

طلباء کے آموزشی حاصلات

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

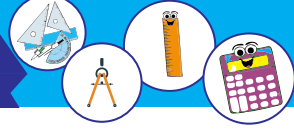
◀ مندرجہ ذیل مسئلہ بمعہ نتائج صریح سمجھ اور انہیں متعلقہ مسائل کے حل کے لیے استعمال کر سکیں۔

❖ اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کی دو قوسیں متماثل ہوں تو ان کے متقابلہ وتر باہم مساوی ہوتے ہیں

❖ اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کے وتر باہم مساوی ہوں تو ان کی متقابلہ قوسیں (صفیرہ، کبیرہ یا نصف دائری) بھی متماثل ہوتی ہیں۔

❖ اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کے وتر مساوی ہوں تو دائرہ کے مرکز (یا متعلقہ مراکز میں) میں مساوی زاویے بناتے ہیں۔

❖ اگر ایک دائرے کے (متماثل دائروں کے / دو وتر مرکز (متعلقہ مراکز) میں مساوی مقدار کی زاویے بنائیں تو وتر مقدار میں مساوی ہوتے ہیں۔

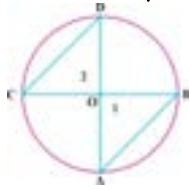


اس پونٹ میں ہم دائرے کے وتر اور قوسین سے متعلق مسائل پر بحث کریں گے۔  
مسئلہ 27.1

اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کی دو قوسیں متماثل ہوں تو ان کے متقابلہ وتر باہم مساوی ہوتے ہیں ہم مسئلہ کو ثابت کریں گے۔  
i. ایک دائرے کے لیے  
ii. دو متماثل دائروں کے لیے

i. ایک دائرے کے لیے

معلوم: ایک دائرے کا مرکز O ہے جس کے  $\widehat{AB}$  اور  $\widehat{CD}$  متماثل قوسیں ہیں یعنی  $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$   
 $\widehat{AB}$  اور  $\widehat{CD}$  دینے گئے متماثل قوسین کے متقابلہ وتر ہیں۔  
 مطلوب:  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$



عمل: O کو A، B، C اور D سے ملائیں۔  
ثبوت:

بیانات	دلائل
<p>میں</p> $\Delta OAB \leftrightarrow \Delta OCD$ $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ $\overline{OB} \cong \overline{OD}$ $m\angle 1 = m\angle 2$ <p>∴</p> $\Delta OAB \cong \Delta OCD$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	<p>ایک ہی دائرے کے رداس ایک ہی دائرے کے رداس دو متماثل قوسین کے مرکزی زاویے ض-ز-ض موضوعہ متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع</p>

Q.E.D

ii. دو متماثل دائروں کے لیے

معلوم: دو متماثل دائرے جن کے مراکز بالترتیب O اور O' ہیں۔  $\widehat{AB}$  اور  $\widehat{CD}$  ان دائروں کے متماثل قوسیں ہیں جبکہ  
 $\widehat{AB}$  اور  $\widehat{CD}$  دو متقابلہ وتر ہیں۔

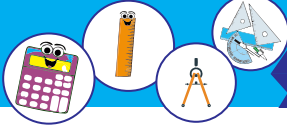


مطلوب:  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

عمل: O کو A اور B سے ملائیں۔ O' کو C اور D سے ملائیں۔  
ثبوت:

بیانات	دلائل
<p>میں</p> $\Delta OAB \leftrightarrow \Delta O'CD$ $\overline{OA} \cong \overline{O'C}$ $\overline{OB} \cong \overline{O'D}$ $m\angle 1 = m\angle 2$ <p>∴</p> $\Delta OAB \cong \Delta O'CD$ <p>∴</p> $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	<p>ایک ہی دائرے کے رداس ایک ہی دائرے کے رداس دو متماثل قوسین کے مرکزی زاویے ض-ز-ض موضوعہ دو متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع</p>

Q.E.D



### مسئلہ 27.2

اگر ایک دائرہ (بامتماثل دائروں) کے وتر باہم مساوی ہوں تو ان کی متقابلہ قوسیں (صغیرہ، کبیرہ یا نصف دائری) بھی متماثل ہوتی ہیں۔  
**معلوم:** دو متماثل دائرے جن کے مراکز بالترتیب O اور O' ہیں۔ ان دائروں کے دو متماثل قوسیں ہیں



$$\overline{AC} \cong \overline{PR}$$

$$\widehat{AC} \cong \widehat{PR}$$

**مطلوب:**

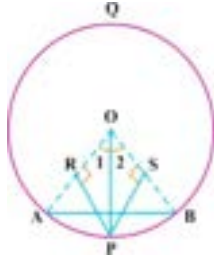
**عمل:** O کو A اور C سے ملائیں۔ O' کو P اور R سے ملائیں۔  
**ثبوت:**

بیانات	دلائل
$\Delta AOC \leftrightarrow \Delta P'O'R$ میں $\overline{OA} \cong \overline{O'P}$ $\overline{OC} \cong \overline{O'R}$ $\overline{AC} \cong \overline{mPR}$ $\Delta OAC \cong \Delta P'O'R$ $m\angle AOC = m\angle P'O'R$ (i)	متماثل دائروں کے رداں متماثل دائروں کے رداں معلوم ض-ص-ص $\cong$ ض-ض-ض متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے مساوات (i) سے
پس $\widehat{AC} \cong \widehat{PR}$	

Q.E.D

**مثال 1:**

ایک دائرے کے محیط پر واقع نقطہ P رداں OA اور OB سے ہم فاصلہ ہے۔ ثابت کریں کہ  $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$



**حل:** معلوم: ایک دائرے کا مرکز O ہے جس کا وتر AB ہے دائرے کے محیط پر واقع نقطہ P

رداں OA اور OB سے ہم فاصلہ ہے یعنی  $m\overline{PR} = m\overline{PS}$

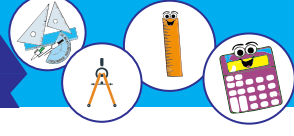
$$m\widehat{AP} = m\widehat{BP} \quad \text{مطلوب:}$$

**حل:** O کو P سے ملائیں  $m < 1$  اور  $m < 2$  نام دیں جیسا مشکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔

**ثبوت:**

بیانات	دلائل
$\Delta OPR \leftrightarrow \Delta OPS$ قائمہ الزاویہ مثلث ہیں $m\overline{OP} = m\overline{OP}$ $m\overline{PR} = m\overline{PS}$ $\therefore \Delta OPR \cong \Delta OPS$ $m\angle 1 = m\angle 2$ لہذا $\widehat{AP} \cong \widehat{BP}$ $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$ پس	مشترک و-ص $\cong$ و-ض متماثل مثلثوں کے متقابلہ زاویے مساوات (i) سے متماثل قوسوں کی رو سے
	(i)

Q.E.D



مسئلہ 27.3:

اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں کے) کے وتر مساوی ہو تو دائرہ کا مرکز (یا متعلقہ مراکز میں) میں مساوی زاویے بناتے ہیں  
 (i) ایک دائرے کے لیے (ii) دو دائروں کے لیے



(i) ایک دائرے کے لیے

معلوم: ایک دائرہ کا مرکز O ہے جس کے دو متماثل وتر ہیں یعنی  $\overline{AB} \cong \overline{PR}$   
 مطلوب:  $m\angle AOB = m\angle POR$

عمل: O کو A اور B سے ملائیں اور O کو P اور Q سے بھی ملائیں۔  
 ثبوت:

بیانات	دلائل
$\overline{AB} \cong \overline{PR}$ (i)	معلوم
$\overline{OB} \cong \overline{OR}$ (ii)	$\overline{OA}$ اور $\overline{OP}$ ایک ہی دائرے کے رداس ہیں
اور $\overline{OA} \cong \overline{OP}$ (iii)	ض-ض-ض
$\Delta AOB \cong \Delta POR$ $m\angle AOB = m\angle POB$	متماثل مثلثوں کے متقابلہ زاویے

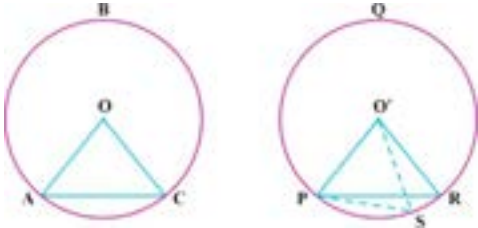
Q.E.D

(ii) دو متماثل دائروں کے لیے

معلوم: مرکز O اور O' کے دو متماثل دائرے ہیں لہذا جبکہ  $m\overline{AC} = m\overline{PR}$   
 جبکہ  $\overline{AC}$  اور  $\overline{PR}$  دائروں کے وتر ہیں

مطلوب:  $m\angle AOC = m\angle PO'R$

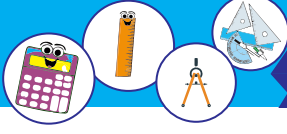
عمل: قوس PR پر ایک نقطہ S لیں اور S کو P اور O' سے ملائیں  
 جیسا کہ  $\angle AOC \cong \angle PO'S$



ثبوت:

بیانات	دلائل
فرض کریں $m\angle AOC = m\angle PO'R$ لیکن $m\angle AOC \cong m\angle PO'S$	عمل دو متماثل دائروں کے مساوی مرکزی زاویے جو قوسین سے بنتے ہیں مسئلہ (i) سے
$\therefore \widehat{AC} \cong \widehat{PS}$ (i)	معلوم
$\therefore m\overline{AC} = m\overline{PS}$ (ii)	(ii) اور (iii) کا استعمال کرتے ہوئے
$m\overline{AC} = m\overline{PR}$ (iii) لیکن	کیونکہ P مشترک نقطہ ہے
$\therefore m\overline{PR} = m\overline{PS}$	ہمارا مفروضہ غلط ہے
یہ جب ہی ممکن ہے اگر R اور S ایک ہی ہوں	
$\Rightarrow m\angle AOC = m\angle POR$	

Q.E.D



### نتیجہ صریح 1:

اگر متماثل دائروں یا ایک ہی دائرے میں اگر مرکزی زاویے مساوی ہیں تو متقابلہ قاطعات مساوی ہیں۔

### نتیجہ صریح 2:

متماثل دائروں یا ایک ہی دائرے میں۔ غیر مساوی مرکزی زاویوں کے قوسین کے وتر غیر مساوی ہیں۔

### مثال 1:

ثابت کریں کہ ایک دائرے میں مرکزی زاویے کا اندرونی نصف متقابلہ قوس کو نصف کرتا ہے۔

### معلوم:

ایک دائرے کا مرکز O ہے۔ مرکزی زاویے AOB کا اندرونی نصف OP ہے۔

$$\angle 1 \cong \angle 2 \text{ یعنی}$$

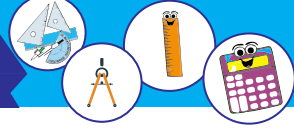
$$\widehat{AP} \cong \widehat{PB} \text{ مطلوب:}$$

عمل:  $\widehat{AP}$  اور  $\widehat{PB}$  کھینچیں تو  $\angle 1$  اور  $\angle 2$  بالترتیب  $\widehat{AP}$  اور  $\widehat{PB}$  کے متقابلہ زاویے ہیں۔

### ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta OAP \leftrightarrow \Delta OBP$ میں $m\widehat{OA} = m\widehat{OB}$ $m\angle 1 = m\angle 2$ $m\widehat{OP} = m\widehat{OP}$ اور $\therefore \Delta OAP \cong \Delta OBP$ $\widehat{AP} \cong \widehat{PB}$ پس $\Rightarrow \widehat{AP} \cong \widehat{BP}$	<p>ایک ہی دائرے کے رداس</p> <p>معلوم</p> <p>مشترک</p> <p>ض-ز-ص موضوعہ</p> <p>متماثل مثلثوں کے متقابلہ اضلاع</p> <p>دائرے میں مساوی وتروں کے متقابلہ قوسین</p>

Q.E.D

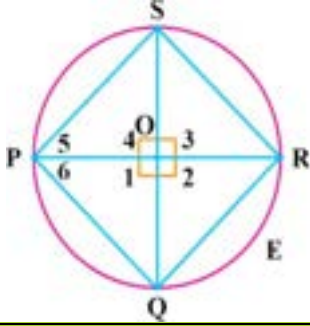


**مثال 2:** ثابت کریں کہ ایک دائرے میں دو قطر ایک دوسرے پر عمود ہیں تو ان کے سروں کو ملانے والے خطوط مربع بناتے ہیں۔

**معلوم:**  $\overline{PR}$  اور  $\overline{QS}$  ایک دائرے کے دو عمودی قطر ہیں جس کا مرکز O ہے۔  
لہذا PQRS ایک چوکور ہے۔  $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5$  اور  $\angle 6$  کو نام دیں  
جیسا کہ شکل میں دکھایا ہے۔

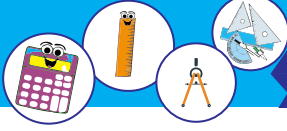
**مطلوب:** PQRS ایک مربع ہے

**ثبوت:**

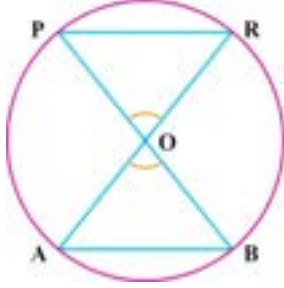


بیانات	دلائل
$\overline{PR}$ اور $\overline{QS}$ ایک دائری دو عمودی قطر ہیں جس کا مرکز O ہے	معلوم
$m\angle 1 = m\angle 2 = m\angle 3 = m\angle 4 = 90^\circ$	قطر ایک دوسرے پر عمود ہیں
$m\overline{PQ} = m\overline{QR} = m\overline{RS} = m\overline{SP}$ (i)	ایک دائرے میں مساوی مرکزی زاویوں کے مخالف قوسین
$m\overline{PQ} = m\overline{QR} = m\overline{RS} = m\overline{SP}$ (ii)	مساوی قوسین کے متقابلہ وتر
قائمہ الزاویہ مثلث ہیں $\Delta POS$	$\overline{OS}$ اور $\overline{PO}$ دائرے کے رداس ہیں
$m\overline{PO} = m\overline{OS}$ (iii)	(iii) سے
$\Delta POS$ قائمہ الساتین مثلث ہے	$\Delta POS$ ایک قائمہ الساتین مثلث ہے
$m\angle 5 = 45^\circ$ (iv)	اوپر دیئے گئے عمل کے مطابق
اس ہی طرح	
$\Delta POQ$ قائمہ الساتین مثلث ہے	زاویوں کے جمع کا موضوع
$m\angle 6 = 45^\circ$ (v)	(iv) اور (v) سے
فرید	
$m\angle P = m\angle 5 + m\angle 6$	
$m\angle P = 45^\circ + 45^\circ$	
$m\angle P = 90^\circ$ (vi)	یا
اس ہی طرح	
$m\angle Q = m\angle R = m\angle S = 90^\circ$ (vii)	اوپر دینے کے عمل کے مطابق
PQRS ایک مربع	(ii), (vi) اور (viii) سے

Q.E.D



مسئلہ 27.4: اگر ایک دائرے کے یا (متماثل دائروں) کے دو وتر کے مرکز (متعلقہ مراکز) پر مساوی مقدار کے زاویے بنائیں تو وتر مقدار میں مساوی ہوتے ہیں۔



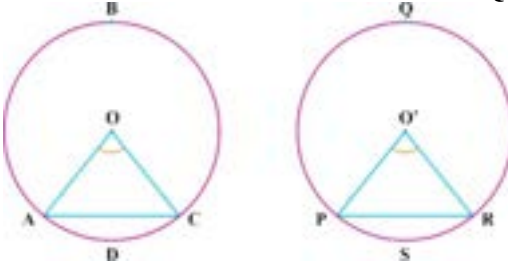
(a) ایک دائرے کے لیے  
 معلوم: ایک دائرے کا مرکز O ہے۔  $\overline{AB}$  اور  $\overline{PR}$  دائرے کے وتر ہیں دونوں قوسوں  
 $\angle POR \cong \angle AOB$  اور

مطلوب:  $m\overline{AB} \cong m\overline{PR}$

عمل: O کو P اور R سے ملائیں اور A اور B سے بھی ملائیں  
 ثبوت:

بیانات	دلائل
(i) $\overline{OR} \cong \overline{OB}$	ایک ہی دائرے کے رداس
(ii) $\overline{OP} \cong \overline{OA}$	ایک ہی دائرے کے رداس
(iii) $\angle POR \cong \angle AOB$	معلوم
اور $\Delta PQR \cong \Delta AOB$	ض-ز-ض $\cong$ ض-ز-ض (موضوعہ)
$\overline{AB} \cong \overline{PR}$	متماثل مثلثوں کے متقابلہ اضلاع

Q.E.D



(b) دو متماثل مثلثوں کے لیے

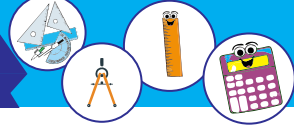
دو متماثل دائرے جن کے مرکز O اور O' ہیں اور  $\overline{AC}$  اور  $\overline{PR}$  ان کے دو وتر ہیں۔ مراکز میں مساوی زاویے بناتے ہیں  
 یعنی  $\angle AOC \cong \angle PO'R$

مطلوب:  $m\overline{AC} = m\overline{PR}$

ثبوت:

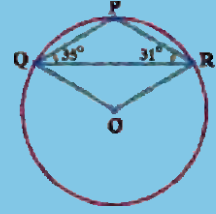
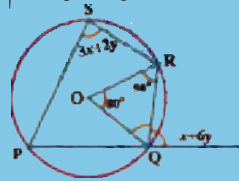
بیانات	دلائل
میں $\Delta OAC \leftrightarrow \Delta O'PR$	متماثل دائروں کے رداس
$\overline{OA} \cong \overline{O'P}$	معلوم
$\angle AOC \cong \angle PO'R$	متماثل دائروں کے رداس
$\overline{OC} \cong \overline{O'R}$	ض-ز-ض موضوعہ
$\therefore \Delta OAC \cong \Delta O'PR$	متماثل مثلثوں کے متقابلہ اضلاع
$m\overline{AC} = m\overline{PR}$	پس

Q.E.D

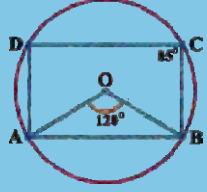


### مشق 27.1

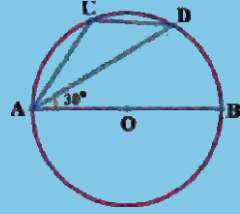
1. ایک دائرے میں ثابت کریں کہ وہ متوازی اور مساوی وتروں کے درمیان قوسین برابر ہیں۔
2. ثابت کریں کہ مساوی دائروں میں مساوی مرکزی زاویے کے مساوی قوسین ہوتے ہیں۔
3. مندرجہ ذیل شکل میں O دائرے کا مرکز ہے۔ x اور y کی قسمیں معلوم کریں۔



4. مندرجہ ذیل شکل میں  $m\angle PQR = 35^\circ$  اور  $m\angle PRQ = 31^\circ$ ۔  $m\angle OQR$  اور  $m\angle QPR$  معلوم کریں۔



5. مندرجہ ذیل شکل میں O دائرے کا مرکز ہے۔ جبکہ  $m\angle AOB = 120^\circ$  اور  $m\angle BCD = 85^\circ$  معلوم کریں  $m\angle OAD$ ۔



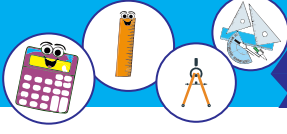
6. مندرجہ ذیل شکل میں  $\overline{AB}$  دائرے کا قطر ہے جبکہ  $m\angle DAB = 30^\circ$ ۔  $m\angle ACD$  معلوم کریں۔

### اعادہ مشق 27

#### 1. کثیر الانتخابی سوالات درست جواب پر کا نشان لگائیں

- i. اگر دائرے کا وتر مرکز ہیں  $60^\circ$  کا زاویہ بناتا ہے۔ تو وتر اور راسی قاطع \_\_\_\_\_ ہوتے ہیں۔  
 (a) متوازی (b) عمودی (c) متماثل (d) غیر متماثل
- ii. ایک قوس مرکز ہیں  $45^\circ$  کا زاویہ بناتی ہے تو متقابلہ قوس مرکز ہیں \_\_\_\_\_ کا زاویہ بنائے گی۔  
 (a)  $15^\circ$  (b)  $30^\circ$  (c)  $45^\circ$  (d)  $60^\circ$
- iii. ایک دائرے کا وتر دو متماثل \_\_\_\_\_ مرکزی زاویے بناتے ہیں۔  
 (a) عمود (b) غیر متماثل (c) متماثل (d) ان میں سے کوئی نہیں





- iv. ایک دائرے کے متماثل مرکزی زاویوں کے مخالف قوسین ہمیشہ \_\_\_\_\_ ہوتے ہیں۔  
 (a) متوازی (b) متماثل (c) عمود (d) ان میں سے کوئی نہیں
- v. 6 سٹی میٹر لمبا وتر  $60^\circ$  کا زاویہ بناتا ہے تو اس دائرے کا رداسی قطعہ \_\_\_\_\_ ہے۔  
 (a) 4cm (b) 6cm (c) 5cm (d) 8cm
- vi. ایک دائرے کا وتر  $180^\circ$  کا مرکز بناتا ہے تو اس کی لمبائی ہمیشہ \_\_\_\_\_ ہو۔  
 (a) رداسی قطعہ کے برابر (b) رداسی قطعہ سے کم (c) رداسی قطعہ سے دوگنا (d) رداسی قطعہ سے نصف
- vii. ایک دائرے کے وتر اور رداسی قطعہ کی لمبائیاں متماثل ہیں تو وتر کے ذریعے بنا ہوا مرکزی زاویہ \_\_\_\_\_ کا ہو گا  
 (a)  $60^\circ$  (b)  $75^\circ$  (c)  $90^\circ$  (d)  $45^\circ$
- viii. ایک دائرے کے دو متماثل قوسیں میں سے اگر ایک قوس  $30^\circ$  کا مرکزی زاویہ بناتی ہے تو دوسری قوس \_\_\_\_\_ کا مرکزی زاویہ بنائے گی۔  
 (a)  $60^\circ$  (b)  $90^\circ$  (c)  $75^\circ$  (d)  $30^\circ$
- ix. دائرے کا نصف محیط اور قطر دونوں کا مرکزی زاویہ \_\_\_\_\_ کا بناتے ہیں  
 (a) دو (b) تین (c) چار (d) یہ سب

### خلاصہ

- ◀ متماثل دائروں کے رداس مساوی ہوتے ہیں۔
- ◀ مساوی وتر مرکز میں مساوی بناتے ہیں۔
- ◀ محیط کے کسی بھی دو نقاط کو ملانے والی خط مستقیم دائرہ کا وتر کہلاتا ہے۔
- ◀ دائرے کا وہ حصہ جو ایک قوس اور ایک وتر سے جکڑا ہوا ہو تو اسے دائرے کے حصے کے طور پر جانا جاتا ہے
- ◀ دائرے میں ایک حرکت پذیری کے ذریعے معلوم ہونے والی حد کو اس کا محیط کہا جاتا ہے۔
- ◀ دائرے کے محیط کا صلہ دائرے کا قوس کہلاتا ہے۔
- ◀ دائرے کا مرکز سے کھینچا جانے والا خط مستقیم جو وتر کی تنصیف کرے وتر پر عمود ہوتا ہے۔
- ◀ دائرے کے مرکز سے وتر پر عمود کھینچا جائے تو وہ وتر کی تنصیف کرتا ہے۔
- ◀ اگر ایک دائرے (یا متماثل دائروں) کی دو قوسیں متماثل ہیں تو ان کی متقابلہ وتر مساوی ہوتے ہیں۔
- ◀ اگر ایک دائرے (یا متماثل دائروں) کے دو وتر مساوی ہیں تو ان متقابلہ قوسیں (صغیرہ، کبیرہ یا نصف دائری) متماثل ہوتے ہیں۔
- ◀ ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کے مساوی وتر مرکز پر مساوی زاویے بناتے ہیں۔
- ◀ اگر ایک دائرے (یا متماثل دائروں) دو وتر مرکز (متقابلہ مرکز) پر مساوی بناتے ہیں تو وتر مساوی ہوتے ہیں۔