یونٹ 17

سیٹ اور تفاعل

SETS AND FUNCTIONS

طلباء کے آموزشی حاصلات

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- R اور N, W, Z, E, O, P, Q سے ظاہر کئے جانے والے سیٹوں کو دہرا سکیں
- سیٹوں کی اقسام اور سیٹوں کو ظاہر کر سکیں
- سیٹوں پر عوامل کر سکیں
  - اتعال (یونین)
  - تقاطع
  - فرق
  - کمپلینٹ
- دو سیٹوں تشاکلی فرق
- دو یا تین سیٹوں کے اتعال (یونین) اور تقاطع کی ذیل میں دی گئی بنیادی خصوصیات کا عمومی ثبوت دے سکیں۔
  - القال (یونین) کی خاصیت مبادلہ
  - القال (یونین) کی خاصیت تقسیمی بحال تقاطع
  - القال (یونین) کی خاصیت مبادلہ
  - تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ القال
  - القال (یونین کی خاصیت تلازم)
  - ڈی مورگن کے قوانین
  - تقاطع کی خاصیت تلازم
- دیے گئے سیٹوں کے لیئے بنیادی خصوصیات کی تصدیق کر سکیں۔
- وین اشکال استعمال کرتے ہوئے ظاہر کر سکیں گے۔
  - سیٹوں کے یونین اور تقاطع
  - سیٹ کا کمپلینٹ
  - دو سیٹوں کا تشاکلی فرق
- وین اشکال استعمال کرتے ہوئے تصدیق کر سکیں گے۔
  - یونین کی تقاطع پر سیٹوں کی خاصیت مبادلہ
  - ڈی مارگن کے قوانین
  - قانون تلازم
- قوانین تقسیم
- مترتب جوڑوں اور کادتیسی حاصل ضرب کی نشاندہی کر سکیں
- تنائی ربط کی تعریف اور اس کی حلقہ اثر (Domian) اور (Range) کی نشاندہی کر سکیں
- تفاعل کی تعریف کر سکیں اور اس کی حلقہ (Domian) کو شریک حلقہ اثر (Co-domain) اور زر (Range) کی نشاندہی کر سکیں گے
- مندرجہ ذیل کا مظاہر کر سکیں گے
  - ان ٹو تفاعل اورر ون ون تفاعل (ان جبکٹو فنکشن)
  - آن ٹو تفاعل (سرجیکٹو تفاعل)
  - ون ون اور آن ٹو تفاعل (بائی جیکٹیو)
- یہ جانچ سکیں کہ دیا گیا ربط تفاعل ہے یا نہیں
- (ا-ا) مطابقت اور (ا-ا) تفاعل میں تمیز کر سکیں گے۔

17.1 سیٹوں پر عوامل (Operations on Sets):

17.1(i) N, W, Z, E, O, P, Q, Q′ اور ℝ سے ظاہر کیے جانے والے سیٹوں کو دہرانا

در حقیقت سیٹ ریاضی کا بنیادی تصور ہے جو کہ کہیں ریاضیاتی خیالات کا تجزیہ کرنے اور تشکیل دینے میں مددگار ہوتا ہے۔ سیٹ کو ہم پچھلی جماعتوں میں پہلے ہی تفصیل سے بحث کر چکے ہیں۔

آئیں چند اہم سیٹ دہراتے ہیں

قدرتی اعداد کا سیٹ $\mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots\}$

مکمل اعداد کا سیٹ $\mathbf{W} = \{0,1,2,3,\ldots\}$

صحیح اعداد کا سیٹ $\mathbf{Z} = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\}$

جفت اعداد کا سیٹ $\mathbf{E} = \{0,\pm2,\pm4,\pm6,\ldots\}$

طاق اعداد کا سیٹ $\mathbf{O} = \{\pm1,\pm3,\pm5,\ldots\}$

مفرد اعداد کا سیٹ $\mathbf{P} = \{2,3,5,7,\ldots\}$

ناطق اعداد کا سیٹ $\mathbf{Q} = \left\{x \mid x = \dfrac{p}{q} \text{ where } p,q \in Z \wedge q \neq 0\right\}$

غیر ناطق اعداد کا سیٹ $\mathbf{Q'} = \left\{x \mid x \neq \dfrac{p}{q} \text{ where } p,q \in Z \wedge q \neq 0\right\}$

حقیقی اعداد کا سیٹ $\mathbf{R} = \left\{x \mid x = \dfrac{p}{q} \vee x \neq \dfrac{p}{q} \text{ where } p,q \in Z \wedge q \neq 0\right\}$

یعنی $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q'}$

نوٹ: اوپر دیے گئے سیٹوں کو ہم N, W, Z, E, O, P, Q, Q' اور R لکھ سکتے ہیں۔

- R^+ اور R^- بالترتیب مثبت اور منفی حقیقی اعداد کے سیٹ کو ظاہر کرتے ہیں
- ناطق، غیر ناطق اور حقیقی اعداد کے سیٹ کو اندراجی شکل میں نہیں لکھا جا سکتا ہے۔

17.1 (ii) سیٹوں کی اقسام اور سیٹوں کو ظاہر کرنا (Types of sets and representation of sets):

سب سے پہلے ہم سیٹ کو ظاہر کرنے پر بحث کرینگے۔ سیٹ کو ظاہر کرنے کے تین طریقوں یا اشکال سے ہم پہلے ہی واقف ہیں جو کہ ہم پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں وہ ہیں

1- بیانیہ شکل　　2- اندراجی شکل　　3- ترقیم سیٹ ساز شکل

بیانیہ شکل میں سیٹ کے ارکان (ممبران) کو عام زبان میں مشترکہ خصوصیات سے واضح کیا جاتا ہے۔

مثلاً 5 اور 10 کے درمیان قدرتی اعداد کا سیٹ = A

اندراجی شکل میں سیٹ کے ارکان (ممبران) کو بریسز (Burses) میں ظاہر کرتے ہیں اوپر دیئے گئے سیٹ کو اندراجی شکل میں یوں لکھتے ہیں $A = \{6,7,8,9\}$

جب کہ ترقیم سیٹ ساز شکل میں ارکان (ممبران) کی مشترک خصوصیات کو علامات کی مدد سے ظاہر کرتے ہیں۔

دیے گئے سیٹ A ترقیم سیٹ ساز شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے $A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge 5 < x < 10\}$

مساوی سیٹ (Equal Sets):

دو ایسے سیٹ A اور B جن کے ارکان (ممبران) کی تعداد یکساں ایک جیسے ہوں۔

علامتی طور پر یوں لکھتے ہیں : $A=B$

پس $A=B$ صرف اور صرف $A\subseteq B$ اور $B\subseteq A$

اور $A=B$ صرف اور صرف $A\supseteq B$ اور $B\supseteq A$

مثلاً: فرض کریں $A=\{1,2,3,6\}$ $B=\{x \mid x\in N\wedge x\leq 6\}$ اور $C=$ 6 کے تقسیم کندہ کا سیٹ

یہاں $A=C$ لیکن $A\neq B$

نوٹ: سیٹ A کے ارکان (ممبران) کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ O(A) یا n(A) یا |A| لکھتے ہیں۔

مترادف سیٹ (Equivalent Sets):

دو سیٹ A اور B مترادف سیٹ کہلاتے ہیں اگر ان کے ارکان (ممبران) کی تعداد برابر ہو۔

علامتی طور پر ہم یوں لکھتے ہیں: $A\sim B$ یعنی $A\sim B$ اس صورت میں ہی $O(A)=O(B)$

اسی طرح اگر $A\sim B$ یعنی اگر ان کے ارکان کے درمیان (1-1) مطابقت قائم کی جاسکتی ہے۔

مثلاً: فرض کریں $A=\{x \mid x\in \mathbf{R}\wedge x^2=64\}$ اور $B=$ 5 سے چھوٹے مفرد اعداد کے سیٹ

یہاں $A\sim B$ کیونکہ $O(A)=O(B)=2$

واجب تحتی سیٹ (Proper Subset):

فرض کریں سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ تو سیٹ A سیٹ B کا واجب تحتی سیٹ کہلائے گا۔

اگر $A\neq B$ علامتی طور پر ہم یوں لکھ سکتے ہیں $A\subset B$

مثلاً: اگر $A=\{2,4,6\}$ اور $B=\{2,4,6,8\}$

تو $A\subset B$ کیونکہ A ماتحت سیٹ ہے B کا اور $A\neq B$

غیر واجب تحتی سیٹ (Improper Subset):

فرض کریں سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے تو سیٹ A سیٹ B کا غیر واجب تحتی کہلائے گا اگر $A=B$

مثلاً: اگر $A=\{a,b,c\}$ اور انگریزی حروف تحتی کے پہلے تین حروف $=B$ تو سیٹ A سیٹ B غیر واجب تحتی سیٹ ہے

یعنی $A=B$

قوت سیٹ (Power Subset):

کسی سیٹ A کے تمام تحتی سیٹوں کا سیٹ، سیٹ A قوت سیٹ کہلاتا ہے اسے P(A) سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً: اگر $A=\{x,y,z\}$ تو $P(A)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{y,z\},\{x,z\},\{x,y,z\}\}$

نوٹ: خالی سیٹ کا قوت سیٹ خالی سیٹ ہوتا ہے۔

اکائی سیٹ (Singleton or Unit):

ایسا سیٹ جس میں صرف ایک رکن (ممبر) ہو وہ اکائی سیٹ کہلاتا ہے

مثلاً: $A=\{x \mid x\in W\wedge x<1\}$ اکائی سیٹ ہے

کائناتی سیٹ (Universal Set):

زیر غور مسئلے سے تعلق رکھنے والے تمام سیٹ کا فوقی سیٹ کائناتی سیٹ کہلاتا ہے اور اُسے X یا U سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً: اگر $A=\{1,2,3,4\}$ اور $B=\{2,4,6\}$ پھر $U=\{1,2,3,4,5,6\}$

نوٹ: مزید سیٹ کی اقسام 17.1 (iv) میں زیر بحث لائی جائیں گی

مثال 1: سیٹ $A=\{6,8,10,12\}$ کو بیانیہ اور ترقیم سیٹ ساز شکل میں لکھیں۔

حل:

بیانیہ شکل: 5 اور 13 کے درمیان جفت اعداد کا سیٹ = A

ترقیم سیٹ ساز شکل $A=\{x \mid x\in \mathbb{E} \wedge 5<x<13\}$

مثال 2: سیٹ $B=\{y \mid y\in \mathbf{P} \wedge y<10\}$ کو اندراجی اور بیانیہ شکل میں لکھیں۔

حل:

اندراجی شکل $B=\{2,3,5,7\}$

بیانیہ شکل پہلے 4 مفرد اعداد کا سیٹ = B

اب ہم سیٹ کی اقسام بیان کریں گے

خالی سیٹ (Empty set or Null set):

ایسا سیٹ جس میں کوئی رکن (ممبر) نہیں ہوتا ہے وہ خالی سیٹ کہلاتا ہے۔ اس کو $\varnothing$ یا $\{\ \}$ سے ظاہر کرتے ہیں

مثلاً:

(i) 5 اور 6 کے درمیان جفت اعداد کا سیٹ = A

(ii) $B=\{x \mid x\in \mathbb{N} \wedge x<1\}$

متناہی سیٹ (Finite Set):

ایسا سیٹ جس کے ارکان (ممبران) کی تعداد محدود ہو وہ متناہی سیٹ کہلاتا ہے

مثلاً:

(i) $A=\{10,12,14,...,50\}$

(ii) دنیا کے تمام ممالک کا سیٹ = B

یاد رہے خالی سیٹ کو متناہی سیٹ بھی کہا جاسکتا ہے۔

لامتناہی سیٹ (Infinite Set):

ایسا سیٹ جن کے ارکان (ممبران) کی تعداد لامحدود ہو وہ لامتناہی سیٹ کہلاتا ہے

مثلاً:

(i) $P=\{10,20,30,...\}$

(ii) $Q=\{x \mid x\in \mathbf{Q} \wedge 1\le x\le 2\}$

تحتی سیٹ (Subset):

اگر سیٹ A کا ہر رکن (ممبر) سیٹ B کا رکن (ممبر) بھی ہو تو سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ کہلاتا ہے۔ علامتی طور پر ہم یوں لکھتے ہیں۔ $A\subseteq B$

مثلاً: اگر $A=\{2,3,5,7\}$ ، $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ اور $C=\{6,7,8,9\}$

تو $A\subseteq B$ لیکن $A\not\subseteq C$ (A تحتی سیٹ نہیں ہے C کا)

نوٹ:

(i) ہر سیٹ خود اپنا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

(ii) خالی سیٹ ہر سیٹ کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

(iii) ہر ممبر خالی سیٹ کے کم از کم دو تحتی سیٹ ہوتے ہیں۔

(iv) ایسا سیٹ جس کے ارکان (ممبران) کی تعداد n ہوتی ہے۔ اُس کے تمام تحتی سیٹ کی تعداد 2^n ہے۔

فوقی سیٹ (Superset):

اگر سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے تو سیٹ B سیٹ A کا فوقی سیٹ کہلاتا ہے۔

علامتی طور پر ہم یوں لکھتے ہیں $B\supseteq A$

مثلاً: اگر $X=\{a,e,i,o,u\}$ اور $Y=\{a,b,c,...,z\}$ تو $Y\supseteq X$

مشق 17.1

.1 مندرجہ ذیل سیٹوں کی اندراجی شکل میں لکھیں

(i) A= 3- اور 3 کے درمیان تمام صحیح اعداد کا سیٹ

(ii) B = 11 سے چھوٹے مرکب اعداد کا سیٹ

(iii) $C=\{x \mid x \in \mathbb{P} \wedge 5 < x \leq 13\}$

(iv) $D=\{y \mid y \in \mathbb{O} \wedge 7 < y < 17\}$

(v) $E=\{z \mid z \in \mathbb{R} \wedge z^2 = 121\}$

(vi) $F=\{p \mid p \in \mathbb{Q} \wedge p^2 = -1\}$

.2 مندرجہ ذیل سیٹوں کو ترقیم سیٹ ساز شکل میں لکھیں

(i) A = 5 اور 6 کے درمیان تمام اطاق اعداد کا سیٹ

(ii) $B=\{1,2,3,4,6,12\}$

(iii) $C=\{0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm40\}$

(iv) $D=\{-4,-2,0,2,4\}$

(v) $E=\{1,4,9,16,25\}$

(vi) $F=\{-1,-3,-5,-7,\ldots\}$

.3 خالی سیٹ کوئی پانچ مثالیں لکھیں

.4 ذیل میں کون سے متناہی سیٹ اور لا متناہی سیٹ ہیں

(i) ایشائی ممالک کا سیٹ

(ii) دنیا کی تمام میڈیکل یونیورسٹیوں کا سیٹ

(iii) 6 اور 9 کے درمیان حقیقی اعداد کا سیٹ

(iv) تمام جفت فرد اعداد کا سیٹ

(v) 5 سے چھوٹے طاق اعداد کا سیٹ

.5 ذیل میں دیے گئے ہر سیٹ کا ایک مترادف سیٹ، ایک غیر واجب تحتی سیٹ اور تین واجب تحتی سیٹ لکھیں۔

(i) $P=\{a,e,i,o,u\}$

(ii) $Q=\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq x \leq 2\}$

.6 اکائی سیٹ کی کوئی بھی دو مثالیں ترقیم سیٹ ساز شکل میں لکھیں

.7 ذیل میں دیے گئے سیٹوں کے قوت سیٹ لکھیں

(i) $A=\{5,10,15\}$

(ii) $B=\{x \mid x \in Z \wedge -1 < x < 4\}$

.8 ایسا سیٹ معلوم کریں جس

(i) کے دو واجب تحتی سیٹ ہوتے ہیں

(ii) کا صرف ایک واجب تحتی سیٹ ہوتا ہے

(iii) کا کوئی واجب تحتی سیٹ نہیں ہوتا ہے۔

17.1 (iii) سیٹ پر عوامل (Operations on sets):

- اتحاد (یونین) (Union)
- تقاطع (Intersection)
- فرق (Difference)
- کمپلیمنٹ (Complement)

دو سیٹوں کا اتحاد (یونین) (Union of two sets)

دو سیٹوں X اور Y کا اتحاد $X \cup Y$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس میں وہ ارکان شامل ہوتے ہیں جو X سے Y سے یا دونوں سے تعلق رکھتے ہیں

یعنی $X \cup Y = \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$

مثلاً: اگر $X = \{1,3,5\}$ اور $Y = \{1,2,3,4\}$ تو $X \cup Y = \{1,2,3,4,5\}$

دو سیٹوں کا تقاطع (Intersection of two sets):

دو سیٹوں X اور Y کا تقاطع $X \cap Y$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس میں وہ ارکان شامل ہوتے ہیں جو X اور Y دونوں سے تعلق رکھتے ہیں

یعنی $X \cap Y = \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$

مثلاً: اگر $X = \{2,4,6,8\}$ اور $Y = \{1,2,3,6\}$ تو $X \cap Y = \{2,6\}$

دو سیٹوں کا فرق (Difference of two sets):

کوئی دو سیٹ x اور y ہیں فرق x-y ایسا سیٹ ہے جس میں وہ ارکان ہوتے ہیں جو x سے تعلق رکھتے ہیں لیکن y سے تعلق نہیں رکھتے ہیں اس کو x/y سے بھی ظاہر کرتا ہے جیسے $Y - X = \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$ اسی ہی طرح فرق X-Y ایسا سیٹ ہے جس میں وہ ارکان ہوتے ہیں جو x سے تعلق رکھتے ہیں لیکر y سے تعلق نہیں رکھتے ہیں اس کو x/y سے بھی ظاہر کرتے ہیں

جیسے $Y - X = \{y \mid y \in Y \wedge y \notin X\}$ $\quad Y - X$

مثلاً:

اگر $X = \{4,6,8,9,10\}$ اور $Y = \{2,4,6,8\}$

تو $X - Y = \{9,10\}$ اور $Y - X = \{2\}$

سیٹ کا کمپلیمنٹ (Complement of a set)

اگر ایک سیٹ کائناتی سیٹ U کا تحتی سیٹ ہے تو A کا کمپلیمنٹ ایک ایسا سیٹ ہے تو U کے تمام ارکان پر مشتمل ہوگا جو A میں نہیں ہیں۔ یہ A' یا A^c سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

پس $A' = U - A$

یعنی $A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$

مثلاً:

اگر $U = \{1,2,3,\ldots,20\}$ اور $A = \{1,3,5,\ldots,19\}$ تو $A' = \{2,4,6,\ldots,20\}$

17.1 (iv) دو سیٹوں کا تشاکلی فرق (Symmetric difference of two sets)

دو سیٹوں A اور B کے تشاکلی فرق کو $A \Delta B$ سے ظاہر کرتے ہیں یہ A یا B کے وہ تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے جو دونوں سیٹوں میں مشترکہ نہیں ہوتے ہیں۔

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

مثلاً: اگر $A=\{1,2,3,4,5\}$ اور $B=\{1,3,5,7\}$ تو $A\Delta B=\{2,4,7\}$

حصہ (ii) 17.1 کے تسلسل میں سیٹ کی مزید اقسام نیچے دی گئیں ہیں

ڈس جوائنٹ سیٹ (Disjoint Sets):

دو سیٹ A اور B ڈس جوائنٹ سیٹ کہلاتے ہیں اگر ان میں کوئی مشترک ارکان نہ ہو $A\cap B=\varnothing$

مثلاً: $A=\{1,3,5\}$ اور $B=\{2,4,6\}$ ڈس جوائنٹ سیٹ ہیں

اوورلیپنگ سیٹ (Over lapping Sets):

دو سیٹ A اور B اوورلیپنگ سیٹ کہلاتے ہیں اگر دونوں میں کم از کم ایک رکن مشترک ہو اس کے علاوہ ان میں کوئی دوسرے کا تحتی سیٹ نہیں ہوتا ہے۔ دو سیٹ A اور B اوورلیپنگ سیٹ ہیں

اگر $A\cap B\neq\varnothing$ اور $A\not\subseteq B$ یا $B\not\subseteq A$

مثلاً: سیٹ $A=\{1,2,3,4\}$ اور $B=\{2,4,6,8\}$ اوورلیپنگ سیٹ ہیں

ایگزوسٹیو سیٹ (Exhaustive Sets):

اگر دو سیٹ A اور B یونیورسل سیٹ U کے تحتی سیٹ ہیں تو A اور B ایگزوسٹیو سیٹ کہلاتے ہیں

اگر $A\cup B=U$

مثلاً: اگر $A=\{1,2,3,4\}$ ، $B=\{1,3,5\}$ اور $U=\{1,2,3,4,5\}$ تو A اور B ایگزوسٹیو سیٹ ہیں

کیونکہ $A\cup B=U$

سیل (Cells):

اگر سیٹ A اور B دو غیر خالی یونیورسل سیٹ U کے تحتی سیٹ ہیں تو A اور B سیل کہلاتے ہیں اگر وہ ڈس جوائنٹ بھی ہیں اور ایگزوسٹیو سیٹ بھی ہے

A اور B سیل کہلاتے ہیں اگر A اور B، U کے غیر خالی تحتی سیٹ ہیں اور $A\cap B=\varnothing$ اور $A\cup B=U$

مثلاً: اگر $A=\{1,3,5,7,9\}$ ، $B=\{2,4,6,8,10\}$ اور $U=\{1,2,3,...,10\}$ تو پھر A اور B سیل ہیں

سیٹ کے عوامل سے متعلق کچھ اہم قانون نیچے دیے گئے ہیں۔

آئی ڈینٹیٹی کا قانون (Identity Laws):

کسی سیٹ A کے لئے

(i) $A\cup\varnothing=A$ (ii) $A\cup U=U$ (iii) $A\cap U=A$ (iv) $A\cap\varnothing=\varnothing$

آئی ڈیمپوٹینٹ کا قانون (Idempotent Laws):

کسی سیٹ A کے لئے

(i) $A\cup A=A$ (ii) $A\cap A=A$

کمپلیمنٹ کے قانون (Laws of Complement):

کسی سیٹ A کے لئے

(i) $A\cup A'=U$ (ii) $A\cap A'=\varnothing$

(iii) $(A')'=A$

ڈی مورگن کے قانون (De Morgan's Laws):

کے لیے A اور B کوئی دو سیٹ

(i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (ii) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

مشق 17.2

1. مندرجہ ذیل میں سے کون سے سیٹ ڈس جوائنٹ، اوورلیپنگ، ایگزوسٹو اور سیل ہیں

(i) $\{1,2,3,5,7\}$ اور $\{4,6,8,9,10\}$

(ii) $\{1,2,3,6\}$ اور $\{1,2,4,8\}$

(iii) E اور O جب کہ $U = Z$

(iv) $A = \{0,2,4,...\}$ اور $B = N$ جب کہ $U = W$

(v) Q اور Q' جب کہ $U = \mathbf{R}$

2. اگر $\mathbf{A = \{1,2,3,4,5,6\}}$ اور $\mathbf{B = \{2,4,6,8,10\}}$ تو معلوم کریں:

(i)	$A \cup B$	(ii)	$B \cap A$	(iii)	$A - B$
(iv)	$B - A$	(v)	$A \Delta B$		

3. اگر $\mathbf{U = \{1,2,3,...,10\}}$، $\mathbf{A = \{1,2,3,4,5\}}$ اور $\mathbf{B = \{1,3,5,7,9\}}$ تو معلوم کریں:

(i)	A'	(ii)	B'	(iii)	$A' \cup B'$	(iv)	$A' \cap B'$
(v)	$(A \cup B)'$	(vi)	$(A \cap B)'$	(vii)	$A' \Delta B'$	(viii)	$(A \Delta B)'$
(ix)	$A - B'$	(x)	$A' - B$				

4. اگر $\mathbf{U = \{x \mid x \in Z \wedge -4 < x < 6\}}$، $\mathbf{P = \{p \mid p \in E \wedge -4 < p < 6\}}$ اور $\mathbf{Q = \{q \mid q \in P \wedge q < 6\}}$ تو ثابت کریں کہ

(i)	$P - Q = P \cap Q'$	(ii)	$Q - P = Q \cap P'$
(iii)	$(P \cup Q)' = P' \cap Q'$	(iv)	$(P \cap Q)' = P' \cup Q'$

5. اگر $\mathbf{A = \{2n \mid n \in N\}}$، $\mathbf{B = \{3n \mid n \in N\}}$ اور $\mathbf{C = \{4n \mid n \in N\}}$ تو معلوم کریں:

(i)	$A \cap B$	(ii)	$A \cup C$	(iii)	$B \cap C$

17.1.2(i) اتصال اور تقاطع کی خصوصیات (Properties of Union and Intersection):

دو یا تین سیٹوں پر اتصال اور تقاطع کی مندرجہ ذیل بنیادی خصوصیات کا رسمی ثبوت دیں

➤ اتصال (یونین) کی خاصیت مبادلہ (Commutative Property of Union)

ہم جانتے ہیں کہ کسی دو سیٹ A اور B کے لیے $\boxed{A \cup B = B \cup A}$

یہ خاصیت اتصال کی خاصیت مبادلہ کہلاتی ہے

ثبوت:

$$
\begin{aligned}
L.H.S &= A \cup B \\
&= \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\} && \text{(اتصال کی تعریف کے مطابق)} \\
&= \{x \mid x \in B \text{ or } x \in A\} && \because \text{(سیٹ میں ارکان کی ترتیب مخصوص نہیں ہوتی)} \\
&= B \cup A && \text{(اتصال کی تعریف کے مطابق)} \\
&= R.H.S
\end{aligned}
$$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cup B = B \cup A$

پس ثابت ہوا

➢ تقاطع کی خاصیت مبادلہ (Commutative Property of Intersection):

ہم جانتے ہیں کہ کسی دو سیٹ A اور B کے لیے $\boxed{A\cap B=B\cap A}$

یہ خاصیت اتعال کی خاصیت مبادلہ کہلاتی ہے

ثبوت:

$$
\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= A\cap B \\
&=\{x \mid x\in A \text{ and } x\in B\} && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)} \\
&=\{x \mid x\in B \text{ and } x\in A\} && \because \text{(سیٹ میں ارکان کی ترتیب مخصوص نہیں ہوتی)} \\
&= B\cap A && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)} \\
&= \text{R.H.S}
\end{aligned}
$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $A\cap B=B\cap A$

پس ثابت ہوا

➢ اتعال کی خاصیت تلازم (Associative property of union):

ہم پہلے ہی اتعال کی خاصیت تلازم سے واقف ہیں جیساکہ نیچے دی گئی ہے

کسی بھی تین سیٹ A، B اور C کے لیے $\boxed{A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C}$

ثبوت:

$$
\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= A\cup(B\cup C) \\
&=\{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\cup C\} && \text{(اتعال کی تعریف کی روسے)} \\
&=\{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B \text{ یا } x\in C\} \\
&=\{x \mid x\in A\cup B \text{ یا } x\in C\} && \text{(اتعال کی تعریف کی روسے)} \\
&=(A\cup B)\cup C && \text{(اتعال کی تعریف کی روسے)} \\
&= \text{R.H.S}
\end{aligned}
$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

پس ثابت ہوا

➢ تقاطع کی خاصیت تلازم (Associative property of intersection):

ہم پہلے ہی تقاطع کی خاصیت تلازم سے واقف ہیں جیساکہ نیچے دی گئی ہے کسی بھی تین سیٹ A، B اور C کے لیے

$\boxed{A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C}$

ثبوت:

$$
\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= A\cap(B\cap C) \\
&=\{x \mid x\in A \text{ اور } x\in B\cap C\} && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)} \\
&=\{x \mid x\in A \text{ اور } x\in B \text{ اور } x\in C\} \\
&=\{x \mid x\in A\cap B \text{ اور } x\in C\} && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)} \\
&=(A\cap B)\cap C && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)} \\
&= \text{R.H.S}
\end{aligned}
$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پس ثابت ہوا

اتحال کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع (Distributive property of union over intersection):

ہم پہلے ہیں اتقال کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں جیساکہ نیچے دی گئی ہے

کسی تین سیٹ A،B اور C کے لیے $\boxed{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$

ثبوت:

$$\begin{aligned}
L.H.S &= A\cup(B\cap C)\\
&=\{x\,|\,x\in A \;\text{یا}\; x\in B\cap C\} && \text{(اتحال کی تعریف کی روسے)}\\
&=\{x\,|\,x\in A \;\text{یا}\; (x\in B \;\text{اور}\; x\in C)\} && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)}\\
&=\{x\,|\,(x\in A \;\text{یا}\; x\in B) \;\text{اور}\; (x\in A \;\text{یا}\; x\in C)\}\\
&=\{x\,|\,x\in A\cup B \;\text{اور}\; x\in A\cup C\} && \text{(اتحال کی تعریف کی روسے)}\\
&=(A\cup B)\cap(A\cup C) && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)}\\
&= R.H.S
\end{aligned}$$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

پس ثابت ہوا

تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتحال (Distributive property of intersection over union):

ہم پہلے ہی تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتحال واقف ہیں جیساکہ نیچے دی گئی ہے

کسی بھی تین سیٹ A ، B اور C کے لیے $\boxed{A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

ثبوت:

$$\begin{aligned}
L.H.S &= A\cap(B\cup C)\\
&=\{x\,|\,x\in A \;\text{اور}\; x\in B\cup C\} && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)}\\
&=\{x\,|\,x\in A \;\text{اور}\; (x\in B \;\text{یا}\; x\in C)\} && \text{(اتحال کی تعریف کی روسے)}\\
&=\{x\,|\,(x\in A \;\text{اور}\; x\in B) \;\text{یا}\; (x\in A \;\text{اور}\; x\in C)\}\\
&=\{x\,|\,x\in A\cap B \;\text{یا}\; x\in A\cap C\} && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)}\\
&=(A\cap B)\cup(A\cap C) && \text{(اتحال کی تعریف کی روسے)}\\
&= R.H.S
\end{aligned}$$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

پس ثابت ہوا

➢ ڈی مورگن کے قوانین (De Morgan's Laws):

ہم پہلے حصہ 17.1 (iv) میں پڑھ چکے ہیں کہ ڈی مورگن کے قوانین دو ہیں جو کہ نیچے دیے گئے ہیں دو سیٹوں A اور B کے لیے

(i) $(A\cup B)' = A'\cap B'$ (ii) $(A\cap B)' = A'\cup B'$

ثبوت (i):

(i) $(A\cup B)' = A'\cap B'$

$$
\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= (A\cup B)' && \text{(کمپلیمنٹ کی تعریف کی رو سے)}\\
&= \{x \mid x\in U \text{ اور } x\notin A\cup B\}\\
&= \{x \mid x\in U \text{ اور } (x\notin A \text{ اور } x\notin B)\}\\
&= \{x \mid (x\in U \text{ اور } x\notin A) \text{ اور } (x\in U \text{ اور } x\notin B)\}\\
&= \{x \mid x\in A' \text{ اور } x\in B'\} && \text{(کمپلیمنٹ کی تعریف کی رو سے)}\\
&= A'\cap B' && \text{(تقاطع کی تعریف کی رو سے)}\\
&= \text{R.H.S}
\end{aligned}
$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $(A\cup B)' = A'\cap B'$

پس ثابت ہوا

ثبوت (ii):

(ii) $(A\cap B)' = A'\cup B'$

$$
\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= (A\cap B)'\\
&= \{x \mid x\in U \text{ اور } x\notin A\cap B\} && \text{(کمپلیمنٹ کی تعریف کی رو سے)}\\
&= \{x \mid x\in U \text{ اور } (x\notin A \text{ یا } x\notin B)\}\\
&= \{x \mid (x\in U \text{ اور } x\notin A) \text{ یا } (x\in U \text{ اور } x\notin B)\}\\
&= \{x \mid x\in A' \text{ یا } x\in B'\} && \text{(کمپلیمنٹ کی تعریف کی رو سے)}\\
&= A'\cup B' && \text{(تقاطع کی تعریف کی رو سے)}\\
&= \text{R.H.S}
\end{aligned}
$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $(A\cap B)' = A'\cup B'$

پس ثابت ہوا

17.1.2(ii) دیے گئے بنیادی خاصیتوں کی تصدیق کریں (Verify the fundamental properties of given sets):

آئیں مندرجہ ذیل مثالوں کی مدد سے بنیادی خصوصیات کی تصدیق کریں

مثال نمبر 1: اگر $A=\{1,2,3,4,6,12\}$ اور $B=\{4,6,8,9,10,12\}$ اتصال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ کی تصدیق کریں

(الف) اتصال کی خاصیت مبادلہ

یعنی $A\cup B=B\cup A$

$$L.H.S=A\cup B$$
$$=\{1,2,3,4,6,12\}\cup\{4,6,8,9,10,12\}$$
$$=\{1,2,3,4,6,8,9,10,12\}$$
$$R.H.S=B\cup A$$
$$=\{4,6,8,9,10,12\}\cup\{1,2,3,4,6,12\}$$
$$=\{1,2,3,4,6,8,9,10,12\}$$
$$\because \quad L.H.S=R.H.S$$
$$\therefore \quad A\cup B=B\cup A$$

پس تصدیق ہوئی

(ب) تقاطع کی خاصیت مبادلہ

یعنی $A\cap B=B\cap A$

$$L.H.S=A\cap B$$
$$=\{1,2,3,4,6,12\}\cap\{4,6,8,9,10,12\}$$
$$=\{4,6,12\}$$
$$R.H.S=B\cap A$$
$$=\{4,6,8,9,10,12\}\cap\{1,2,3,4,6,12\}$$
$$=\{4,6,12\}$$
$$\because \quad L.H.S=R.H.S$$
$$\therefore \quad A\cap B=B\cap A$$

پس تصدیق ہوئی

مثال نمبر 2:

اگر $A=\{1,2,5,10\}$، $B=\{2,3,5,7\}$ اور $C=\{1,3,5,7,9\}$ تو اتصال اور تقاطع کی خاصیت تلازم کی تصدیق کریں

پڑتال:

(الف) اتصال کی خاصیت تلازم

یعنی $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$$L.H.S=A\cup(B\cup C)$$
$$=\{1,2,5,10\}\cup[\{2,3,5,7\}\cup\{1,3,5,7,9\}]$$
$$=\{1,2,5,10\}\cup\{1,2,3,5,7,9\}$$
$$=\{1,2,3,5,7,9,10\}$$

$$R.H.S=(A\cup B)\cup C$$
$$=[\{1,2,5,10\}\cup\{2,3,5,7\}]\cup\{1,3,5,7,9\}$$
$$=\{1,2,3,5,7,10\}\cup\{1,3,5,7,9\}$$
$$=\{1,2,3,5,7,9,10\}$$

$$\because \quad L.H.S=R.H.S$$
$$\therefore \quad A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

پس تصدیق ہوئی

(ب) تقاطع کی خاصیت تلازم

یعنی $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

$$L.H.S=A\cap(B\cap C)$$
$$=\{1,2,5,10\}\cap[\{2,3,5,7\}\cap\{1,3,5,7,9\}]$$
$$=\{1,2,5,10\}\cap\{3,5,7\}$$
$$=\{5\}$$

$$R.H.S=(A\cap B)\cap C$$
$$=[\{1,2,5,10\}\cap\{2,3,5,7\}]\cap\{1,3,5,7,9\}$$
$$=\{2,5\}\cap\{1,3,5,7,9\}$$
$$=\{5\}$$

$$\because \quad L.H.S=R.H.S$$
$$\therefore \quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

پس تصدیق ہوئی

مثال نمبر 3: اگر $A=\{1,2,3,...,10\}$، $B=\{2,4,6,8,10\}$ اور $C=\{3,6,9\}$ تو تصدیق کریں

(الف) اتحاد کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع

(ب) تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتحاد

پڑتال:

(الف) اتحاد کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع

یعنی $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= A\cup(B\cap C)\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cup[\{2,4,6,8,10\}\cap\{3,6,9\}]\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cup\{6\}\\
&=\{1,2,3,...,10\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R.H.S &= (A\cup B)\cap(A\cup C)\\
&=[\{1,2,3,...,10\}\cup\{2,4,6,8,10\}]\cap[\{1,2,3,...,10\}\cup\{3,6,9\}]\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cap\{1,2,3,...,10\}\\
&=\{1,2,3,...,10\}
\end{aligned}$$

$\because$ $L.H.S = R.H.S$

$\therefore$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

پس تصدیق ہوئی

(ب) تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتحاد

یعنی $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= A\cap(B\cup C)\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cap[\{2,4,6,8,10\}\cup\{3,6,9\}]\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cap\{2,3,4,6,8,9,10\}\\
&=\{2,3,4,6,8,9,10\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R.H.S &= (A\cap B)\cup(A\cap C)\\
&=[\{1,2,3,...10\}\cap\{2,4,6,8,10\}]\cup[\{1,2,3,...,10\}\cap\{3,6,9\}]\\
&=\{2,4,6,8,10\}\cup\{3,6,9\}\\
&=\{2,3,4,6,8,9,10\}
\end{aligned}$$

$\because$ $L.H.S = R.H.S$

$\therefore$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

پس تصدیق ہوئی

مثال نمبر 4: اگر $U=\{1,2,3,...,20\}$، $A=\{1,3,5,...,19\}$ اور $B=\{2,4,6,...,20\}$ تو ڈی مورگن کی تصدیق کریں

یعنی (الف) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (ب) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

پڑتال:

(الف) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

$$
\begin{aligned}
L.H.S &= (A\cup B)' \\
&= U-(A\cup B) \\
&= \{1,2,3,...,20\}-\left[\{1,3,5,...,19\}\cup\{2,4,6...,20\}\right] \\
&= \{1,2,3,...,20\}-\{1,2,3,...,20\} \\
&= \varnothing \\
R.H.S &= A'\cap B' \\
&= (U-A)\cap(U-B) \\
&= \left[\{1,2,3,...,20\}-\{1,3,5,...,19\}\right]\cap\left[\{1,2,3,...,20\}-\{2,4,6,...,20\}\right] \\
&= \{2,4,6,...,20\}\cap\{1,3,5,...,19\} \\
&= \varnothing
\end{aligned}
$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $(A\cup B)'=A'\cap B'$

پس تصدیق ہوئی

(ب) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

$$
\begin{aligned}
L.H.S &= (A\cap B)' \\
&= U-(A\cap B) \\
&= \{1,2,3,...,20\}-\left[\{1,3,5,...,19\}\cap\{2,4,6...,20\}\right] \\
&= \{1,2,3,...,20\}-\{\ \} \\
&= \{1,2,3,...,20\} \\
R.H.S &= A'\cup B' \\
&= (U-A)\cup(U-B) \\
&= \left[\{1,2,3,...,20\}-\{1,3,5,...,19\}\right]\cup\left[\{1,2,3,...,20\}-\{2,4,6,...,20\}\right] \\
&= \{2,4,6,...,20\}\cup\{1,3,5,...,19\} \\
&= \{1,2,3,...,20\}
\end{aligned}
$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $(A\cap B)'=A'\cup B'$

پس تصدیق ہوئی

مشق 17.3

1. مندرجہ ذیل سیٹ کے لیے اتحاد اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ کی تصدیق کریں

(i) $A=\{a,b,c,d,e\}$ ، $B=\{a,e,i,o,u\}$

(ii) $P=\{x \mid x\in Z \wedge -3<x<3\}$ ، $Q=\{y \mid y\in E^{+} \wedge y\le 4\}$

2. مندرجہ ذیل سیٹ کے لیے اتحاد اور تقاطع کی خاصیت تلازم کی تصدیق کریں

(i) $A=\{1,2,4,5,10,20\}$ ، $B=\{5,10,15,20\}$ ، $C=\{1,2,5,10\}$

(ii) $A=\mathbf{N}, B=\mathbf{P}$ ، $C=\mathbf{Z}$

3. تصدیق کریں

(الف) اتحاد کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع (ب) تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتحاد

(i) $A=\{1,2,3,...,10\}$ ، $B=\{2,3,5,7\}$ اور $C=\{1,3,5,7,9\}$

(ii) $A=\mathbf{N}, B=\mathbf{P}$ اور $C=\mathbf{W}$

4. ڈی مورگن کے قوانین کی تصدیق کریں اگر $\mathbf{U}=\{\mathbf{1,2,3...,12}\}$ ، $\mathbf{A}=\{\mathbf{1,2,3,4,6,12}\}$ اور $\mathbf{B}=\{\mathbf{2,4,6,8}\}$

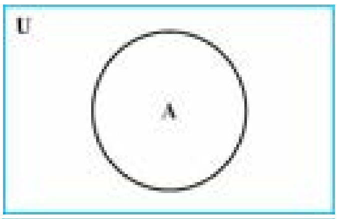
5. اگر A اور B ، U کے تحتی سیٹ ہیں تو مندرجہ ذیل کو خاصیتوں کی مدد سے ثابت کریں

(i) $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)$ (ii) $A\cup B=A\cup(A'\cap B)$

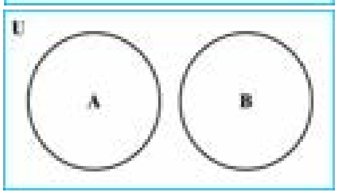
(iii) $B=(A\cap B)\cup(A'\cap B)$ (iv) $B=A\cup(A'\cap B)$, if $A\subseteq B$

17.1.3 وین ڈائی گرام (Venn Diagram):

ہم پہلے ہی پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں کہ سیٹ، ان کے روابط اور عوامل کو جیومیٹریکلی بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ اس جیومیٹریکلی ظاہر کرنے کو وین ڈائی گرام کہتے ہیں جو انگریز ریاضی دان جون وین (June Venn) کے نام رکھا گیا ہے جس نے اسے 1881ء میں متعارف کروایا تھا۔ وین ڈائی گرام میں کائناتی سیٹ U کو عموماً مستطیل سے ظاہر کیا جاتا ہے جب کہ دائرے اور بیضوی اشکال سیٹ کو ظاہر کرتی ہیں کچھ وین ڈائی گرام دہرائیں

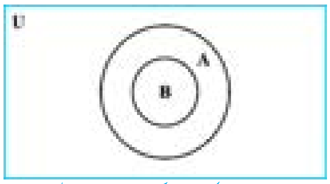


(i) وین ڈائی گرام ظاہر کر رہا ہے کائناتی سیٹ U میں سیٹ A کو

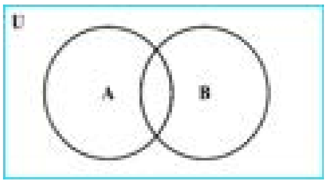


(ii) وین ڈائی گرام ظاہر کر رہا ہے دو ڈس جوائنٹ سیٹ A اور B کو

(iii) وین ڈائی گرام ظاہر کر رہا ہے دو اوورلیپنگ سیٹ A اور B کو



(iv) وین ڈائی گرام ظاہر کر رہا ہے A کے تحتی سیٹ B کو $B \subseteq A$

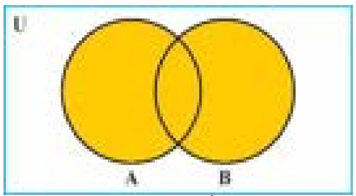


17.1.3(i) مندرجہ ذیل کو ظاہر کرنے کے لیے وین ڈائی گرام استعمال کریں(Use Venn Diagram to represent):

- دو سیٹوں کے اتصال اور تقاطع کو(Union and Intersection of sets):
- ایک سیٹ کے کمپلیمنٹ کو(Complement of a set):
- دو سیٹوں کے تشاکلی فرق کو(Symmetric difference of two sets):
- دو سیٹوں کے اتصال اور تقاطع کو(Union and Intersection of sets):

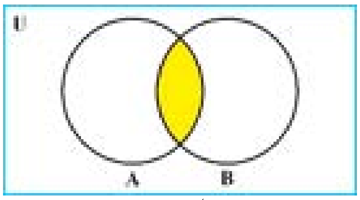
دو سیٹوں کے اتصال اور تقاطع وین ڈائی گرام ہیں، دو سیٹوں A اور B کا اتصال کو A اور B کا تمام علاقہ ظاہر کرتا ہے۔ شکل (i) سایہ دار یا رنگین علاقہ $A \cup B$ کو ظاہر کرتا ہے
جب کہ دو سیٹوں A اور B کا تقاطع کو A اور B کا مشترکہ علاقہ ظاہر کرتا ہے۔
شکل (ii) سایہ دار یا رنگین علاقہ $A \cap B$ کو ظاہر کرتا ہے۔

$A \cup B$



شکل(i)

$A \cap B$



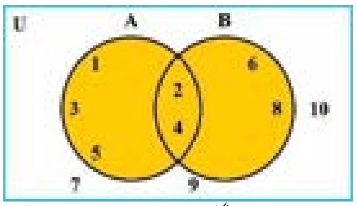
شکل(ii)

مثال نمبر 1: اگر $U = \{1,2,3,...,10\}$ ، $A = \{1,2,3,4,5\}$ اور $B = \{2,4,6,8\}$ تو $A \cup B$ اور $A \cap B$ کو بذریعہ وین ڈائی گرام ظاہر کریں

حل:

شکل(الف) میں رنگین یا سایہ دار علاقہ $A \cup B$ کو ظاہر کرتا ہے
وین ڈائی گرام سے ہمیں حاصل ہوا۔
$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8\}$

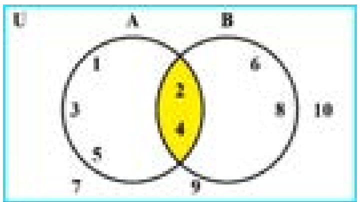
$A \cup B$



شکل(الف)

شکل(ب) میں رنگین یا سایہ دار علاقہ $A \cap B$ کو ظاہر کرتا ہے
وین ڈائی گرام سے ہمیں حاصل ہوا۔
$A \cap B = \{2,4\}$

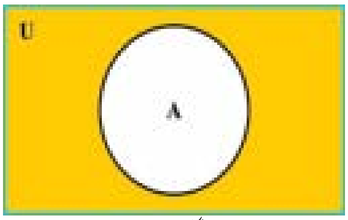
$A \cap B$



شکل(ب)

ایک سیٹ کا کمپلیمینٹ (Complement of a set):

A'



شکل(i)

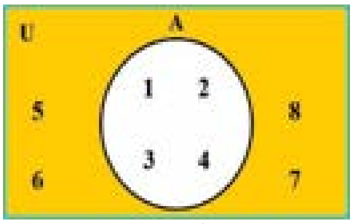
وین ڈائی گرام میں، سیٹ A کا کمپلیمینٹ کائناتی سیٹ کے علاقہ کو ظاہر کرتا ہے سوائے سیٹ A کے علاقے کو۔ شکل (i) بس سایہ دار یا رنگین علاقہ A' کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال کے طور پر:

اگر $U=\{1,2,3,...,8\}$ اور $A=\{1,2,3,4\}$ تو بذریعہ وین ڈائی گرام A' ظاہر کریں

حل:

A'



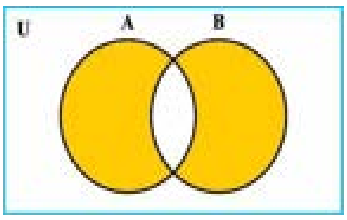
شکل(ii)

سامنے دی گئی وین ڈائی گرام شکل (ii) میں سایہ دار یا رنگین علاقہ A' کو ظاہر کرتا ہے

لہذا ہمارے پاس ہے: $A'=\{5,6,7,8\}$

دو سیٹوں کا تشاکلی فرق (Symmetric difference of two sets):

$A\Delta B$



شکل(i)

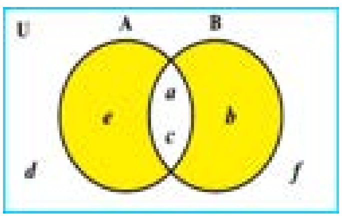
وین ڈائی گرام میں، دو سیٹ A اور B کا تشاکلی فرق A اور B کے پورے علاقہ کو ظاہر کرتا ہے۔ سوائے مشترکہ علاقے کے۔ شکل (i) میں رنگین یا سایہ دار علاقہ $A\Delta B$ کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال: اگر تو کو بذریعہ وین ڈائی گرام ظاہر کریں۔

اگر $U=\{a,b,c,d,e,f\}$، $A=\{a,c,e\}$ اور $B=\{a,b,c\}$

حل: تو $A\Delta B$ کو بذریعہ وین ڈائی گرام ظاہر کریں

$A\Delta B$



شکل(ii)

سامنے دیئے گئے وین ڈائی گرام کی شکل (ii) میں سایہ دار یا رنگین علاقہ $A\Delta B$ کو ظاہر کرتا ہے۔ یعنی $A\Delta B=\{a,e\}$

17.1.3(ii) بذریعہ وین ڈائی گرام تصدیق کریں (Use Venn diagram to verify):

- **اتصال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ (Commutative property of union and intersection):**
- **قوانین تلازم (Associative laws):**
- **قوانین تقسیمی (Distributive laws):**
- **ڈی مورگن کے قوانین (De Morgan's laws):**

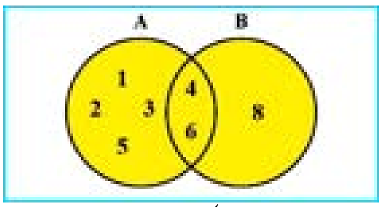
- **اتصال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ (Commutative property of union and intersection):**

آئیں اتصال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ مندرجہ مثالوں کی مدد سے بذریعہ وین ڈائی گرام تصدیق کریں۔

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ اور $B=\{4,6,8\}$ تو اتصال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ بذریعہ وین ڈائی گرام تصدیق کریں

پڑتال:(i) اتصال کی خاصیت مبادلہ $A\cup B=B\cup A$

$A\cup B$

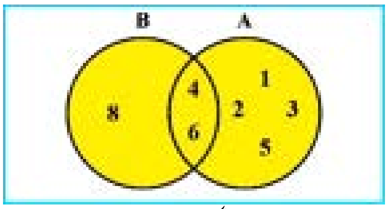


شکل (i)

وین ڈائی گرام کی شکل (i) سے

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\}$

$B\cup A$



شکل (ii)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے

$B\cup A=\{1,2,3,4,5,6,8\}$

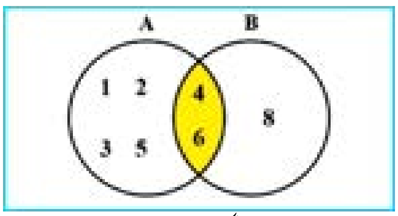
سایہ دار یا رنگین علاقہ اور ان کے ارکان برابر ہیں جیسا کہ شکل (i) اور شکل (ii) میں دکھایا گیا ہے۔

$A\cup B=B\cup A$

پس تصدیق ہوئی

پڑتال (ii): تقاطع کی خاصیت مبادلہ $A\cap B=B\cap A$

$A\cap B$

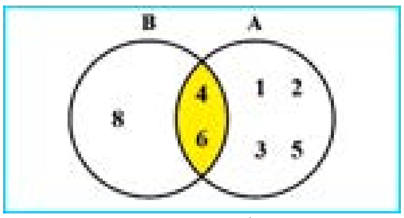


شکل (i)

وین ڈائی گرام کی شکل (i) سے

$A\cap B=\{4,6\}$

$B\cap A$



شکل (ii)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے

$B\cap A=\{4,6\}$

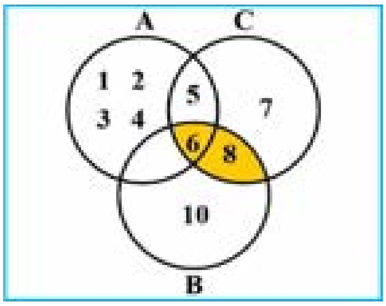
سایہ دار یا رنگین علاقہ اور ان کے ارکان برابر ہیں جیسا کہ شکل (i) اور شکل (ii) میں دکھایا گیا ہے۔

$A\cap B=B\cap A$ پس تصدیق ہوئی

پڑتال: اتعال کے قانونِ تلازم $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

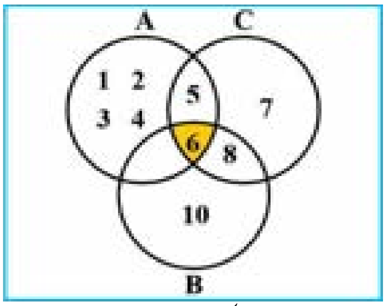
$\underline{L.H.S=A\cap(B\cap C)}$ $\underline{R.H.S=(A\cap B)\cap C}$

$B\cap C$



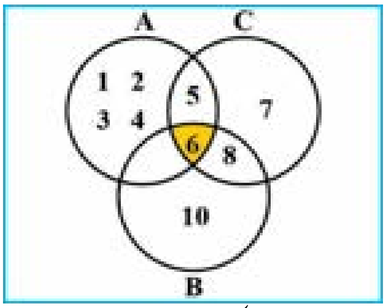
شکل (i)

$A\cap B$



شکل (iii)

$A\cap(B\cap C)$

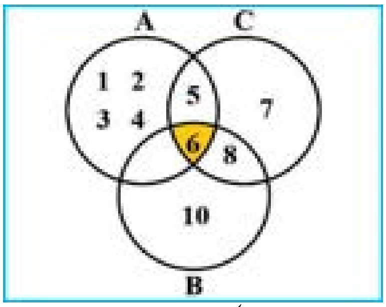


شکل (ii)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے

$A\cap(B\cap C)=\{6\}$

$(A\cap B)\cap C$



شکل (iv)

وین ڈائی گرام کی شکل (iv) سے

$(A\cap B)\cap C=\{6\}$

سایہ دار یا رنگین علاقے اور ان کے رکان برابر ہیں جیسا کہ شکل (ii) اور شکل (iv) میں دکھائے گئے ہیں۔

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

پس تصدیق ہوئی

قوانین تلازم (Distributive Laws):

بذریعہ وین ڈائی گرام قوانین تلازم کی تصدیق کرنے کے لیئے ہم مندرجہ ذیل مثال لیتے ہیں۔

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4,5,6\}$، $B=\{3,4,5,6,7\}$ اور $C=\{2,4,6,8\}$ تو اتعال اور تقاطع کے قوانین تلازم کی تصدیق کریں

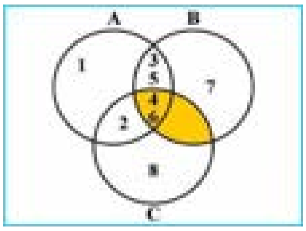
پڑتال:

(i) تقاطع کے قانون تلازم (Distributive law of union over intersection):

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

$\underline{L.H.S=A\cup(B\cap C)}$

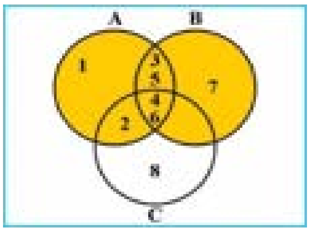
$B\cap C$



شکل(i)

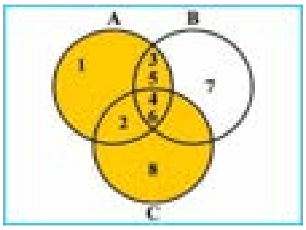
$\underline{R.H.S=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$

$A\cup B$



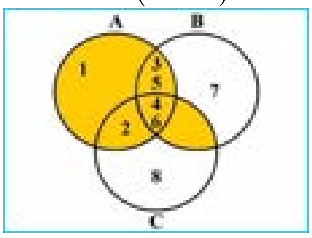
شکل(iii)

$A\cup C$



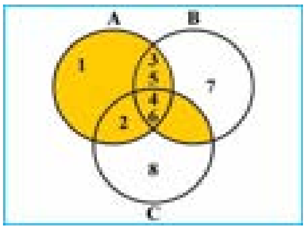
شکل(iv)

$A\cup(B\cap C)$



شکل (ii)

$(A\cup B)\cap(A\cup C)$



شکل (v)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے

$A\cup(B\cap C)=\{1,2,3,4,5,6\}$

وین ڈائی گرام کی شکل (v) سے

$(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1,2,3,4,5,6\}$

رنگین اور سایہ دار علاقے اور ان کے ارکان برابر ہیں جسا کہ شکل (ii) اور شکل (v) دکھا گیا ہے

پس $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

تصدیق ہوئی

قوانین تلازم (Associative Laws):

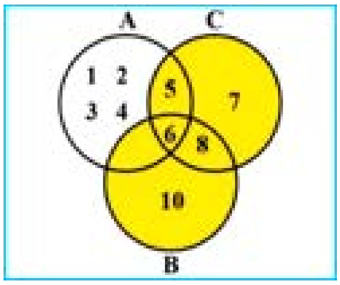
بذریعہ وین ڈائی گرام قوانین تلازم کی تصدیق کرنے کے لیے ہم مندرجہ ذیل مثال لیتے ہیں۔

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4,5,6\}$، $B=\{6,8,10\}$ اور $C=\{5,6,7,8\}$ تو اتعال اور تقاطع کے قوانین تلازم کی تصدیق کریں

پڑتال: اتعال کے قانون تلازم یعنی $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

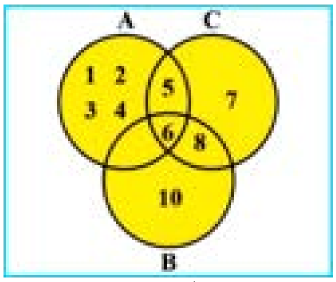
$L.H.S=A\cup(B\cup C)$

$B\cup C$



شکل(i)

$A\cup(B\cup C)$



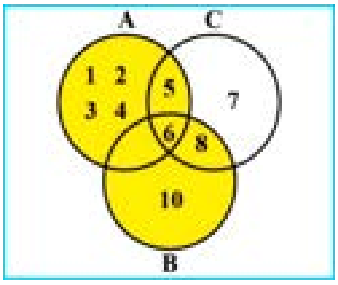
شکل(ii)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے

$A\cup(B\cup C)=\{1,2,3,4,5,6,7,8,10\}$

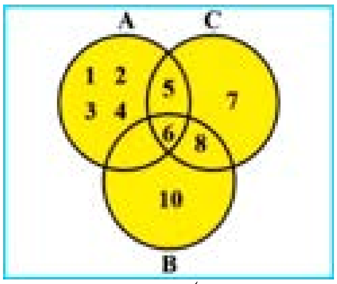
$R.H.S=(A\cup B)\cup C$

$A\cup B$



شکل(iii)

$(A\cup B)\cup C$



شکل(iv)

وین ڈائی گرام کی شکل (iv) سے

$(A\cup B)\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,10\}$

سایہ دار یا رنگین علاقے اور ان کے ارکان برابر ہیں جیسا کہ شکل(i) اور شکل(ii) میں دکھائے گئے ہیں

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

پس تصدیق ہوئی

ڈی مورگن کے قوانین (De Morgan's Laws):

آئیں مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے ڈی مورگن کے قوانین کی بذریعہ وین ڈائی گرام تصدیق کریں

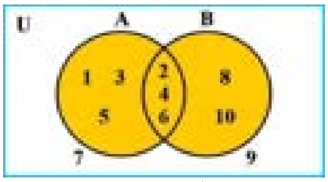
مثال: ڈی مورگن کے قوانین کی بذریعہ وین ڈائی گرام تصدیق کریں

اگر $U=\{1,2,3,...,10\}$، $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ اور $B=\{2,4,6,8,10\}$

پڑتال: (i) $(A\cup B)' = A'\cap B'$

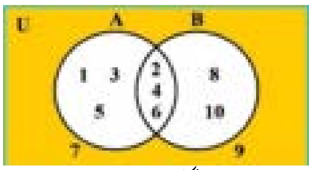
$\underline{L.H.S=(A\cup B)'}$

$A\cup B$



شکل (i)

$(A\cup B)'$

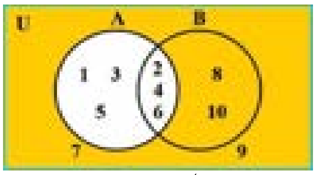


شکل (ii)

$(A\cup B)'=\{7,9\}$

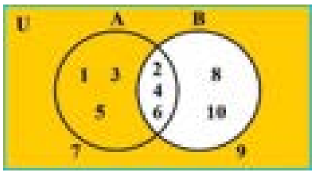
$\underline{R.H.S=A'\cap B'}$

A'



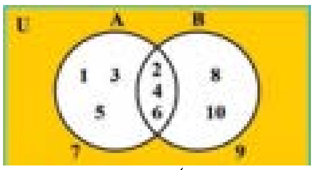
شکل (iii)

B'



شکل (iv)

$A'\cap B'$



شکل (v)

$A'\cap B'=\{7,9\}$

سایہ دار یا رنگین علاقے اور ان کے ارکان برابر ہیں جب کہ شکل (ii) اور شکل (v) میں دکھایا گیا ہے۔

پس $(A\cup B)'=A'\cap B'$

تصدیق ہوئی

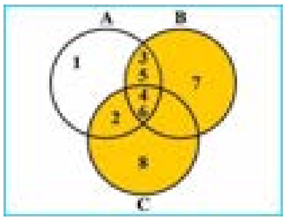
پڑتال:

(ii) قوانین تقسیمی Distributive law of intersection over union

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

L.H.S $= A\cap(B\cup C)$

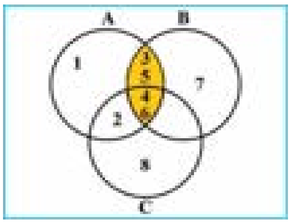
$B\cup C$



شکل (i)

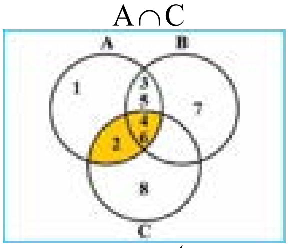
R.H.S $=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cap B$



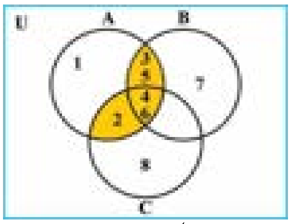
شکل (iii)

$A\cap C$



شکل (iv)

$A\cap(B\cup C)$

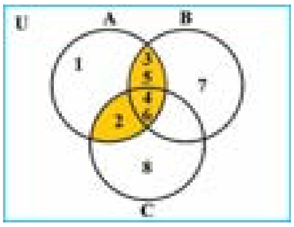


شکل (iv)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے

$A\cap(B\cup C)=\{2,3,4,5,6\}$

$(A\cap B)\cup(A\cap C)$



شکل (v)

وین ڈائی گرام کی شکل (v) سے

$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{2,3,4,5,6\}$

سایہ داریا رنگین علاقہ اور ان کے ارکان برابر ہیں جیسا کہ سکل (ii) اور شکل (v) میں دکھایا گیا ہے۔

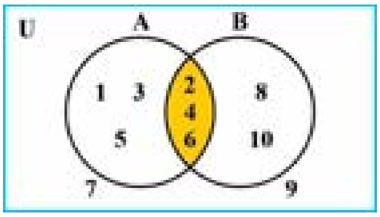
پس $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

تصدیق ہوئی

پڑتال: (ii): $(A\cap B)' = A'\cup B'$

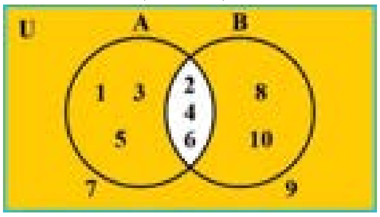
$\underline{\text{L.H.S} = (A\cap B)'}$

$A\cap B$



شکل (i)

$(A\cap B)'$



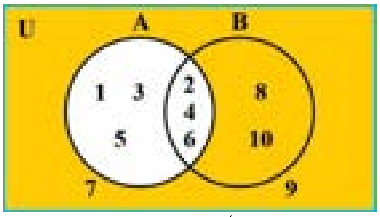
شکل (ii)

وین ڈائی گرام شکل (ii) کے مطابق

$(A\cap B)' = \{1,3,5,7,8,9,10\}$

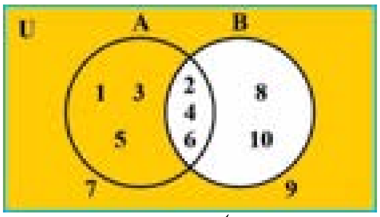
$\underline{\text{R.H.S} = A'\cup B'}$

A'



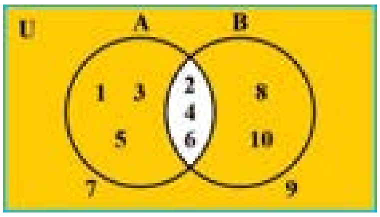
شکل (iii)

B'



شکل (iv)

$A'\cup B'$



شکل (v)

وین ڈائی گرام کی شکل (v) کے مطابق

$A'\cup B' = \{1,3,5,7,8,9,10\}$

سایہ دار یا رنگین علاقے اور ان کے ارکان برابر ہیں جب کہ شکل (ii) اور شکل (v) میں دکھایا گیا ہے۔

پس $(A\cap B)' = A'\cup B'$

تصدیق ہوئی

مشق نمبر 17.4

1- اگر A اور B کوئی سے U دو کے تحتی سیٹ ہیں تو $A \cup B$، $A \cap B$، $A \Delta B$ اور $A-B$ کے وین ڈائی گرام بنائیں اگر

(i) A اور B ڈس جوائنٹ سیٹ ہیں (ii) A اور B اوورلیپنگ سیٹ ہیں (iii) سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے۔

2. بذریعہ وین ڈائی گرام اتعال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ کی تصدیق کریں اگر

(i) $A = \{a,b,c,d,e\}$ ؛ $B = \{a,e,i,o,u\}$

(ii) $P = \{1,2,3,...,10\}$ ؛ $Q = \{2,4,6,8,10\}$

3. بذریعہ وین ڈائی گرام ڈی مورگن کے قوانین کی تصدیق کریں اگر

اگر $A = \{1,3,5,7,9\}$، $B = \{5,6,7,8\}$ اور $U = \{1,2,3,...,10\}$

4. بذریعہ وین ڈائی گرام قوانین تلازم اور قوانین تقسیمی کی تصدیق کریں اگر

اگر $A = \{1,2,3,...,8\}$، $B = \{4,6,7,8,9,10\}$ اور $C = \{5,7,9,11\}$

17.1.4 مترتب جوڑے اور کارتیسی حاصل ضرب (Ordered pairs and Cartesian products):

کارتیسی حاصل ضرب فرانسیسی ریاضی دان اپنے ڈیکارٹ کے نام پر رکھا گیا ہے جس نے انیلٹیکل جیومٹری متعارف کروائی تھی انیلٹیکل جیومیٹری میں مترتب جوڑے مستوی ہیں نقاط کو ظاہر کرنے کے لیئے استعمال کیئے جاتے ہیں۔ آئیں مترتب جوڑوں اور کارتیسی حاصل ضرب کو تفصیل سے بحث کرتے ہیں۔

17.1.4 (i) مترتب جوڑے (Recognize ordered pair):

اعداد کا جوڑا جس میں ترتیب کا لازماً خیال رکھا جاتا ہے۔ مترتب جوڑا کہلاتا ہی۔ کسی دو قدرتی اعداد a اور b کے لیئے، اگر ہم a کو پہلا اور b کو دوسرا رکن سمجھتے ہیں تو a اور b کے مترتب جوڑے کو (a,b) سے ظاہر کیا جاتا ہی۔ مترتب جوڑے (a,b) میں a پہلا رکن یا عنصر اور b دوسرا رکن یا عنصر کہلاتا ہے۔ دو مترتب جوڑے برابر ہوتے ہیں اگر ان کے رکن برابر ہوں جیسے

مثال: x اور y کی قیمت معلوم کریں اگر $(x+5,8)$ اور $(9,y-6)$ برابر ہے

حل: ہمارے پاس

$$(9,y-6)=(x+5,8)$$

$$\Rightarrow \quad y-6=8 \qquad \Rightarrow \quad 9=x+5$$

$$\Rightarrow \quad y=8+6 \qquad \Rightarrow \quad 9-5=x$$

یا $y=14$ یا $x=4$

لہٰذا x اور y کی قیمت بالترتیب 4 اور 14 ہیں

17.1.4 (ii) کارتیسی حاصل ضرب بنانا (To form Cartesian products):

اگر A اور B دو غیر خالی سیٹ ہیں تو A کی B سے کارتیسی حاصل ضرت سے ظاہر کی جاتی ہے۔ جو تمام مترتب جوڑے (a,b) پر مشتمل ہوتے ہیں جہاں $a\in A$ اور $b\in B$

جیسے $A\times B=\{(a,b) \mid a\in A \text{ اور } b\in B\}$

اس ہی طرح B کی A سے کارتیسی حاصل ضرب اس طرح ظاہر کی جاتی ہے

$$B\times A=\{(b,a) \mid b\in B \text{ اور } a\in A\}$$

مثال کے طور پر اگر $P=\{1,2,4\}$ اور $Q=\{5,10\}$

تو $P\times Q=\{(1,5),(1,10),(2,5),(2,10),(4,5),(4,10)\}$

اور $Q\times P=\{(5,1),(5,2),(5,4),(10,1),(10,2),(10,4)\}$

نوٹ: (i) $A\times B$ کو "A کراس B" پڑھایا جاتا ہے

(ii) اگر $O(A)=m$ اور $O(B)=n$ تو $O(A\times B)=mn$

(iii) عام طور پر $A\times B\neq B\times A$

17.2 ثنائی ربط (Binary Relations):

ثنائی ربط کی وضاحت کریں اور اُسی کے حلقہ اثر (Domain) اور زد (Range) کی شناخت کریں

ثنائی ربط (Binary Relations):

اگر A اور B کوئی دو غیر خالی سیٹ ہیں تو کارتیسی ضرب AxB کا کوئی تحتی سیٹ R، A سے B کا ثنائی ربط کہلائے گا۔

مثال: اگر $A=\{a,b,c\}$ اور $B=\{2,4\}$ تو معلوم کریں

(a) دو روابط A سے B میں

(b) تین روابط B سے A میں

(c) چار ثنائی رابط B میں

حل: (a) دو روابط A سے B میں

یہاں $A\times B=\{(a,2),(a,4),(b,2),(b,4),(c,2),(c,4)\}$

اب $R_1=\{(a,2),(b,4)\}$ اور $R_2=\{(b,2),(c,2),(c,4)\}$

کوئی سے دو روابط A سے B میں ہیں

(b) کوئی تین روابط B سے A میں ہیں

یہاں $B\times A=\{(2,a),(2,b),(2,c),(4,a),(4,b),(4,c)\}$

اب $R_1=\{(2,a)\}$, $R_2=\{(2,a),(2,b)\}$ اور $R_3=\{(4,a),(4,b),(4,c)\}$

کوئی تین روابط B سے A میں ہیں

(c) چار ثنائی روابط B میں

یہاں $B\times B=\{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$

اب $R_1=\varnothing$، $R_2=\{(2,2)\}$، $R_3=\{(2,4),(4,2)\}$ اور $R_4=\{(2,2),(2,4)\}$

چار ثنائی روابط B میں ہیں

حلقہ اثر (Domain) اور زد (Range)

فرض کریں R ثنائی ربط ہے سیٹ A سے سیٹ B میں۔ تو R کا حلقہ اثر (Domain) اثر ظاہر کیا جاتا ہے بطور DomR، یہ R کے تمام مترتب جوڑوں کے پہلے تمام رکن کا سیٹ ہے۔ R کی زد (Range)، کو Range سے ظاہر کرتے ہیں یہ R کے مترتب جوڑوں کے دوسرے تمام رکن کا سیٹ ہے

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4\}$، $B=\{4,5,6,7\}$ اور $R=\{(1,4),(2,4),(3,5),(3,6)\}$

A سے B میں ایک ثنائی ربط ہے تو $\text{Dom } R=\{1,2,3\}$ اور $\text{Range } R=\{4,5,6\}$

مثال: اگر $x, y \in N$ اور $\mathbb{N}$ ایک ثنائی ربط R,N میں دی گئی ہے جیسے

$R = \{(x,y) \mid x + y = 5\}$ تو R کو اندراجی شکل میں لکھیں اور حلقہ اثر اور زر (Range) بھی معلوم کریں۔

حل: اندراجی شکل میں $R = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

یہاں $\text{Dom } R = \{1,2,3,4\}$

اور $\text{Range } R = \{1,2,3,4\}$

17.3 تفاعل (Function)

تفاعل, ریاضی کی ایک شاخ کا ایک بنیادی تصور ہے جس نے سائنس کو یکسر بدل دیا ہے۔ تفاعل در حقیقت تعلق کا ایک اصول ہے جو دو سیٹوں یا مقداروں کا تعلق ہے۔ مثال کے طور پر دائرے کا رقبہ A رداس "r" یوں $A = \pi r^2$ تعلق رکھتا ہے یہاں ہم تناعل کو صرف سیٹ کی بنیادی پر بحث کرینگے۔

17.3 (i) تفاعل کی وضاحت کریں اور اُس کی حلقہ اثر (domain) شریک حلقہ اثر (Co-domain) اور زر (Range) کی شناخت کریں۔

تفاعل (Function) ایک ثنائی ربط ہے جس میں میں حلقہ اثر (domain) کا ہر رکن صرف اور صرف زر (Range) کا ایک رکن کے ساتھ وابستہ ہوتا ہے مثال کے طور پر $\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$ ایک تفاعل ہے

جیسا کہ $\{(1,5),(2,6),(2,7),(3,9)\}$ تفاعل نہیں ہے کیونکہ حلقہ اثر (domain) کا رکن, 2 زر (Range) کے دو ارکان کے ساتھ وابستہ ہے

سیٹ A سے سیٹ B میں تفاعل (Function from set A to set B):

فرض کریں A اور B دو غیر خالی سیٹ ہیں اور R, سیٹ A سے سیٹ B میں ثنائی ربط ہے۔ تو R تفاعل کہلائے گا A سے B میں اگر

(i) R کا حلقہ اثر (domain) = A

(ii) R میں A کا ہر رکن وابستہ ہے B کے صرف ایک رکن سے جیسے اگر $(a,b) \in R$ اور $(a,c) \in R$ تو b=c تفاعل عام طور انگریزی اور یونانی حرف تہجی جیسے f.g.h وغیرہ اور α, β, γ وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اگر f ایک تفاعل ہے A سے B میں تو ہم یوں لکھتے ہیں $f: A \to B$ اور ہر $(ab) \in f$ تو b کو f کے تحت a کی شبیہہ کہلاتے ہے اور ہم اسے یوں لکھتے ہیں $b = f(a)$

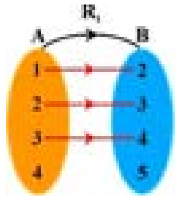
مثال: فرض کریں $A = \{1,2,3,4\}$ اور $B = \{2,3,4,5\}$ شناخت کریں مندرجہ ذیل میں A سے B میں کون سے تفاعل میں

(i) $R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

(ii) $R_2 = \{(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,5)\}$

(iii) $R_3 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

میپنگ ڈائی گرام

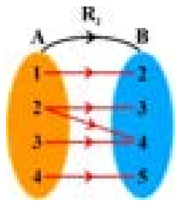


حل:

(i) $R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

R_1، تفاعل نہیں ہے کیونکہ $\text{Dom } R_1 \neq A$

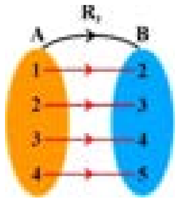
جیسا کہ متصلہ میپنگ ڈائی گرام سیٹ میں دکھایا گیا ہے۔



(ii) $R_2 = \{(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,5)\}$

R_2، تفاعل نہیں ہے کیونکہ حلقہ اثر (Domain) کا ایک رکن ہے، "2" B کے صرف ایک رکن کے ساتھ وابستہ نہیں ہے

جیسا کہ متصلہ میپنگ ڈرائی گرام میں دکھایا گیا ہے۔



(iii) $R_3 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

R_3 تفاعل ہے کیونکہ $\text{Dom } R_3 = A$ اور

حلقہ اثر کا ہر رکن B کے صرف ایک رکن کے ساتھ وابستہ ہے۔

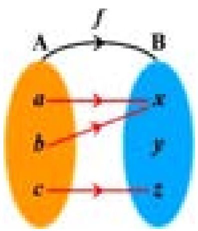
جیسا کہ میپنگ ڈائی گرام میں دکھایا گیا ہے۔

◄ حلقہ اثر (Domain) معاون حلقہ اثر (Co- domain) اور زر (Range)

اگر f، A سے B میں ایک تناعل ہے جیسے $f: A \to B$ تو A اس کا حلقہ اثر (Domain) پہلا سیٹ کہلاتا ہے اور B اس کا معاون حلقہ (Co-domain) دوسرے سیٹ کہلاتا ہے۔

حالانکہ: زر (Range)، f کی تمام شبیہ کا سیٹ ہے

مثال: اگر A سے B میں f ایک تناعل ہے جیسا کہ دیئے گئے میپنگ ڈائی گرام میں دکھایا گیا تو اس کے حلقہ اثر (domain) تعاون حلقہ اثر (co domain) اور زر (Range)



حل: f کے میپنگ ڈائی گرام کے مطابق

$\text{Dom f} = A = \{a,b,c\}$، f $\text{Co-domain } f = b = \{x,y,z\}$, $\text{Range R} = \{x,z\}$

اس کے علاوہ $f(a) = x$ اور $f(c) = z$

نوٹ:
(i) f کی زر (Range) اُسے تعاون حلقہ اثر (Co – domain) کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔
(ii) ہر تفاعل تعلق ہوتا ہے۔ لیکن الٹ درست نہیں ہے۔

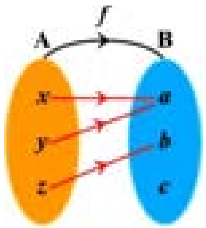
17.3 (ii) مندرجہ ذیل کی وضاحت کریں Demonstrate the following

◄ ان ٹو اور ون–ون تفاعل (ان جیکٹو تفاعل) :(Into and one-one function (Injective function))

◄ اون ٹو تفاعل (سر جیکٹو تفاعل) :(Onto function (Surjective function))

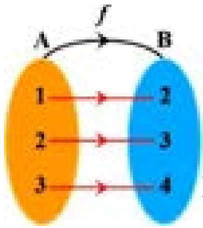
◄ ون–ون اور ارونٹو تفاعل (بائی جیکٹو تفاعل) :(One-one and onto function (Bijective function))

➤ ان ٹو تفاعل (Into function):



کوئی سیٹ A اور B کے لیئے، تفاعل $f : A \to B$ ان ٹو تفاعل کہلاتا ہے
اگر f کی زر (Range)، B کا واجب تحتی سیٹ ہے ($\text{Range } f \subset B$)
مثال : $A = \{x, y, z\}$ اور $B = \{a, b, c\}$ ایک تفاعل $f : A \to B$ یوں واضح کیا جاتا ہے $f = \{(x,a),(y,a),(z,b)\}$ ان ٹو تفاعل ہے کیونکہ $\text{Range } f \subset B$ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے یہاں $\text{Range } f = \{a, b\}$

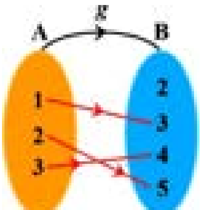
➤ ون-ون تفاعل (One-one function):



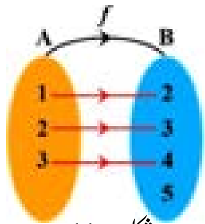
کوئی دو سیٹ A اور B کے لیئے، $f : A \to B$ ون-ون تفاعل کہلاتا ہے
اگر A کا ہر رکن B میں مختلف شبیہ رکھتا ہے۔
مثال : $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{2, 3, 4\}$ کے لیے اور ایک تفاعل $f : A \to B$ یوں واضح کرتے ہیں $f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ ون ون تفاعل ہے کیونکہ A کا ہر رکن B میں مختلف شبیہ رکھتا ہے جیسا کہ میپنگ ڈائی گرام دکھایا گیا ہے۔

➤ ان ٹو اور ون-ون تفاعل یا ان جیکٹو تفاعل (Into and one-one function or injective function):

ایک تفاعل جو ان ٹو ہے اور ون-ون بھی ہے وہ ان جیکٹو تفاعل کہلاتا ہے۔



شکل (ii)

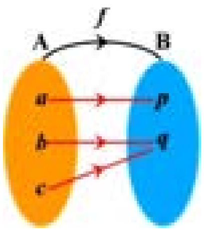


شکل (i)

مثال کے طور پر: $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{2, 3, 4, 5\}$ تفاعل $f : A \to B$ یوں واضح کرتے ہیں
$f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ ایک ان جیکٹو تفاعل ہے
کیونکہ یہ ان ٹو ہے اور ون-ون بھی ہے
جیسا کہ میپنگ ڈائی گرام شکل (i) میں دکھایا گیا ہے۔
تفاعل $g : A \to B$ یوں واضح کرتے ہے
$g = \{(1,3),(2,5),(3,4)\}$ انجیکٹو تفاعل بھی ہے جیسا کہ میپنگ ڈائی گرام شکل (ii) میں دکھایا گیا ہے۔

➤ آن ٹو تفاعل یا سرجیکٹو تفاعل (Onto function or surjective function):

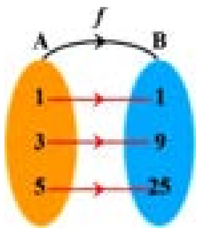
کوئی سیٹ A اور B کے لیئے، تفاعل $f : A \to B$ آن ٹو تفاعل یا سرجیکٹو تفاعل کہلاتا ہے اگر
$\text{Range } f = B$ مثال کے طور پر کی وضاحت یوں کی جاتی ہے



مثال : $A = \{a, b, c\}$ اور $B = \{p, q\}$ تفاعل $f : A \to B$
یوں واضح کیا جاتا ہے۔ $f = \{(a,p),(b,q),(c,q)\}$
آن ٹو تفاعل ہے کیونکہ $f : A \to B$ جیسا کہ متصلہ شکل میں دکھایا گیا ہے

➤ ون-ون اور آن ٹو تفاعل یا بائی جیکو ٹو تفاعل (One-one and onto function or bijective function):

تفاعل جو ون-ون ہے اور آن ٹو بھی ہے وہ ون-ون اور آن ٹو تفاعل یا بائی جیکٹو تفاعل کہلاتا ہے۔



مثال کے طور پر: $A=\{1,3,5\}$ اور $B=\{1,9,25\}$ تفاعل $f:A\rightarrow B$ یوں واضح کیا جاتا ہے۔
$f=\{(1,1),(3,9),(5,25)\}$ بائی جیکٹو تفاعل ہے کیونکہ یہ ون-ون آن ٹو ہے جیسا کہ متعلقہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

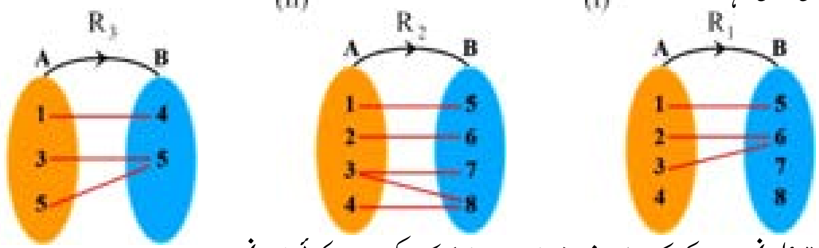
17.3(iii) مشاہدہ کریں کہ آیا دی گئی ربط تفاعل ہے یا نہیں

(Examine whether a given relation is a function or not):

مشاہدہ کرنے کے لیئے آیا دی گئی ربط تفاعل ہے یا نہیں ہمیں ربط کے حلقہ اثر (domain) پر توجہ دینی ہو گی۔
اگر حلقہ اثر (domain) کا کوئی رکن بغیر شبیہ کے ہے یا کوئی حلقہ اثر کا کوئی رکن ربط میں ایک سے زیادہ شبیہ کے ساتھ ہے تو یہ ربط تفاعل نہیں ہے۔

مثال: مشاہدہ کریں کہ دی گئی اور ربط A سے B میں جن کو میپنگ ڈائی گرام میں دیا گیا ہے فیصلہ کریں کہ کون سا تفاعل ہے اور کون سا تفاعل نہیں ہے۔

(i) (ii) (iii)



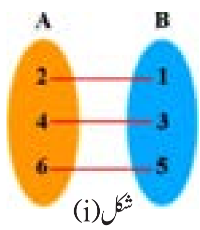
حل: R_1 تفاعل نہیں ہے کیونکہ حلقہ اثر (domain) کے رکن "4" کوئی شبیہ نہیں ہے۔
R_2 کی تفاعل نہیں ہے کیونکہ حلقہ اثر (domain) کے رکن "3" کی ایک سے زیادہ شبیہ ہیں۔
R_3 تفاعل ہے کیونکہ حلقہ اثر (domain) کے ہر رکن کی صرف اور تفرد شبیہ ہے

17.3(iv) ون—ون مطابقت اور ون—ون تفاعل میں فرق واضح کریں

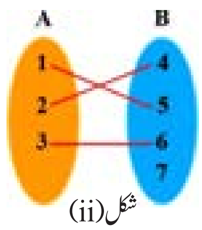
(Differentiate between one-one correspondence and one-one function):

فرض کریں A اور B دو غیر خالی سیٹ ہیں۔ مطابقت A اور B میں پہلے سیٹ کا ہر رکن دوسرے سیٹ کے صرف ایک رکن کے ساتھ وابستہ ہے ون-ون مطابقت ہمیشہ بائی جیکٹو نہیں ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر: شکل (i) ون—ون مطابقت تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔
شکل (ii) ون—ون مطابقت نہیں ہے کیونکہ یہ ون—ون تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔



شکل (i)



شکل (ii)

مشق 17.5

1. x اور y کی قیمتیں معلوم کریں اگر

(i) $(x-5,10)=(11,y-7)$

(ii) $(5x+8,5y-4)=(3x+10,2y+2)$

(iii) $(2x-3y,5x+y)=(3,16)$

2. اگر سیٹ P کے 10 رکن، سیٹ Q کے 15 رکن ہیں تو QxP, PxQ اور PxP کے رکن معلوم کریں

3. اگر $A=\{1,2\}$ ، $B=\{2,3\}$ اور $C=\{1,3,5\}$ تو معلوم کریں

(i) $A\times B$ (ii) $B\times C$ (iii) $A\times(B\cup C)$

(iv) $B\times(A\cup C)$ (v) $(A\cap B)\times(B\cap C)$

4. اگر $A=\{5,6\}$ اور $B=\{1,2,3\}$ تو معلوم کریں

(i) $A\times B$ میں تین روابط (ii) $B\times A$ میں چار روابط

(iii) B میں پانچ روابط (iv) A میں تمام روابط

5. دو سیٹ A اور B کے لیئے، اگر $O(A)=3$ اور $O(B)=4$ تو AxB میں تمام روابط کی تعداد معلوم کریں

6. $A\times B$ مندرجہ ذیل کی ثنائی روابط کو اندراجی شکل میں لکھیں جب کے $A=\{0,1,2,3\}$ اور $B=\{2,4,6,8\}$ یہاں اور جیسا کہ $a\in A$ اور $b\in B$

(i) $R_1=\{(a,b)\mid b<5\}$ (ii) $R_2=\{(a,b)\mid a+b=9\}$

(iii) $R_3=\{(a,b)\mid a-b=1\}$

7. اگر ربط $R=\{(x,y)\mid y=2x+5\}$, Z میں ہے تو

(i) زر (Range) معلوم کریں اگر حلقہ اثر (domain) میں $\{-2,-1,0,1,2\}$ ہے۔

(ii) حلقہ اثر (domain) معلوم کریں اگر زر (Range) میں $\{11,13,15,17\}$ ہے۔

8. اگر x,y سیٹ W کے ارکان کو ظاہر کرتے ہیں تو مندرجہ ذیل روابط کی حلقہ اثر (domain) اور زر (Range) معلوم کریں

(i) $\{(x,y)\mid 3x+y=11\}$ (ii) $\{(x,y)\mid x-y=6\}$

9. اگر $f:A\to B$ تفاعل دیا گیا ہے $f=\{(1,5),(2,6),(3,7),(4,8)\}$ جہاں اور کی قیمتیں بھی معلوم کریں $A=\{1,2,3,4\}$ اور $B=\mathbb{N}$ تو اس کے معاون حلقہ اثر (co-domain) اور زر (Range) معلوم کریں $f(2)$ اور $f(4)$

10. اگر $A=\{0,1,2,3,4\}$ اور $B=\{2,4,6,8,10\}$ تو معلوم کریں آیا مندرجہ ذیل A سے B میں ربط تفاعل ہیں یا نہیں تفاعل میں توان کی اقسام بھی معلوم کریں

(i) $R_1=\{(0,2),(1,4),(2,6),(3,8)\}$

(ii) $R_2=\{(0,10),(1,8),(2,6),(2,4),(3,4),(4,2)\}$

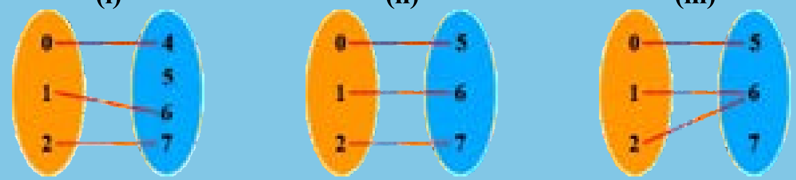
(iii) $R_3=\{(0,2),(1,4),(2,6),(3,8),(4,8)\}$

(iv) $R_4=\{(0,2),(1,2),(2,2),(3,2),(4,8)\}$

(v) $R_5=\{(0,2),(1,4),(2,6),(3,8),(4,10)\}$

11. مندرجہ ذیل میں کونساون—ون تفاعل ہے یاون-ون مطابقت ہے یادونوں میں سے کوئی نہیں ہے۔

(i) **(ii)** **(iii)**



12. اگر $P=\{a,b,c\}$ ، $Q=\{x,y,z\}$ اور $R=\{p,q,r,s\}$ تو معلوم کریں

(i) تفاعل f، P ان ٹو q

(ii) تفاعل g، R ان ٹو P

(iii) تفاعل h، P سے ٹو p، جو کہ ان جیکٹو ہے

(iv) تفاعل K، Q سے ٹو P، جو کہ بائی جیکٹو ہے

Review Exercise 17

1. درست جواب کا انتخاب کریں:

(i) کونسا N کا تحتی سیٹ ہے۔

(a) Z (b) Q (c) E (d) P

(ii) $A=\{x\,|\,x\in Z\wedge x^2=25\}$ کی اندراجی شکل ______ ہے۔

(a) $\{1,5\}$ (b) $\{-5,5\}$

(c) $\{1,5,25\}$ (d) $\{-5\}$

(iii) دوسیٹ A اور B کے لیئے، اگر $O(A)=O(B)$ تو

(a) $A\subseteq B$ (b) $B=A$

(c) $A\sim B$ (d) $A\subset B$

(iv) $\{x\,|\,x\in N\wedge x<1\}$ ______ ہے

(a) اکائی سیٹ (b) لا متناہی

(c) خالی سیٹ (d) فوقی

(v) اگر $A=\{1,2,3,4\}$ اور $B=\{2,4,6\}$ تو $A\Delta B=$ ______

(a) $\{1,2\}$ (b) $\{6\}$

(c) $\{1,3\}$ (d) $\{1,3,6\}$

(vi) کونسا عمل مبادلہ نہیں ہے۔

(a) تشاکلی فرق (b) اتصال
(c) فرق (d) تقاطع

(vii) $\{x \mid x \in P \vee x \in Q\} =$ ______

(a) $P \cap Q$ (b) $P \cup Q$
(c) $P - Q$ (d) $P \Delta Q$

(viii) $\{x \mid x \in U \wedge x \notin A \cap B\} =$ ______

(a) $A \cap B$ (b) $(A \cup B)'$
(c) $(A \cap B)'$ (d) $A' \cap B'$

(ix) کوئی دو غیر خالی سیٹ A اور B کے لیے۔ $A \cup B = U$ اور $A \cap B = \varnothing$ تو A اور B ______ ہیں

(a) سیل (b) اوورلیپنگ سیٹ
(c) مساوی سیٹ (d) کوئی نہیں

(x) $\left((A')'\right)' =$ ______

(a) (A') (b) A'
(c) A (d) B

(xi) اگر $A \supseteq B$ تو $A \cup B =$ ______

(a) A (b) B
(c) $\varnothing$ (d) U

(xii) وین ڈائی گرام میں یونیورسل سیٹ ______ کرتا ہے۔

(a) مستطیل (b) دائرہ
(c) بیضوی (d) ان میں سے تمام

(xiii) اگر $(x,6) = (2, y-6)$ $x + y =$ ______

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 14

(xiv) اگر $O(A \times B) = 100$ اور $O(B) = 5$ تو $O(A) =$ ______

(a) 10 (b) 15 (c) 20 (d) 25

(xv) تفاعل سرجیکٹو کہلاتا ہے اگر رز ______ (Rang) معاون حلقہ اثر

(a) $\supseteq$ (b) $\subset$
(c) $=$ (d) ان میں سے سب

(xvi) تفاعل ان ٹو کہلاتا ہے اگر رز (Range) = ______ معاون حلقہ اثر (Co- domain)

(a) $\supseteq$ (b) $\subset$
(c) $=$ (d) ان میں کوئی نہیں

(xvii) اگر $A=\{0,1,2\}$ اور $B=\{3,4\}$ پھر مندرجہ ذیل میں فیصلہ کریں کے کونسا تفاعل $f: A \to B$ ہے۔

(a) $\{(0,3), (1,4)\}$ (b) $\{(0,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$

(c) $\{(0,3), (1,4), (2,4)\}$ (d) کوئی نہیں

(xviii) کونسا ہمیشہ ہائی جیکٹو ہوگا

(a) اون ٹو تفاعل (b) ون—ون تفاعل

(c) ان ٹو تفاعل (d) ون—ون مطابقت

(xix) اگر $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ تو کونسا ممکن نہیں ہے

(a) $f(5)=6$ (b) $f(7)=8$

(c) $f(-2)=6$ (d) $f(9)=0$

(xx) کونسا مبادلہ ہے

(a) فرق (b) اتصال

(c) کارتیسی حاصل ضرب (d) کوئی نہیں

2. اگر $A=\{1,2,5\}$ ، $B=\{2,4,6\}$ اور $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ تو مندرجہ ذیل معلوم کریں

(a) $A\cup B$ (b) $A\cap B$ (c) $A\Delta B$

(d) $A-B$ (e) A' (f) B'

3. سوال نمبر 2 کے سیٹوں کے لیئے ڈی مورگن کے قوانین کی تصدیق کریں

4. سیٹ $A=\{a,b,d\}$ اور $B=\{a,d,e\}$ کے لیئے اتصال اور تقاطع کی خصوصیات کی تصدیق کریں

5. سیٹ $P=\{1,3,5\}$ اور $Q=\{1,3,7\}$ کے لیئے، مندرجہ ذیل کو بذریعہ وین ڈائی گرام ظاہر کریں

(a) $P\cup Q$ (b) $P\cap Q$ (c) $P\Delta Q$ (d) $P-Q$

6. اگر $A=\{a,c\}$ اور $B=\{b,d\}$ تو معلوم کریں

(a) A میں دو ربط (b) B میں دو ربط

(c) A x B میں تین ربط (d) $A\cup B$ میں دو ربط

7. اگر $A=\{1,2,5\}$ اور $B=\{6,8\}$ تو A سے B میں تفاعل معلوم کریں جو

(a) آن ٹو تفاعل (b) ان ٹو تفاعل

(خلاصہ)

- اندراجی، بیانیہ اور ترقیم سیٹ ساز شکل سیٹ کو ظاہر کرنے کے تین طریقے ہیں
- خالی سیٹ میں تو عنصر نہیں ہوتا ہے
- اگر A تحتی سیٹ ہے B کا تو B فوقی سیٹ ہوتا ہے A کا
- اگر $B \subseteq A$ اور $A \subseteq B$ تو $A = B$.
- مترادف سیٹ ون—ون مطابقت رکھتے ہیں
- اگر $B \subseteq A$ اور $B \neq A$ تو $A \subset B$.
- اتصال، تقاطع، فرق، تشاکلی فرق، کمپلیمنیٹ اور کارتیسی حاصل ضرب سیٹوں پر عوامل ہیں۔
- اگر $A \cap B = \varnothing$ تو A اور B ڈس جوائنٹ سیٹ ہیں۔
- اگر $A \cup B = U$ تو A اور B ایگزوسٹیو سیٹ ہیں۔
- سیل ہمیشہ ڈس جوائنٹ اور ایگزیٹو ہوتے ہیں۔
- فرق اور کارتیی حاصل ضرب مبادلہ نہیں ہوتی ہے۔
- اتصال ارو تقاطع ایک دوسرے پر تقیمی ہوتے ہیں۔
- ڈی مورگن کے قوانین (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- سیٹ ارو ان کی روابط ارو عوامل کی جیوٹریکل مظاہر وین ڈائی گرام کہلاتا ہے۔
- وین ڈائی گرام کو جون وین 1881 قبل مسیحی مین متعارف کروایا تھا۔
- سیٹ، یونیورسل سیٹ وین ڈائی گرام بالترتیب دائرے یا بیضوی اور مستطیل سے ظاہر کئے جاتے ہیں۔
- اگر $a = c \Leftrightarrow (a,b) = (c,d)$ و $b = d$
- $O(A \times B) = O(A) \cdot O(B)$
- $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- کارتیی حاصل ضرب کا ہر تحتی سیٹ ثنائی ربط کہلاتا ہے۔
- ثنائی ربط تقاعل ہے جس میں حلقہ اثر (Domain) کا ہر رکن صرف ایک شبیہ رکھتا ہے۔
- اگر $f: X \to Y$ تقاعل ہے تو X اور Y بالترتیب حلقہ اثر (Domain) اور معاون حلقہ اثر (Co-Domain) جب کہ تمام شبیوں کا سیٹ زد (Range) ہے۔
- تقاعل کہلاتا ہے (i) ان ٹو اگر زد (Range) معاون حلقہ اثر (Co-Domain)
  (ii) آن ٹو اگر زد (Range) = معاون حلقہ اثر (Co-Domain)
  (iii) ون-ون اگر حلقہ اثر (Domain) کا ہر رکن معاون حلقہ اثر (Co-Domain) میں صرف یک اشبیہ رکھتا ہے۔
- تقاعل کہلاتا ہے (i) ان جیکٹو اگر وہ ون-ون اور ان ٹو ہے۔
  (ii) سرجیکٹو اگر وہ آن ٹو ہو۔
  (iii) بائی جیکٹو اگر وہ ون-ون اور آن ٹو ہو۔
- ون-ون مطابقت ہمیشہ بائی جیکٹو ہوئی ہے۔
- ون-ون تقاعل ہمیشہ بائی جیکٹو نہیں ہوتے ہے۔