrac{\sum x}{n}$ (گروہی مواد) $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_if_i}{\sum f_i}=\dfrac{\sum xf}{\sum f}$

یہاں x_i غیر گروہی مواد میں انفرادی مشاہدات اور گروہی مواد میں جماعتی نشان کو ظاہر کرتا ہے اور f_i متعلقہ جماعتی تعدادات ہیں۔ اختصار کے لیئے ہم کلیوں میں سبسکرپٹس کو چھوڑ سکتے ہیں۔

مثال 1: بذریعہ تعریف درج ذیل ڈیٹا سیٹس کا حسابی اوسط معلوم کریں:

(i) 2, 3, 7, 5, 5, 13, 1, 7, 4, 8, 3, 4, 3 (ii). 7, 5, 74, 10 (iii). 18.92, 27.9, 34.7, 39.68

حل: (i) بذریعہ تعریف یا براہ راست طریقے سے ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{2+3+7+5+5+13+1+7+4+8+3+4+3}{13}=\frac{65}{13}=5.$$

(ii) بذریعہ تعریف، ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{7+5+74+10}{4}=\frac{96}{4}=24.$$

(iii) $$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{18.92+27.9+34.7+39.68}{4}=\frac{121.2}{4}=30.3.$$

نوٹ: حسابی اوسط انتہائی قدروں (Outliers) سے متاثر ہوتا ہے۔

مثال 1 کے (ii) میں $\bar{x}=24$ تمام مشاہدات سے بہت دور ہے: 7, 5, 74 اور 10 میں 74 انتہائی قدر کی وجہ سے۔

مثال 2: گروپ میں تعلیم حاصل کرنے والے پانچ طلباء کے درجات (Grades) یہ تھے: +A, B, C, B+, A حسابی اوسط کا استعمال کرتے ہوئے اوسط درجہ معلوم کریں۔

حل: مواد آرڈینل ہیں اور اعداد کے حساب سے درجہ بندی کی جاسکتی ہے۔ ہم درجات کی نمائندگی کرتے ہیں۔ +A، A، +B، B، +C، C بذریعہ لیبل بالترتیب: 6, 5, 4, 3, 2, 1 ہیں۔

پھر: $\bar{x}=\dfrac{\sum x}{n}=\dfrac{6+1+4+3+5}{5}=\dfrac{19}{5}=3.8\approx 4.$ لہٰذا اوسط درجہ +B ہے۔

مثال 3: درج ذیل مواد میں تعریف کے لحاظ سے کولڈ ڈرنک کی مقدار کی حسابی اوسط معلوم کریں۔

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: مواد کی غیر مسلسل جماعتوں میں گروہ بندی کی گئی ہے۔ جماعتی نشان (x) یہ ہیں: 1.52, 1.51, 1.50, 1.49, 1.48 حسابات جدول میں دکھائے گئے ہیں:

x	f	xf
1.48	2	$1.48\times 2 = 2.96$
1.49	7	10.43
1.50	5	7.5
1.51	5	7.55
1.52	1	1.52
	$\sum f = 20$	$\sum xf = 29.96$

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{29.96}{20} = 1.498$$ لیٹر

حسابی اوسط کا استعمال کرتے ہوئے کولڈ رنک کی اوسط مقدار 1 .498 لیٹر ہے۔

مثال 4: بذریعہ تعریف صارفین کے اطمینان کا حسابی اوسط معلوم کریں

اطمینان کی سطح	بالکل بھی نہیں	بہت نہیں	یقین نہیں	کسی حد تک	بہت
صارفین کی تعداد	3	8	5	6	18

حل: ہم آرڈیل متغیر کی صفات کی نمائندگی کرتے ہیں:

"بالکل بھی نہیں، بہت نہیں، یقینی نہیں، کسی حد تک، بہت" درجات کے لحاظ سے، بالترتیب: 1, 2, 3, 4, 5 بذریعہ تعریف، ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{(1)(3)+(2)(8)+(3)(5)+(4)(6)+(5)(18)}{3+8+5+6+18} = \frac{148}{40} = 3.7 \approx 4.$$

لہٰذا اوسط اطمینان کی سطح "4" درجہ ہے جو کہ "کسی حد تک" کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 5: 60 دنوں کے لیئے دکان کی بجلی کی کھپت (KWH) میں درج ذیل ہے۔ حسابی اوسط معلوم کریں:

بجلی کی کھپت	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: مواد مسلسل تعدد جدول کو ظاہر کرتا ہے۔ ہمیں جماعتی نشان اور مطلوبہ رقم محلقہ جدول میں ملتی ہے۔ بذریعہ تعریف یا براہ راست طریقے سے:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{7270}{60} = 121.166.$$

دکان کی بجلی کی اوسط کھپت 121 .166 ہے۔

جماعتی حدود	جماعتی نشانی (x)	تعددات (f)	xf
68-87	77.5	10	775
88-107	97.5	13	1267.5
108-127	117.5	15	1762.5
128-147	137.5	10	1375
148-167	157.5	4	630
168-187	177.5	6	1065
188-207	197.5	2	395
کل تعداد	---	$\sum f = 60$	7270

نوٹ: غیر گروپی مواد کا حسابی اوسط اور اس کی غیر مسلسل تعدد جدول ہمیشہ ایک جیسے ہوتے ہیں۔ لیکن مسلسل تعددی تقسیم سے مواد کا حسابی اوسط متعلقہ غیر گروہی مواد کے وسط کے برابر (لیکن اس کے قریب) نہیں ہے۔

انحراف / بالواسطہ طریقوں کا استعمال کرتے ہوئے حسابی اوسط:

اگر: x مشاہدات کو ظاہر کرتا ہے اور A ہے فرضی / عارضی اوسط (اندر یا باہر کوئی بھی عدد مواد کی حد میں) تو پھر A کا انحراف یہ ہے

$$D_i = x_i - A$$

انحراف پر مبنی دو بالواسطہ طریقے ہیں: مختصر طریقہ (Shortcut method) اور کوڈنگ طریقہ (Coding method) انہیں حسابی اوسط کو شمار کرنے کے لیئے استعمال کیا جاتا ہے جب کیا جاتا ہے جب اعلیٰ اقدار کی ساتھ بڑے مواد سے نمٹا جاتا ہے۔

مختصر طریقہ:

مختصر طریقہ استعمال کرتے ہوئے حسابی اوسط اس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\bar{x} = A + \frac{\sum D}{n}$$ (غیر گروہی مواد کے لیے)

اور

$$\bar{x} = A + \frac{\sum Df}{\sum f}$$ (گروہی مواد کے لیے)

غیر گروہی مواد کے لیے x_i مشاہدات ہیں اور گروہی مواد کے لیے x جماعتی نشانات ہیں۔ یہ بہتر ہے کہ گروہی مواد کے لیے A مطابق x_i کو سب سے تعدد والا لیا جائے۔

کوڈنگ طریقہ:

$$\bar{x} = A + h\frac{\sum u}{\sum n}$$ (غیر گروہی مواد کے لیے)

اور

$$\bar{x} = A + h\frac{\sum uf}{\sum f}$$ (گروہی مواد کے لیے)

جہاں $u_i = \frac{x_i - A}{h}$ یا، $u = \frac{x - A}{h}$ کو کوڈ شدہ متغیر کہا جاتا ہے۔ غیر گروپی مواد کے لیئے، x مشاہدات ہیں اور گروپی مواد کے لیئے x جماعتی نشانات ہیں۔

مثال 1: امتحان میں گروپ میں پڑھنے والے چھ طلباء کے کل نمبر یہ ہیں: 580, 710, 685, 640, 610 بالواسطہ طریقوں کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کا حسابی اوسط معلوم کریں۔

(i). $A = 650$ اور $h = 10$ (ii). $A = 680$ اور $h = 20$.

حل: مختصر طریقہ یہ بتاتا ہے: $\bar{x} = A + \frac{\sum D}{n}$

کوڈنگ کا طریقہ یہ بتاتا ہے $x = A + h\frac{\sum u}{n}$,

جہاں $u_i = \frac{x_i - A}{h}$

دونوں حصوں کے لیئے الگ الگ جدولوں میں مطلوبہ حسابات دکھائے گئے ہیں:

(i). $A = 650$ اور $h = 10$.

x	$D = x - 650$	$u = \frac{x-650}{10}$
610	-40	-4
640	-10	-1
685	35	3.5
680	30	3
710	60	6
580	-70	-7
	$\sum D = 5$	$\sum u = 0.5$

مختصر طریقے سے ہمارے پاس ہے۔

$$\bar{x} = 650 + \frac{5}{6} = 650.833.$$

کوڈنگ طریقے سے ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = 650 + 10 \times \frac{0.5}{6} = 650 + \frac{5}{6} = 650.833.$$

دونوں حصوں کے لیئے الگ الگ جدولوں میں مطلوبہ حسابات دکھائے گئے ہیں:

(ii). $A = 680$ ؏ $h = 20$.

x	$D = x - 680$	$u = \dfrac{x-680}{20}$
610	-70	-3.5
640	-40	2
685	5	0.25
680	0	0
710	30	1.5
580	-100	-5
	$\sum D = -175$	$\sum u = -8.75$

مختصر طریقے سے ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = 680 + \left(\frac{-175}{6}\right) = 680 - 29.1666$$

$$\bar{x} = 650.833.$$

کوڈرنگ طریقے سے ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = 680 + 20\left(\frac{-8.75}{6}\right)$$

$$\bar{x} = 680 - 29.1666 = 650.833.$$

اوسط مارکس A اور h کے انتخاب سے قلع نظر 650.833 یا 651 ہیں۔

مثال 2: مختصر اور کوڈنگ طریقے سے کولڈ ڈرنگ کی اوسط مقدار معلوم کریں:

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: یہاں ہم A=1.49 اور h=0.01 استعمال کریں گے۔ حسابات جدول میں درج ہیں۔

x	f	$D = x - 1.49$	$u = \dfrac{x-1.49}{0.01}$	Df	uf
1.48	2	-0.01	-1	-0.02	-2
1.49	7	0	0	0	0
1.50	5	0.01	1	0.05	5
1.51	5	0.02	2	0.1	10
1.52	1	0.03	3	0.03	3
	$\sum f = 20$			$\sum Df = 0.16$	$\sum uf = 16$

مختصر طریقے سے:

$$\bar{x} = A + \frac{\sum Df}{\sum f} = 1.49 + \frac{0.16}{20} = 1.498.$$

کوڈنگ طریقے سے:

$$\bar{x} = A + h \times \frac{\sum uf}{\sum f} = 1.49 + 0.01\left(\frac{16}{20}\right) = 1.498.$$

ہم یہ نوٹ کرسکتے ہیں کہ دونوں بالواسطہ طریقوں اور بذریعہ تعریف سے نتائج ایک جیسے آرہے ہیں۔

مثال 3: 50 دھاتی بلاکس کا اوسط ماس معلوم کرنے کے لیئے مختصر اور کوڈنگ طریقوں کا استعمال کریں:

بلاکس کا مارکس (کلوگرام میں)	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.8	8.9-9.1
بلاکس کی تعداد	3	5	9	14	11	6	2

حل: یہاں A = 8.1 اور h = 0.1 ہے۔ حسابات مندرجہ بالا جدول میں درج ہیں:

جماعتی حدود	جماعتی نشان (x)	f	$D = x - 8.1$	$u = \dfrac{x-8.1}{0.1}$	Df	uf
7.1-7.3	7.2	3	-0.9	-9	-2.7	-27
7.4-7.6	7.5	5	-0.6	-6	-3	-30
7.7-7.9	7.8	9	-0.3	-3	-2.7	-27
8.0-8.2	8.1	14	0	0	0	0
8.3-8.5	8.4	11	0.3	3	3.3	33
8.6-8.8	8.7	6	0.6	6	3.6	36
8.9-9.1	9.0	2	0.9	9	1.8	18
		$\sum f = 50$			$\sum Df = 0.3$	$\sum uf = 3$

مختصر طریقے سے: $\bar{x} = A + \frac{\sum Df}{\sum f} = 8.1 + \frac{0.3}{50} = 8.106$.

کوڈنگ طریقے سے: $\bar{x} = A + h \times \frac{\sum uf}{\sum f} = 8.1 + 0.1 \times \left(\frac{3}{50}\right) = 8.106$.

لہٰذا، اوسط ماس 8.106 کلوگرام ہے۔

(b) 22.3(i) وسطانیہ، عادہ، ہندسی اوسط اور ہم آہنگ اوسط

حسابی اوسط (مساوات کی بنیاد پر) کے علاوہ مواد کے مرکزی رجحان کی پیمائش کرنے کے کچھ اور بھی طریقے ہیں۔ مثال کے طور پر، ہمارے انتخابی نظام میں، ہر کسی کو ووٹ دینے کا حق ہے، لیکن منتخب نمائندے کا انتخاب بالآخر اکثریت کی بنیاد پر کیا جاتا ہے، جیسا کہ بڑے پیمانے پر کہا جاتا ہے کہ "اکثریت ہی اختیار ہے۔" ایسا معاملہ عادہ کو ظاہر کرتا ہے۔ سب سے زیادہ کثرت سے آنے والا مشاہدہ اسی طرح وسطانیہ درجہ بندی والے ڈیٹا سیٹ کے درمیانی حصے پر توجہ مرکوز کرتا ہے۔ ہندسی اور ہم آہنگ اوسط ذرائع فطرت میں ریاضیاتی ہیں جیسے کہ حسابی اوسط جو کہ وسطانیہ اور عادہ کے برعکس ہے جو کہ فطرت میں وضاحتی ہیں۔

وسطانیہ:

ترتیب شدہ مواد میں وسطانیہ وہ قدر ہے جو اسے دو برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ وسطانیہ کو معلوم کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ پورے مواد کا مرکزی نقطہ صعودی یا نزولی ترتیب میں درمیانی پوزیشن پر ہے۔

نوٹ:

- مواد میں، وسطانیہ ہمیشہ منفرد ہوتا ہے۔
- ہم مقداری مواد کے وسطانیہ کا حساب لگا سکتے ہیں۔
- خاصیتی مواد کے لیئے، صرف آرڈینل مواد کا وسطانیہ معلوم کرنا معنیٰ خیز ہے۔
- وسطانیہ تمام مشاہدات پر یکساں طور پر انحصار نہیں کرتا۔
- وسطانیہ مواد میں انتہائی قدروں سے متاثر نہیں ہوتا ہے۔

ترتیب شدہ غیر گروپی مواد کے لیئے، وسطانیہ (m) n مشاہدات میں سب سے درمیانی اعداد و شمار کا حصہ ہے اور مندرجہ ذیل دو صورتوں کے ذریعے بیان کیا سکتا ہے:

m= مشاہدات کی $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ویں رقم (1)

یہاں n طاق ہے۔

m= مشاہدات کی $\left[\left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{2}+1\right)\right]$ ویں رقم (2) یہاں n جفت ہے۔

غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیئے، مجموعی تعدد کی مدد سے، ہم (1) اور (2) کا استعمال کرتے ہوئے درمیانی مشاہدے کا انتخاب کرتے ہیں۔

مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیئے، وسطانیہ اس جماعت میں ہے جس میں $\left(\frac{n}{2}\right)$ واں مشاہدہ ہے۔ جسے ہم وسطی جماعت (m-class) بھی کہتے ہیں۔ اس کا کلیہ یہ ہے:

$$m = L + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right) \qquad (3)$$

جہاں L سے مراد LCB ہے وسطی جماعت کا، h وسطی جماعت کی چوڑائی ہے، f تعدد ہے وسطی جماعت کا اور c مجموعی تعدد ہے وسطی جماعت سے بالکل پہلے والی جماعت کا۔

مثال 1: درج ذیل میں وسطانیہ معلوم کریں:

(i) 2, 3, 7, 5, 5, 13, 1, 7, 4, 8, 3, 4, 3 (ii) 7, 5, 74, 10 (iii) 18.92, 27.9, 37.4, 39.68

حل: (i) مواد کو صعودی میں لکھیں: 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 13

یہاں $n = 13$ (طاق) اس لیے $m = \left(\frac{13+1}{2}\right)$ واں مشاہدہ = ساتواں مشاہدہ = 4

(i) مواد کو صعودی ترتیب میں لکھیں: 74 10 7 ,5 یہاں n=4 (جفت)

$m = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{2}\right) \text{واں} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{واں مشاہدہ}\right] = \frac{1}{2}[\text{دوسرا} + \text{تیسرا مشاہدہ}] = \frac{1}{2}[7+10] = 8.5$

(iii) یہاں پر $(n=4)$ (جفت)۔ مواد پہلے ہی درجہ بندی میں ہے۔

$m = \frac{1}{2}[\text{دوسرا} + \text{تیسرا مشاہدہ}] = \frac{1}{2}[27.9+37.4] = 32.65.$

مثال 2: طلباء کے درج ذیل دو گروہوں کے وسطانیہ درجے (Grades) کی شناخت کریں۔

(i) A+, B+, C, B, A (ii) C+, A, B, B, B+, C, B+, A, A+, C

حل: (i) درجہ بندی کے ساتھ مواد یہ ہیں: +A, A, +B, B, C یہاں n=5 (طاق) پھر

$m = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ واں $= \left(\frac{5+1}{2}\right)$ واں = تیسرا مشاہدہ = +B جو کہ وسطانیہ درجہ ہے۔

(i) مواد کو صعودی ترتیب میں لکھیں: +A, A, A, +B, +B, B, B, +C, C, C یہاں n=10 درمیانی دو مشاہدات $\left(\frac{n}{2}\right)$ واں اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ واں ہیں جو کہ 5 واں اور 6 واں مشاہدات ہیں۔ جو کہ B اور +B درجات ہیں۔

لہٰذا، ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ وسطانیہ درجہ B اور +B درجات کے درمیان یکساں طور پر تقسیم ہے۔

مثال 3: 40 صارفین کے درج ذیل مواد میں وسطانیہ اطمینان کی سطح کیا ہے؟

اطمینان کی سطح	بالکل بھی نہیں	بہت نہیں	یقینی نہیں	کسی حد تک	بہت
صارفین کی تعداد	3	8	5	6	18

حل: یہاں n=40 (جفت) لہٰذا، دو درمیانی مشاہدات ہیں: 20 اور 21 یہ دونوں گروہ "کسی حد تک" میں موجود ہیں، لہٰذا، وسطانیہ اطمینان کی سطح "کسی حد تک مطمئین" ہے۔

مثال 4: درج ذیل مواد میں کولڈ ڈرنک کی وسطانیہ مقدار معلوم کریں۔

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: یہاں $n = \sum f = 20$ (جفت)

اس لیے $m = \frac{1}{2}[\text{دسواں} + \text{گیارہواں مشاہدہ}]$

مجموعی تعداد تلاش کرتے ہوئے، ہم دیکھتے ہیں کہ 10 واں اور 11 واں مشاہدات مجموعی تعداد 14 کے ساتھ گروہ میں موجود ہیں۔

x	f	مجموعی تعدادات
1.48	2	2
1.49	7	9
1.50	5	14
1.51	5	19
1.52	1	20
	$\sum f = 20$	

$m = \frac{1}{2}[1.50 + 1.50] = \frac{1}{2}(3) = 1.50$ لیٹرز

مثال 5: مواد کا استعمال کرتے ہوئے 60 دنوں کے لیئے دکان کی وسطانیہ بجلی کی کھپت معلوم کریں:

بجلی کی کھپت	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: یہاں n=60 اور h=20 ہے، مواد ایک مسلسل تعدد جدول ہے۔ لہٰذا ہمیں حقیقی جماعتی حدود اور مجموعی تعددات کی گنتی کرنے کی ضرورت ہے جیسا کہ نیچے دیئے گئے جدول میں کیا گیا ہے۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	f	مجموعی تعددات
68-87	67.5-87.5	10	10
88-107	87.5-107.5	13	23
108-127	107.5-127.5	15	38 (m-class)
128-147	127.5-147.5	10	48
148-167	147.5-167.5	4	52
168-187	167.5-187.5	6	58
188-207	187.5-207.5	2	60
		$n = 60$	

وسطانیہ جماعت (m-جماعت) وہ ہے جو $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں مشاہدہ پر مشتمل ہے جو کہ یہاں 30 واں مشاہدہ ہے تو m-جماعت ایک ہے جس کی مجموعی تعدد 38 ہے۔ m-جماعت 108 - 127 ہے۔ (جیسا کہ جدول میں نمایاں کیا گیا ہے۔)

کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے:

$$m = L + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right) = 107.5 + \frac{20}{15}\left(\frac{60}{2} - 23\right)$$

$$\Rightarrow \quad m = 107.5 + \frac{20}{15}(30 - 23) = 107.5 + \frac{20}{15} \times 7 = 107.5 + 9.333 = 116.833 \text{ kWh.}$$

یہاں، L=m جماعت کا LCB = 107.5، m=h جماعت کا جماعتی وقفہ، f=m- جماعت کا تعدد = 15 اور

c= وسطانیہ جماعت سے پہلی والی جماعت کا مجموعی تعدد = 23

چوتھائیاں (Quartiles):

چوتھائی کی وضاحت کرنے کے لیئے ترتیب شدہ مواد کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ مواد کی حد میں تین چوتھائیاں ہیں جو مواد کو 4 برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہیں۔

پہلی چوتھائی (یا نچلی) ترتیب شدہ مواد کو 25% تا 75 % تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔

غیر گروہی مواد کے لیے:

(1) $Q_1 = \left(\frac{n+3}{4}\right)$ واں مشاہدہ، اگر $\frac{n}{4}$ صحیح عدد (Integer) نہ ہو تو بصورت دیگر

(2) $\quad Q_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{4}\right)\text{مشاہدہ} + ، \text{اگر} \left(\frac{n}{4}+1\right)\text{واں مشاہدہ}\right]$ صحیح عدد ہو۔

غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیے ہم (1) اور (2) کو بھی استعمال کرتے ہیں۔ مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیئے ہم استعمال کرتے ہیں:

$$Q_1 = L + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{4} - c\right)$$

ہی

یہاں L، سے مراد LCB ہے، h چوڑائی ہے، f Q_1 جماعت کا تعدد ہے اور C Q_1 - جماعت سے پہلے والی جماعت کا مجموعی تعدد ہے۔ Q_1 - جماعت وہ جماعت ہے جو $\left(\frac{n}{4}\right)^{th}$ ویں مشاہدہ پر مشتمل ہے۔

دوسری (یا درمیانی) چوتھائی Q_2 ترتیب شدہ مواد کو 50% تا 50% کے تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔ یہ مواد کے وسطانیہ کے برابر ہے۔

تیسری (یا اوپری) چوتھائی Q_3 ترتیب شدہ مواد کو 75 % تا 25 % تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔

غیر گروہی مواد کے لیے:

(4) $\quad Q_3 = \left(\frac{3n+1}{4}\right)$ واں مشاہدہ، اگر $\frac{30}{4}$ صحیح عدد نہ ہو

بصورت دیگر

(5) $\quad Q_3 = \left[\left(\frac{3n}{4}\right)\text{مشاہدہ} + \left(\frac{3n}{4}+1\right)\text{واں}\right]\frac{1}{2} = Q_3$ مشاہدہ، اگر $\frac{3n}{4}$ صحیح عدد ہو۔

غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیئے، مساوات (4) اور (5) کو مجموعی تعددات کے ساتھ استعمال کیا جاتا ہے۔

مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروپی مواد کے لیے $\quad$ (6) $\quad Q_3 = L + \frac{h}{f}\left(\frac{3n}{4} - c\right)$

جہاں L، LCB ہے، h چوڑائی ہے، f Q_3 جماعت کا تعدد ہے جو کہ $\left(\frac{3n}{4}\right)$ ویں مشاہدہ پر مشتمل ہوتا ہے اور C Q_3 جماعت سے پہلے والی جماعت کا مجموعی تعدد ہے۔

مثال 1: دیئے گئے ڈیٹا سیٹس میں نچلی اور اوپری چوتھائیاں معلوم کریں۔

(i) 1000, 1200, 1600, 1500, 1200 $\qquad$ (ii) 32, 36, 36, 37, 39, 41, 45, 46

حل: (i) ترتیب شدہ ڈیٹا سیٹ یہ ہے: 1000, 1200, 1200, 1500, 1600 یہاں n = 5 Q_1 کے لیے:

$\frac{n}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$ صحیح عدد نہیں ہے۔

اس لیے Q_1 $\left(\frac{n+3}{4}\right)$ واں = 2 واں مشاہدہ = 1200

Q_3 کے لیے $\frac{3n}{4} = \frac{3\times 5}{4} = 3.75$ صحیح عدد نہیں ہے۔

اس لیے $Q_3 = \left(\frac{3n+1}{4}\right)$ ویں = 4 ویں مشاہدہ = 1500

(ii) مواد پہلے ہی ترتیب شدہ شکل میں ہے اور یہاں $n = 8$ Q_1 کے لیے $\frac{b}{4} = \frac{8}{4} = 2$ صحیح عدد ہے

اس لیئے $Q_1 = [2$ واں $+ 3$ واں $]\frac{1}{2}$ مشاہدہ $= \frac{1}{2}[36 + 36] = 36$

Q_3 کے لیے $\frac{3n}{4} = \frac{3 \times 8}{4} = 6$ (صحیح عدد)

اس لیے $Q_3 = [6$واں $+ 7$ واں $]\frac{1}{2}$ مشاہدہ $= \frac{1}{2}[41 + 45] = 43$

مثال2:

80 خاندانوں میں بچوں کی تعداد کی نچلی اور اوپری چوتھائیاں معلوم کریں۔

بچوں کی تعداد	1	2	3	4	5	6
خاندانوں کی تعداد	8	10	10	25	20	7

حل:

مواد کو غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے۔ یہاں n=80 مندرجہ ذیل جدول کا استعمال کرتے ہوئے مجموعی تعدادات کو اس معلوم کرتے ہیں۔

x	f	مجموعی تعداد
1	8	8
2	10	18
3	10	28 $Q_1 -$ جماعت
4	25	53
5	20	73 $Q_3 -$ جماعت
6	7	80

Q_1 کے لیئے: $\frac{n}{4} = \frac{80}{4} = 20$ (صحیح عدد)

اس لیئے Q_1 20 ویں اور 21 ویں مشاہدات کا اوسط ہے۔

یہ دونوں مجموعی تعداد 28 کی جماعت میں آتے ہیں $Q_1 = \frac{1}{2}(3+3) = 3.$

Q_3 کے لیے: $\frac{3n}{4} = \frac{3 \times 80}{4} = 60$

60 واں اور 61 واں مشاہدات مجموعی تعداد 73 کی جماعت میں ہیں اس لیئے $Q_3 = \frac{1}{2}(5+5) = 5.$

مثال3:

ذیل میں دیئے گئے 100 طلباء کے وزن (کلوگرام میں) ہیں۔ ان وزنوں کی چوتھائیاں معلوم کریں۔

وزن (کلوگرام میں)	70-74	75-79	80-84	85-84	90-94
طلباء کی تعداد	10	24	46	12	8

حل: یہاں $n=100$, $h=5$ اور مواد کو مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے۔ سب سے پہلے ہم جماعتی حدود اور مجموعی تعدادات کا شمار کریں گے۔

حسابات کا خلاصہ درج ذیل جدول میں کیا گیا ہے۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	f	مجموعی تعدادات
70-74	69.5-74.5	10	10
75-79	74.5-79.5	24	34 (Q_1-جماعت)
80-84	79.5-84.5	46	80 (Q_3-جماعت اور m)
85-89	84.5-89.5	12	92
90-94	89.5-94.5	8	100

Q_1 کے لیے $\frac{n}{4} = \frac{100}{4} = 25$ واں مشاہدہ مجموعی تعداد 34 والی جماعت میں آتا ہے۔

اس لیے: Q_1-جماعت 75-79 ہے۔

اس جماعت میں Q_1: کلوگرام $Q_1 = L + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{4} - c\right) = 74.5 + \frac{5}{24}(25-10) = 77.625$

$Q_2 = m$ کے لیے $\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$

50 واں مشاہدہ مجموعی تعداد 80 والی جماعت میں آتا ہے۔ اس لیے: m جماعت 80-84 ہے۔

کلوگرام $m = L + \frac{}{f}\left(\frac{}{2} - c\right) = 79.5 + \frac{}{46}(50-34) = 81.239$ Q_3 اس لیے: $\frac{3n}{4} = \frac{3\times 100}{4} = 75$

75 واں مشاہدہ مجموعی تعداد 80 والی جماعت میں آتا ہے۔

اس لیے: Q_3- جماعت وہی ہے جو کہ m-جماعت ہے، جو 80-84 ہے۔ اس جماعت میں:

کلوگرام $Q_3 = L + \frac{h}{f}\left(\frac{3n}{4} - c\right) = 79.5 + \frac{5}{46}(75-34) = 83.956$

نوٹ:

چوتھائیاں فطرت میں درجے کے حساب سے اہمیت رکھتی ہیں جبکہ مشاہدات کی تعداد ایک ہی رہتی ہے ان کے درجے تبدیل نہیں ہوتے، مثال کے طور پر ترتیب شدہ مواد کے لیے $n = 10$

Q_1 تیسرا مشاہدہ $Q_2 = m = \frac{1}{2}$ [پانچواں + چھٹا مشاہدہ]

اور Q_3 آٹھواں مشاہدہ

10 مشاہدات کے ساتھ کوئی ترتیب شدہ ڈیٹا سیٹ ان درجوں کی پیروی کرے گا، جیسا کہ

a. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 $\quad Q_1 = 5,\ m = 10,\ Q_3 = 15$

b. 10, 12, 12, 13, 17, 20, 20, 20, 21, 25 $\quad Q_1 = 12,\ m = 13.5,\ Q_3 = 20.$

c. 1, 1, 1, 3, 12, 12, 13, 17, 19, 30 $\quad Q_1 = 1,\ m = 12,\ Q_3 = 17.$

عادہ (Mode): مواد میں سب سے زیادہ آنے والے مشاہدے کو عادہ کہا جاتا ہے۔ عادہ "اکثریت ہی اختیار ہے۔" اصول پر انحصار کرتا ہے۔ عادہ کو مقداری اور خاصیتی مواددونوں کے لیے شمار کیا جا سکتا ہے۔ بغیر عادہ والے مواد کو غیر موڈل (Non-modal) کہتے ہیں، ایک عادہ والے کو یونی موڈل (Uni modal) کہتے ہیں، اور دو یا زیادہ عادہ والے کو ملٹی موڈل (multi model) کہتے ہیں۔

غیر گروہی مواد کے لیے، مشاہدات جو دوسروں کے مقابلے میں کثرت سے ہوتے ہیں، اگر کوئی ہیں تو انہیں عادہ کے طور پر کہا جاتا ہے۔

غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیے، عادہ سب سے زیادہ تعداد کے ساتھ مشاہدہ (جماعت) ہے، اگر دو یا دو سے زیادہ جماعتوں میں سب سے زیادہ تعداد برابر (tie) ہے، تو مواد ملٹی موڈل ہے اور اسی اعلیٰ ترین تعدد والے تمام مشاہدات عادہ ہیں۔

مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مدد کے لیے، سب سے زیادہ تعدد والی جماعت کو عادہ جماعت کہا جاتا ہے، اور عادہ عادہ جماعت میں ہوتا ہے، عادہ جماعت (M-class) میں عادہ (M) کو معلوم کرنے کا کلیہ یہ ہے: $M = L + \frac{(f_M - f_{M-1}) \times h}{2f_M - f_{M-1} - f_{M+1}}$ عادہ

جہاں L. LCB ہے، h چوڑائی ہے اور f_m M- جماعت کا تعدد ہے f_{m-1} اور f_{m+1} بالترتیب M جماعت سے بالکل پہلے اور بعد کی جماعتوں کے تعدد ہیں۔

مثال 1: درج ذیل ڈیٹا سیٹس میں عادہ معلوم کریں:

(i). 75, 76, 80, 80, 82, 82, 82, 85

(ii). 13, 14, 15, 11, 16, 10, 19, 20, 18, 17

(iii). 1.49, 1.50, 1.51, 1.50, 1.48, 1.51

(iv). 1, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 6, 1, 10

(v). C+, A, B, B, B+, C, B, A, A+, C (درجات)

(vi). اچھا، ناقص، پھیکا، اچھا، منصفانہ، منصفانہ (درجہ بندی)

حل:

(i) عادہ = 82 کیونکہ یہ مواد میں 3 بار آیا ہے جو کہ کسی بھی دوسرے مشاہدے سے زیادہ ہے۔

(ii) مواد کا کوئی عادہ نہیں ہے، یہ غیر عادہ مواد ہے۔

(iii) دو عادہ ہیں: 1.50 اور 1.51 کیونکہ یہ یکساں طور پر دوسروں سے زیادہ آرہے ہیں۔

(iv) مواد ٹرائی موڈل ہے۔ تین عادہ یہ ہیں: 2، 5 اور 9

(v) درجہ B سب سے زیادہ ہرایا گیا ہے لہٰذا عادہ درجہ B ہے۔

(vi) مواد کے دو عادہ ہیں: "اچھا" اور منصفانہ کیونکہ یہ یکساں طور پر سب سے زیادہ دہرائے گئے ہیں۔

مثال 2: 45 خاندانوں کے مواد سے ایک خاندان کے پاس موجود موبائلز کی عادہ تعداد معلوم کریں۔

موبائلوں کی تعداد	0	1	2	3	4	5	6	7
خاندانوں کی تعداد	1	7	15	12	5	2	2	2

حل: مواد کو غیر مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے، یہاں 15 سب سے زیادہ تعدد ہے اور اس کا تعلق 2 جماعت سے ہے۔ لہٰذا فی خاندان موبائلز کی عادہ تعداد 2 ہے۔

مثال 3: ذیل میں دیئے گئے 30 طلباء کے خون کے گروپوں میں سے عادہ بلڈ گروپ معلوم کریں۔

بلڈ گروپ	A+	B+	AB+	O+	A−	B−	AB−	O−
طلباء کی تعداد	6	5	3	7	3	1	2	3

حل: عادہ بلڈ گروپ O+ ہے کیونکہ یہ سب سے زیادہ تعداد "7" سے وابستہ ہے۔

مثال4: مندرجہ ذیل مواد 40 صارفین کی اطمینان کی سطح کے عادہ کا حساب لگائیں۔

اطمینان کی سطح	بہت	کسی حد تک	یقینی نہیں	بہت نہیں	بالکل نہیں
صارفین کی تعداد	18	6	5	8	3

حل: عادہ اطمینان کی سطح "بہت مطمئن" ہے کیونکہ یہ سب سے کثرت سے آئی ہے۔

مثال5: مواد کا استعمال کرتے ہوئے 60 دنوں کے ایک دکان کی عادہ بجلی کی کھپت KWH میں معلوم کریں۔

بجلی کی کھپت	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: مواد کو مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے، سب سے زیادہ تعداد 45 ہے عادہ- جماعت 127-108 ہے۔ حقیقی جماعتی حدود کو مندرجہ ذیل جدول میں شمار کیا گیا ہے۔

تعداد	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی حدود
10	67.5-87.5	68-87
13	87.5-107.5	88-107
15	107.5-127.5	108-107
10	127.5-147.5	128-147
4	147.5-167.5	148-167
6	167.5-187.5	168-187
2	187.5-207.5	188-207

$$h = 20, L=107.5, f_M = 15, f_{M-1} = 13, f_{M+1} = 10$$

$$\text{عادہ} = M = L + \frac{(f_M - f_{M-1}) \times h}{2f_M - f_{M-1} - f_{M+1}}$$

$$M = 107.5 + \frac{(15-13)\times 20}{2(15)-13-10} = 107.5 + \frac{2\times 20}{30-23}$$

$$M = 107.5 + 5.71428 = 113.21428\text{kWh}.$$

نوٹ: مثال 5 میں مسلسل تعددی تقسیم یونی موڈل ہے کیونکہ صرف ایک جماعت کی سب سے زیادہ تعدد ہے۔ درج ذیل مسلسل تعددی تقسیم ہے جو کہ ریل کے قطر کی نمائندگی کرتی ہے۔ 24 مقامات پر ناپا گیا قطر بائی ماڈل ہے۔

قطر (ملی میٹر میں)	2.10-2.13	2.14-2.17	2.18-2.21	2.22-2.25	2.26-2.29	2.30-2.33	2.34-2.37
مقامات کی تعداد	4	5	4	4	5	1	1

دو عادہ جماعتیں یہ ہیں "2.14-2.17" اور "2.26-2.29" سب سے زیادہ تعدد "5" کے ساتھ۔ ہر جماعت میں کلیہ استعمال کرتے ہوئے ہم 2.175 ملی میٹر اور 263 .2 ملی میٹر کے متعلقہ قطر حاصل کر سکتے ہیں۔

ہندسی اوسط (Geometric Mean):

ہندسی اوسط میں تمام نمبروں کو یکساں اہمیت دی جاتی ہے ہم نمبروں کو ضرب دے کر ملاتے ہیں اور پھر اس ضرب کا اثر ختم کرنے کے لیے اس ضرب کا nواں جزر نکالتے ہیں۔ اگر اعداد و شمار (تمام مثبت) ہیں تو صرف مقداری اعداد و شمار کی ہندسی اوسط (G.M) کی گنتی کرنا معنیٰ خیز ہے۔ اگر x_1، x_2، x_3، ... x_n یہ n اعداد (تمام مثبت) ہیں تو۔ (1) $G.M. = (x_1.x_2...x_3)^{\overline{n}} = [\prod(x)]^{\overline{n}}$

یہاں II ضرب کے لیے بڑا یونانی حرف پائی (Pi) ہے۔ G.M. اگر موجود ہے تو منفرد ہو گی۔

غیر گروہی مواد کے لیے، کلیہ (1) کو G.M تلاش کرنے کا بنیادی کلیہ کہا جاتا ہے۔ لیکن جب مشاہدات وسعت کے لحاظ سے بڑے ہوتے ہیں، تو ہم (1) کے دونوں طرف لوگارتھم لے کر اور خواص کا استعمال کرتے ہوئے حاصل کردہ لوگارتھمک کلیہ استعمال کرتے ہیں، جو کہ یہ ہے:

$$\text{G.M} = \text{antilog}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\log x_i}{n}\right] = \text{antilog}\left[\frac{\sum \log x}{n}\right] \qquad (2)$$

کلیہ (2) میں G.M اعداد و شمار کے لوگارتھمز کے حسابی وسط کا اینٹی لوگارتھم ہے۔ گروہی مواد کے لیے بنیادی کلیہ یہ ہے۔

$$\text{G.M.} = \left[\left(x_1\right)^{f_1} \times \left(x_2\right)^{f_2} \times \ldots \times \left(x_n\right)^{f_n}\right]^{\frac{1}{\Sigma f}} = \left[\prod \left(x\right)^{f}\right]^{\frac{1}{\Sigma f}} \quad (3)$$

اور لوگارتھمک کلیہ یہ ہے۔

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{\sum \text{f. } \log x}{\sum \text{f}}\right] \qquad (4)$$

(3) اور (4) میں f_1، f_2، ...، f_n جماعتی تعدادات ہیں اور $x_1, x_2, \ldots, x_n$ جماعتی نشانات ہیں اور سب مثبت ہیں۔ ان میں سے کوئی بھی تعداد صفر نہیں ہونا چاہیئے (4) میں۔

مثال 1: G.M معلوم کریں بنیادی اور لوگارتھمک کلیہ استعمال کرتے ہوئے کون سا بہتر ہے اور کیوں؟

(i). 2, 4, 2, 16 (ii). 1.48, 1.52, 1.47, 1.50 (iii). 1000, 1200, 1600, 1500, 1200

حل: (i) بنیادی کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$\text{G.M.} = (2\times 4\times 2\times 16)^{\frac{1}{4}} = (256)^{\frac{1}{4}} = 4.$$

لوگارتھمک کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{\log(2)+\log(4)+\log(2)+\log(16)}{4}\right]$$

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{0.3010+0.6021+0.3010+1.2041}{4}\right] = \text{antilog } (0.60205) = 3.9999 \approx 4.$$

مشاہدات وسعت میں چھوٹے ہیں، اس لیے بنیادی کلیہ بہتر ہے۔

(ii) بنیادی کلیہ استعمال کرتے ہوئے۔

$$\text{G.M.} = (1.48\times 1.52\times 1.47\times 1.50)^{\frac{1}{4}} = \left(4-9604\right)^{\frac{1}{4}} = 1.4924$$

لوگارتھمک کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{\log(1.48)+\log(1.52)+\log(1.47)+\log(1.5)}{4}\right]$$

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{\log(1.48)+\log(1.52)+\log(1.47)+\log(1.5)}{4}\right]$$

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{0.1703+0.1818+0.1673+0.1761}{4}\right] = \text{antilog } (0.173875) = 1.4924.$$

ایک بار پھر، بنیادی کلیہ مناسب ہے کیونکہ مشاہدات وسعت میں چھوٹے ہیں۔

(iii) بنیادی کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$\text{G.M.} = \left(1000\times 1200\times 1600\times 1500\times 1200\right)^{\frac{1}{5}} = \left(3456000000000000\right)^{\frac{1}{5}} = 1281.48 \approx 1281.5$$

لوگارتھمک کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{\log\left(1000\right)+\log\left(1200\right)+\log\left(1600\right)+\log\left(1500\right)+\log\left(1200\right)}{5}\right]$$

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{3+3.0792+3.2041+3.1761+3.0792}{5}\right] = \text{antilog}\left(3.10772\right) = 1281.504 \approx 1281.5$$

لوگارتھمک کلیہ بہتر ہے کیونکہ لوگارتھمز استعمال کرنے سے زیادہ وسعت کو چھوٹی وسعت میں تبدیل کر دیا

مثال2: درج ذیل اعداد و شمار میں ہندسی اوسط کا استعمال کرتے ہوئے کولڈ ڈرنک کی اوسط مقدار معلوم کریں۔

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: دیئے گئے مواد کو غیر مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے۔ بنیادی اور لوگارتھمک کلیہ کے مطلوبہ حسابات کو مندرجہ ذیل جدول میں دکھایا گیا ہے

جماعتیں (x)	f	$(x)^f$	log(x)	f × log(x)
1.48	2	2.1904	0.1703	0.3406
1.49	7	16.3044	0.1732	1.2124
1.50	5	7.5938	0.1761	0.8805
1.51	5	7.8503	0.1790	0.8950
1.52	1	1.52	0.1818	0.1818
---	$\sum f = 20$	$\prod x^f = 3236.0651$	---	$\sum f \log(x) = 3.5103$

بنیادی کلید استعمال کرتے ہوئے:

$$\text{G.M.} = \left[\prod (x)^f\right]^{\frac{1}{\sum f}} = (3236.0651)^{\frac{1}{20}} = 1.49796 \approx 1.498$$ لیٹرز

لوگارتھمک کلید استعمال کرتے ہوئے:

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{\sum f \log x}{\sum f}\right] = \text{antilog}\left[\frac{3.5103}{20}\right]$$

کولڈ ڈرنک کی مقدار کی ہندسی اوسط 1.498 لیٹرز ہے۔

مثال3: لوگارتھمک طریقہ کرتے ہوئے بجلی کی کھپت کے اعداد و شمار کا ہندسی اوسط معلوم کریں:

بجلی کی کھپت (KWH)	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: کلیے میں مطلوبہ حسابات درج ذیل جدول میں کیئے گئے ہیں۔

جماعتی عدد	f	جماعتی نشانات (x)	Log (x)	$f \times \log(x)$
68-87	10	77.5	1.8893	18.8930
88-107	13	97.5	1.9890	25.8570
108-127	15	117.5	2.0700	31.0500
128-147	10	137.5	2.1383	21.3830
148-167	4	157.5	2.1973	8.7892
168-187	6	177.5	2.2492	13.4952
188-207	2	197.5	2.2956	4.5912
	$\sum f = 60$			$\sum f \log x = 124.0586$

اس لیے

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{\sum f \log x}{\sum f}\right] = \text{antilog}\left[\frac{124.0586}{60}\right] = \text{antilog}\,(2.0676) = 116.8422 \text{ kWh.}$$

مثال4: G M کا استعمال کرتے ہوئے تار کے پچھلے حصے کا اوسط قطر معلوم کریں دونوں طریقے استعمال کریں

قطر (ملی میٹر)	2.10-2.13	2.14-2.17	2.18-2.21	2.22-2.25	2.26-2.29	2.30-2.33	2.34-2.37
مقامات کی تعداد	4	5	4	4	5	1	1

حل: مواد کو مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے۔ مطلوبہ حسابات جدول میں درج ہیں۔

جماعتی حدود	جماعتی نشانات (x)	f	x^f	$\log(x)$	$f \times \log x$
2.10-2.13	2.115	4	20.0097	0.3253	1.3012
2.14-2.17	2.155	5	46.4768	0.3334	1.6670
2.18-2.21	2.195	4	23.2134	0.3414	1.3656
2.22-2.25	2.235	4	24.9523	0.3493	1.3972
2.26-2.29	2.275	5	60.9406	0.3570	1.7850
2.30-2.33	2.315	1	2.315	0.3646	0.3646
2.34-2.37	2.355	1	2.355	0.3720	0.3720
		$\sum f = 24$	$\prod x^f = 178967745.4$	---	$\sum f \log x = 8.2526$

بنیادی کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$\text{G.M} = \left[\prod x^f\right]^{\frac{1}{\sum f}} = (178967745.4)^{\frac{1}{24}} = 2.2073 \text{ mm}$$

لوگارتھمک کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{\sum f \log x}{\sum f}\right] = \text{antilog}\left[\frac{8.2526}{24}\right] = 2.2074 \text{ mm}$$

ہم آہنگ اوسط (Harmonic Mean):

ہم آہنگ اوسط (H.M) اعداد و شمار کے معکوس کے حسابی اوسط کا معکوس ہے۔ ہم تمام غیر صفر نمبروں کو ان کے معکوس جمع کر کے ملاتے ہیں اور پھر ان کو n برابر حصوں میں تقسیم کر کے اختلاف کے اثر کو ختم کر دیتے ہیں۔ آخر میں H.M نتیجے کا معکوس ہے۔

H.M کو عام طور پر مقداری مواد کے لیے شمار کیا جاتا ہے، اور یہ ہمیشہ منفرد ہوتا ہے۔

اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ غیر صفر اعداد ہیں تو: غیر گروہی مواد کے لیے H.M معکوس کا "معکوس کا حسابی اوسط"

$$\frac{n}{\sum\left(\frac{1}{x}\right)} = \left[\frac{\sum\left(\frac{1}{x}\right)}{n}\right] \text{ کا معکوس } = \left[\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}\right] = \text{H.M.} \qquad (1)$$

غیر گروہی مواد کے لیے، اگر x غیر صفر جماعتی نشانات ہیں تو پھر:

$$\text{H.M.} = \frac{\sum f}{\sum\left(\frac{f}{x}\right)} \qquad (2)$$

مثال 1: ہر 10 کلو میٹر کے فاصلے کے لیے ماپا جانے والی گاڑی کی رفتار کا ہم آہنگ اوسط معلوم کریں۔ رفتاریں یہ ہیں: 15 کلو میٹر فی گھنٹہ 30 کلو میٹر فی گھنٹہ، 22 کلو میٹر فی گھنٹہ، 30 کلو میٹر فی گھنٹہ اور 45 کلو میٹر فی گھنٹہ۔

حل:

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\sum\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{5}{\frac{1}{15}+\frac{1}{30}+\frac{1}{22}+\frac{1}{30}+\frac{1}{45}} = \frac{5}{0.0667+0.0333+0.0454+0.0333+0.0222}$$

$$\text{H.M.} = \frac{5}{0.2009} = 24.8880.$$

اس لیے، H.M کا استعمال کرتے ہوئے گاڑی کی اوسط رفتار 12 .4719 کلو میٹر فی گھنٹہ ہے۔

مثال2: کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں) 20 بوتلوں کے لیے دی جاتی ہے۔ H.M مقدار معلوم کریں۔

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: دیئے گئے مواد کو غیر مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے۔

اس لیے:

$$\text{H.M.} = \frac{\sum f}{\sum\left(\frac{f}{x}\right)} = \frac{2+7+5+5+1}{\frac{2}{1.48}+\frac{7}{1.49}+\frac{5}{1.50}+\frac{5}{1.51}+\frac{1}{1.52}}$$

$$\text{H.M.} = \frac{20}{1.3513+4.6980+3.3333+3.3112+0.6579} = \frac{20}{13.3517} = 1.4979\ l$$ لیٹر

مثال3: دھاتوں کے 50 بلاکس کی کمیت (کلوگرام میں) کا H.M معلوم کریں۔

کمیت (کلوگرام)	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.0	8.9-9.1
بلاکس کی تعداد	3	5	9	14	11	6	2

حل: مواد کو مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے۔

اس لیے:

$$\text{H.M} = \frac{\sum f}{\sum\left(\frac{f}{x}\right)}$$

جماعتی حدود	جماعتی نشانات (x)	f	$\frac{f}{x}$
7.1-7.3	7.2	3	0.4167
7.4-7.6	7.5	5	0.6667
7.7-7.9	7.8	9	1.1538
8.0-8.2	8.1	14	1.7284
8.3-8.5	8.4	11	1.3095
8.6-8.8	8.7	6	0.6896
8.9-9.1	9.0	2	0.2222
کل	---	50	6.1869

$$\text{H.M} = \frac{50}{6.1869} = 8.0816\ \text{Kg.}$$

درج ذیل جدول میں مطلوبہ رقوم کا حساب کرتے ہوئے، ہمارے پاس ہے:

مشق 22.3

1- درج ذیل میں AM, GM, H.M وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں (جہاں بھی ممکن ہو):

a. 3.2, 6, 10, 12, 12, -20, 25, 28, 30.8
b. 14, 12, 18, 19, 0, -19, -18, -12, -14
c. 6.5, 11, 12.3, 9, 8.1, 16, 18, 20.5, 25
d. 51, 55, 52, 54, 58, 60, 61, 62, 52, 57, 52, 64
e. A+, O-, AB+, O+, AB+, AB-, B+, AB+, O+, A- (بلڈ گروپس)
f. شمال، جنوب، مشرق، مغرب (سمتیں)
g. B+, فیل, B+, A+, A-, C+, B+, A-, B-, فیل, A-, B+, C- (گریڈز)

2- دس کارکنوں کی روزانہ کی کمائی روپے میں یہ ہے: 188, 170, 172, 125, 115, 195, 181, 190, 195,
A.M (تعریف اور انحراف کے لحاظ سے A=50 اور G.M,(h=10 کے ساتھ)،
G.M (بذریعہ تعریف اور لوگارتھمک طریقے سے)، H.M وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

3-60 لوگوں سے لیے گئے مواد کے لیے کتوں سے اوسط رویہ، A.M وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

رویہ	کتوں کو پیار کرتے ہیں	کتوں کو پسند کرتے ہیں	کوئی رائے نہیں	کتوں کو ناپسند کرتے ہیں	کتوں سے نفرت کرتے ہیں
لوگوں کی تعداد	20	15	4	13	9

4- دیا گیا مواد ایک شہر میں لوگوں کے مرنے کی وجوہات ظاہر کرتا ہے۔ لوگوں کے مرنے کی وجہ کا عادہ معلوم کریں:

مرنے کی وجوہات	ٹی بی	ذیابیطس	ملیریا	ہیضہ	کووڈ	سرطان	بی پی	دل کا دورہ
لوگوں کی تعداد	10	6	2	2	15	10	2	5

5- 50٪ رعایت پر اسٹور میں فروخت ہونے والے جوتوں کے سائز درج ہیں A.M، G.M، H.M، Q_1، Q_3 اور وسطانیہ معلوم کریں۔
اور اس دن فروخت ہونے والے جوتوں کے سائز کا عادہ معلوم کریں۔

جوتوں کا سائز	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5
فروخت شدہ جوڑوں کی تعداد	2	5	15	30	60	40	23	11	4	1

6- ایک فیکٹری میں ہزار ملازمین کو یومیہ اجرت (100 روپے ہیں) دی جاتی ہے HM ,GM, AM وسطانیہ، چوتھائیاں اور اجرت کا عادہ معلوم کریں۔

یومیہ اجرت (100 روپے میں)	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
ملازمین کی تعداد	3	13	43	102	175	220	204	139	69	25	6	1

7- پچھلے 50 دنوں کے لیے کمپنی کے ذریعے کمائے گئے منافع کا خلاصہ ذیل میں دیا گیا ہے۔ A.M منافع معلوم کریں بذریعہ مختصر اور کوڈنگ طریقے سے۔
(a) ,A = 9000، h = 2000، (b) A = 11000، h = 2000

منافع (روپے)	4000-6000	6000-8000	8000-10000	10000-12000	12000-14000
دنوں کی تعداد	5	7	11	21	6

8- کسی مضمون (50 میں سے) طلباء کے حاصل کردہ نمبر مندرجہ ذیل گروپی جدول میں دیئے گئے ہیں۔ G.M, A.M (براہ راست اور لوگارتھمک طریقوں کا استعمال کرتے ہوئے)، H.M وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

مارکس	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
طلباء کی تعداد	9	18	35	17	5

9- مندرجہ ذیل مواد آلات کی تعداد دکھاتا ہے جس کے نتیجے میں مناسب رینجز میں مشاہدہ شدہ قدریں ملتی ہیں AM, GM, HM وسطانیہ چوتھائیاں اور عادہ معلوم کریں۔

جماعتی حدود	10.5-10.9	11.0-11.4	11.5-11.9	12.0-12.4	12.5-12.9
تعددات	2	7	10	12	8

22.3(ii) حسابی اوسط کی خصوصیات کو پہچانیں:

یہاں ہم A.M کی کچھ خصوصیات پر مثالوں کے ساتھ بحث کرتے ہیں۔

1- A.M کے بارے میں غیر گروہی مواد میں مشاہدات کے تمام انحرافات کا مجموعہ صفر ہے۔ 2- A.M ایک مستقل ڈیٹا سیٹ کا وہ خود مستقل ہے۔

3- اگر ایک سیٹ X کا AM $\bar{x}$ ہے پھر $Y = aX + b$ کا $\bar{y} = a\bar{x} + b$ ہے، یہاں a اور b حقیقی اعداد ہیں۔

4- اگر $AM = GM = HM$ تو مواد میں تمام مشاہدات یکساں یا مستقل ہیں۔

5- غیر مستقل مواد کے لیے، $AM > GM > HM$ 6- غیر مستقل مواد کے لیے $(AM)(HM) \approx (G.M.)^2$

7- اگر AM = وسطانیہ، تو پھر مواد تشاکل (Symmetric) ہیں، ورنہ غیر تشاکل (Asymmetric) ہیں۔

8- یونی-موڈل تشاکل مواد میں A.M = وسطانیہ = عادہ 9- مستقل مواد کے لیے $AM = GM = HM$ = وسطانیہ = عادہ

مثال 1: درج ذیل ڈیٹا سیٹس کا حسابی اوسط معلوم کریں۔

(i). $X = \{19, 19, 19, 19, 19\}$ (ii). $Y = \{3, 4, 6, 1, 6\}$ جہاں، $Z = 3Y + 7$

حل: (i) $X=\{19,19,19,19,19\}$ تمام اقدار کے ساتھ 19 کے برابر ہے، اس لیے $\bar{x}=19$

(ii) پہلے ہم معلوم کرتے ہیں 4 $\bar{y}=\frac{3+4+6+1+6}{5}=\frac{20}{5}=$

اب جیسا کہ $Z = 3Y + 7$ اس لیے $\bar{z}=3\bar{y}+7=3(4)+7=19.$

ہم یہ تصدیق کر سکتے ہیں کہ جب $Z = 3Y + 7=\{16,19,25,10,25\}$ پھر $\bar{z}=19$ صحیح ہے۔

مثال 2: یہ دکھائیں کہ اس $\{3,4,6,1,6\}$ میں تمام انحرافات کا مجموعہ اس کے A.M کے بارے میں صفر ہے۔

ثبوت:

فرض کیا کہ $X=\{3,4,6,1,6\}$ سب سے پہلے $\bar{x}$ معلوم کرتے ہیں، جو کہ یہ ہے $\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{20}{5}=4$

اب $\bar{x}$ کے بارے میں انحرافات یہ ہیں: (1-4),(6-4),(4-4),(3-4) یا صرف 1-, 0, 2, 3- اور 2 اب ہم $\bar{x}$ کے بارے میں تمام انحرافات کا مشاہدہ کرتے ہیں: $\sum(X-\bar{x})=0$ $\Rightarrow \sum(X-\bar{x})=(-1)+(0)+(2)+(-3)+(2)=0.$ دکھا دیا گیا ہے۔

مثال 3: تصدیق کریں کہ $\{19,19,19,19,19\}$ کے لیے A.M. = G.M. = H.M.= وسطانیہ=عادہ

حل: دیئے گئے مستقل ڈیٹا سیٹ کے لیے تمام اوسط معلوم کریں یہاں $n=5$ (طاق)

(i) $A.M.=\frac{19+19+19+19+19}{5}=19$ تمام اقدار کے ساتھ 19 کے برابر ہے اس لیے $\bar{x}=19$

(ii) پہلے ہم معلوم کرتے ہیں $G.M.=(19\times19\times19\times19\times19)^{1/5}=19^{5\times\frac{1}{5}}=19.$

(iii) $H.M.=\frac{5}{\frac{1}{19}+\frac{1}{19}+\frac{1}{19}+\frac{1}{19}+\frac{1}{19}}=\frac{5}{\frac{5}{19}}=19.$

(iv) وسطانیہ.. $=\left(\frac{5+1}{2}\right)$ واں مشاہدہ=تیسرا مشاہدہ= 19

(v) عادہ= 19 (سب سے کثرت سے آنے والا مشاہدہ)

مساوات (I) سے (V) تک: ہمارے پاس ہے: AM = GM = HM = وسطانیہ=عادہ لہٰذا تصدیق ہوئی۔

مثال 4: A.M اور وسطانیہ کا استعمال کرتے ہوئے یہ دیکھیں کہ اگر مندرجہ ذیل مواد تشاکل / غیر تشاکل ہیں۔

(i). 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10 (ii). 4, 8, 13, 14, 19, 20, 23

حل:

(i) $A.M.=\frac{4+5+6+6+6+7+7+7+7+7+7+8+8+8+9+10}{16}=\frac{112}{16}=7$

وسطانیہ $=\frac{1}{2}[$ آٹھواں + نواں $]$ مشاہدہ $=\frac{1}{2}[7+7]=7$

جیسا کہ AM= وسطانیہ، اس لیے مواد تشاکل ہیں۔

(ii)

$$A.M = \frac{4+8+13+14+19+20+23}{7} = 14.42$$

وسطانیہ $\left[\frac{7+1}{2}\right]$ واں مشاہدہ=چوتھا مشاہدہ = 14

جیسا کہ $A.M \neq$ وسطانیہ، اس لیے مواد غیر تشاکل ہیں۔

مثال 5: $\{4,5,6,6,6,6,7,7,8\}$ کے لیے تصدیق کریں:

(i) $A.M. > G.M. > H.M$

(ii) $(G.M)^2 \approx (A.M)(H.M)$

حل:

$$A.M. = \frac{4+5+6+6+6+7+7+8}{8} = 6.125,$$

$$G.M. = (4\times5\times6\times6\times6\times7\times7\times8)^{1/8} = 6.006$$

$$H.M. = \frac{8}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}} = 5.879.$$

جیسا کہ $6.125 > 6.006 > 5.879$ اس لیے $A.M. > G.M. > H.M.$ پس (I) کی تصدیق ہوئی۔

جیسا کہ $(G.M.)^2 = 36.072$ اور: $(A.M.)\,(H.M.) = 36.008$ اس لیے $(G.M.)^2 \approx (A.M.)(H.M.)$.

پس (ii) کی تصدیق ہوئی۔

(iii) 2.23 وزنی اوسط اور متحرک اوسط کا حساب لگائیں:

(a) وزنی اوسط:

جب اعداد و شمار میں کچھ مشاہدات دوسروں کے مقابلے میں زیادہ اہم ہوتے ہیں، تو ہم اوسط کو معلوم کرنے کے لیے سب کو برابر وزن (نسبتاً اہمیت) نہیں دے سکتے۔ وہ اوسط جو مشاہدات کی نسبتی اہمیت / وزن کی استعمال کرتے ہوئے معلوم کی جائے اسے وزنی اوسط کہا جاتا ہے۔ اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مواد میں مشاہدات سے متعلقہ اعداد ہیں اور $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ان کے متعلقہ وزن ہیں، تو پھر ان کے وزنی A.M. G.M. اور H.M یہ ہیں۔

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum w_i} = \frac{\sum wx}{\sum w},$$

$$G_w = \text{antilog}\left[\frac{\sum w\log x}{\sum w}\right]$$

$$H_w = \frac{\sum w}{\sum\left(\frac{w}{x}\right)}$$

مثال: سوشل سائنسز کے ڈپلومہ کورس میں طالب علم کے نمبر ہر ایک مضمون کے لیے دیئے جاتے ہیں جو متعلقہ وزن کے ساتھ پڑھائے جاتے ہیں۔

وزنی اوسط معلوم کریں۔

مضمون	انگریزی	فرانسیسی	تاریخ	سائنس	ریاضی
نمبرز	73	82	60	62	57
اوزان	4	3	2	1	1

حل: کلیات یہ ہیں:

$$H_w = \frac{\sum w}{\sum\left(\frac{w}{x}\right)}, \quad G_w = \text{antilog}\left[\frac{1}{\sum w}\left(\sum w\log x\right)\right] \text{ اور } \bar{x}_w = \frac{\sum xw}{\sum w}$$

مطلوبہ حساب ہم مندرجہ ذیل جدول میں کرتے ہیں:

x	w	$x.w$	$\frac{w}{x}$	log x	w. log x
73	4	292	0.0548	1.8633	7.4532
82	3	246	0.0366	1.9138	5.7414
60	2	120	0.0333	1.7782	3.5564
62	1	62	0.0161	1.7924	1.7924
57	1	57	0.0175	1.7559	1.7559
جمع	11	777	0.1538	---	20.2993

$$\bar{x}_w = \frac{777}{11} = 70.6$$ نمبر

$$G_w = \text{anti log}\left[\frac{1}{11} \times 20.2993\right]$$

$$G_w = \text{antilog}(1.8454) = 70.04$$ نمبر

$$H_w = \frac{11}{0.1583} = 69.5$$ نمبر

نوٹ:

مثال 1: میں، غیر وزنی اوسط یہ ہیں: $\bar{x} = 66.8$, G.M.=66.17 اور H·M·=65.58 جو کہ وزنی ااوسط سے کم ہیں وزنی اوسط نمبر اہم کورسز کو زیادہ حصہ دیے کر طالب علم کی اوسط کارکردگی کو بہترین انداز میں بیان کرتے ہیں۔

(B) متحرک اوسط:

جب ہم وقت کے مقررہ وقفوں (دنوں / مہینوں / سالوں وغیرہ میں) پر دلچسپی کے متغیر کے اوسط رویے کی جانچ کرنا چاہتے ہیں تو یہ ضروری ہے کہ اوسط میں تبدیلی کو ٹریک کیا جائے جیسا کہ وقت مخصوص ادوار کے لیے آگے بڑھتا ہے۔ اس صورت میں وقت کے مخصوص / دیار / وقفوں کی اوسط وقت کے بڑھنے کے ساتھ ساتھ تبدیل ہوتی رہی ہے اور اسے متحرک اوسط کہا جاتا ہے۔

ایک طاق مدتی حرکت پذیری اوسط کی صورت میں، ہم متحرک اوسط کو صرف مخصوص مدت کے درمیانی سیلز (CELLS) پر رکھتے ہیں اور باقی سیلز خالی رکھتے ہیں۔ حرکت پذیری اوسط کی جگہ کا تعین پہلے سے موجود سیلز پر کیا جانا چاہیئے۔

ایک جفت مدتی حرکت پذیری اوسط کی صورت میں، ہم درمیانی دو سیلز کا اوسط رکھتے ہیں۔ اس طرح پلیسمنٹ پہلے سے موجود سیلز پر کی جاسکتی ہے۔

مندرجہ ذیل مثالوں کا استعمال کرتے ہوئے عمل کو واضح کیا گیا ہے۔

مثال 1: مواد پچھلے سال کے لیے روپے / ماہ میں ایک شے کی ماہانہ قیمت کا خلاصہ کرتا ہے۔

ماہ	جنوری	فروری	مارچ	اپریل	مئی	جون	جولائی	آگست	ستمبر	آکتوبر	نومبر	ڈسمبر
قیمت (روپے/ماہ)	180	87	91	102	108	139	150	200	220	307	289	330

حساب لگائیں (I) 3 ماہ (II) 5 ماہ (III) 4 ماہ کی متحرک اوسط

حل: (i) پہلے ہم مسلسل 3 مہینوں پر غور کر کے 3 مہینو کی متحرک اوسط کا حساب لگاتے ہیں: جنوری سے مارچ، فروری سے اپریل، مارچ سے مئی اور اسی طرح آخری 3 ماہ کی مدت: آکتوبر سے دسمبر تک۔ یہ 3 ماہ کی مدت کے درمیاں مہینے میں رکھے جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر، جنوری تا مارچ کی متحرک اوسط فروری کے برابر رکھی گئی ہے۔

3- ماہ کی متحرک اوسط ملحقہ جدول میں خلاصہ کی گئیں ہیں۔

ماہ	قیمت	3 ماہ کی متحرک اوسط
جنوری	180	------------
فروری	87	(180+87+91)/3=119.33
مارچ	91	93.33
اپریل	102	100.33
مئی	108	166.33
جون	139	132.33
جولائی	150	163
آگسٹ	200	190
ستمبر	220	242.33
اکتوبر	307	272
نومبر	289	308.66
دسمبر	330	------------

ماہ	قیمت	5ماہ کی متحرک اوسط
جنوری	180	------------
فروری	87	------------
مارچ	91	(180+87+91+102+108)/5=113.6
اپریل	102	105.4
مئی	108	118
جون	139	139.8
جولائی	150	163.4
اگست	200	203.2
ستمبر	220	233.2
اکتوبر	307	269.2
نومبر	289	------------
دسمبر	330	------------

(ii) 5 مہینوں کی متحرک اوسط کے لیے، ہم جنوری سے مئی، فروری سے جون، ...، اور آگسٹ سے دسمبر تک ہر بار لگاتار 5 مہینوں پر غور کرتے ہیں متحرک اوسط کو ملحقہ جدول میں دکھایا گیا ہے۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس طرح کے کل 18 مکانات ہو سکتے ہیں پہلے اور آخری دو سیلز خالی چھوڑ دیئے گئے ہیں۔

5ماہ کی متحرک اوسط درمیانی مہینوں میں رکھی گئی ہے۔

(iii) 4ماہ کی متحرک اوسط کے لیے، ہم جنوری سے اپریل، فروری سے مئی ، ستمبر سے دسمبر تک ہر بار مسلسل 4 مہینوں کے گروہوں پر غور کرتے ہیں۔

ابتدائی طور پر اوسطوں کو 4 مہینوں کے درمیان میں رکھا جاتا ہے، پھر دو 4ماہ کی اوسطوں کے ہر جوڑے کا مزید اوسط کیا جاتا ہے تاکہ مطلوبہ 4ماہ کی درمیانی متحرک اوسط حاصل کی جاسکے۔

نتائج کا خلاصہ درج ذیل جدول میں کیا گیا ہے۔ ہمیں جفت مدت گروہ کے لیے ہمیشہ دو کام شامل کرنے ہونگے۔

ماہ	قیمت	4ماہ کی متحرک اوسط (ابتدائی)	4ماہ کی متحرک اوسط (درمیانی)
جنوری	180		------------
فروری	87		------------
		115	
مارچ	91		106
		97	
اپریل	102		103.5
		110	
مئی	108		117.375
		124.75	
جون	139		137
		149.25	
جولائی	150		163.25
		177.25	
اگست	200		198.25
		219.25	
ستمبر	220		236.625
		254	
اکتوبر	307		270.25
		286.5	
نومبر	289		------------
دسمبر	330		------------

نوٹ:

سال کے 12 مہینوں کے لیے اوسط قیمت (حسابی اوسط) 58. 183 روپے فی مہینہ کے برابر ہے۔ ہم دیکھ سکتے کہ قیمتیں مستقل نہیں ہیں اور 3، 5، 4 مہینوں کی متحرک اوسط سال بھر کے متعلقہ ادوار میں تغیرات کا بہتر خلاصہ کرتی ہے۔

(iv) 22.3 وسطانیہ، چوتھائی اور عادہ کا تخمینہ گراف سے لگائیں:

گراف کے لحاظ سے وسطانیہ اور چوتھائیاں کا پتہ لگانے اور اندازہ لگانی کے لیے، ہم مواد کا اوگیو (مجموعی تعددی کثیر الاضلاع) استعمال کرتے ہیں۔ اوگیو میں وسطانیہ، نچلی چوتھائی (Q_1) اور اوپری چوتھائی ($Q3$) صرف اوگیو پر نکات کے X– کو آرڈینیٹس ہیں جن کے y– کو آرڈینیٹس (مجموعی تعددات) بالترتیب $\frac{n}{2}$ ، $\frac{n}{4}$ اور $\frac{3n}{4}$ ہیں۔

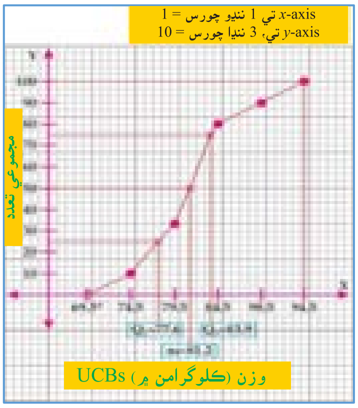
گراف کے لحاظ سے، عادہ (اگر یہ موجود ہے) کو تلاش کرنے اور اندازہ لگانے کے لیے ہم مواد کا کالمی نقشہ استعال کرتے ہیں۔ عادہ جماعت وہ ہے جس لیے مستطیل کی اونچائی سب سے زیادہ ہے، اور اس کلاس، میں عادہ دو قطعات کے ملانے والے نقطے کا X کوارڈ ینیٹ ہے۔ پہلی قطع مستطیل کی بائین چوٹیوں کو جوڑ کر تیار کیا جاتا ہے جو کہ عادہ جماعت اور اس کے بعد کی جماعت سے مطابقت رکھتا ہے۔ دوسری قطع مستطیل کی دائیں چوٹیوں کو جوڑ کر تیار کیا جاتا ہے جو عادہ جماعت اور اس سے پہلے والی جماعت سے مطابقت رکھتا ہے۔ نقطۂ تقطیع سے X محور تک عمود اسے عادہ کے مقام پر ملاتا ہے یہ طریقہ کار مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہ بند مواد کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

مثال 1: گراف کے لحاظ سے وسطانیہ، چوتھائیاں اور عادہ وزن (کلو گرام میں) تلاش کریں اور تخمینہ لگائیں۔

اوزان (کلو گرام میں)	70-74	75-79	80-84	85-89	90-94
طلباء کی تعداد	10	24	46	12	8

حل: ہمارے پاس n=100 اور دیئے گئے مواد کو مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے سب سے پہلے، محلقہ جدول میں جماعتی حدود اور مجموعی تعددات کا حساب لگانا ہے تا کہ ان کی مدد سے ہم اوگیو اور کالمی نقشہ کھینچ سکیں۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	f	مجموعی تعددات
70-74	69.5-74.5	10	10
75-79	74.5-79.5	24	34
80-84	79.5-84.5	46	80
85-89	84.5-89.5	12	92
90-94	89.5-94.5	8	100



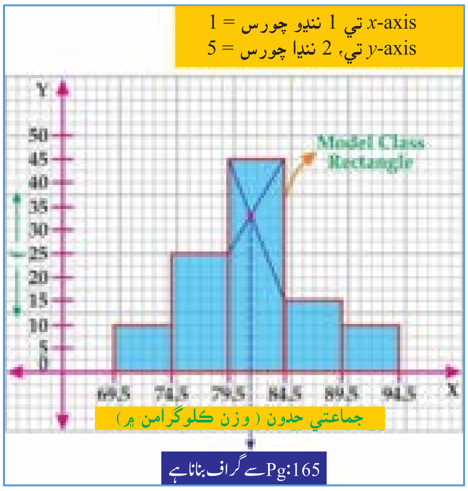
وسطانیہ اور چوتھائیوں کے لیے y– محور سے ہم شناخت کرتے ہیں $\frac{n}{2}=50$, $\frac{n}{4}=25$ اور $\frac{3n}{4}=75$ گراف بنانا ہے۔

اس کے بعد ان کے ذریعے اوگیو کی طرف عمود کھینچیں اور پھر اوگیو سے X محور تک وسطانیہ، Q_1 اور Q_3 کی طرف بالترتیب لے جانے میں رہنمائی کرتا ہے۔ ہم اقدار کو اس طرح لکھتے ہیں:

وسطانیہ ≈ 81.2,

$Q_1 \approx 77.6,$ اور

$Q_3 \approx 83.9.$



عادہ کے لیے، ہم پہلے کالمی نقشہ کھینچتے ہیں، جیسا کہ یہاں دکھایا گیا ہے۔ عادہ جماعت سب سے اونچائی والے مستطیل سے مساوی ہے، جیسا کہ گراف میں نمایاں کیا گیا ہے۔
عادہ جماعت اور اس کے بعد جماعت کے مستطیلوں کی بائین چوٹیوں کو اور عادہ جماعت اور اس سے پہلے والی جماعتوں کے مستطیلوں کی دائیں چوٹیوں کو دو قطعات کی مدد سے جوڑیں اب نقطۂ تقطیع سے X محور تک ایک عمود بنائیں جو کہ X محور پر 81.4 پر آکر ملتی ہے جہاں ہمیں عادہ ملتا ہے۔ عادہ وزن تقریباً 81.4 کلو گرام ہے۔

مشق 22.4

1- اگر، W = {148, 145, 160, 157, 156, 160, 160, 165} اور X = {-2, -2, -2, -2} پھر:

(a) یہ دکھائیں کہ W کے تمام انحرافات کا مجموعہ اس کے A.M کے بارے میں صفر ہے۔

(b) یہ دکھائیں کہ X کے لیے: AM =G.M =H.M= وسطانیہ = عادہ

(c) A.M کا حساب لگائیں y = 3x کے لیے (d) A.M کا حساب لگائیں Z= 3W−11 کے لیے: (e) یہ دکھائیں W کے لیے:

عادہ > وسطانیہ > A.M. > G.M. > H.M.

2- چیک کریں کہ اگر X = {7,9,3,3,3,4,1,3,2,2} اور Y = {2,1,4,4,4,6,6,5,7,1} تشاکل ہیں؟

3- ایک خاندان کو درکار ماہانہ اشیاء کا مطلوبہ وزن (کلو گرام) اور قیمت (روپے / کلو گرام) دی گئی ہے۔ AM G.M H.M کا استعمال کرتے ہوئے وزنی اوسط قیمتیں معلوم کریں۔

اشیاء	A	B	C	D	E
قیمت (روپے / کلو گرام)	300	200	600	250	650
مطلوبہ وزن (کلو گرام)	25	5	4	8	3

5- کووڈ 19 کی وجہ سے صوبے میں چوٹی کے ہفتے کے لیے نگرانی کی گئی اموات کی تعداد کے درج ذیل مواد سے 2، 3 اور 4 دن کی متحرک اوسط کا حساب لگائیں۔

دن	پیر	منگل	بدھ	جمعرات	جمعہ	ہفتہ	اتوار
اموات کی تعداد	102	130	158	188	196	129	310

6- 11 سال کی فروخت کے لیے 4 اور 5 سال کی اوسط فروخت (ملین روپے میں) کا حساب لگائیں۔

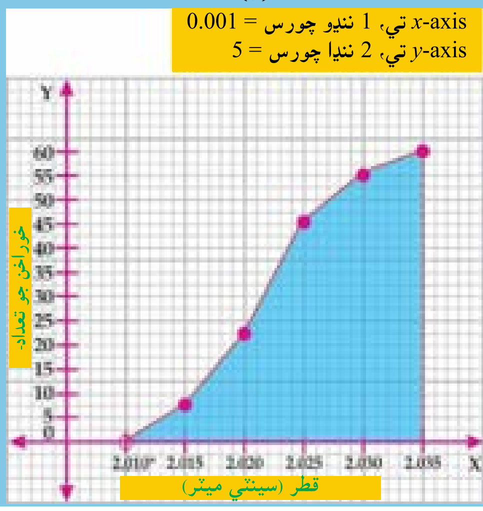
سال	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
فروخت	102	130	158	188	196	259	310	188	196	259	310

7- مواد میں وسطانیہ، چوتھائیاں اور عادہ کو گراف کی مدد سے تلاش کریں اور تخمینہ لگائیں۔

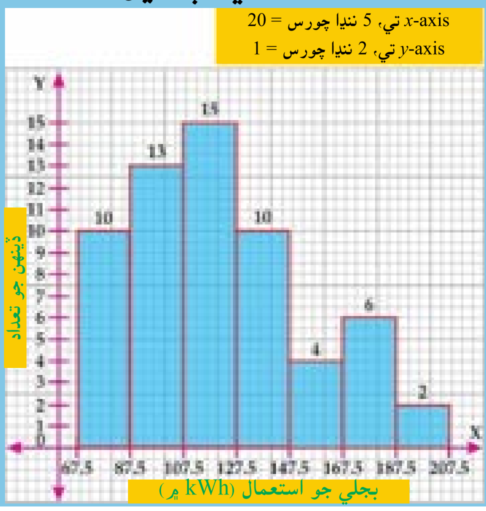
اوور ٹائم (گھنٹے فی ہفتہ)	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59
دنوں کی تعداد	5	4	7	11	12	8	1

8- درج ذیل میں دکھائے گئے پیمانوں کی تلاش کریں اور تخمینہ لگائیں:

(a) عادہ



(b) وسطانیہ اور چوتھائیاں۔



22.4 انتشاری پیمانے:

مرکزی رجحان کے پیمانے مواد کے تغیرات اور مستقل مزاجی پر توجہ مرکوز کیئے بغیر صرف مواد کے اوسط یا مرکزی رویے پر توجہ مرکوز کرتے ہیں۔ جب مشاہدات اوسط سے بہت دور ہوتے ہیں، تو صرف مرکزی رجحان کے پیمانے ہی مواد کے رویے اور خصوصیات کی مکمل تفہیم کے لیے کافی نہیں ہوتے۔ مثال کے طور پر نیچے دی گئی جدول پانچ مضامین میں دو طلباء کے نمبرز دکھاتی ہے۔

مضامین	I	II	III	IV	V
طالب علم A کے نمبر	90	30	85	50	25
طالب علم B کے نمبر	63	50	60	55	52

اگر ہم A.M کا استعمال کرتے ہوئے ہر طالب علم کے حاصل کردہ اوسط نمبر معلوم کرتے ہیں، تو ہم دیکھتے ہیں کہ دونوں طلباء کے A.M نمبر 56 ہیں، لیکن کیا دونوں طلباء کی کارکردگی کا موازنہ کرنا کافی ہے؟ جواب ہے نہیں۔ طالب علم A کے نمبروں میں اوسط کے بارے میں زیادہ اتار چڑھاؤ ہوتا ہے، جبکہ طالب علم B کے نمبر اوسط کے قریب ہیں۔ طالب علم B کی کارکردگی طالب علم A کے مقابلے میں زیادہ مستحکم / مستقل / قابل اعتماد ہے جس کی وجہ سے اوسط کے بارے میں اتار چڑھاؤ / تغیرات / بکھرنے / انتشار ہم ذیل میں سیکھے گئے تمام اقسام کا استعمال کرتے ہوئے طلباء کے اوسط نمبروں کا بھی مشاہدہ کرسکتے ہیں:

اوسط	A.M	وسطانیہ	عادہ	G.M	H.M
طالب علم A کے نمبر	56	کوئی نہیں	تقریباً	49	43 تقریباً
طالب علم B کے نمبر	56	کوئی نہیں	تقریباً	56	56 تقریباً

نمبروں میں فرق کی وجہ سے، طالب علم A کے اوسط بھی ایک دوسرے سے بہت مختلف ہیں۔ طالب علم B کے نمروں کی اوسط ایک دوسرے کے قریب ہے۔

مستحکم اور مستقل کارکردگی کی وجہ سے ہم طالب علم A کے مقابلے میں آئندہ مضمون میں طالب علم B کے نمبروں کی پیشن گوئی کرنے کے لیے بہتر پوزیشن میں ہیں۔

مواد میں تغیر کا علم فیصلہ سازی اور پیش گوئی میں بہت اہمیت رکھتا ہے۔ لہٰذا، مواد کی بہتر تفہیم کے لیے ڈگری کا حساب لگانا ضروری ہے۔ انتشار کے پیمانے اس بات کے اشارے ہیں کہ مواد مرکزی نقطہ یا اوسط کے بارے میں کس حد تک پھیلا ہوا / بکھرا ہوا ہے۔ انتشاری پیمانے مواد میں اوسط تغیر کی نشاندہی کرتے ہیں یہ زیادہ تر استحکام / مستقل مزاجی / بھروسے کے نقطہ نظر کے سے دو یا زیادہ ڈیٹا سیٹس کا موازنہ کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ مواد میں تغیر / پھلاؤ زیادہ ہے تو، استحکام / مستقل مزاجی / بھروسہ کم ہے۔ جب ہم صرف ایک ڈیٹا سیٹ میں تغیر / منتشر ہونے میں دلچسپی رکھتے ہیں تو ہم مواد کی اکائیوں میں انتشار کے پیمانوں کی گنتی کرتے ہیں، اور اس کو مطلق انتشار کے پیمانے کہتے ہیں۔ ایک ہی نوعیت / اکائیوں، مشاہدات کی تعداد اور مساوی / قریبی اوسط کے ساتھ دو یا زیادہ ڈیٹا سیٹس کے تغیرات کا بھی مطلق انتشار کے پیمانوں کا استعمال کرتے ہیں، جو مواد کی اکائیوں میں نہیں ہوتے بلکہ متعلقہ تغیر ظاہر کرتے ہیں۔

(i) 22.4 وسعت (Range) کی وضاحت، شناخت اور پیائش کریں، تغیر، اوسط انحراف اور معیاری انحراف کا حساب لگائیں:

ہم یہاں انتشار کے کچھ اہم اقدامات پر بات کرتے ہیں۔

(a) **وسعت:** مواد کی وسعت سے مراد انتہائی مشاہدات کے درمیان کا فرق ہے۔

غیر گروہی مواد کے لیے، وسعت (R) سب سے بڑے مشاہدہ (XL) اور سب سے چھوٹا مشاہدہ (Xs) کے درمیاں فرق ہے جو کہ،

(1) $R = x_L - x_S$

گروہی مواد کے لیے، R فرق ہے آخری گروہ کے UCB یعنی (UCB_F) اور ابتدائی گروہ کے LCB (UCB_I) کے درمیان کا جو کہ، (2) $R = UCB_F - LCB_I$

کلیات (1) اور (2) سے ہم مطلق وسعت کا حساب لگاتے ہیں۔ متعلقہ وسعت کے لیے ہم موازنے کے لیے بالترتب ہم مساوات (1) اور (2) کو $x_l + x_s$ اور $UCB_F + LCB_I$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

نوٹ:

- وسعت انتہائی قدروں کے ساتھ مواد کے تغیرات کی صحیح طریقے سے پیائش نہیں کرتی ہے۔
- وسعت تعدادات اور دیگر پیرامیٹر کا استعمال کیئے بغیر صرف مواد میں انتہاؤں کا استعمال کرتی ہے۔

مثال 1: ڈیٹا سیٹس کی وسعت معلوم کریں:

X = {3, 8, 10, 7, 5, 14, 2, 12, 8}, W = {27.90, 34.70, 54.40, 18.92, 47.60, 39.68}

Z = {1, 3, 2, 4, 3, 2, 43}. اور Y = {8, 8, 8, 8, 8}

نتائج کی وضاحت بھی کریں۔

حل:

ہم جانتے ہیں کہ غیر گروہی مواد کے لیے $R = x_L - x_S$ اس لیے۔

$R_Z = 43 - 1 = 42$ اور $R_Y = 8 - 8 = 0$ ، $R_X = 14 - 2 = 12$ ، $R_W = 54.40 - 18.92 = 35.48$

ہم ڈیٹا سیٹ W کے لیے وسعت کی تشریح کر سکتے ہیں کہ: "ڈیٹا سیٹ W میں تمام مشاہدات انتہائی قدروں 18.92 اور 54.40 کے درمیان 35.48 کے فاصلے پھر ہیں۔" ڈیٹا سیٹ W اور X میں مشاہدات انتہائی قدروں کے ارد گرد اچھی طرح پھیلے ہوئے ہیں، لہٰذا وسعت معنی خیر طور تغیر کی نمائندگی کرتی ہے۔ سیٹ Y کی وسعت صفر ہے کیونکہ تمام مشاہدات ایک جیسے ہیں اور کوئی تغیر نہیں ہے۔ سیٹ Z میں مشاہدات کی اکثریت 1 اور 4 کے آس پاس ہے، لیکن انتہائی قدر 43 کی وجہ سے وسعت 42 کے برابر گمراہ کن ہے۔

مثال2: وسعت کا استعمال کرتے ہوئے ذیل میں دیئے گئے پانچ مضامین میں دو طلباء کے نمبروں کے فرق کا موازنہ کریں، اور نتائج کی تشریح کریں، کون سا طالب علم زیادہ مسلسل کارکردگی دکھاتا ہے؟

طالب علم A کے نمبر	90	90	85	50	25
طالب علم B کے نمبر	63	50	60	55	52

حل: دونوں طلباء کا مواد غیر گروہی ہے۔ نمبروں کی مطلق وسعت یہ ہیں $R_A = 90 - 25 = 65$ نمبرز اور $R_B = 63 - 50 = 13$ نمبرز لہٰذا، یہاں $x_S + x_L$ دونوں طلباء کے لیے ایک جیسا ہے، اس لیے متعلقہ وسعت یہاں مفید نہیں ہے۔ طالب علم A کی کارکردگی مطلق وسعت کی بنیاد پر طالب علم B کے مقابلے میں زیادہ تغیرات دکھاتی ہے لہٰذا، طالب علم B طالب علم A سے زیادہ مستقل کارکردگی کا مظاہرہ کرتا ہے۔

مثال3: وسعت کا استعمال کرتے ہوئے دو مختلف کمپنیوں کے ذریعے تیار کردہ پانچ ایک جیسے ریٹنگ والی بیٹریوں کی قیمت اور زندگی کے تغیرات کا موازنہ کریں۔

قیمت (ہزار روپوں میں)	8	13	18	23	30
زندگی (سالوں میں)	1.3	1.5	1.8	2.5	3.5

حل:

بیٹریوں کی قیمت (P) اور زندگی (L) کا مواد غیر گروہی ہے، اور فطرت اور اکائیوں میں مختلف ہے $x_S + x_L$ بھی دونوں ڈیٹا سیٹس کے لیے مختلف ہیں۔ لہٰذا ہم تغیرات کا موازنہ کرنے کے لئے متعلقہ وسعت کا استعمال کرتے ہیں۔

$$R_P \text{ متعلقہ } = \frac{P_L - P_S}{P_L + P_S} = \frac{30-8}{30+8} = \frac{22}{38} = 0.5789$$

$$R_L \text{ متعلقہ } = \frac{L_L - L_S}{L_L + L_S} = \frac{3.5-1.3}{3.5+1.3} = \frac{2.2}{4.8} = 0.4583.$$

بیٹریوں کی زندگی میں متعلقہ تغیرات کا موازنہ پانچ مختلف کمپنیوں کی جانب سے تیار کردہ بیٹریوں کی قیمتوں میں نسبتاً زیادہ فرق ہے۔

مثال4: کراچی اور مورو میں کچھ تصادفی طور پر منتخب خاندانوں کے گروہ بند مواد کا استعمال کرتے ہوئے ایک خاندان کے پاس موجود موبائلز کی تعداد کا موازنہ کریں۔ کیا یہ موازنہ وسعت کی بنیاد پر کرنا کافی ہے؟

موبائلوں کی تعداد	0	1	2	3	4	5	6	7
خاندانوں کی تعداد (کراچی)	1	7	15	12	5	2	2	1
خاندانوں کی تعداد (مورو)	4	13	8	5	2	1	0	1

حل: مواد کو غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ جماعتی وقفہ $d = 1$ کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے تو وسعت یہ ہے:

$$R = UCB_F - LCB_I = (7 + 0.5) - (0 - 0.5)$$

$R = 0.5 + 7.5 = 8$ موبائل۔

کراچی اور مورو میں ایک خاندان کے پاس موبائلوں کی تعداد ایک جیسے ہے، یعنی 8 موبائل۔ لیکن، وسعت شہروں میں خاندانوں کی تعدد (تعدد) پر غور نہیں کرتی ہے۔ کراچی اور مورو میں ایک اوسط خاندان کے پاس موجود موبائلوں کی تعداد میں فرق یقیناً مختلف ہے، لیکن وسعت سے اس کی عکاسی نہیں کی جاسکتی۔

مثال 5: مواد کا استعمال کرتے ہوئے دکان کی بجلی کی کھپت (KWH میں) کی وسعت معلوم کریں:

بجلی کی کھپت	18-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: مواد کو مسلسل جماعتوں کے ساتھ درمیانی وقفہ d=1 کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے۔ اس لیے،

$$R = UCB_F - LCB_I = \left[207+\frac{1}{2}\right]-\left[68-\frac{1}{2}\right] = 207.5-67.5 = 140\,\text{kWh}.$$

یہاں R جماعتوں کی تعدادات کو استعمال نہیں کرتا ہے، تو گمراہ کن ہو سکتا ہے۔

(b) تغیر اوسط انحراف اور معیاری انحراف:

پھیلاؤ کی مقدار کو بہتر طریقے سے شمار کرنے کے لیے، ہم تمام مشاہدات کا استعمال کرتے ہیں بجائے صرف انتہائی والوں کے اور ساتھ میں ان کے تعدد بھی تغیر اوسط انحراف اور معیاری انحراف کے تصورات میں اوسط (عام طور پر A.M) کے بارے میں مشاہدہ x کا انحراف ہے، جسکو اس طرح بیان کیا گیا ہے: اوسط کے بارے میں انحراف (1) - $D_i = x_i - \bar{x}$

انحراف منفی، مثبت اور صفر ہوسکتے ہیں، لیکن تمام انحرافات کا حساب لگانے کے لیے، صرف ان کو جمع کرنا مفید نہیں ہوگا کیونکہ نتیجہ ہمیشہ صفر ہی رہے گا۔ اس پر قابو پانے کے لیے ہمیں منفی انحراف سے بچنا چاہیئے اور یہ دو طریقوں سے کیا جاتا ہے۔ ہم مربعی انحراف یا مطلق انحراف کا استعمال کرسکتے ہیں، جس کی تعریف اس طرح کی گئی ہے۔

اوسط کے بارے میں مربعی انحراف (2) $= D_i^2 = (x_i-\bar{x})^2$ اوسط کے بارے میں مطلق انحراف (3) $= |D_i| = |x_i - \bar{x}|$

حقیقی نمبر کی مطلق قدر ہمیشہ غیر منفی ہوتی ہے مثال کے طور پر $|3| = 3$، $|-22| = 22$، $|0| = 0$ ، $|1.5| = 1.5$ یہ دو طریقے ہمیں انتشاری پیمانوں کی وضاحت کرنے کے زیادہ قریب لے جاتے ہیں۔

تغیر (V یا S^2) انکے A.M کے بارے میں مشاہدات کے مربع انحراف کا اوسط ہے۔ اوسط (یا مطلق) انحراف (M.D) انکے A.M کے بارے میں مشاہدات کے مطلق انحراف کا اوسط ہے۔ کیونکہ انتشار عام طور پر مواد کی اصل اکائیوں میں معنیٰ خیز ہوتا ہے اور تغیر اسکے مربع کائیوں میں معلوم کرتا ہے لہذا ہم معیاری انحراف کی وضاحت کے لیے اسکا مربع جزر معلوم کرتے ہیں۔ معیاری انحراف (S.D یا S) تغیر کا مثبت مربع جزر ہے۔ مشاہدات کے ساتھ غیر گروہی مواد کے لیے $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ تو $\text{A.M.} = \bar{x}$

$$Var = s^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n} \qquad (4) \qquad M.D. = \frac{\sum |x-\bar{x}|}{n} \qquad (5)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \quad \text{یہاں} \quad S.D. = s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}} \qquad (6)$$

گروہی مواد کے لیے، اگر x_i جماعتی نشانات ہیں اور f_i جماعتی تعددات ہیں، تو پھر:

$$Var = s^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{\sum f} \qquad (7)$$

$$M.D. = \frac{\sum |x-\bar{x}| f}{\sum f} \qquad (8)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} \quad \text{یہاں} \quad S.D. = s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{\sum f}} \qquad (9)$$

کلیوں (4) سے (9) میں ہم مطلق پیمانوں کا حساب لگاتے ہیں، موازنے کے لیے اعداد و شمار کی اکائیوں کو $\bar{x}$ سے تقسیم کر کے متعلقہ پیمانوں کی گنتی کی جاتی ہے۔

مثال 1: طالب علموں A اور B کے نمبروں کا تغیر، اوسط انحراف اور معیاری انحراف معلوم کریں۔ کونسا طالب علم زیادہ مسلسل کارکردگی دکھاتا ہے؟

طالب علم A کے نمبر	90	30	85	50	25
طالب علم B کے نمبر	63	50	50	55	52

حل:

دونوں طلباء کے نمبر غیر گروہی مواد کو ظاہر کرتے ہیں۔ سب سے پہلے، ہم اوسط نمبروں کو معلوم کرتے ہیں۔

طالب علم A(x) اور طالب علم B (y) کے لیے، ہمارے پاس ہے:

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{280}{5} = 56 \quad \text{اور} \quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{280}{5} = 56$$

جیسا کہ اوسط ایک جیسی ہیں، اس لیے ہم مطلق تغیر کے کلیوں میں تغیر، اوسط انحراف اور معیاری انحراف کا استعمال کرتے ہیں۔ حسابات درج ذیل جدولوں میں دکھائے گئے ہیں

x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$
90	34	1156	34
30	-26	676	26
85	29	841	29
50	-6	36	6
25	-31	961	31
جمع = 280	0	3670	126

$$Var_A = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{3670}{5} = 734.$$

$$(M.D.)_A = \frac{\sum\lvert x-\bar{x}\rvert}{n} = \frac{126}{5} = 25.2.$$

$$(S.D.) = \sqrt{734} = 27.0924.$$

y	$y-\bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$	$\lvert y-\bar{y}\rvert$
63	7	49	7
50	-6	36	6
60	4	16	4
55	-1	1	1
52	-4	16	4
جمع = 280	0	118	22

$$Var_B = \frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n} = \frac{118}{5} = 23.6.$$

$$(M.D.)_B = \frac{\sum\lvert y-\bar{y}\rvert}{n} = \frac{22}{5} = 4.4.$$

$$(S.D.)_B = \sqrt{23.6} = 4.8578.$$

ہم مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ طالب علم A کے نمبروں میں فرق تمام کلیوں کے لحاظ سے طالب علم B کے نمبروں سے بہت زیادہ ہے، لہٰذا طالب علم B کی کارکردگی زیادہ مستقل ہے۔

مثال 2: مختلف کمپنیوں کے ذریعے تیار کردہ پانچ ایک جیسی ریٹنگ والی بیٹریوں کی قیمت اور زندگی کے معیاری انحراف کا استعمال کرتے ہوئے تغیر کا موازنہ کریں نتائج کی تشریح بھی کریں۔

قیمت (ہزار روپوں میں)	8	13	18	23	30
زندگی (سالوں میں)	1.3	1.5	1.8	2.5	3.5

حل: قیمت کا مواد (P) اور زندگی (L) غیر گروہی ہیں اور نوعیت اور اکائیوں میں مختلف ہیں۔ سب سے پہلے ہم اوسط معلوم کرتے ہیں۔

$$\bar{x}_P = \frac{\sum x_P}{n} = \frac{92}{5} = 18.4 \text{ ہزار روپے}$$

اور

$$\bar{x}_L = \frac{\sum x_L}{n} = \frac{10.6}{5} = 2.12 \text{ سال}$$

جیسا کہ اوسط مختلف ہیں، ہم موازنے کے لیے متعلقہ معیاری انحراف کا استعمال کرتے ہیں۔ P اور L کے لیے حسابات درج ذیل جدولوں میں دکھائے گئے ہیں۔

قیمت (P)	$x_P - \bar{x}_P$	$(x_P - \bar{x}_P)^2$
8	-10.4	108.16
13	-5.4	29.16
18	-0.4	0.16
23	4.6`	21.16
30	11.6	134.56
جمع = 92	0	293.2

$$s_P = \sqrt{\frac{\sum (x_P - \bar{x}_P)^2}{n}} = \sqrt{\frac{293.2}{5}} = 7.658 \text{ ہزار روپے}$$

$$\text{متعلقہ } s_P = \frac{s_P}{\bar{x}_P} = \frac{7.658}{18.4} = 0.416.$$

زندگی (L)	$x_L - \bar{x}_L$	$(x_L - \bar{x}_L)^2$
1.3	-0.82	1.69
1.5	-0.62	2.25
1.8	-0.32	3.24
2.5	0.38	6.25
3.5	1.38	12.25
جمع = 10.6	0	25.68

$$s_L = \sqrt{\frac{\sum (x_L - \bar{x}_L)^2}{n}} = \sqrt{\frac{25.68}{5}} = 2.266 \text{ سال}$$

$$\text{متعلقہ } s_L = \frac{s_L}{\bar{x}_L} = \frac{2.266}{2.12} = 1.069.$$

بیٹریوں کی زندگی میں متعلقہ معیاری انحراف قیمت سے زیادہ ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ بیٹریوں کی قیمت کا مواد بیٹریوں کی زندگی کے مواد سے زیادہ متواثر ہے۔ ہم نوٹ کر سکتے ہیں کہ اگر متعلقہ کلیوں کا استعمال نہیں کیا جاتا تو نتیجہ مختلف اور غلط ہوتا۔

مثال 3: کولڈ ڈرنک کی مقدار کا تغیر، اوسط انحراف اور معیاری انحراف معلوم کریں۔

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: مواد کو غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے۔ حسابات درج ذیل جدول میں دیئے گئے ہیں:

مقدار (x)	بوتلوں کی تعداد (f)	xf	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$(x-\bar{x})^2f$	$\lvert x-x\rvert f$
1.48	2	2.96	-0.018	0.0003240	0.018	0.000648	0.036
1.49	7	10.43	-0.008	0.0000640	0.008	0.000448	0.056
1.50	5	7.5	0.002	0.0000040	0.002	0.00002	0.01
1.51	5	7.55	0.012	0.0001440	0.012	0.00072	0.06
1.52	1	1.52	0.022	0.0004840	0.022	0.000484	0.022
جمع	20	29.96	-	-	-	0.00232	0.184

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{29.96}{20} = 1.498 \text{ لیٹر}$$

$$Var = s^2 = \frac{\sum (x-x)^2 f}{\sum f} = \frac{0.00232}{20} = 0.000116 \text{ (لیٹر)}^2$$

$$S.D. = S = \sqrt{0.000116} = 0.01078 \text{ لیٹر}$$

$$M.D. = \frac{\sum |x-\bar{x}| f}{\sum f} = \frac{0.184}{20} = 0.0092$$

مثال4: بجلی کی کھپت کے مواد کا اوسط انحراف اور معیاری انحراف معلوم کریں:

بجلی کی کھپت (KWH) میں	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: حسابات کا خلاصہ درج ذیل جدول میں کیا گیا ہے۔ جہاں x جماعتی نشانات کو ظاہر کرتا ہے۔

جماعتی حدود	جماعتی نشانات (x)	f	xf	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$(x-\bar{x})^2f$	$\lvert x-\bar{x}\rvert f$
68-87	77.5	10	775	-44.167	1950.724	44.167	19507.24	441.67
88-107	47.5	13	1267.5	-24.167	584.0439	24.167	7592.571	314.171
108-127	117.5	15	1762.5	-4.167	17.36381	4.167	260.4583	62.505
128-147	137.5	10	1375	15.833	250.6839	15.833	2506.839	158.33
148-167	157.5	4	630	35.833	128.004	35.833	5136.016	143.332
168-187	177.5	6	1065	55.833	3317.324	55.833	18703.94	334.998
188-207	197.5	2	393	75.833	5750.644	75.833	11501.29	160.6.672
جمع	-	60	7270	-	-	-	65208.35	

سب سے پہلے ہمیں اوسط کھپت کی ضرورت ہے، جو کہ:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{7270}{60} = 121.667\text{kWh.}$$

اب مطلوبہ رقوم کا استعمال کرتے ہوئے۔ اوسط اور معیاری انحراف یہ ہیں:

$$\text{M.D.} = \frac{\sum \lvert x-\bar{x}\rvert f}{\sum f} = \frac{1606.672}{60} = 26.778\text{kWh.}$$

$$S.D. = s = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{\sum f}}\sqrt{\frac{65208.35}{60}} = 32.967\text{kWh.}$$

مثال5: کراچی اور مورو میں کچھ تصادفی طور پر منتخب خاندانوں سے، جب ان کے پاس موجود موبائلوں کی تعداد کے بارے میں پوچھا گیا، تو اس کے نتیجے میں بالترتیب 412. 1 اور 408. 3 معیاری انحراف کے ساتھ اوسطاً 773. 5 اور 133. 6 موبائل فی خاندان نکلے۔ موازنہ کریں کہ کون سا شہر فی خاندان موبائل کی زیادہ مستقل استعمال کو ظاہر کرتا ہے؟

حل: کراچی (K) اور مورو (M) کے لیے اوسط موبائل فی خاندان مختلف ہیں جیسا کہ : $\bar{x}$ = 5.773 موبائل فی خاندان اور x_M=6.133 موبائل فی خاندان معیاری انحرافات درج ذیل ہیں:

S_K=1.42 موبائل فی خاندان اور S_M = 3.408 موبائل فی خاندان جیسا کہ اوسطاً موبائل فی خاندان دونوں شہروں کے لیے مختلف ہیں، ہم متعلقہ پیمانے استعمال کرتے ہیں:

$$S_M = \frac{S_M}{\bar{x}_M} = \frac{3.408}{6.133} = 0.555 \text{ اور متعلقہ } \quad s_K = \frac{s_K}{\bar{x}_K} = \frac{1.412}{5.733} = 0.246 \text{ اور متعلقہ}$$

دونوں شہروں کی متعلقہ معیاری تغیرات کا مشاہدہ کرتے ہوئے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ کراچی میں ایک خاندان کے پاس موبائلوں کی تعداد میں نسبتاً فرق مورو کے مقابلے میں کم ہے، لہٰذا، موبائل فی خاندان کا اوسط استعمال کراچی کے لیے مورو کے مقابلے میں زیادہ ہے اور زیادہ مستقل ہے۔

مشق 22.5

1- گذشتہ سات دنوں سے جماعت میں غیر حاضریں کی تعداد کی وسعت، تغیر، اوسط انحراف اور معیاری انحراف معلوم کریں: 3,5,3,2,4,1,8

2- 6 اننگز میں دو بلے بازوں کے اسکور کی وسعت، اوسط انحراف، تغیر اور معیاری انحراف معلوم کریں۔ کون سا کھلاڑی زیادہ مستقل مزاج ہے؟

بلے باز-A	12	15	0	185	7	19
بلے باز-B	47	12	76	48	4	51

3- چھ خاندانوں کی آمدنی اور اخراجات کی وسعت اور معیاری انحراف کا استعمال کرتے ہوئے تغیر کا موازنہ کریں۔ نتائج کی تشریح بھی کریں۔

آمدنی (ہزار روپوں میں)	10	20	30	40	50	60
اخراجات (ہزار روپوں میں)	7	21	23	34	36	53

4- ایک فٹ بال سزن میں ٹیم A اور B کی طرف سے کئے گئے گول دیئے گئے ہیں۔ متعلقہ معیاری انحراف اور اوسط انحراف کا استعمال کرتے ہوئے یہ معلوم کریں کہ کونسی ٹیم زیادہ مستقل کارکردگی کا مظاہرہ کرتی ہے۔

حاصل کئے گئے گول	0	1	2	3	4
A کے کھیلے گئے کھیلوں کی تعداد	27	9	8	5	4
B کے کھیلے گئے کھیلوں کی تعداد	17	9	6	5	3

5- دھات کے 50 بلاکس کی کمیت کی وسعت، تغیر معیاری انحراف اور اوسط انحراف معلوم کریں۔

بلاکس کی کمیت (کلوگرام میں)	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.8	8.9-9.1
بلاکس کی تعدد	3	5	9	14	11	6	2

جائزہ مشق 22

1- صحیح جواب پر نشان لگائیں۔

(i) مواد کی ________ مشاہدات پر حسابی اوسط کا استعمال مبنی ہے۔
(الف) درمیانی (ب) انتہائی (ج) تمام (د) کوئی نہیں

(ii) غیر گروہی مواد کو ________ معلوم کرنے سے پہلے ترتیب لازمی دیا جانا چاہیئے۔
(الف) A.M. (ب) عادہ (ج) وسطانیہ (د) وسعت

(iii) ایک مسلسل تعدد جدول میں جماعتوں کی تعداد 5 اور ________ کے درمیان ہوتی ہے۔
(الف) 10 (ب) 15 (ج) 20 (د) 25

(iv) گروہی مواد کا عادہ گرافی طور پر حاصل کرنے کے لیے ________ کا استعمال کیا جاتا ہے۔
(الف) کالمی نقشہ (ب) کثیر الاضلاع (ج) اوگیو (د) کالمی شکل

(v) اگر مواد میں انتہائی قدریں ہیں تو، ________ گمراہ کن ہے۔
(الف) A.M. (ب) وسعت (ج) وسطانیہ (د) عادہ

(vi) $\{0, 90, K, 10, 100\}$ کا A.M. 40 ہے تو پھر K = ________۔
(الف) 0 (ب) 90 (ج) 10 (د) 100

(vii) وسطانیہ اور چوتھائیاں فطرت میں ________ ہیں۔
(الف) ریاضی کے طور پر (ب) پوزیشنل (ج) منطقی (د) ان میں سے کوئی بھی نہیں

(viii) اوپری چوتھائی مواد کو ________ تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔
(الف) 50% - 50% (ب) 25% - 25% (ج) 75% - 25% (د) 40% - 60%

(ix) اگر مواد میں ایک عدد 0 کے برابر ہے، تو پھر ________ معلوم نہیں کیا جاسکتا۔
(الف) A.M. (ب) G.M. (ج) H.M. (د) وسطانیہ

(x) اگر مواد میں تمام اعداد برابر ہوں، تو پھر
(الف) A.M. = G.M. = H.M. (ب) وسعت = 0 (ج) S.D. = 0 (د) یہ تمام

خلاصہ

- مقداری مواد سے مراد اعداد ہیں، اور مزید غیر مسلسل (صرف اعداد) اور مسلسل مواد (کوئی حقیقی اعداد) میں تقسیم کیے جاتے ہیں۔
- خاصیتی مواد سے مراد متغیر کی صفات ہیں، اور اسے مزید نومینل (بغیر ترتیب کے) آرڈینل (ترتیب کے ساتھ) مواد میں تقسیم کیا جاتا ہے۔
- بامعنی معلومات حاصل کرنے کے لیے، مواد کو تعددی تقسیم میں گروہ بند کیا جاتا ہے۔
- تعددی تقسیم جماعتوں اور مطالقہ تعددات کی فہرست دیتی ہیں۔
- ایک نقطے کے ذریعے بیان کردہ جماعتیں غیر مسلسل ہیں، جبکہ اعداد کی ایک حد سے بیان کردہ جماعتیں مسلسل ہیں۔
- ٹیلی یافہرست کے اندراج کے طریقہ کار کا استعمال کرتے ہوئے مشاہدات کو جماعتوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔
- جماعتوں کی تعداد حاصل کرنے کے لیے اسٹرجس (1926) اصول کا استعمال کیا جاسکتا ہے۔
- وسعت مواد میں سب سے زیادہ اور سب سے کم مشاہدات کے درمیان کا فرق ہے۔
- مشاہدات کے تعداد جو جماعت میں آسکتی ہے وہ جماعتی وقفہ یا چوڑائی ہے۔
- جماعتی حدود جماعت کے ابتدائی اور اختتامی نکات ہیں۔
- حقیقی جماعتی حدود کسی بھی دو لگاتار جماعتوں کی حدوں کی اوسط سے حاصل کی جاتی ہیں۔
- جماعتوں کے درمیان وقفہ کسی بھی دو ملحقہ جماعتوں کے درمیان فاصلہ ہے۔
- متعلقہ اور فیصد تعداد بالترتیب 0 سے 1 اور 0 سے 100 تک ہوتے ہیں۔
- کالمی نقشہ ملحقہ مستطیلوں کا ایک گراف ہے جس کی بنیادیں جماعتی حدود ہیں اور اونچائیاں جماعتی تعددات کے متناسب ہیں۔
- تعددی کثیر الاضلاع نکات کو قطعات کے ساتھ جوڑنے سے بنتا ہے۔ جن کی x- کوآرڈینیٹ جماعتی نشانات، ہوتے ہیں اور y- کوآرڈینیٹ تعددات ہوتے ہیں۔
- اوگیو یا مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کو آرڈینیٹ (جماعتی حدود، مجموعی تعدد) کے ساتھ نکات کو جوڑ کر حاصل کیا جاتا ہے۔
- مرکزی رجحان کے پیمانے مواد کی ایک مرکزی نقطے کے بارے میں جھرمٹ کرنے کی صلاحیت ہے۔
- A.M.، G.M. اور H.M. تمام مشاہدات کے درمیان مساوات پر مبنی ہیں۔
- وسطانیہ درجہ بند والے ڈیٹاسیٹ کا سب سے درمیانی حصہ ہے۔
- عادہ اکثریت کے اصول پر مبنی ہے، اور سب سے زیادہ بار آنے والا مشاہدہ ہے۔
- $A.M. \leq G.M. \leq H.M.$
- اگر A.M. = وسطانیہ، تو مواد متشاکل ہے ورنہ غیر متشاکل۔
- عادہ کو کالمی نقشے کا استعمال کرتے ہوئے گرافی طور پر واقع اور تخمینہ لگایا جاسکتا ہے۔
- وسطانیہ اور چوتھائیاں کو اوگیو کا استعمال کرتے ہوئے گرافی طور پر واقع اور اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔
- انتشاری پیمانے مواد میں تغیر / بکھرنے کی مقدر سے مطابق ہے۔
- مواد میں تغیر / انتشار جتنا زیادہ ہوگا، استحکام / مستقل مزاجی اتنی ہی کم ہوگی۔
- وسعت دو انتہائی مشاہدات کے فرق سے مواد میں تغیر کو ناپتی ہے۔
- غیر گروہی مواد میں اوسط کے بارے میں تمام انحرافات کا مجموعہ صفر ہے۔
- تغیر A.M. ہے مواد کے مربع انحرافات کے A.M. کا۔
- اوسط / مطلق انحراف A.M. ہے مواد کے مربع انحرافات کے A.M. ہے۔