17.1 سیٹوں پر عوامل (Operations on Sets):

17.1(i) N, W, Z, E, O, P, Q, Q' اور ℝ سے ظاہر کیے جانے والے سیٹوں کو دہرانا

در حقیقت سیٹ ریاضی کا بنیادی تصور ہے جو کہ کہیں ریاضیاتی خیالات کا تجزیہ کرنے اور تشکیل دینے میں مددگار ہوتا ہے۔ سیٹ کو ہم پچھلی جماعتوں میں پہلے ہی تفصیل سے بحث کر چکے ہیں۔

آئیں چند اہم سیٹ دہراتے ہیں

قدرتی اعداد کا سیٹ $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

مکمل اعداد کا سیٹ $\mathbf{W} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

صحیح اعداد کا سیٹ $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$

جفت اعداد کا سیٹ $\mathbf{E} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$

طاق اعداد کا سیٹ $\mathbf{O} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\}$

مفرد اعداد کا سیٹ $\mathbf{P} = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$

ناطق اعداد کا سیٹ
$$\mathbf{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q} \text{ where } p, q \in Z \wedge q \neq 0\right\}$$

غیر ناطق اعداد کا سیٹ
$$\mathbf{Q}' = \left\{x \mid x \neq \frac{p}{q} \text{ where } p, q \in Z \wedge q \neq 0\right\}$$

حقیقی اعداد کا سیٹ
$$\mathbf{R} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q} \vee x \neq \frac{p}{q} \text{ where } p, q \in Z \wedge q \neq 0\right\}$$

یعنی $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}'$

نوٹ: اوپر دیے گئے سیٹوں کو ہم N, W, Z, E, O, P, Q, Q' اور R لکھ سکتے ہیں۔

- $\mathbf{R}^{+}$ اور $\mathbf{R}^{-}$ بالترتیب مثبت اور منفی حقیقی اعداد کے سیٹ کو ظاہر کرتے ہیں
- ناطق، غیر ناطق اور حقیقی اعداد کے سیٹ کو اندراجی شکل میں نہیں لکھا جاسکتا ہے۔

17.1 (ii) سیٹوں کی اقسام اور سیٹوں کو ظاہر کرنا (Types of sets and representation of sets):

سب سے پہلے ہم سیٹ کو ظاہر کرنے پر بحث کرینگے۔ سیٹ کو ظاہر کرنے کے تین طریقوں یا اشکال سے ہم پہلے ہی واقف ہیں جو کہ ہم پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں وہ ہیں

1- بیانیہ شکل 2- اندراجی شکل 3- ترقیم سیٹ ساز شکل

بیانیہ شکل میں سیٹ کے ارکان (ممبران) کو عام زبان میں مشترکہ خصوصیات سے واضح کیا جاتا ہے۔

مثلاً 5 اور 10 کے درمیان قدرتی اعداد کا سیٹ = A

اندراجی شکل میں سیٹ کے ارکان (ممبران) کو بریسز (Burses) میں ظاہر کرتے ہیں اوپر دیئے گئے سیٹ کو اندراجی شکل میں یوں لکھتے ہیں $A = \{6, 7, 8, 9\}$

جب کہ ترقیم سیٹ ساز شکل میں ارکان (ممبران) کی مشترک خصوصیات کو علامات کی مدد سے ظاہر کرتے ہیں۔

دیے گئے سیٹ A ترقیم سیٹ ساز شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے $A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge 5 < x < 10\}$

مساوی سیٹ (Equal Sets):

دو ایسے سیٹ A اور B جن کے ارکان (ممبران) کی تعداد یکساں ایک جیسے ہوں۔

علامتی طور پر یوں لکھتے ہیں : $A=B$

پس $A=B$ صرف اور صرف $A\subseteq B$ اور $B\subseteq A$

اور $A=B$ صرف اور صرف $A\supseteq B$ اور $B\supseteq A$

مثلاً: فرض کریں $A=\{1,2,3,6\}$ اور $B=\{x \mid x\in N\wedge x\leq 6\}$ اور $C=$ 6 کے تقسیم کنندہ کا سیٹ

یہاں $A=C$ لیکن $A\neq B$

نوٹ: سیٹ A کے ارکان (ممبران) کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ O(A) یا n(A) یا |A| لکھتے ہیں۔

مترادف سیٹ (Equivalent Sets):

دو سیٹ A اور B مترادف سیٹ کہلاتے ہیں اگر ان کے ارکان (ممبران) کی تعداد برابر ہو۔

علامتی طور پر ہم یوں لکھتے ہیں: $A\sim B$ یعنی $A\sim B$ اس صورت میں ہی $O(A)=O(B)$

اسی طرح اگر $A\sim B$ یعنی اگر ان کے ارکان کے درمیان (1-1) مطابقت قائم کی جاسکتی ہے۔

مثلاً: فرض کریں $A=\{x \mid x\in \mathbf{R}\wedge x^2=64\}$ اور $B=$ 5 سے چھوٹے مفرد اعداد کے سیٹ

یہاں $A\sim B$ کیونکہ $O(A)=O(B)=2$

واجب تحتی سیٹ (Proper Subset):

فرض کریں سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ تو سیٹ A سیٹ B کا واجب تحتی سیٹ کہلائے گا۔

اگر $A\neq B$ علامتی طور پر ہم یوں لکھ سکتے ہیں $A\subset B$

مثلاً: اگر $A=\{2,4,6\}$ اور $B=\{2,4,6,8\}$

تو $A\subset B$ کیونکہ A ماتحت سیٹ ہے B کا اور $A\neq B$

غیر واجب تحتی سیٹ (Improper Subset):

فرض کریں سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے تو سیٹ A سیٹ B کا غیر واجب تحتی سیٹ کہلائے گا اگر $A=B$

مثلاً: اگر $A=\{a,b,c\}$ اور انگریزی حروف تہجی کے پہلے تین حروف $=B$ تو سیٹ A سیٹ B غیر واجب تحتی سیٹ ہے

یعنی $A=B$

قوت سیٹ (Power Subset):

کسی سیٹ A کے تمام تحتی سیٹوں کا سیٹ، سیٹ A قوت سیٹ کہلاتا ہے اسے $P(A)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً: اگر $A=\{x,y,z\}$ تو $P(A)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{y,z\},\{x,z\},\{x,y,z\}\}$

نوٹ: خالی سیٹ کا قوت سیٹ خالی سیٹ ہوتا ہے۔

اکائی سیٹ (Singleton or Unit):

ایسا سیٹ جس میں صرف ایک رکن (ممبر) ہو وہ اکائی سیٹ کہلاتا ہے

مثلاً: $A=\{x \mid x\in W\wedge x<1\}$ اکائی سیٹ ہے

کائناتی سیٹ (Universal Set):

زیر غور مسئلے سے تعلق رکھنے والے تمام سیٹ کا فوقی سیٹ کائناتی سیٹ کہلاتا ہے اور اُسے X یا U سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً: اگر $A=\{1,2,3,4\}$ اور $B=\{2,4,6\}$ پھر $U=\{1,2,3,4,5,6\}$

نوٹ: مزید سیٹ کی اقسام 17.1 (iv) میں زیر بحث لائی جائیں گی

مفت تقسیم کے لیے

مثال 1: سیٹ $A=\{6,8,10,12\}$ کو بیانیہ اور ترقیم سیٹ ساز شکل میں لکھیں۔

حل:

بیانیہ شکل: 5 اور 13 کے درمیان جفت اعداد کا سیٹ = A

ترقیم سیٹ ساز شکل $A=\{x \mid x\in \mathbb{E} \wedge 5<x<13\}$

مثال 2: سیٹ $B=\{y \mid y\in \mathbf{P} \wedge y<10\}$ کو اندراجی اور بیانیہ شکل میں لکھیں۔

حل:

اندراجی شکل $B=\{2,3,5,7\}$

بیانیہ شکل پہلے 4 مفرد اعداد کا سیٹ = B

اب ہم سیٹ کی اقسام بیان کریں گے

خالی سیٹ (Empty set or Null set):

ایسا سیٹ جس میں کوئی رکن (ممبر) نہیں ہوتا ہے وہ خالی سیٹ کہلاتا ہے۔اس کو $\varnothing$ یا $\{\ \}$ سے ظاہر کرتے ہیں

مثلاً:

(i) 5 اور 6 کے درمیان جفت اعداد کا سیٹ = A

(ii) $B=\{x \mid x\in \mathbb{N} \wedge x<1\}$

متناہی سیٹ (Finite Set):

ایسا سیٹ جس کے ارکان (ممبران) کی تعداد محدود ہو وہ متنائی سیٹ کہلاتا ہے

مثلاً:

(i) $A=\{10,12,14,...,50\}$

(ii) دنیا کے تمام ممالک کا سیٹ = B

یاد رہے خالی سیٹ کو متنائی سیٹ بھی کہا جاسکتا ہے۔

لامتنائی سیٹ (Infinite Set):

ایسا سیٹ جن کے ارکان (ممبران) کی تعداد لامحدود ہو وہ لامتنائی سیٹ کہلاتا ہے

مثلاً:

(i) $P=\{10,20,30,...\}$

(ii) $Q=\{x \mid x\in \mathbf{Q} \wedge 1\le x\le 2\}$

تحتی سیٹ (Subset):

اگر سیٹ A کا ہر رکن (ممبر) سیٹ B کا رکن (ممبر) بھی ہو تو سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ کہلاتا ہے۔ علامتی طور پر ہم یوں لکھتے ہیں۔ $A\subseteq B$

مثلاً: اگر $A=\{2,3,5,7\}$ ، $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ اور $C=\{6,7,8,9\}$

تو $A\subseteq B$ لیکن $A\not\subseteq C$ (A تحتی سیٹ نہیں ہے C کا)

نوٹ:

(i) ہر سیٹ خود اپنا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

(ii) خالی سیٹ ہر سیٹ کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

(iii) ہر ممبر خالی سیٹ کے کم از کم دو تحتی سیٹ ہوتے ہیں۔

(iv) ایسا سیٹ جس کے ارکان (ممبران) کی تعداد n ہوتی ہے۔اُس کے تمام تحتی سیٹ کی تعداد 2^n ہے۔

فوقی سیٹ (Superset):

اگر سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے تو سیٹ B سیٹ A کا فوقی سیٹ کہلاتا ہے۔

علامتی طور پر ہم یوں لکھتے ہیں $B\supseteq A$

مثلاً: اگر $X=\{a,e,i,o,u\}$ اور $Y=\{a,b,c,...,z\}$ تو $Y\supseteq X$

مشق 17.1

.1 مندرجہ ذیل سیٹوں کی اندراجی شکل میں لکھیں

(i) A = ‎-3 اور 3 کے درمیان تمام صحیح اعداد کا سیٹ

(ii) B = 11 سے چھوٹے مرکب اعداد کا سیٹ

(iii) $C=\{x \mid x\in \mathbb{P} \wedge 5<x\le 13\}$

(iv) $D=\{y \mid y\in \mathbb{O} \wedge 7<y<17\}$

(v) $E=\{z \mid z\in \mathbb{R} \wedge z^2=121\}$

(vi) $F=\{p \mid p\in \mathbb{Q} \wedge p^2=-1\}$

.2 مندرجہ ذیل سیٹوں کو ترقیم سیٹ ساز شکل میں لکھیں

(i) A = 5 اور 6 کے درمیان تمام اطاق اعداد کا سیٹ

(ii) $B=\{1,2,3,4,6,12\}$

(iii) $C=\{0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm40\}$

(iv) $D=\{-4,-2,0,2,4\}$

(v) $E=\{1,4,9,16,25\}$

(vi) $F=\{-1,-3,-5,-7,\ldots\}$

.3 خالی سیٹ کوئی پانچ مثالیں لکھیں

.4 ذیل میں کون سے متناہی سیٹ اور لا متناہی سیٹ ہیں

(i) ایشائی ممالک کا سیٹ

(ii) دنیا کی تمام میڈیکل یونیورسٹیوں کا سیٹ

(iii) 6 اور 9 کے درمیان حقیقی اعداد کا سیٹ

(iv) تمام جفت فرد اعداد کا سیٹ

(v) 5 سے چھوٹے طاق اعداد کا سیٹ

.5 ذیل میں دیے گئے ہر سیٹ کا ایک مترادف سیٹ، ایک غیر واجب تحتی سیٹ اور تین واجب تحتی سیٹ لکھیں۔

(i) $P=\{a,e,i,o,u\}$

(ii) $Q=\{x \mid x\in \mathbb{Z} \wedge -2\le x\le 2\}$

.6 اکائی سیٹ کی کوئی بھی دو مثالیں ترقیم سیٹ ساز شکل میں لکھیں

.7 ذیل میں دیے گئے سیٹوں کے قوت سیٹ لکھیں

(i) $A=\{5,10,15\}$

(ii) $B=\{x \mid x\in Z \wedge -1<x<4\}$

.8 ایسا سیٹ معلوم کریں جس

(i) کے دو واجب تحتی سیٹ ہوتے ہیں

(ii) کا صرف ایک واجب تحتی سیٹ ہوتا ہے

(iii) کا کوئی واجب تحتی سیٹ نہیں ہوتا ہے۔

17.1 (iii) سیٹ پر عوامل (Operations on sets):

- ➤ اتعال (یونین) (Union)
- ➤ تقاطع (Intersection)
- ➤ فرق (Difference)
- ➤ کمپلیمنٹ (Complement)

دو سیٹوں کا القال (یونین) (Union of two sets)

دو سیٹوں X اور Y کا القال $X\cup Y$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس میں وہ ارکان شامل ہوتے ہیں جو X سے Y سے یا دونوں سے تعلق رکھتے ہیں

یعنی $X\cup Y=\{x \mid x\in X \vee x\in Y\}$

مثلاً: اگر $X=\{1,3,5\}$ اور $Y=\{1,2,3,4\}$ تو $X\cup Y=\{1,2,3,4,5\}$

دو سیٹوں کا تقاطع (Intersection of two sets):

دو سیٹوں X اور Y کا تقاطع $X\cap Y$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس میں وہ ارکان شامل ہوتے ہیں جو X اور Y دونوں سے تعلق رکھتے ہیں

یعنی $X\cap Y=\{x \mid x\in X \wedge x\in Y\}$

مثلاً: اگر $X=\{2,4,6,8\}$ اور $Y=\{1,2,3,6\}$ تو $X\cap Y=\{2,6\}$

دو سیٹوں کا فرق (Difference of two sets):

کوئی دو سیٹ x اور y ہیں فرق x-y ایسا سیٹ ہے جس میں وہ ارکان ہوتے ہیں جو x سے تعلق رکھتے ہیں لیکن y سے تعلق نہیں رکھتے ہیں اس کو x/y سے بھی ظاہر کرتا ہے جیسے $Y-X=\{x \mid x\in X \vee x\in Y\}$ اسی ہی طرح فرق X–Y ایسا سیٹ ہے جس میں وہ ارکان ہوتے ہیں جو x سے تعلق رکھتے ہیں لیکر y سے تعلق نہیں رکھتے ہیں اس کو x/y سے بھی ظاہر کرتے ہیں

جیسے $Y-X=\{y \mid y\in Y \wedge y\notin X\}$ $\quad Y-X$

مثلاً:

اگر $X=\{4,6,8,9,10\}$ اور $Y=\{2,4,6,8\}$

تو $X-Y=\{9,10\}$ اور $Y-X=\{2\}$

سیٹ کا کمپلیمنٹ (Complement of a set)

اگر ایک سیٹ کا ئناتی سیٹ U کا تحتی سیٹ ہے تو A کا کمپلیمنٹ ایک ایسا سیٹ ہے تو U کے تمام ارکان پر مشتمل ہو گا جو A میں نہیں ہیں۔ یہ A' یا A^c سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

پس $A'=U-A$

یعنی $A'=\{x \mid x\in U \wedge x\notin A\}$

مثلاً:

اگر $U=\{1,2,3,\ldots,20\}$ اور $A=\{1,3,5,\ldots,19\}$ تو $A'=\{2,4,6,\ldots,20\}$

17.1 (iv) دو سیٹوں کا تشاکلی فرق (Symmetric difference of two sets)

دو سیٹوں A اور B کے تشاکلی فرق کو $A\Delta B$ سے ظاہر کرتے ہیں یہ A یا B کے وہ تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے جو دونوں سیٹوں میں مشترکہ نہیں ہوتے ہیں۔

$$A\Delta B=\{x \mid x\in A\cup B \wedge x\notin A\cap B\}$$

$$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

مثلاً: اگر $A=\{1,2,3,4,5\}$ اور $B=\{1,3,5,7\}$ تو $A\Delta B=\{2,4,7\}$

حصہ (ii) 17.1 کے تسلسل میں سیٹ کی مزید اقسام نیچے دی گئیں ہیں

ڈس جوائنٹ سیٹ(Disjoint Sets):

دو سیٹ A اور B ڈس جوائنٹ سیٹ کہلاتے ہیں اگر ان میں کوئی مشترک ارکان نہ ہو $A\cap B=\varnothing$

مثلاً: $A=\{1,3,5\}$ اور $B=\{2,4,6\}$ ڈس جوائنٹ سیٹ ہیں

اوورلیپنگ سیٹ(Over lapping Sets):

دو سیٹ A اور B اوورلیپنگ سیٹ کہلاتے ہیں اگر دونوں میں کم از کم ایک رکن مشترک ہو اس کے علاوہ ان میں کوئی دوسرے کا تحتی سیٹ نہیں ہوتا ہے۔ دو سیٹ A اور B اوورلیپنگ سیٹ ہیں

اگر $A\cap B\neq\varnothing$ اور $A\not\subseteq B$ یا $B\not\subseteq A$

مثلاً: سیٹ $A=\{1,2,3,4\}$ اور $B=\{2,4,6,8\}$ اوورلیپنگ سیٹ ہیں

ایگزوسٹیو سیٹ(Exhaustive Sets):

اگر دو سیٹ A اور B یونیورسل سیٹ U کے تحتی سیٹ ہیں تو A اور B ایگزوسٹیو سیٹ کہلاتے ہیں

اگر $A\cup B=U$

مثلاً: اگر $A=\{1,2,3,4\}$ ، $B=\{1,3,5\}$ اور $U=\{1,2,3,4,5\}$ تو A اور B ایگزوسٹیو سیٹ ہیں

کیونکہ $A\cup B=U$

سیل(Cells):

اگر سیٹ A اور B دو غیر خالی یونیورسل سیٹ U کے تحتی سیٹ ہیں تو A اور B سیل کہلاتے ہیں اگر وہ ڈس جوائنٹ بھی ہیں اور ایگزوسٹیو سیٹ بھی ہے

A اور B سیل کہلاتے ہیں اگر A اور B، U کے غیر خالی تحتی سیٹ ہیں اور $A\cap B=\varnothing$ اور $A\cup B=U$

مثلاً: اگر $A=\{1,3,5,7,9\}$ ، $B=\{2,4,6,8,10\}$ اور $U=\{1,2,3,...,10\}$ تو پھر A اور B سیل ہیں

سیٹ کے عوامل سے متعلق کچھ اہم قانون نیچے دیے گئے ہیں۔

آئی ڈینٹیٹی کا قانون (Identity Laws):

کسی سیٹ A کے لئے

(i) $A\cup\varnothing=A$ (ii) $A\cup U=U$ (iii) $A\cap U=A$ (iv) $A\cap\varnothing=\varnothing$

آئی ڈیمپوٹینٹ کا قانون (Idempotent Laws):

کسی سیٹ A کے لئے

(i) $A\cup A=A$ (ii) $A\cap A=A$

کمپلیمنٹ کے قانون (Laws of Complement):

کسی سیٹ A کے لئے

(i) $A\cup A'=U$ (ii) $A\cap A'=\varnothing$

(iii) $(A')'=A$

ڈی مورگن کے قانون (De Morgan's Laws):

کوئی دو سیٹ A اور B کے لیے

(i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (ii) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

مشق 17.2

1. مندرجہ ذیل میں سے کون سے سیٹ ڈس جوائنٹ، اوور لیپنگ، ایگزوسٹو اور سیل ہیں

(i) $\{1,2,3,5,7\}$ اور $\{4,6,8,9,10\}$

(ii) $\{1,2,3,6\}$ اور $\{1,2,4,8\}$

(iii) E اور O جب کہ $U=Z$

(iv) $A=\{0,2,4,...\}$ اور $B=N$ جب کہ $U=W$

(v) Q اور Q' جب کہ $U=\mathbf{R}$

2. اگر $\mathbf{A=\{1,2,3,4,5,6\}}$ اور $\mathbf{B=\{2,4,6,8,10\}}$ تو معلوم کریں:

(i) $A\cup B$ (ii) $B\cap A$ (iii) $A-B$
(iv) $B-A$ (v) $A\Delta B$

3. اگر $\mathbf{U=\{1,2,3,...,10\}}$، $\mathbf{A=\{1,2,3,4,5\}}$ اور $\mathbf{B=\{1,3,5,7,9\}}$ تو معلوم کریں:

(i) A' (ii) B' (iii) $A'\cup B'$ (iv) $A'\cap B'$
(v) $(A\cup B)'$ (vi) $(A\cap B)'$ (vii) $A'\Delta B'$ (viii) $(A\Delta B)'$
(ix) $A-B'$ (x) $A'-B$

4. اگر $\mathbf{U=\{x\,|\,x\in Z\wedge -4<x<6\}}$، $\mathbf{P=\{p\,|\,p\in E\wedge -4<p<6\}}$ اور $\mathbf{Q=\{q\,|\,q\in P\wedge q<6\}}$ تو ثابت کریں کہ

(i) $P-Q=P\cap Q'$ (ii) $Q-P=Q\cap P'$
(iii) $(P\cup Q)'=P'\cap Q'$ (iv) $(P\cap Q)'=P'\cup Q'$

5. اگر $\mathbf{A=\{2n\,|\,n\in N\}}$، $\mathbf{B=\{3n\,|\,n\in N\}}$ اور $\mathbf{C=\{4n\,|\,n\in N\}}$ تو معلوم کریں:

(i) $A\cap B$ (ii) $A\cup C$ (iii) $B\cap C$

17.1.2(i) اتصال اور تقاطع کی خصوصیات (Properties of Union and Intersection):

دو یا تین سیٹوں پر اتصال اور تقاطع کی مندرجہ ذیل بنیادی خصوصیات کا رسمی ثبوت دیں

➤ اتصال (یونین) کی خاصیت مبادلہ (Commutative Property of Union)

ہم جانتے ہیں کہ کسی دو سیٹ A اور B کے لیے $\boxed{A\cup B=B\cup A}$

یہ خاصیت اتصال کی خاصیت مبادلہ کہلاتی ہے

ثبوت:

$L.H.S=A\cup B$

$=\{x\,|\,x\in A \text{ or } x\in B\}$ (اتصال کی تعریف کے مطابق)

$=\{x\,|\,x\in B \text{ or } x\in A\}$ $\because$ (سیٹ میں ارکان کی ترتیب مخصوص نہیں ہوتی)

$=B\cup A$ (اتصال کی تعریف کے مطابق)

$=R.H.S$

$\because$ $L.H.S=R.H.S$

$\therefore$ $A\cup B=B\cup A$

پس ثابت ہوا

تقاطع کی خاصیت مبادلہ (Commutative Property of Intersection):

ہم جانتے ہیں کہ کسی دو سیٹ A اور B کے لیے $\boxed{A\cap B=B\cap A}$

یہ خاصیت اتعال کی خاصیت مبادلہ کہلاتی ہے

ثبوت:

$\text{L.H.S} = A\cap B$

$=\{x \mid x\in A \text{ and } x\in B\}$ (تقاطع کی تعریف کی روسے)

$=\{x \mid x\in B \text{ and } x\in A\}$ $\because$ (سیٹ میں ارکان کی ترتیب مخصوص نہیں ہوتی)

$= B\cap A$ (تقاطع کی تعریف کی روسے)

$= \text{R.H.S}$

$\because \quad \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

$\therefore \quad A\cap B = B\cap A$

پس ثابت ہوا

اتعال کی خاصیت تلازم (Associative property of union):

ہم پہلے ہی اتعال کی خاصیت تلازم سے واقف ہیں جیسا کہ نیچے دی گئی ہے

کسی بھی تین سیٹ A، B اور C کے لیے $\boxed{A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C}$

ثبوت:

$\text{L.H.S} = A\cup(B\cup C)$

$=\{x \mid x\in A \ \text{یا}\ x\in B\cup C\}$ (اتعال کی تعریف کی روسے)

$=\{x \mid x\in A \ \text{یا}\ x\in B \ \text{یا}\ x\in C\}$

$=\{x \mid x\in A\cup B \ \text{یا}\ x\in C\}$ (اتعال کی تعریف کی روسے)

$=(A\cup B)\cup C$ (اتعال کی تعریف کی روسے)

$= \text{R.H.S}$

$\because \quad \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

$\therefore \quad A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

پس ثابت ہوا

تقاطع کی خاصیت تلازم (Associative property of intersection):

ہم پہلے ہی تقاطع کی خاصیت تلازم سے واقف ہیں جیسا کہ نیچے دی گئی ہے کسی بھی تین سیٹ A، B اور C کے لیے

$\boxed{A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C}$

ثبوت:

$\text{L.H.S} = A\cap(B\cap C)$

$=\{x \mid x\in A \ \text{اور}\ x\in B\cap C\}$ (تقاطع کی تعریف کی روسے)

$=\{x \mid x\in A \ \text{اور}\ x\in B \ \text{اور}\ x\in C\}$

$=\{x \mid x\in A\cap B \ \text{اور}\ x\in C\}$ (تقاطع کی تعریف کی روسے)

$=(A\cap B)\cap C$ (تقاطع کی تعریف کی روسے)

$= \text{R.H.S}$

$\because \quad \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

$\therefore \quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پس ثابت ہوا

اتعال کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع (Distributive property of union over intersection):

ہم پہلے ہیں اتقال کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں جیساکہ نیچے دی گئی ہے

کسی تین سیٹ A، B اور C کے لیے $\boxed{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$

ثبوت:

$L.H.S=A\cup(B\cap C)$

$=\{x \mid x\in A$ یا $x\in B\cap C\}$ (اتعال کی تعریف کی رو سے)

$=\{x \mid x\in A$ یا $(x\in B$ ء $x\in C)\}$ (تقاطع کی تعریف کی رو سے)

$=\{x \mid (x\in A$ یا $x\in B)$ ء $(x\in A$ یا $x\in C)\}$

$=\{x \mid x\in A\cup B$ ء $x\in A\cup C\}$ (اتعال کی تعریف کی رو سے)

$=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (تقاطع کی تعریف کی رو سے)

$=R.H.S$

$\because\quad L.H.S=R.H.S$

$\therefore\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

پس ثابت ہوا

تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتعال (Distributive property of intersection over union):

ہم پہلے ہی تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتعال واقف ہیں جیساکہ نیچے دی گئی ہے

کسی بھی تین سیٹ A ، B اور C کے لیے $\boxed{A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

ثبوت:

$L.H.S=A\cap(B\cup C)$

$=\{x \mid x\in A$ ء $x\in B\cup C\}$ (تقاطع کی تعریف کی رو سے)

$=\{x \mid x\in A$ ء $(x\in B$ یا $x\in C)\}$ (اتعال کی تعریف کی رو سے)

$=\{x \mid (x\in A$ ء $x\in B)$ یا $(x\in A$ ء $x\in C)\}$

$=\{x \mid x\in A\cap B$ یا $x\in A\cap C\}$ (تقاطع کی تعریف کی رو سے)

$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (اتعال کی تعریف کی رو سے)

$=R.H.S$

$\because\quad L.H.S=R.H.S$

$\therefore\quad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

پس ثابت ہوا

ڈی مورگن کے قوانین (De Morgan's Laws):

ہم پہلے حصہ 17.1 (iv) میں پڑھ چکے ہیں کہ ڈی مورگن کے قوانین دو ہیں
جو کہ نیچے دیے گئے ہیں دو سیٹوں A اور B کے لیے

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ثبوت (i):

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$\text{L.H.S} = (A \cup B)'$ (کمپلیمینٹ کی تعریف کی رو سے)

$= \{x \mid x \in U$ ءِ $x \notin A \cup B\}$

$= \{x \mid x \in U$ ءِ $(x \notin A$ ءِ $x \notin B)\}$

$= \{x \mid (x \in U$ ءِ $x \notin A)$ ءِ $(x \in U$ ءِ $x \notin B)\}$

$= \{x \mid x \in A'$ ءِ $x \in B'\}$ (کمپلیمینٹ کی تعریف کی رو سے)

$= A' \cap B'$ (تقاطع کی تعریف کی روسے)

$= \text{R.H.S}$

$\because$ $\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

$\therefore$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

پس ثابت ہوا

ثبوت (ii):

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$\text{L.H.S} = (A \cap B)'$

$= \{x \mid x \in U$ ءِ $x \notin A \cap B\}$ (کمپلیمینٹ کی تعریف کی رو سے)

$= \{x \mid x \in U$ ءِ $(x \notin A$ یا $x \notin B)\}$

$= \{x \mid (x \in U$ ءِ $x \notin A)$ یا $(x \in U$ ءِ $x \notin B)\}$

$= \{x \mid x \in A'$ یا $x \in B'\}$ (کمپلیمینٹ کی تعریف کی رو سے)

$= A' \cup B'$ (تقاطع کی تعریف کی روسے)

$= \text{R.H.S}$

$\because$ $\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

$\therefore$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

پس ثابت ہوا

17.1.2(ii) دیے گئے بنیادی خاصیتوں کی تصدیق کریں (Verify the fundamental properties of given sets):

آئیں مندرجہ ذیل مثالوں کی مدد سے بنیادی خصوصیات کی تصدیق کریں

مثال نمبر 1: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ اور $B = \{4, 6, 8, 9, 10, 12\}$ اتعال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ کی تصدیق کریں

(الف) اتصال کی خاصیت مبادلہ

یعنی $A \cup B = B \cup A$

$$L.H.S = A \cup B$$
$$= \{1,2,3,4,6,12\} \cup \{4,6,8,9,10,12\}$$
$$= \{1,2,3,4,6,8,9,10,12\}$$

$$R.H.S = B \cup A$$
$$= \{4,6,8,9,10,12\} \cup \{1,2,3,4,6,12\}$$
$$= \{1,2,3,4,6,8,9,10,12\}$$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cup B = B \cup A$

پس تصدیق ہوئی

(ب) تقاطع کی خاصیت مبادلہ

یعنی $A \cap B = B \cap A$

$$L.H.S = A \cap B$$
$$= \{1,2,3,4,6,12\} \cap \{4,6,8,9,10,12\}$$
$$= \{4,6,12\}$$

$$R.H.S = B \cap A$$
$$= \{4,6,8,9,10,12\} \cap \{1,2,3,4,6,12\}$$
$$= \{4,6,12\}$$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cap B = B \cap A$

پس تصدیق ہوئی

مثال نمبر 2:

اگر $A = \{1,2,5,10\}$، $B = \{2,3,5,7\}$ اور $C = \{1,3,5,7,9\}$ تو اتصال اور تقاطع کی خاصیت تلازم کی تصدیق کریں

پڑتال:

(الف) اتصال کی خاصیت تلازم

یعنی $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$$L.H.S = A \cup (B \cup C)$$
$$= \{1,2,5,10\} \cup [\{2,3,5,7\} \cup \{1,3,5,7,9\}]$$
$$= \{1,2,5,10\} \cup \{1,2,3,5,7,9\}$$
$$= \{1,2,3,5,7,9,10\}$$

$$R.H.S = (A \cup B) \cup C$$
$$= [\{1,2,5,10\} \cup \{2,3,5,7\}] \cup \{1,3,5,7,9\}$$
$$= \{1,2,3,5,7,10\} \cup \{1,3,5,7,9\}$$
$$= \{1,2,3,5,7,9,10\}$$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

پس تصدیق ہوئی

(ب) تقاطع کی خاصیت تلازم

یعنی $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$$L.H.S = A \cap (B \cap C)$$
$$= \{1,2,5,10\} \cap [\{2,3,5,7\} \cap \{1,3,5,7,9\}]$$
$$= \{1,2,5,10\} \cap \{3,5,7\}$$
$$= \{5\}$$

$$R.H.S = (A \cap B) \cap C$$
$$= [\{1,2,5,10\} \cap \{2,3,5,7\}] \cap \{1,3,5,7,9\}$$
$$= \{2,5\} \cap \{1,3,5,7,9\}$$
$$= \{5\}$$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

پس تصدیق ہوئی

مثال نمبر 3: اگر $A=\{1,2,3,...,10\}$ ، $B=\{2,4,6,8,10\}$ اور $C=\{3,6,9\}$ تو تصدیق کریں

(الف) اتصال کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع

(ب) تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتصال

پڑتال:

(الف) اتصال کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع

یعنی $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$$
\begin{aligned}
L.H.S &= A\cup(B\cap C)\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cup[\{2,4,6,8,10\}\cap\{3,6,9\}]\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cup\{6\}\\
&=\{1,2,3,...,10\}\\
R.H.S &= (A\cup B)\cap(A\cup C)\\
&=[\{1,2,3,...,10\}\cup\{2,4,6,8,10\}]\cap[\{1,2,3,...,10\}\cup\{3,6,9\}]\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cap\{1,2,3,...,10\}\\
&=\{1,2,3,...,10\}
\end{aligned}
$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

پس تصدیق ہوئی

(ب) تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتصال

یعنی $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$
\begin{aligned}
L.H.S &= A\cap(B\cup C)\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cap[\{2,4,6,8,10\}\cup\{3,6,9\}]\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cap\{2,3,4,6,8,9,10\}\\
&=\{2,3,4,6,8,9,10\}\\
R.H.S &= (A\cap B)\cup(A\cap C)\\
&=[\{1,2,3,...10\}\cap\{2,4,6,8,10\}]\cup[\{1,2,3,...,10\}\cap\{3,6,9\}]\\
&=\{2,4,6,8,10\}\cup\{3,6,9\}\\
&=\{2,3,4,6,8,9,10\}
\end{aligned}
$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

پس تصدیق ہوئی

مثال نمبر 4: اگر $U=\{1,2,3,\ldots,20\}$، $A=\{1,3,5,\ldots,19\}$ اور $B=\{2,4,6,\ldots,20\}$ تو ڈی مورگن کی تصدیق کریں

یعنی (الف) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (ب) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

پڑتال:

(الف) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= (A\cup B)' \\
&= U-(A\cup B) \\
&= \{1,2,3,\ldots,20\}-\left[\{1,3,5,\ldots,19\}\cup\{2,4,6\ldots,20\}\right] \\
&= \{1,2,3,\ldots,20\}-\{1,2,3,\ldots,20\} \\
&= \varnothing
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{R.H.S} &= A'\cap B' \\
&= (U-A)\cap(U-B) \\
&= \left[\{1,2,3,\ldots,20\}-\{1,3,5,\ldots,19\}\right]\cap\left[\{1,2,3,\ldots,20\}-\{2,4,6,\ldots,20\}\right] \\
&= \{2,4,6,\ldots,20\}\cap\{1,3,5,\ldots,19\} \\
&= \varnothing
\end{aligned}$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $(A\cup B)'=A'\cap B'$

پس تصدیق ہوئی

(ب) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= (A\cap B)' \\
&= U-(A\cap B) \\
&= \{1,2,3,\ldots,20\}-\left[\{1,3,5,\ldots,19\}\cap\{2,4,6\ldots,20\}\right] \\
&= \{1,2,3,\ldots,20\}-\{\ \} \\
&= \{1,2,3,\ldots,20\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{R.H.S} &= A'\cup B' \\
&= (U-A)\cup(U-B) \\
&= \left[\{1,2,3,\ldots,20\}-\{1,3,5,\ldots,19\}\right]\cup\left[\{1,2,3,\ldots,20\}-\{2,4,6,\ldots,20\}\right] \\
&= \{2,4,6,\ldots,20\}\cup\{1,3,5,\ldots,19\} \\
&= \{1,2,3,\ldots,20\}
\end{aligned}$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $(A\cap B)'=A'\cup B'$

پس تصدیق ہوئی

مشق 17.3

1. مندرجہ ذیل سیٹ کے لیے اتحاد اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ کی تصدیق کریں

(i) $A=\{a,b,c,d,e\}$ اور $B=\{a,e,i,o,u\}$

(ii) $P=\{x\,|\,x\in Z \wedge -3<x<3\}$ اور $Q=\{y\,|\,y\in E^{+} \wedge y\leq 4\}$

2. مندرجہ ذیل سیٹ کے لیے اتحاد اور تقاطع کی خاصیت تلازم کی تصدیق کریں

(i) $A=\{1,2,4,5,10,20\}$ ، $B=\{5,10,15,20\}$ اور $C=\{1,2,5,10\}$

(ii) $A=\mathbf{N}, B=\mathbf{P}$ اور $C=\mathbf{Z}$

3. تصدیق کریں

(الف) اتحاد کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع (ب) تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتحاد

(i) $A=\{1,2,3,...,10\}$ ، $B=\{2,3,5,7\}$ اور $C=\{1,3,5,7,9\}$

(ii) $A=\mathbf{N}, B=\mathbf{P}$ اور $C=\mathbf{W}$

4. ڈی مورگن کے قوانین کی تصدیق کریں اگر $\mathbf{U=\{1,2,3...,12\}}$ ، $\mathbf{A=\{1,2,3,4,6,12\}}$ اور $\mathbf{B=\{2,4,6,8\}}$

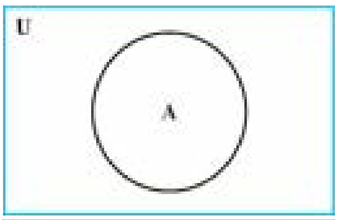
5. اگر A اور B ، U کے تحتی سیٹ ہیں تو مندرجہ ذیل کو خاصیتوں کی مدد سے ثابت کریں

(i) $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)$ (ii) $A\cup B=A\cup(A'\cap B)$

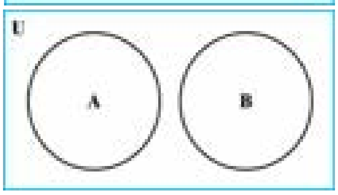
(iii) $B=(A\cap B)\cup(A'\cap B)$ (iv) $B=A\cup(A'\cap B)$, if $A\subseteq B$

17.1.3 وین ڈائی گرام (Venn Diagram):

ہم پہلے ہی پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں کہ سیٹ، ان کے روابط اور عوامل کو جیومٹریکلی بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ اس جیومٹریکلی ظاہر کرنے کو وین ڈائی گرام کہتے ہیں جو انگریز ریاضی دان جون وین (June Venn) کے نام رکھا گیا ہے جس نے اسے 1881ء میں متعارف کروایا تھا۔ وین ڈائی گرام میں کائناتی سیٹ U کو عموماً مستطیل سے ظاہر کیا جاتا ہے جب کہ دائرے اور بیضوی اشکال سیٹ کو ظاہر کرتی ہیں کچھ وین ڈائی گرام دہرائیں

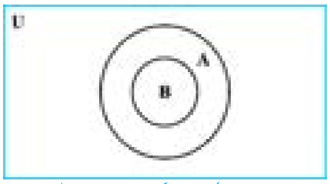


(i) وین ڈائی گرام ظاہر کر رہا ہے کائناتی سیٹ U میں سیٹ A کو

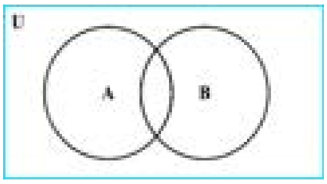


(ii) وین ڈائی گرام ظاہر کر رہا ہے دو ڈس جوائنٹ سیٹ A اور B کو

(iii) وین ڈائی گرام ظاہر کر رہا ہے دو اوور لیپنگ سیٹ A اور B کو



(iv) وین ڈائی گرام ظاہر کر رہا ہے A کے تحتی سیٹ B کو $B\subseteq A$



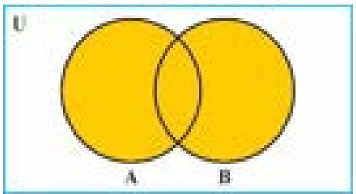
17.1.3(i) مندرجہ ذیل کو ظاہر کرنے کے لیے وین ڈائی گرام استعمال کریں (Use Venn Diagram to represent):

- دو سیٹوں کے اتصال اور تقاطع کو (Union and Intersection of sets):
- ایک سیٹ کے کمپلیمینٹ کو (Complement of a set):
- دو سیٹوں کے تشاکلی فرق کو (Symmetric difference of two sets):

- دو سیٹوں کے اتصال اور تقاطع کو (Union and Intersection of sets):

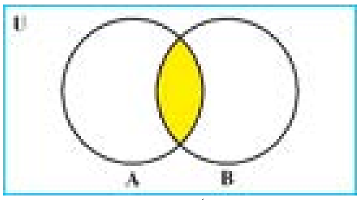
دو سیٹوں کے اتصال اور تقاطع وین ڈائی گرام ہیں، دو سیٹوں A اور B کا اتصال کو A اور B کا تمام علاقہ ظاہر کرتا ہے۔ شکل (i) سایہ دار یا رنگین علاقہ $A\cup B$ کو ظاہر کرتا ہے
جب کہ دو سیٹوں A اور B کا تقاطع کو A اور B کا مشترکہ علاقہ ظاہر کرتا ہے۔
شکل (ii) سایہ دار یا رنگین علاقہ $A\cap B$ کو ظاہر کرتا ہے۔

$A\cup B$



شکل (i)

$A\cap B$



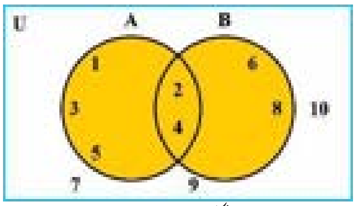
شکل (ii)

مثال نمبر 1: اگر $U=\{1,2,3,...,10\}$ ، $A=\{1,2,3,4,5\}$ اور $B=\{2,4,6,8\}$ تو $A\cup B$ اور $A\cap B$ کو بذریعہ وین ڈائی گرام ظاہر کریں

حل:

شکل (الف) میں رنگین یا سایہ دار علاقہ $A\cup B$ کو ظاہر کرتا ہے
وین ڈائی گرام سے ہمیں حاصل ہوا۔
$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\}$

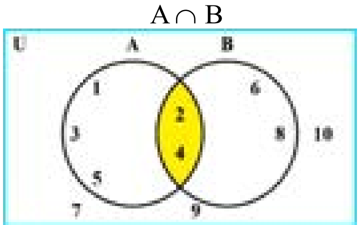
$A\cup B$



شکل (الف)

شکل (ب) میں رنگین یا سایہ دار علاقہ $A\cap B$ کو ظاہر کرتا ہے
وین ڈائی گرام سے ہمیں حاصل ہوا۔
$A\cap B=\{2,4\}$

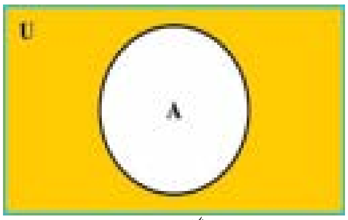
$A\cap B$



شکل (ب)

ایک سیٹ کا کمپلیمنٹ (Complement of a set):

A'



شکل(i)

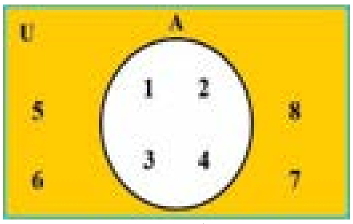
وین ڈائی گرام میں، سیٹ A کا کمپلیمنٹ کائناتی سیٹ کے علاقہ کو ظاہر کرتا ہے سوائے سیٹ A کے علاقے کو۔ شکل (i) بس سایہ دار یا رنگین علاقہ A' کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال کے طور پر:

اگر $U=\{1,2,3,...,8\}$ اور $A=\{1,2,3,4\}$ تو بذریعہ وین ڈائی گرام A' ظاہر کریں

حل:

A'



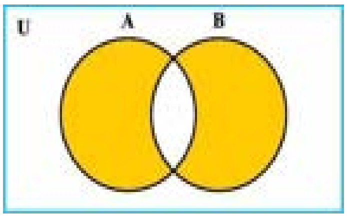
شکل(ii)

سامنے دی گئی وین ڈائی گرام شکل (ii) میں سایہ دار یا رنگین علاقہ A' کو ظاہر کرتا ہے

لہذا ہمارے پاس ہے: $A'=\{5,6,7,8\}$

دو سیٹوں کا تشاکلی فرق (Symmetric difference of two sets):

$A\Delta B$



شکل(i)

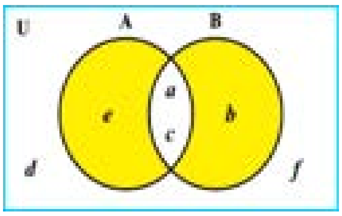
وین ڈائی گرام میں، دو سیٹ A اور B کا تشاکلی فرق A اور B کے پورے علاقہ کو ظاہر کرتا ہے۔ سوائے مشترکہ علاقے کے۔ شکل (i) میں رنگین یا سایہ دار علاقہ $A\Delta B$ کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال: اگر تو کو بذریعہ وین ڈائی گرام ظاہر کریں۔

اگر $U=\{a,b,c,d,e,f\}$، $A=\{a,c,e\}$ اور $B=\{a,b,c\}$

حل: تو $A\Delta B$ کو بذریعہ وین ڈائی گرام ظاہر کریں

$A\Delta B$



شکل(ii)

سامنے دیئے گئے وین ڈائی گرام کی شکل (ii) میں سایہ دار یا رنگین علاقہ $A\Delta B$ کو ظاہر کرتا ہے۔ یعنی $A\Delta B=\{a,e\}$

17.1.3(ii) بذریعہ وین ڈائی گرام تصدیق کریں (Use Venn diagram to verify):

- اتصال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ (Commutative property of union and intersection):
- قوانین تلازم (Associative laws):
- قوانین تقسیمی (Distributive laws):
- ڈی مورگن کے قوانین (De Morgan's laws):

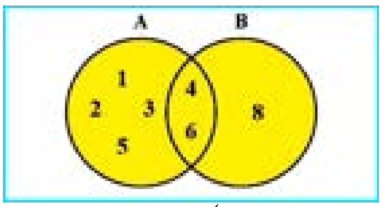
اتصال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ (Commutative property of union and intersection):

آئیں اتصال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ مندرجہ مثالوں کی مدد سے بذریعہ وین ڈائی گرام تصدیق کریں۔

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ اور $B=\{4,6,8\}$ تو اتصال تقاطع کی خاصیت مبادلہ بذریعہ وین ڈائی گرام تصدیق کریں

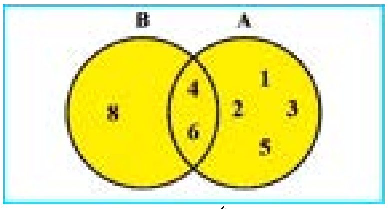
پڑتال: (i) اتصال کی خاصیت مبادلہ $A\cup B=B\cup A$

$A\cup B$



شکل (i)

$B\cup A$



شکل (ii)

وین ڈائی گرام کی شکل (i) سے
$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\}$

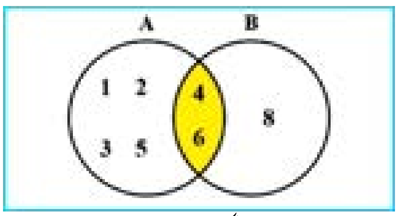
وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے
$B\cup A=\{1,2,3,4,5,6,8\}$

سایہ دار یا رنگین علاقہ اور ان کے ارکان برابر ہیں جیسا کہ شکل (i) اور شکل (ii) میں دکھایا گیا ہے۔

$A\cup B=B\cup A$
پس تصدیق ہوئی

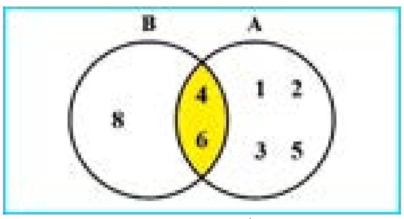
پڑتال (ii): تقاطع کی خاصیت مبادلہ $A\cap B=B\cap A$

$A\cap B$



شکل (i)

$B\cap A$



شکل (ii)

وین ڈائی گرام کی شکل (i) سے
$A\cap B=\{4,6\}$

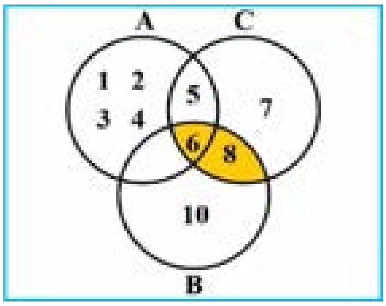
وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے
$B\cap A=\{4,6\}$

سایہ دار یا رنگین علاقہ اور ان کے ارکان برابر ہیں جیسا کہ شکل (i) اور شکل (ii) میں دکھایا گیا ہے۔
$A\cap B=B\cap A$ پس تصدیق ہوئی

پڑتال: اتعال کے قانونِ تلازم $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

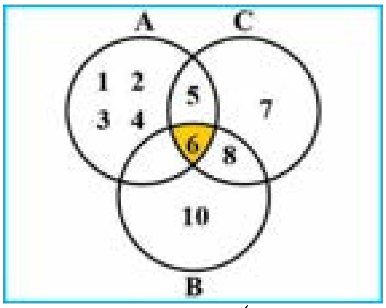
$\underline{L.H.S=A\cap(B\cap C)}$

$B\cap C$



شکل (i)

$A\cap(B\cap C)$



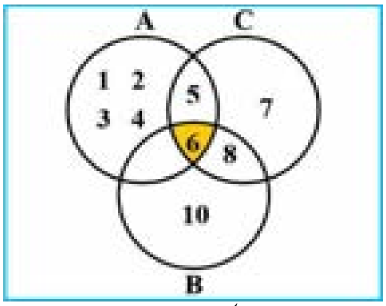
شکل (ii)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے

$A\cap(B\cap C)=\{6\}$

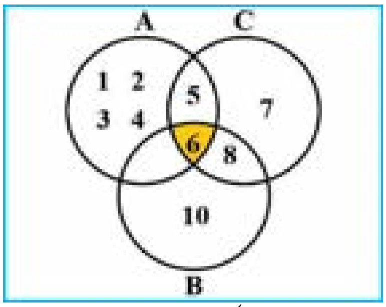
$\underline{R.H.S=(A\cap B)\cap C}$

$A\cap B$



شکل (iii)

$(A\cap B)\cap C$



شکل (iv)

وین ڈائی گرام کی شکل (iv) سے

$(A\cap B)\cap C=\{6\}$

سایہ دار یا رنگین علاقے اور ان کے ارکان برابر ہیں جیسا کہ شکل (ii) اور شکل (iv) میں دکھائے گئے ہیں۔

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

پس تصدیق ہوئی

➢ قوانین تلازم (Distributive Laws):

بذریعہ وین ڈائی گرام قوانین تلازم کی تصدیق کرنے کے لیئے ہم مندرجہ ذیل مثال لیتے ہیں۔

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ، $B=\{3,4,5,6,7\}$ اور $C=\{2,4,6,8\}$ تو اتعال اور تقاطع کے قوانین تلازم کی تصدیق کریں

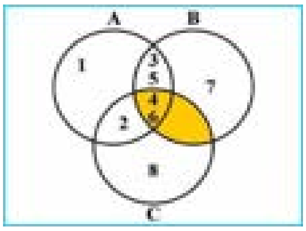
پڑتال:

(i) تقاطع کے قانون تلازم (Distributive law of union over intersection):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

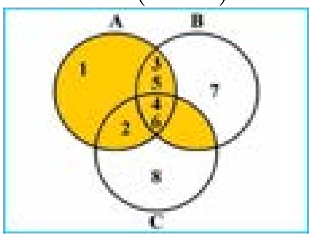
<u>$\text{L.H.S} = A \cup (B \cap C)$</u>

$B \cap C$



شکل(i)

$A \cup (B \cap C)$



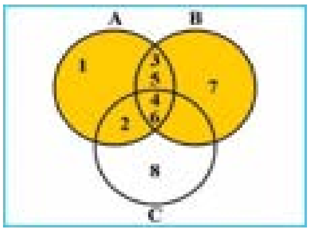
شکل (ii)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے

$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

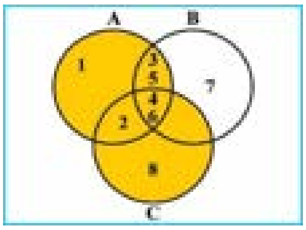
<u>$\text{R.H.S} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$</u>

$A \cup B$



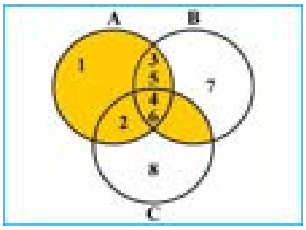
شکل(iii)

$A \cup C$



شکل(iv)

$(A \cup B) \cap (A \cup C)$



شکل (v)

وین ڈائی گرام کی شکل (v) سے

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

رنگین اور سایہ دار علاقے اور ان کے ارکان برابر ہیں جیسا کہ شکل (ii) اور شکل (v) دکھایا گیا ہے

پس $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

تصدیق ہوئی

➢ قوانین تلازم (Associative Laws):

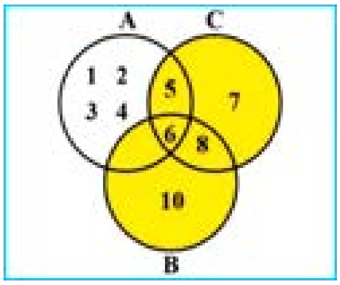
بذریعہ وین ڈائی گرام قوانین تلازم کی تصدیق کرنے کے لیے ہم مندرجہ ذیل مثال لیتے ہیں۔

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ، $B=\{6,8,10\}$ اور $C=\{5,6,7,8\}$ تو اتعال اور تقاطع کے قوانین تلازم کی تصدیق کریں

پڑتا: اتعال کے قانون تلازم یعنی $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

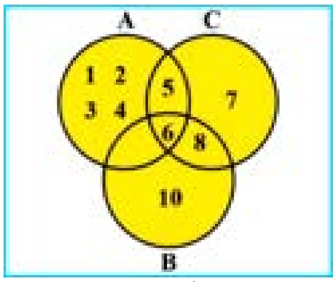
$$\text{L.H.S}=A\cup(B\cup C)$$

$B\cup C$



شکل(i)

$A\cup(B\cup C)$



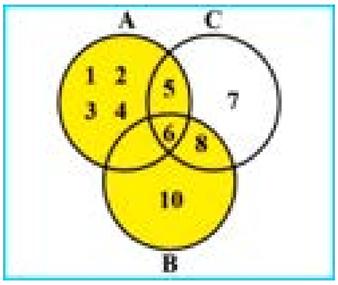
شکل(ii)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے

$$A\cup(B\cup C)=\{1,2,3,4,5,6,7,8,10\}$$

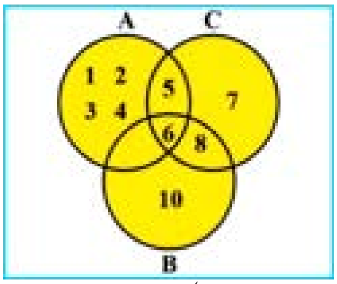
$$\text{R.H.S}=(A\cup B)\cup C$$

$A\cup B$



شکل(iii)

$(A\cup B)\cup C$



شکل(iv)

وین ڈائی گرام کی شکل (iv) سے

$$(A\cup B)\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,10\}$$

سایہ دار یا رنگین علاقے اور ان کے ارکان برابر ہیں جیسا کہ شکل (i) اور شکل (ii) میں دکھائے گئے ہیں

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

پس تصدیق ہوئی

ڈی مورگن کے قوانین (De Morgan's Laws):

آئیں مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے ڈی مورگن کے قوانین کی بذریعہ وین ڈائی گرام تصدیق کریں

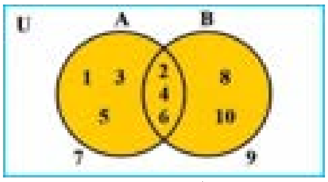
مثال: ڈی مورگن کے قوانین کی بذریعہ وین ڈائی گرام تصدیق کریں

اگر $U=\{1,2,3,...,10\}$، $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ اور $B=\{2,4,6,8,10\}$

پڑتال: (i) $(A\cup B)' = A'\cap B'$

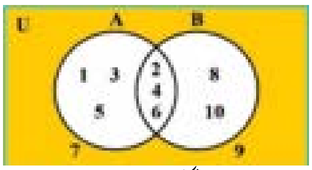
$\underline{\text{L.H.S}=(A\cup B)'}$

$A\cup B$



شکل (i)

$(A\cup B)'$

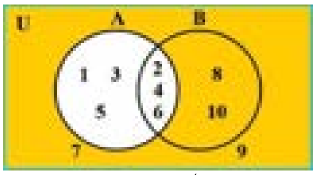


شکل (ii)

$(A\cup B)' = \{7,9\}$

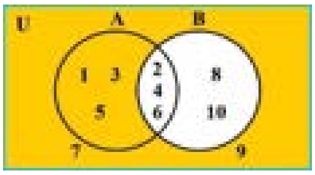
$\underline{\text{R.H.S}=A'\cap B'}$

A'



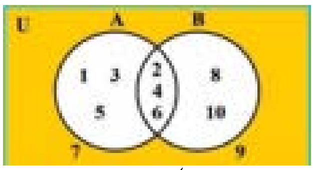
شکل (iii)

B'



شکل (iv)

$A'\cap B'$



شکل (v)

$A'\cap B' = \{7,9\}$

سایہ دار یا رنگین علاقے اور ان کے ارکان برابر ہیں جب کہ شکل (ii) اور شکل (v) میں دکھایا گیا ہے۔

پس $(A\cup B)' = A'\cap B'$

تصدیق ہوئی

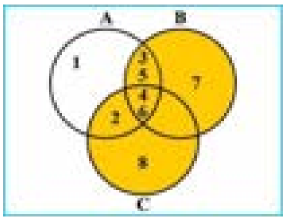
پڑتال:

(ii) قوانین تقسیمی Distributive law of intersection over union

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$L.H.S=A\cap(B\cup C)$

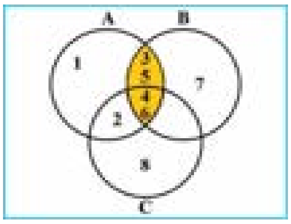
$B\cup C$



شکل (i)

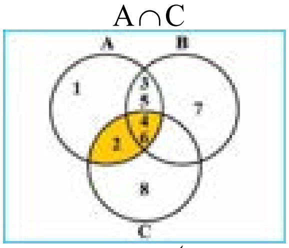
$R.H.S=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cap B$



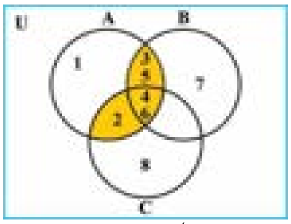
شکل (iii)

$A\cap C$



شکل (iv)

$A\cap(B\cup C)$

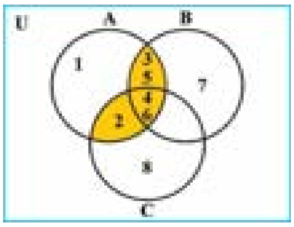


شکل (iv)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے

$A\cap(B\cup C)=\{2,3,4,5,6\}$

$(A\cap B)\cup(A\cap C)$



شکل (v)

وین ڈائی گرام کی شکل (v) سے

$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{2,3,4,5,6\}$

سایہ داریا رنگین علاقہ اور ان کے ارکان برابر ہیں جیسا کہ سکل (ii) اور شکل (v) میں دکھایا گیا ہے۔

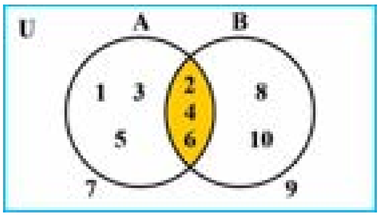
پس $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

تصدیق ہوئی

پڑتال: (ii): $(A\cap B)' = A'\cup B'$

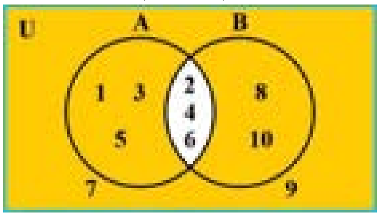
$\underline{L.H.S = (A\cap B)'}$

$A\cap B$



شکل (i)

$(A\cap B)'$



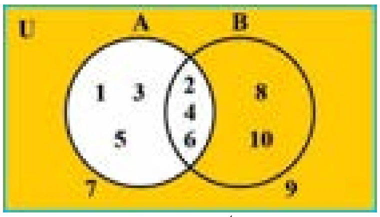
شکل (ii)

وین ڈائی گرام شکل (ii) کے مطابق

$(A\cap B)' = \{1,3,5,7,8,9,10\}$

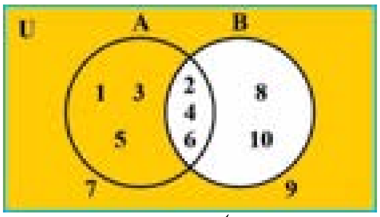
$\underline{R.H.S = A'\cup B'}$

A'



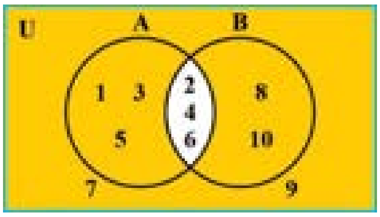
شکل (iii)

B'



شکل (iv)

$A'\cup B'$



شکل (v)

وین ڈائی گرام کی شکل (v) کے مطابق

$A'\cup B' = \{1,3,5,7,8,9,10\}$

سایہ دار یا رنگین علاقے اور ان کے ارکان برابر ہیں جب کہ شکل (ii) اور شکل (v) میں دکھایا گیا ہے۔

پس $(A\cap B)' = A'\cup B'$

تصدیق ہوئی

مشق نمبر 17.4

1- اگر A اور B کوئی سے U دو کے تحتی سیٹ ہیں تو $A \cup B$، $A \cap B$، $A \Delta B$ اور A−B کے وین ڈائی گرام بنائیں اگر
(i) A اور B ڈس جوائنٹ سیٹ ہیں (ii) A اور B اوور لیپنگ سیٹ ہیں (iii) سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے۔

2. بذریعہ وین ڈائی گرام اتصال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ کی تصدیق کریں اگر
(i) $A=\{a,b,c,d,e\}$ و $B=\{a,e,i,o,u\}$
(ii) $P=\{1,2,3,...,10\}$ و $Q=\{2,4,6,8,10\}$

3. بذریعہ وین ڈائی گرام ڈی مورگن کے قوانین کی تصدیق کریں اگر
اگر $A=\{1,3,5,7,9\}$، $B=\{5,6,7,8\}$ اور $U=\{1,2,3,...,10\}$

4. بذریعہ وین ڈائی گرام قوانین تلازم اور قوانین تقسیمی کی تصدیق کریں اگر
اگر $A=\{1,2,3,...,8\}$، $B=\{4,6,7,8,9,10\}$ اور $C=\{5,7,9,11\}$

17.1.4 مترتب جوڑے اور کارتیسی حاصل ضرب (Ordered pairs and Cartesian products):

کارتیسی حاصل ضرب فرانسیسی ریاضی دان اپنے ڈیکارٹ کے نام پر رکھا گیا ہے جس نے انیلٹیکل جیومٹری متعارف کروائی تھی انیلٹیکل جیومیٹری میں مترتب جوڑے مستوی میں نقاط کو ظاہر کرنے کے لیئے استعمال کیئے جاتے ہیں۔ آئیں مترتب جوڑوں اور کارتیسی حاصل ضرب کو تفصیل سے بحث کرتے ہیں۔

17.1.4 (i) مترتب جوڑے (Recognize ordered pair):

اعداد کا جوڑا جس میں ترتیب کا لازماً خیال رکھا جاتا ہے۔ مترتب جوڑا کہلاتا ہی۔ کسی دو قدرتی اعداد a اور b کے لیئے، اگر ہم a کو پہلا اور b کو دوسرا رکن سمجھتے ہیں تو a اور b کے مترتب جوڑے کو (a,b) سے ظاہر کیا جاتا ہی۔ مترتب جوڑے (a,b) میں a پہلا رکن یا عنصر اور b دوسرا رکن یا عنصر کہلاتا ہے۔ دو مترتب جوڑے برابر ہوتے ہیں اگر ان کے رکن برابر ہوں جیسے

مثال: x اور y کی قیمت معلوم کریں اگر $(x+5,8)$ اور $(9,y-6)$ برابر ہے

حل: ہمارے پاس

$$(9,y-6)=(x+5,8)$$

$$\Rightarrow \quad y-6=8 \qquad\qquad \Rightarrow \quad 9=x+5$$

$$\Rightarrow \quad y=8+6 \qquad\qquad \Rightarrow \quad 9-5=x$$

یا $y=14$ یا $x=4$

لہٰذا x اور y کی قیمت بالترتیب 4 اور 14 ہیں

17.1.4 (ii) کارتیسی حاصل ضرب بنانا (To form Cartesian products):

اگر A اور B دو غیر خالی سیٹ ہیں تو A کی B سے کارتیسی حاصل ضرت سے ظاہر کی جاتی ہے۔ جو تمام مترتب جوڑے (a,b) پر مشتمل ہوتے ہیں جہاں $a\in A$ اور $b\in B$

جیسے $A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A \text{ اور } b\in B\}$

اس ہی طرح B کی A سے کارتیسی حاصل ضرب اس طرح ظاہر کی جاتی ہے

$$B\times A=\{(b,a)\,|\,b\in B \text{ اور } a\in A\}$$

مثال کے طورپر اگر $P=\{1,2,4\}$ اور $Q=\{5,10\}$

تو $P\times Q=\{(1,5),(1,10),(2,5),(2,10),(4,5),(4,10)\}$

اور $Q\times P=\{(5,1),(5,2),(5,4),(10,1),(10,2),(10,4)\}$

نوٹ: (i) $A\times B$ کو "A کراس B" پڑھایا جاتا ہے

(ii) اگر $O(A)=m$ اور $O(B)=n$ تو $O(A\times B)=mn$

(iii) عام طورپر $A\times B\neq B\times A$

17.2 ثنائی ربط (Binary Relations):

ثنائی ربط کی وضاحت کریں اور اُسی کے حلقہ اثر (Domain) اور زد (Range) کی شناخت کریں

ثنائی ربط (Binary Relations):

اگر A اور B کوئی دو غیر خالی سیٹ ہیں تو کارتیسی ضرب AxB کا کوئی تحتی سیٹ R، A سے B کا ثنائی ربط کہلائے گا۔

مثال: اگر $A=\{a,b,c\}$ اور $B=\{2,4\}$ تو معلوم کریں

(a) دو روابط A سے B میں

(b) تین روابط B سے A میں

(c) چار ثنائی رابط B میں

حل: (a) دو روابط A سے B میں

یہاں $A\times B=\{(a,2),(a,4),(b,2),(b,4),(c,2),(c,4)\}$

اب $R_1=\{(a,2),(b,4)\}$ اور $R_2=\{(b,2),(c,2),(c,4)\}$

کوئی سے دو روابط A سے B میں ہیں

(b) کوئی تین روابط B سے A میں ہیں

یہاں $B\times A=\{(2,a),(2,b),(2,c),(4,a),(4,b),(4,c)\}$

اب $R_1=\{(2,a)\}, R_2=\{(2,a),(2,b)\}$ اور $R_3=\{(4,a),(4,b),(4,c)\}$

کوئی تین روابط B سے A میں ہیں

(c) چار ثنائی روابط B میں

یہاں $B\times B=\{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$

اب $R_1=\varnothing$، $R_2=\{(2,2)\}$، $R_3=\{(2,4),(4,2)\}$ اور $R_4=\{(2,2),(2,4)\}$

چار ثنائی روابط B میں ہیں

حلقہ اثر (Domain) اور زد (Range)

فرض کریں R ثنائی ربط ہے سیٹ A سے سیٹ B میں۔ تو R کا حلقہ اثر (Domain) ظاہر کیا جاتا ہے بطور DomR، یہ R کے تمام مترتب جوڑوں کے پہلے تمام رکن کا سیٹ ہے۔ R کی زد (Range)، کو Range سے ظاہر کرتے ہیں یہ R کے مترتب جوڑوں دوسرے تمام رکن کا سیٹ ہے

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4\}$، $B=\{4,5,6,7\}$ اور $R=\{(1,4),(2,4),(3,5),(3,6)\}$

A سے B میں ایک ثنائی ربط ہے تو $\text{Dom } R=\{1,2,3\}$ اور $\text{Range } R=\{4,5,6\}$

مثال: اگر $x, y \in N$ اور $\mathbb{N}$ ایک ثنائی ربط N، R میں دی گئی ہے جیسے
$R = \{(x,y) \mid x+y=5\}$ تو R کو اندراجی شکل میں لکھیں اور حلقہ اثر اور زر (Range) بھی معلوم کریں۔

حل: اندراجی شکل میں $R = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

یہاں $\text{Dom } R = \{1,2,3,4\}$

اور $\text{Range } R = \{1,2,3,4\}$

17.3 تفاعل (Function)

تفاعل، ریاضی کی ایک شاخ کا ایک بنیادی تصور ہے جس نے سائنس کو یکسر بدل دیا ہے۔ تفاعل در حقیقت تعلق کا ایک اصول ہے جو دو سیٹوں یا مقداروں کا تعلق ہے۔ مثال کے طور پر دائرے کا رقبہ A رداس "r" یوں $A = \pi r^2$ تعلق رکھتا ہے یہاں ہم تناعل کو صرف سیٹ کی بنیادی پر بحث کرینگے۔

17.3 (i) تفاعل کی وضاحت کریں اور اُس کی حلقہ اثر (domain) شریک حلقہ اثر (Co-domain) اور زر (Range) کی شناخت کریں۔

تفاعل (Function) ایک ثنائی ربط ہے جس میں میں حلقہ اثر (domain) کا ہر رکن صرف اور صرف زر (Range) کا ایک رکن کے ساتھ وابستہ ہوتا ہے مثال کے طور پر $\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$ ایک تفاعل ہے
جیسا کہ $\{(1,5),(2,6),(2,7),(3,9)\}$ تفاعل نہیں ہے کیونکہ حلقہ اثر (domain) کا رکن، 2 زر (Range) کے دو ارکان کے ساتھ وابستہ ہے

➤ سیٹ A سے سیٹ B میں تفاعل (Function from set A to set B):

فرض کریں A اور B دو غیر خالی سیٹ ہیں اور R، سیٹ A سے سیٹ B میں ثنائی ربط ہے۔ تو R تفاعل کہلائے گا A سے B میں اگر

(i) R کا حلقہ اثر (domain) = A

(ii) R میں A کا ہر رکن وابستہ ہے B کے صرف ایک رکن سے جیسے اگر $(a,b) \in R$ اور $(a,c) \in R$ تو $b=c$ تفاعل عام طور انگریزی اور یونانی حرف تہجی جیسے f.g.h وغیرہ اور α, β, γ وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اگر f ایک تفاعل ہے A سے B میں تو ہم یوں لکھتے ہیں $f: A \to B$ اور ہر $(ab) \in f$ تو b کو f کے تحت a کی شبیہہ کہلاتے ہے اور ہم اسے یوں لکھتے ہیں $b=f(a)$

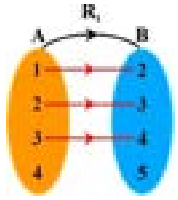
مثال: فرض کریں $A = \{1,2,3,4\}$ اور $B = \{2,3,4,5\}$ شناخت کریں مندرجہ ذیل میں A سے B میں کون سے تفاعل میں

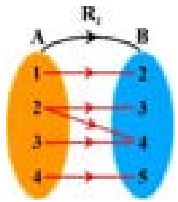
(i) $R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

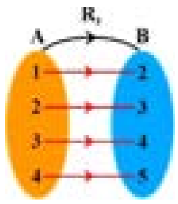
(ii) $R_2 = \{(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,5)\}$

(iii) $R_3 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

میپنگ ڈائی گرام







حل:

(i) $R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

R_1، تفاعل نہیں ہے کیونکہ $\text{Dom } R_1 \neq A$

جیسا کہ متصلہ میپنگ ڈائی گرام سیٹ میں دکھایا گیا ہے۔

(ii) $R_2 = \{(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,5)\}$

R_2، تفاعل نہیں ہے کیونکہ حلقہ اثر (Domain) کا ایک رکن ہے، "2"، B کے

صرف ایک رکن کے ساتھ وابستہ نہیں ہے

جیسا کہ متصلہ میپنگ ڈرائی گرام میں دکھایا گیا ہے۔

(iii) $R_3 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

R_3 تفاعل ہے کیونکہ $\text{Dom } R_3 = A$ اور

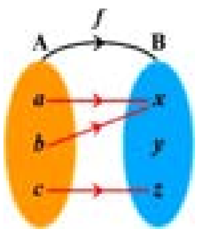
حلقہ اثر کا ہر رکن B کے صرف ایک رکن کے ساتھ وابستہ ہے۔

جیسا کہ میپنگ ڈائی گرام میں دکھایا گیا ہے۔

- حلقہ اثر (Domain) معاون حلقہ اثر (Co- domain) اور زر (Range)

اگر f، A سے B میں ایک تناعل ہے جیسے $f: A \to B$ تو A اس کا حلقہ اثر (Domain) پہلا سیٹ کہلاتا ہے اور B اس کا معاون حلقہ (Co-domain) دوسرے سیٹ کہلاتا ہے۔

حالانکہ: زر (Range)، f کی تمام شبیہ کا سیٹ ہے



مثال: اگر A سے B میں f ایک تناعل ہے جیسا کہ دیئے گئے میپنگ ڈائی گرام میں دکھایا گیا تو اس کے حلقہ اثر (domain) تعاون حلقہ اثر (co domain) اور زر (Range)

حل: f کے میپنگ ڈائی گرام کے مطابق

$\text{Dom f} = A = \{a,b,c\}$، f $\text{Range R} = \{x,z\}$, $\text{Co-domain } f = b = \{x,y,z\}$

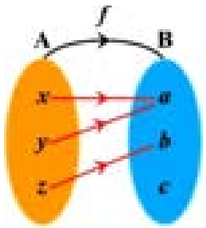
اس کے علاوہ $f(a) = x$ اور $f(c) = z$

نوٹ:
(i) f کی زر (Range) اُسے تعاون حلقہ اثر (Co – domain) کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔
(ii) ہر تفاعل تعلق ہوتا ہے۔ لیکن الٹ درست نہیں ہے۔

17.3 (ii) مندرجہ ذیل کی وضاحت کریں **Demonstrate the following**

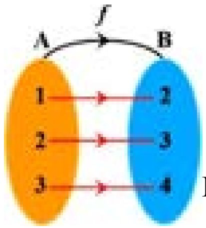
- ان ٹو اور ون–ون تفاعل (ان جیکٹو تفاعل) **:(Into and one-one function (Injective function))**
- اون ٹو تفاعل (سر جیکٹو تفاعل) **:(Onto function (Surjective function))**
- ون–ون اور ارونٹو تفاعل (بائی جیکٹو تفاعل) **:(One-one and onto function (Bijective function))**

ان ٹو تفاعل (Into function):



کوئی سیٹ A اور B کے لیئے، تفاعل $f:A\to B$ ان ٹو تفاعل کہلاتا ہے
اگر f کی زر (Range)، B کا واجب تحتی سیٹ ہے ($\text{Range } f\subset B$)
مثال : $A=\{x,y,z\}$ اور $B=\{a,b,c\}$ ایک تفاعل $f:A\to B$ یوں واضح کیا جاتا ہے $f=\{(x,a),(y,a),(z,b)\}$ ان ٹو تفاعل ہے کیونکہ $\text{Range } f\subset B$ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے یہاں $\text{Range } f=\{a,b\}$

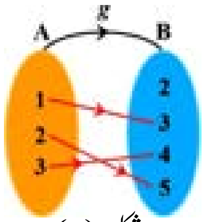
ون-ون تفاعل (One-one function):



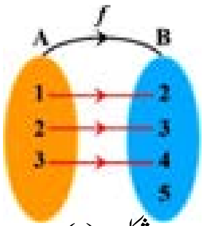
کوئی دو سیٹ A اور B کے لیئے، $f:A\to B$ ون-ون تفاعل کہلاتا ہے
اگر A کا ہر رکن B میں مختلف شبیہ رکھتا ہے۔
مثال : $A=\{1,2,3\}$ اور $B=\{2,3,4\}$ کے لیے اور ایک تفاعل $f:A\to B$ یوں واضح کرتے ہیں $f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ ون ون تفاعل ہے کیونکہ A کا ہر رکن B میں مختلف شبیہ رکھتا ہے جیسا کہ میپنگ ڈائی گرام دکھایا گیا ہے۔

ان ٹو اور ون-ون تفاعل یا ان جیکٹو تفاعل (Into and one-one function or injective function):

ایک تفاعل جو ان ٹو ہے اور ون-ون بھی ہے وہ ان جیکٹو تفاعل کہلاتا ہے۔



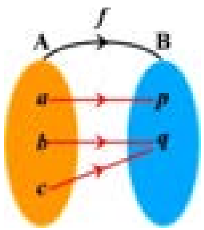
شکل (ii)



شکل (i)

مثال کے طور پر: $A=\{1,2,3\}$ اور $B=\{2,3,4,5\}$ تفاعل $f:A\to B$ یوں واضح کرتے ہیں
$f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ ایک ان جیکٹو تفاعل ہے
کیونکہ یہ ان ٹو ہے اور ون-ون بھی ہے
جیسا کہ میپنگ ڈائی گرام شکل (i) میں دکھایا گیا ہے۔
تفاعل $g:A\to B$ یوں واضح کرتے ہیں
$g=\{(1,3),(2,5),(3,4)\}$ ا نجیکٹو تفاعل بھی ہے جیسا کہ میپنگ ڈائی گرام شکل (ii) میں دکھیا گیا ہے۔

آن ٹو تفاعل یا سر جیکٹو تفاعل (Onto function or surjective function):

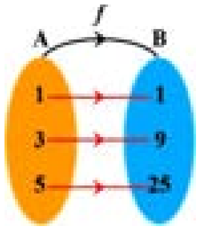


کوئی سیٹ A اور B کے لیئے، تفاعل $f:A\to B$ آن ٹو تفاعل یا سر جیکٹو تفاعل کہلاتا ہے اگر
$\text{Range } f=B$ مثال کے طور پر کی وضاحت یوں کی جاتی ہے
مثال : $A=\{a,b,c\}$ اور $B=\{p,q\}$ تفاعل $f:A\to B$
یوں واضح کیا جاتا ہے۔ $f=\{(a,p),(b,q),(c,q)\}$
آن ٹو تفاعل ہے کیونکہ $f:A\to B$ جیسا کہ متصلہ شکل میں دکھایا گیا ہے

ون-ون اور آن ٹو تفاعل یا بائی جیکٹو تفاعل (One-one and onto function or bijective function):

تفاعل جو ون-ون ہے اور آن ٹو بھی ہے وہ ون-ون اور آن ٹو تفاعل یا بائی جیکٹو تفاعل کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: $A=\{1,3,5\}$ اور $B=\{1,9,25\}$ تفاعل $f:A\rightarrow B$ یوں واضح کیا جاتا ہے۔
$f=\{(1,1),(3,9),(5,25)\}$ بائی جیکٹو تفاعل ہے کیونکہ یہ ون-ون آن ٹو ہے جیسا کہ متعلقہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

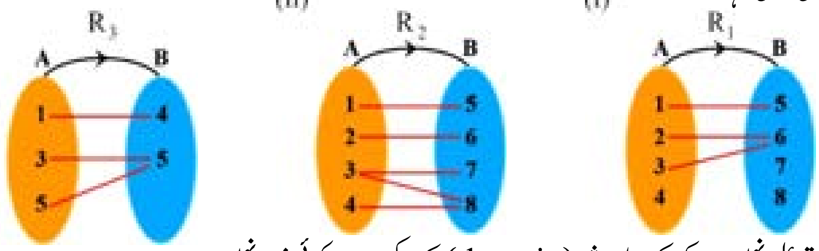


17.3(iii) مشاہدہ کریں کہ آیا دی گئی ربط تفاعل ہے یا نہیں
(Examine whether a given relation is a function or not):

مشاہدہ کرنے کے لیئے آیا دی گئی ربط تفاعل ہے یا نہیں ہمیں ربط کے حلقہ اثر (domain) پر توجہ دینی ہو گی۔
اگر حلقہ اثر (domain) کا کوئی رکن بغیر شبیہ کے ہے یا کوئی حلقہ اثر کا کوئی رکن ربط میں ایک سے زیادہ شبیہ کے ساتھ ہے تو یہ ربط تفاعل نہیں ہے۔

مثال: مشاہدہ کریں کہ دی گئی اور ربط A سے B میں جن کو میپنگ ڈائی گرام میں دیا گیا ہے فیصلہ کریں کہ کون سا تفاعل ہے اور کون سا تفاعل نہیں ہے۔

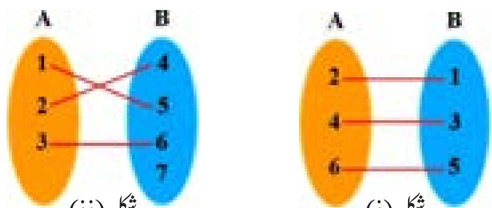
(i) (ii) (iii)



حل: R_1 تفاعل نہیں ہے کیونکہ حلقہ اثر (domain) کے رکن "4" کوئی شبیہ نہیں ہے۔
R_2 کی تفاعل نہیں ہے کیونکہ حلقہ اثر (domain) کے رکن "3" کی ایک سے زیادہ شبیہ ہیں۔
R_3 تفاعل ہے کیونکہ حلقہ اثر (domain) کے ہر رکن کی صرف اور تفرد شبیہ ہے

17.3(iv) ون—ون مطابقت اور ون—ون تفاعل میں فرق واضح کریں
(Differentiate between one-one correspondence and one-one function):

فرض کریں A اور B دو غیر خالی سیٹ ہیں۔ مطابقت A اور B میں پہلے سیٹ کا ہر رکن دوسرے سیٹ کے صرف ایک رکن کے ساتھ وابستہ ہے ون-ون مطابقت ہمیشہ بائی جیکٹو نہیں ہوتا ہے۔
مثال کے طور پر: شکل (i) ون—ون مطابقت تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔
شکل (ii) ون—ون مطابقت نہیں ہے کیونکہ یہ ون—ون تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔



شکل (ii) شکل (i)

مشق 17.5

1. x اور y کی قیمتیں معلوم کریں اگر

(i) $(x-5,10)=(11,y-7)$

(ii) $(5x+8,5y-4)=(3x+10,2y+2)$

(iii) $(2x-3y,5x+y)=(3,16)$

2. اگر سیٹ P کے 10 رکن، سیٹ Q کے 15 رکن ہیں تو PxQ, QxP اور PxP کے رکن معلوم کریں

3. اگر $A=\{1,2\}$ ، $B=\{2,3\}$ اور $C=\{1,3,5\}$ تو معلوم کریں

(i) $A\times B$ (ii) $B\times C$ (iii) $A\times(B\cup C)$

(iv) $B\times(A\cup C)$ (v) $(A\cap B)\times(B\cap C)$

4. اگر $A=\{5,6\}$ اور $B=\{1,2,3\}$ تو معلوم کریں

(i) $A\times B$ میں تین روابط (ii) $B\times A$ میں چار روابط

(iii) B میں پانچ روابط (iv) A میں تمام روابط

5. دو سیٹ A اور B کے لیئے، اگر $O(A)=3$ اور $O(B)=4$ تو AxB میں تمام روابط کی تعداد معلوم کریں

6. $A\times B$ مندرجہ ذیل کی ثنائی روابط کو اندراجی شکل میں لکھیں جب کہ $A=\{0,1,2,3\}$ اور $B=\{2,4,6,8\}$
یہاں اور جیسا کہ $a\in A$ اور $b\in B$

(i) $R_1=\{(a,b)\mid b<5\}$ (ii) $R_2=\{(a,b)\mid a+b=9\}$

(iii) $R_3=\{(a,b)\mid a-b=1\}$

7. اگر ربط $R=\{(x,y)\mid y=2x+5\}$ ، Z میں ہے تو

(i) زر (Range) معلوم کریں اگر حلقہ اثر (domain) میں $\{-2,-1,0,1,2\}$ ہے۔

(ii) حلقہ اثر (domain) معلوم کریں اگر زر (Range) میں $\{11,13,15,17\}$ ہے۔

8. اگر x,y سیٹ W کے ارکان کو ظاہر کرتے ہیں تو مندرجہ ذیل روابط کی حلقہ اثر (domain) اور زر (Range) معلوم کریں

(i) $\{(x,y)\mid 3x+y=11\}$ (ii) $\{(x,y)\mid x-y=6\}$

9. اگر $f:A\to B$ تفاعل دیا گیا ہے $f=\{(1,5),(2,6),(3,7),(4,8)\}$ جہاں اور کی قیمتیں بھی معلوم کریں
$A=\{1,2,3,4\}$ اور $B=\mathbb{N}$ تو اس کے معاون حلقہ اثر (co-domain) اور زر (Range) معلوم کریں $f(2)$ اور $f(4)$

10. اگر $A=\{0,1,2,3,4\}$ اور $B=\{2,4,6,8,10\}$ تو معلوم کریں آیا مندرجہ ذیل A سے B میں ربط تفاعل ہیں
یا نہیں تفاعل میں توان کی اقسام بھی معلوم کریں

(i) $R_1=\{(0,2),(1,4),(2,6),(3,8)\}$

(ii) $R_2 = \{(0,10),(1,8),(2,6),(2,4),(3,4),(4,2)\}$

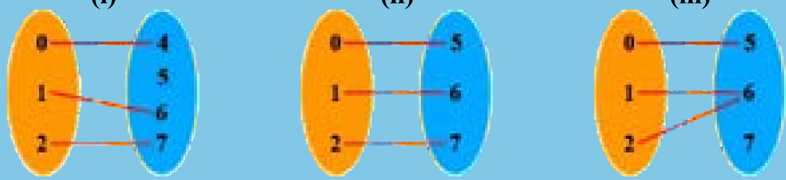
(iii) $R_3 = \{(0,2),(1,4),(2,6),(3,8),(4,8)\}$

(iv) $R_4 = \{(0,2),(1,2),(2,2),(3,2),(4,8)\}$

(v) $R_5 = \{(0,2),(1,4),(2,6),(3,8),(4,10)\}$

11. مندرجہ ذیل میں کونساون—ون تفاعل ہے یاون-ون مطابقت ہے یادونوں میں سے کوئی نہیں ہے۔

(i) **(ii)** **(iii)**



12. اگر $\mathbf{P} = \{a,b,c\}$، $\mathbf{Q} = \{x,y,z\}$ اور $\mathbf{R} = \{p,q,r,s\}$ تومعلوم کریں

(i) تفاعل f، P ان ٹو q

(ii) تفاعل g، R ان ٹو P

(iii) تفاعل h، P سے ٹو p، جو کہ اِن جیکٹو ہے

(iv) تفاعل K، Q سے ٹو P، جو کہ بائی جیکٹو ہے

Review Exercise 17

1. درست جواب کا انتخاب کریں:

(i) کونسا N کا تحتی سیٹ ہے۔

(a) Z (b) Q (c) E (d) P

(ii) $A = \{x \mid x \in Z \wedge x^2 = 25\}$ کی اندراجی شکل ________ ہے.

(a) $\{1,5\}$ (b) $\{-5,5\}$

(c) $\{1,5,25\}$ (d) $\{-5\}$

(iii) دوسیٹ A اور B کے لیئے، اگر $O(A) = O(B)$ تو

(a) $A \subseteq B$ (b) $B = A$

(c) $A \backsim B$ (d) $A \subset B$

(iv) $\{x \mid x \in N \wedge x < 1\}$ ________ ہے

(a) اکائی سیٹ (b) لامتناہی

(c) خالی سیٹ (d) فوقی

(v) اگر $A = \{1,2,3,4\}$ اور $B = \{2,4,6\}$ تو $A \Delta B =$ ________

(a) $\{1,2\}$ (b) $\{6\}$

(c) $\{1,3\}$ (d) $\{1,3,6\}$

(vi) کونسا عمل مبادلہ نہیں ہے۔

(a) تشاکلی فرق (b) اتصال
(c) فرق (d) تقاطع

(vii) $\{x \mid x \in P \vee x \in Q\} =$ ______.

(a) $P \cap Q$ (b) $P \cup Q$
(c) $P - Q$ (d) $P \Delta Q$

(viii) $\{x \mid x \in U \wedge x \notin A \cap B\} =$ ______.

(a) $A \cap B$ (b) $(A \cup B)'$
(c) $(A \cap B)'$ (d) $A' \cap B'$

(ix) کوئی دو غیر خالی سیٹ A اور B کے لیے۔ $A \cup B = U$ اور $A \cap B = \varnothing$ تو A اور B ______ ہیں

(a) سیل (b) اوورلیپنگ سیٹ
(c) مساوی سیٹ (d) کوئی نہیں

(x) $\left((A')'\right)' =$ ______.

(a) (A') (b) A'
(c) A (d) B

(xi) اگر $A \supseteq B$ تو $A \cup B =$ ______

(a) A (b) B
(c) $\varnothing$ (d) U

(xii) وین ڈائی گرام میں یونیورسل سیٹ ______ کرتا ہے۔

(a) مستطیل (b) دائرہ
(c) بیضوی (d) ان میں سے تمام

(xiii) اگر $(x, 6) = (2, y-6)$ $x + y =$ ______

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 14

(xiv) اگر $O(A \times B) = 100$ اور $O(B) = 5$ تو $O(A) =$ ______

(a) 10 (b) 15 (c) 20 (d) 25

(xv) تفاعل سرجیکٹو کہلاتا ہے اگر رز ______ (Rang) معاون حلقہ اثر

(a) $\supseteq$ (b) $\subset$
(c) $=$ (d) ان میں سے سب

(xvi) تفاعل ان ٹو کہلاتا ہے اگر رز (Range) = ______ معاون حلقہ اثر (Co- domain)

(a) $\supseteq$ (b) $\subset$
(c) $=$ (d) ان میں کوئی نہیں

(xvii) اگر $A=\{0,1,2\}$ اور $B=\{3,4\}$ پھر مندرجہ ذیل میں فیصلہ کریں کے کونسا تفاعل $f: A \to B$ ہے۔

(a) $\{(0,3), (1,4)\}$ (b) $\{(0,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$

(c) $\{(0,3), (1,4), (2,4)\}$ (d) کوئی نہیں

(xviii) کونسا ہمیشہ بائی جیکٹو ہوگا

(a) اون ٹو تفاعل (b) ون—ون تفاعل

(c) ان ٹو تفاعل (d) ون—ون مطابقت

(xix) اگر $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ تو کونسا ممکن نہیں ہے

(a) $f(5)=6$ (b) $f(7)=8$

(c) $f(-2)=6$ (d) $f(9)=0$

(xx) کونسا مبادلہ ہے

(a) فرق (b) اتصال

(c) کارتیسی حاصل ضرب (d) کوئی نہیں

2. اگر $A=\{1,2,5\}$ ، $B=\{2,4,6\}$ اور $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ تو مندرجہ ذیل معلوم کریں

(a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$ (c) $A \Delta B$

(d) $A - B$ (e) A' (f) B'

3. سوال نمبر 2 کے سیٹوں کے لیئے ڈی مورگن کے قوانین کی تصدیق کریں

4. سیٹ $A=\{a,b,d\}$ اور $B=\{a,d,e\}$ کے لیئے اتصال اور تقاطع کی خصوصیات کی تصدیق کریں

5. سیٹ $P=\{1,3,5\}$ اور $Q=\{1,3,7\}$ کے لیئے، مندرجہ ذیل کو بذریعہ وین ڈائی گرام ظاہر کریں

(a) $P \cup Q$ (b) $P \cap Q$ (c) $P \Delta Q$ (d) $P - Q$

6. اگر $A=\{a,c\}$ اور $B=\{b,d\}$ تو معلوم کریں

(a) A میں دو ربط (b) B میں دو ربط

(c) A x B میں تین ربط (d) $A \cup B$ میں دو ربط

7. اگر $A=\{1,2,5\}$ اور $B=\{6,8\}$ تو A سے B میں تفاعل معلوم کریں جو

(a) آن ٹو تفاعل (b) ان ٹو تفاعل

(خلاصہ)

- اندراجی، بیانیہ اور ترقیم سیٹ ساز شکل سیٹ کو ظاہر کرنے کے تین طریقے ہیں
- خالی سیٹ میں تو عنصر نہیں ہوتا ہے
- اگر A تحتی سیٹ ہے B کا تو B فوقی سیٹ ہوتا ہے A کا
- اگر $B \subseteq A$ اور $A \subseteq B$ تو $A = B$.
- مترادف سیٹ ون—ون مطابقت رکھتے ہیں
- اگر $B \subseteq A$ اور $B \neq A$ تو $A \subset B$.
- اتعال، تقاطع، فرق، تشامکلی فرق، کمپلیمنیٹ اور کار تیسی حاصل ضرب سیٹوں پر عوامل ہیں۔
- اگر $A \cap B = \varnothing$ تو A اور B ڈس جوائنٹ سیٹ ہیں۔
- اگر $A \cup B = U$ تو A اور B ایگزوسٹیو سیٹ ہیں۔
- سیل ہمیشہ ڈس جوائنٹ اور ایگزیٹو ہوتے ہیں۔
- فرق اور کارتیی حاصل ضرب مبادلہ نہیں ہوتی ہے۔
- اتصال ارو تقاطع ایک دوسرے پر تقیمی ہوتے ہیں۔
- ڈی مورگن کے قوانین (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- سیٹ اروان کی روابط ارو عوامل کی جیوٹریکل مظاہر وین ڈائی گرام کہلاتا ہے۔
- وین ڈائی گرام کو جون وین 1881 قبل مسیحی مین متعارف کروایا تھا۔
- سیٹ، یونیورسل سیٹ وین ڈائی گرام بالترتیب دائرے یا بیضوی اور مستطیل سے ظاہر کئے جاتے ہیں۔
- اگر $a = c \Leftrightarrow (a,b) = (c,d)$ ؃ $b = d$
- $O(A \times B) = O(A) \cdot O(B)$
- $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- کارتیی حاصل ضرب کا ہر تحتی سیٹ ثنائی ربط کہلاتا ہے۔
- ثنائی ربط تقاعل ہے جس میں حلقہ اثر (Domain) کا ہر رکن صرف ایک شبیہ رکھتا ہے۔
- اگر $f: X \to Y$ تقاعل ہے تو X اور Y بلترتیب حلقہ اثر (Domain) اور معاون حلقہ اثر (Co-Domain) جب کہ تمام شبیوں کا سیٹ زد (Range) ہے۔
- تقاعل کہلاتا ہے (i) ان تو اگر زد (Range) معاون حلقہ اثر (Co-Domain)
  (ii) آن ٹو اگر زد (Range) = معاون حلقہ اثر (Co-Domain)
  (iii) ون-ون اگر حلقہ اثر (Domain) کا ہر رکن معاون حلقہ اثر (Co-Domain) میں صرف یک اشبیہ رکھتا ہے۔
- تقاعل کہلاتا ہے (i) ان جیکٹو اگر وہ ون-ون اور ان ٹو ہے۔
  (ii) سر جیکٹو اگر وہ آن ٹو ہو۔
  (iii) بائی جیکٹو اگر وہ ون-ون اور آن ٹو ہو۔
- ون-ون مطابقت ہمیشہ بائی جیکٹو ہوئی ہے۔
- ون-ون تقاعل ہمیشہ بائی جیکٹو نہیں ہوتے ہے۔

یونٹ نمبر 18

تغیرات
VARIATIONS

طلباء کے آزموزشی حاصلات (SLOs)

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- نسبت، تناسب اور تغیرات (راست اور معکوس) کی تعریف کر سکیں
- تیسرا، چوتھا، وسطی اور مسلسل تناسب معلوم کر سکیں۔
- عکس نسبت (Invertendo)، ابدال نسبت (Alternando)، ترکیب نسبت (Components)، تفصیل نسبت (Dividendo)، تفصیل و ترکیب نسبت، تناسب معلوم کرنے کے لیے مسئلہ کا اطلاق کر سکیں۔
- مشترکہ تغیرات کی تعریف کر سکیں
- مشترکہ تغیرات سے متعلق مسائل حل کر سکیں
- طریقہ استعمال کرتے ہوئے تناسب پر مبنی شرطیہ مساوات ثابت کر سکیں۔
- تغیرات پر مبنی روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں

18.1 نسبت، تناسب اور تغیرات (Ratio, Proportions and variations)

18.1.1 نسبت، تناسب اور تغیرات (راست و معکوس) کی تعریف کرنا

(a) نسبت (Ratio):

ایک ہی اکائی کی دو مقداروں کا موازنہ نسبت ہے۔ یہ ایک ہی قسم کی دو مقداروں کا باہمی تعلق ہے دوسرے الفاظ میں نسبت کا مطلب ہے۔ اگر a اور b ایک ہی قسم کی دو مقداریں ہیں اور b صفر نہیں ہے تو a اور b کی نسبت کو یوں لکھا جاتا ہے : $a:b$ یا $\frac{a}{b}$

مثلاً: اگر ایک جماعت میں 13 لڑکے اور 8 لڑکیاں ہیں تو لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد کی نسبت کو یوں $13:8$ یا $\frac{13}{8}$ کسر میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

نوٹ:
(i) نسبت میں رقموں کی ترتیب اہم ہوتی ہے
(ii) نسبت کی کوئی اکائی نہیں ہوتی ہے
(iii) نسبت $a:b$ میں پہلی رقم (First term) مقدم (Antecedent) اور دوسری رقم (Second term) مؤخر (Consequent) کہلاتی ہے

مثال 1: نسبت معلوم کریں:

(i) 400 میٹر اور 900 میٹر
(ii) 700 گرام اور 2 کلو گرام
(iii) 300 سیکنڈ اور 2 منٹ
(iv) 200 روپے اور 300 گرام

حل:

(i) 400 میٹر اور 900 میٹر کی نسبت

$$400:900=\frac{400}{900}=\frac{4}{9}=4:9$$

400 : 900 کی مختصر ترین صورت 4 : 9 ہے

(ii) 700 گرام اور 2 کلو گرام کی نسبت

چونکہ 1 کلوگرام = 1000 گرام
اس لیئے 2 کلوگرام = 2000 گرام

اب

$$700:2000=\frac{700}{2000}=\frac{7}{20}=7:20$$

(iii) 30 سیکنڈ اور 2 منٹ

چونکہ 1 منٹ = 60 سیکنڈ
اس لیئے 2 منٹ = 120 سیکنڈ

اب

$$30:120=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}=1:4$$

(iv) 200 روپے اور 300 گرام کی نسبت

چونکہ مقداریں ایک قسم کی نہیں ہیں لہذا 200 روپے اور 300 گرام کے درمیان نسبت معلوم نہیں کی جا سکتی ہے

مثال 2: نسبت $5a+2b : 4a+3b$ معلوم کریں اگر $a : b = 4 : 5$

حل: دیا گیا ہے کہ $a : b = 4 : 5$ یا $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

اب $5a + 2b : 4a + 3b = \frac{5a+2b}{4a+3b}$

$$=\frac{\frac{5a+2b}{b}}{\frac{4a+3b}{b}} = \frac{5(\frac{a}{b})+2(\frac{b}{b})}{4(\frac{a}{b})+3(\frac{b}{b})}$$

(شمار کنندہ اور نسبت نما کو b سے تقسیم کرنے سے)

$$= \frac{5(\frac{4}{5})+2}{4(\frac{4}{5})+3} = \frac{4+2}{\frac{16}{5}+3} = \frac{6}{\frac{31}{5}} = \frac{30}{31} \qquad \left(\because \frac{a}{b} = \frac{4}{5}\right)$$

پس $5a + 2b : 4a + 3b = 30 : 31$

مثال 3: m کی قیمت معلوم کریں

$3m+5 : 4m+3$ اور $2 : 3$ برابر ہیں

حل:

دی گئی شرط کے مطابق

$$\Rightarrow \frac{3m+5}{4m+3} = \frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow 3(3m+5) = 2(4m+3)$$
$$\Rightarrow 9m+15 = 8m+6$$
$$\Rightarrow 9m-8m = 6-15$$
$$\Rightarrow m = -9$$

پس m کی مطلوبہ قیمت 9- ہے

مثال 4: نسبت 4:15 کی ہر رقم میں کونسا عدد جمع کیا جائے کہ یہ $\frac{2}{3}$ کے برابر ہو جائے

حل: فرض کریں کہ مطلوبہ عدد a ہے

دی گئی شرط کے مطابق

$$\Rightarrow \frac{4+a}{15+a} = \frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow 3(4+a) = 2(15+a)$$
$$\Rightarrow 12+3a = 30+2a$$
$$\Rightarrow 3a-2a = 30-12$$
$$\Rightarrow a = 18$$

پس مطلوبہ عدد 18 ہے۔

(d) تناسب (Proportion):

دو نسبتوں کی برابری تناسب کہلاتی ہے جن کو دو نسبتوں کے برابر ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تو a، b، c اور d تناسب میں ہیں اور ہم یوں لکھ سکتے ہیں: $a : b :: c : d$ جبکہ مقداریں a اور d طرفین جبکہ b اور c وسطین کہلاتی ہیں a، b، c اور d کا تناسب یوں لکھا جاتا ہے

$$a : b :: c : d$$
یا $a : b = c : d$

یا $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

یا $ad = bc$

نوٹ: طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب

مثال 5: x کی قیمت معلوم کریں اگر $40:60=50:x$

حل: دیا گیا ہے $40:60=50:x$

چونکہ طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب

یعنی $40x=60\times 50$

یا $x=\dfrac{60\times 50}{40}=75$

لہذا $x = 75$

مشق 18.1

1. مندرجہ ذیل کی نسبت معلوم کریں:

(i) 70 کلو گرام اور 25 کلو گرام
(ii) 60 سنٹی میٹر سنٹی میٹر اور 1 میٹر
(iii) 40 سیکنڈ اور 3 منٹ
(iv) 200 ملی لیٹر اور 2 لیٹر
(v) $135°$ اور $360°$
(vi) 3.5 کلو گرام، 5 کلو گرام 200 گرام

2. ایک فیکٹری میں 120 کام کرنے والے ہیں جس میں 45 عورتیں ہیں اور باقی مرد ہیں۔ نسبت معلوم کریں:

(i) مرد اور عورتیں
(ii) عورتیں اور مرد
(iii) عورتیں اور کل کام کرنے والے
(iv) مرد اور کل کام کرنے والے

3. اگر $5(4x-2y)=3x-4y$ تو $x:y$ معلوم کریں

4. "a" کی قیمت معلوم کریں۔ اگر $3a+4:2a+5$ اور $4:3$ برابر ہیں۔

5. نسبت $5:27$ کی ہر رقم میں کونسا عدد جمع کیا جائے کہ یہ $1:3$ کے برابر ہو جائے۔

6. اگر $a:b=5:8$ تو $3a+4b:5a+7b$ کی قیمت معلوم کریں

7. مندرجہ ذیل میں x معلوم کریں

(i) $2x+5:5::3x-2:7$
(ii) $\dfrac{4x-3}{5}:\dfrac{3}{4}::\dfrac{4x}{3}:\dfrac{7}{2}$
(iii) $\dfrac{x-3}{2}:\dfrac{5}{x-1}::\dfrac{x-1}{3}:\dfrac{4}{x+4}$
(iv) $(a^2-ab+b^2):x::\dfrac{a^3+b^3}{a-b}:(a+b)^2$
(v) $11-x:8-x::25-x:16-x$

(e) تغیر (Variation):

تغیر کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ ایک مقدار میں تبدیلی دوسری مقدار میں تبدیلی کا باعث ہے۔ تغیرات دو اقسام کے ہوتے ہیں

- تغیر راست (Direct Variation)
- تغیر معکوس (Inverse Variation)

تغیر راست (Direct variation):

اگر دو مقداروں A اور B کے درمیان ایسا تعلق ہے جس میں ایک مقدار A دی گئی نسبت سے بڑھے یا کم ہو تو دوسری مقدار A بھی اُسی نسبت سے بڑھتی یا کم ہوتی ہے۔ اگر مقدار y اور مقدار x میں تغیر راست ہو تو اسے یوں لکھتے ہیں:

$y\propto x$ یا $y=k\,x$ جبکہ $k\neq 0$

علامت "$\propto$" تناسب یا تغیر کی علامت کہلاتی ہے اور ایک k مستقل (Constant of variation) کہلاتا ہے۔

مثال طور:

(i) مربع کے ضلع کی لمبائی اور اس کے رقبے میں تغیر راست ہوتا ہے۔

(ii) سائیکل کی رفتار اور طے کردہ فاصلے میں تغیر راست ہوتا ہے

مثال 1: اگر y اور x میں تغیر راست ہے تو معلوم کریں

(a) x اور y کو منسلک کرنے والی مساوات (b) x اور y میں تعلق جبکہ $x = 3$ اور $y = 7$

(c) y کی قیمت جبکہ $x = 24$ (d) x کی قیمت جبکہ $y = 21$

حل: (a) جیسے کے y میں x تغیر راست ہے۔

لہٰذا $y \propto x$

یعنی $y = kx \quad \ldots \text{(i)}$

جبکہ k تغیر کا مستقل ہے

(b) مساوات (i) میں $x = 3$ اور $y = 7$ رکھنے سے،

ہمیں ملا $7=3k$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{7}{3}$$

مساوات (i) میں x کی قیمت رکھنے سے، ہمیں ملا $y = \frac{7}{3}x \quad \ldots\text{(ii)}$

(c) مساوات (ii) میں $x = 24$ کی قیمت رکھنے سے، ہمیں ملا $y = \frac{7}{3}(24) = 56$

(d) مساوات (ii) میں $y = 21$ کی قیمت رکھنے سے، ہمیں ملا

$$21 = \frac{7}{3}x \Rightarrow x = \frac{3 \times 21}{7} = 9$$

مثال 2: اگر y اور x کے جزرالمربع میں تغیر راست ہے، جبکہ $x = 16$ اور $y = 10$ تو معلوم کریں جبکہ $x = 36$

حل: y اور x کے جزرالمربع میں تغیر راست ہے۔

یعنی $y \propto \sqrt{x}$

یا $y = k\sqrt{x} \quad \ldots \text{(i)}$

جبکہ k تغیر کا مستقل ہے۔

مساوات (i) میں $x = 16$ اور $y = 10$ رکھنے سے ہمیں ملا

$$10 = k\sqrt{16}$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

مساوات (i) میں $k = \frac{5}{2}$ رکھنے سے ہمیں ملا

$$y = \frac{5}{2}\sqrt{x} \quad \ldots\text{(ii)}$$

مساوات (ii) میں $x = 36$ رکھنے سے ہمیں ملا

$$y = \frac{5}{2}\sqrt{36}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{5}{2}(6) = 15$$

مثال 3: اگر V اور r کے مکعب میں تغیر راست ہے اور $V=\frac{792}{7}$ جبکہ $r=3$
V کی قیمت معلوم کریں جبکہ $r=7$

حل: چونکہ V اور r کے مکعب میں تغیر راست ہے

لہٰذا $V \,\alpha\, r^3$

$V=kr^3$ (i) (جبکہ k تغیر کا متقل ہے)

مساوات (i) میں $r=3$ اور $V=\frac{792}{7}$ رکھنے سے

ہمیں ملا $\frac{792}{7}=k(3)^3 \Rightarrow k=\frac{792}{7\times 27}=\frac{88}{21}$

پس $V=\frac{88}{21}r^3 \quad \cdots$ (ii)

مساوات (ii) میں $r=7$ رکھنے سے

ہمیں ملا $V=\frac{88}{21}(7)^3=\frac{4312}{3}$

تغیر معکوس (Inverse Variation):

اگر دو متغیرات (مقداروں) میں اس طرح تعلق ہے ایک مقدار میں اضافہ دوسری مقدار میں کمی کا باعث بنے اور اس کا الٹ تو مقداروں (متغیرات) کے دوسرے کے تغیر معکوس ہوتے ہیں۔ اگر y اور x میں تغیر معکوس ہو تو ہم یوں کہتے ہیں۔

$y \propto \frac{1}{x}$ یا $y=\frac{k}{x}$ جبکہ $k\neq 0$ (تغیر کا متقل)

$\Rightarrow yx=k$

مثال 1: اگر y اور x میں تغیر معکوس ہے اور $y=7$ جبکہ $x=2$ تو y کی قیمت معلوم کریں اگر $x=126$

حل: یہاں y اور x میں تغیر معکوس ہے

یعنی $y\propto\frac{1}{x}$

$\Rightarrow y=k(\frac{1}{x})=\frac{k}{x}$

$\Rightarrow k=xy \quad \ldots$ (i)

مساوات (i) میں $y=7$ اور $x=2$ رکھنے سے

ہمیں ملا $k=(2)(7)=14$

$\Rightarrow xy=14 \quad \ldots$ (ii)

مساوات (ii) میں $x=126$ رکھنے سے

ہمیں ملا $(126)y=14$

$y=\frac{14}{126}$

$y=\frac{1}{9}$

مثال 2: اگر y اور x معکب میں تغیر معکوس ہے اور $y=27$ اور $x=8$ تو x معلوم کریں جبکہ $y=36$

حل: یہاں y اور $\sqrt[3]{x}$ میں تغیر معکوس ہے

یعنی $y \propto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

یا $y=\frac{k}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y\left(\sqrt[3]{x}\right)=k \quad \ldots$ (i)

مساوات (i) میں $x=8$ اور $y=27$ رکھنے سے

ہمیں ملا $k=(27)(\sqrt[3]{8})=54$

اب مساوات (i) میں $k=54$ رکھنے سے

ہمیں ملا $\left(y\sqrt[3]{x}\right)=54 \ldots$ (ii)

اب مساوات (ii) میں $y=36$ رکھنے سے

ہمیں ملا $(36)\left(\sqrt[3]{x}\right)=54$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x}=\frac{54}{36}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow x=\frac{27}{8}$

مشق 18.2

1. اگر y اور x میں تغیر راست ہے اور $y=10$ جبکہ $x=3$ تو معلوم کریں
(i) x کی صورت میں y (ii) y جبکہ $x=6$ (iii) x جبکہ $y=15$

2. اگر $V \propto T$ اور $V=15$ جبکہ $T=24$ تو معلوم کریں
(i) V اور T منسلک کرنے والی مساوات (ii) $T=30$ (iii) $V=10$

3. اگر $u \propto \sqrt[3]{v}$ اور $u=4$ جب $v=64$ تو u کی قیمت معلوم کریں جبکہ $v=216$ اور v کی قیمت جبکہ $u=5$

4. اگر F اور m^3 میں تغیر راست ہے جب $m=3$ اور $F=81$ تو F معلوم کریں جبکہ $m=5$

5. اگر y اور x میں تغیر معکوس ہے جب $y=10$ اور $x=3$ تو y معلوم کریں جبکہ $x=10$

6. گیس کا حجم V اور دباؤ P کے جذر المربع میں تغیر معکوس ہے اگر $V=12$ جبکہ $P=9$ معلوم کریں جبکہ $V=4$

7. اگر $F \propto \frac{1}{r^2}$ اور $F=8$ جب $r=2$ تو معلوم کریں
(i) F جبکہ $r=5$ (ii) r جبکہ $F=24$

8. x کے جذر المکعب اور y کے جذر المربع میں تغیر معکوس ہے اگر $x=8$ جب $y=3$ معلوم کریں جب $y=\frac{3}{2}$

9. دو اجسام کے درمیان قوت F اور ان مراکز کے درمیان فاصلہ d کے مربع میں تغیر معکوس ہے۔ اگر $F=2$ اور $d=3$ تو d معلوم کریں جب $F=72$

10. اگر y اور $(x-5)$ میں تغیر معکوس ہے جب کہ $y=6$ اور $x=8$ تو y معلوم کریں جب $x=10$

18.1(ii) تیسرا، چوتھا تناسب کے متناسب اور مسلسل تناسب میں وسطی متناسب معلوم کرنا۔

ہم تناسب سے پہلے ہی سے واقف ہیں کہ اگر a، b، c اور d تناسب میں ہیں تو $a:b::c:d$
لہذا a، b، c اور d بالترتیب پہلا، دوسرا، تیسرا اور چوتھا تناسب کہلاتے ہیں

(a) تیسرا متناسب (Third Proportional):

مثال 1:
اگر 4، 7 اور 14 تناسب میں پہلا، دوسرا اور چوتھا متناسب ہیں تو اس کا تیسرا متناسب معلوم کریں

حل: فرض کریں x تیسرا متناسب ہے
تو

$$4:7::x:14$$
$$\Rightarrow 7x=56$$
$$\Rightarrow x=8$$

مثال 2:
اگر $(a-b)$، (a^2+ab+b^2) اور (a^3-b^3) بالترتیب پہلا، دوسرا اور چوتھا متناسب ہیں تو تیسرا متناسب معلوم کریں

حل: فرض کریں x تیسرا متناسب ہے
تو

$$(a-b):(a^2+ab+b^2)::x:a^3-b^3$$
$$\Rightarrow (a^2+ab+b^2)x=(a-b)(a^3-b^3)$$
$$(a^2+ab+b^2)\,x=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$$
$$\Rightarrow x=\frac{(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)}$$
$$\Rightarrow x=(a-b)^2$$

(b) چوتھا متناسب (Fourth Proportional):

مثال 1: چوتھا متناسب معلوم کریں اگر پہلے تین متناسب a^3+b^3، $a-b$، a^2-ab+b^2 ہیں

حل: فرض کریں چوتھا متناسب x ہے تو

$$a^3+b^3 : a-b :: (a^2-ab+b^2) : x$$

یعنی

$$x\,(a^3+b^3) = (a-b)(a^2-ab+b^2)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(a-b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a-b}{a+b}$$

مسلسل متناسب (Continued Proportion) اور وسطی متناسب (Mean Proportional):

مقداریں a، b، c مسلسل تناسب کہلاتی ہیں اگر

$$a : b = b : c$$

یا

$$a : b :: b : c$$

$$\Rightarrow b^2 = ac$$

لہٰذا b وسطی متناسب کہلاتا ہے

مثال 1: x^2-y^2 اور $\frac{x-y}{x+y}$ کا وسطی متناسب معلوم کریں

حل: فرض کریں z وسطی متناسب ہے تو

$$x^2-y^2 : z :: z : \frac{x-y}{x+y}$$

یعنی

$$z^2 = (x^2-y^2)\frac{(x-y)}{x+y} = (x-y)^2$$

$$\Rightarrow \quad z = x-y$$

مثال 2: a کی قیمت معلوم کریں اگر 7، $a-3$ اور 28 مسلسل تناسب میں ہیں۔

حل: چونکہ 7، $a-3$ اور 28 مسلسل تناسب میں ہیں۔

پس

$$7 : a-3 :: a-3 : 28$$

یعنی

$$(a-3)^2 = 7\times 28$$

$$\Rightarrow \quad (a-3)^2 = 196$$

$$\Rightarrow \quad a-3 = 14$$

$$\Rightarrow \quad a = 14+3$$

$$\Rightarrow \quad a = 17$$

مشق 18.3

1. تیسرا متناسب معلوم کریں اگر پہلا، دوسرا اور چوتھا متناسب ہیں

(i) 6، 18 اور 54 (ii) a^2-b^2، $a+b$ اور $a-b$

(iii) $(x+y)^2$، x^3+y^3 اور $x+y$ (iv) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$، $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$ اور $a+b$

2. چوتھا متناسب معلوم کریں

(i) 8, 4, 2 (ii) $a^3+b^3,\ a^2-b^2,\ a^2-ab+b^2$

(iii) $a^2-8a+12,\ a-2,\ 2a^3-12a^2$

(iv) $(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2), a^3+b^3, a^3-b^3$

3. وسطی متناسب معلوم کریں

(i) 8, 18 (ii) $5ab^2, 20a^3b^2$

(iii) $a^4-b^4, \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ (iv) $a^3-b^3, \dfrac{a-b}{a^2+ab+b^2}$

4. مندرجہ ذیل مسلسل تناسب میں x کی قیمت معلوم کریں

(i) $45, x, 5$ (ii) $16, x, 9$

(iii) $12, 3x\text{-}6, 27$ (iv) $7, x\text{-}3, 112$

18.2 تناسب سے متعلق مسئلے

18.2.1 عکس نسبت، ابدال نسبت، ترکیب نسبت، تفصیل نسبت کے مسئلوں کو حل کرنے کے لیے لاگو کریں۔

(i) مسئلہ عکس نسبت (Theorem of invertendo):

اگر $a:b=c:d$ تو $b:a=d:c$

اوپر دیا گیا بیان مسئلہ عکس نسبت کہلاتا ہے

ثبوت: چونکہ $a:b=c:d$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c} \quad \text{(دونوں اطراف معکوس لینے سے)}$$

یعنی $b:a=d:c$ پس ثابت ہوا

مثلاً: (i) اگر $2:3=4:6$ تو مسئلہ عکس نسبت کی رو سے

$$3:2=6:4$$

(ii) اگر $4p:5q=2r:5s$ تو مسئلہ عکس نسبت کی رو سے

$$5q:4p=5s:2r$$

(ii) مسئلہ ابدال نسبت (Theorem of Alternando):

اگر $a:b=c:d$ تو $a:c=b:d$

یہاں مسئلہ ابدال نسبت کہلاتا ہے

ثبوت: چونکہ $a:b=c:d$

یا $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

$$\Rightarrow \quad ad=bc$$

دونوں اطراف cd سے تقسیم کرنے سے ہمیں ملا

ہمیں ملا $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$

یعنی $a:c=b:d$

مثال:

(i) اگر $2:5=6:15$ تو مسئلہ ابدال نسبت کی رو سے

$$2:6=5:15$$

(ii) اگر $4p-1:2-3q=5+2r:2s+1$ تو مسئلہ ابدال نسبت کی رو سے

$$4p-1:5+2r=2-3q:2s+1$$

(iii) مسئلہ ترکیب نسبت (Theorem of Componendo):

اگر $a:b=c:d$ تو مسئلہ ترکیب نسبت کے مطابق

(i) $a+b:b=c+d:d$ (ii) $a:a+b=c:c+d$

ثبوت: (i) چونکہ $a:b=c:d$

تو $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

دونوں اطراف 1 جمع کرنے سے

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

یا $a+b:b=c+d:d$

پس ثابت ہوا

ثبوت: (ii) چونکہ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تو $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (مسئلہ عکس نسبت کی رو سے)

یا دونوں اطراف 1 جمع کرنے سے

$$\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1$$

$$\frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+a}=\frac{c}{c+d}$$

یا $a:a+b=c:c+d$

پس ثابت ہوا

مثال: اگر $p+2:q=r:s-3$ تو مسئلہ ترکیب نسبت (i) کی رو سے

$$p+2+q:q=r+s-3:s-3$$

اس ہی طرح، مسئلہ ترکیب نسبت (ii) کی رو سے

$$p+2:p+2+q=r:r+s-3$$

(iv) مسئلہ تفصیل نسبت (Theorem of Dividendo):

اگر $a:b=c:d$ تو مسئلہ تفصیل نسبت کی رو سے

(i) $a-b:b=c-d:d$ (ii) $a:a-b=c:c-d$

ثبوت:(i) چونکہ $a:b=c:d$

یا $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

دونوں اطراف 1 تفریق کرنے سے

$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$

یا $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

یا $a-b:b=c-d:d$

پس ثابت ہوا

ثبوت:(ii) چونکہ $a:b=c:d$

لہٰذا $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

(مسئلہ عکس نسبت کی رو سے)

$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

دونوں اطراف 1 تفریق کرنے سے

$\frac{b}{a}-1=\frac{d}{c}-1$

$\Rightarrow \frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}$

(مسئلہ عکس نسبت کی رو سے)

$\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$

یا $a:b-a=c:d-c$

پس ثابت ہوا

مثال: اگر $m+5:n-3=4p+7:3q+2$ تو ثابت کریں کہ

$m-n+8:n-3=4p-3q+5:3q+2$

حل: چونکہ $m+5:n-3=4p+7:3q+2$

$$\Rightarrow \frac{m+5}{n-3}=\frac{4p+7}{3q+2}$$

تو مسئلہ تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{(m+5)-(n-3)}{n-3}=\frac{(4p+7)-(3q+2)}{3q+2}$$

$$\Rightarrow \frac{m-n+8}{n-3}=\frac{4p-3q+5}{3q+2}$$

یعنی $m-n+8:n-3=4p-3q+5:3q+2$

پس ثابت ہوا

(v) ترکیب و تفصیل نسبت (Theorem of componendo and dividendo):

اگر $a:b=c:d$ تو مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کے مطابق

(i) $a+b:a-b=c+d:c-d$

(ii) $a-b:a+b=c-d:c+d$

مثال 1: اگر $m:n=p:q$ تو ثابت کریں کہ $3m-2n:3m+2n=3p-2q:3p+2q$

حل: چونکہ $m:n=p:q$

لہٰذا $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$

دونوں اطراف $\frac{3}{2}$ سے ضرب دینے سے

$$\frac{3m}{2n}=\frac{3p}{2q}$$

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت (ii) کی رو سے

$$\frac{3m-2n}{3m+2n}=\frac{3p-2q}{3p+2q}$$

یا $3m-2n:3m+2n=3p-2q:3p+2q$

پس ثابت ہوا۔

مثال 2: اگر $3p+4q:3p-4q=3r+4s:3r-4s$ تو ثابت کریں کہ $p:q=r:s$

حل: چونکہ $3p+4q:3p-4q=3r+4s:3r-4s$

بذریعہ مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت (i)

$$\therefore \quad \frac{(3p+4q)+(3p-4q)}{(3p+4q)-(3p-4q)}=\frac{(3r+4s)+3r-4s}{(3r+4s)-(3r-4s)}$$

$$\frac{3p+4q+3p-4q}{3p+4q-3p+4q}=\frac{3r+4s+3r-4s}{3r+4s-3r+4s}$$

$$\frac{6p}{8q}=\frac{6r}{8s}$$ (دونوں اطراف $\frac{6}{8}$ کاٹنے سے)

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{q}=\frac{r}{s}$$

یا $p:q=r:s$

پس ثابت ہوا۔

مثال 3: بذریعہ مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت x کی قیمت معلوم کریں

اگر $$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}=\frac{2}{5}$$

حل: ہمارے پاس: $$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}=\frac{2}{5}$$

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6})+(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6})}{(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6})-(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6})}=\frac{2+5}{2-5}$$

$$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}+\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}-\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}=\frac{7}{-3}$$

$$\frac{2\sqrt{x+6}}{-2\sqrt{x-6}}=\frac{7}{-3} \Rightarrow \frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-6}}=\frac{7}{3}$$

دونوں اطراف مربع لینے سے

$$\frac{x+6}{x-6}=\frac{49}{9}$$

$$9x+54=49x-294$$

$$9x-49x=-294-54$$

$$-40x=-348$$

$$x=\frac{348}{40}=\frac{87}{10}$$

مثال 4: بذریعہ مسئلہ ترکیب و تفصیل مساوات $\frac{(x+3)^2+(x-1)^2}{(x+3)^2-(x-1)^2}=\frac{5}{4}$ کو حل کریں

حل: ہمارے پاس: $\frac{(x+3)^2+(x-1)^2}{(x+3)^2-(x-1)^2}=\frac{5}{4}$

مسئلہ ترکیب و تفصیل کی رو سے

$$\frac{(x+3)^2+(x-1)^2+(x+3)^2-(x-1)^2}{(x+3)^2+(x-1)^2-(x+3)^2+(x-1)^2}=\frac{5+4}{5-4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2(x+3)^2}{2(x-1)^2}=\frac{9}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2=9$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+3}{x-1}=\pm 3$$

$\frac{x+3}{x-1}=3$ یا $\frac{x+3}{x-1}=-3$

$x+3=3x-3$ $x+3=-3x+3$

$-2x=-6$ $4x=0$

$x=3$ $x=0$

اس لیے حل سیٹ $\{0,3\}$ ہے

مثال 5: ثابت کریں کہ $a:b=c:d$ اگر $\frac{ac^2-bd^2}{ac^2+bd^2}:\frac{c^3-d^3}{c^3+d^3}$

حل:

چونکہ $\frac{ac^2-bd^2}{ac^2+bd^2}=\frac{c^3-d^3}{c^3+d^3}$

مسئلہ ترکیب و تفصیل کی رو سے

$$\frac{ac^2-bd^2+ac^2+bd^2}{ac^2-bd^2-ac^2-bd^2}=\frac{c^3-d^3+c^3+d^3}{c^3-d^3-c^3-d^3}$$

$$\frac{2ac^2}{-2bd^2}=\frac{2c^3}{-2d^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

یا $a:b=c:d$

پس ثابت ہوا۔

مشق 18.4

1. اگر $x:y=z:w$ تو ثابت کریں

(i) $\frac{4x+3y}{4x-3y}=\frac{4z+3w}{4z-3w}$ (ii) $\frac{5x-3y}{5x+3y}=\frac{5z-3w}{5z+3w}$

(iii) $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}=\frac{z^3+w^3}{z^3-w^3}$ (iv) $\frac{3x+2y}{3x-2y}=\frac{3z+2w}{3z-2w}$

(v) $\frac{2x+3y+2z+3w}{2x+3y-2z-3w}=\frac{2x-3y+2z-3w}{2x-3y-2z+3w}$

2. ثابت کہ $a:b=c:d$ اگر

(i) $a^2-b^2:a^2+b^2=ac-bd:ac+bd$

(ii) $\frac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\frac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$

3. مندرجہ ذیل مساوات کو بذریعہ مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت حل کریں

(i) $\frac{(x+3)^2-(x-5)^2}{(x+3)^2+(x-5)^2}=\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}}=\frac{1}{10}$ (iv) $\frac{(x+3)^2+(x-1)^2}{(x+3)^2-(x-1)^2}=\frac{5}{4}$

18.3 مشترکہ تغیر (Joint Variation):

18.3(i) مشترکہ تغیر کی تعریف

مشترکہ تغیر ایک تغیر یا ایک سے زائد تغیرات پر منحصر ہوتا ہے۔ مشترکہ تغیریت واقع ہوتا ہے جب ایک تغیر دوسرے کئی متغیرات کے ساتھ تغیر راست یا تغیر معکوس ہوتا ہے۔

مثلاً: (i) اگر x اور y ، z دونوں میں تغیر راست ہو تو ہمارے پاس $x \propto yz \Rightarrow x=kyz$

(ii) اگر x اور y تغیر راست اور z میں تغیر معکوس ہے تو ہمارے پاس $x \propto \frac{y}{z} \Rightarrow x=\frac{ky}{z}$

18.3 (ii) مشترکہ تغیر سے متعلق مسائل حل کرنا:

مثال 1: اگر y اور xz^2 تغیر راست ہے اور $y=4$ جب $x=6$ اور $z=3$. y کی قیمت معلوم کریں جب $x=-81$ اور $z=5$

$$y \propto xz^2$$
$$y=k\,xz^2 \qquad \text{(i)}$$

$y=4$ $x=6$ اور $z=3$ مساوات (i) میں رکھنے سے

$$4=k\,(6)\,(3)^2 \Rightarrow k=\frac{4}{54}=\frac{2}{27}$$

$k = \frac{2}{27}$ مساوات (i) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $y = \frac{2}{27} x z^2 \quad ...(ii)$

اب $x = -81$ اور $z = 5$ مساوات (ii) میں رکھنے سے

$$y = \frac{2}{27}(-81)(5)^2 = 2(-3)(25) = -150$$

مثال 2: اگر s اور v^3 میں تغیر راست اور $\sqrt{t}$ اور u میں تغیر معکوس ہو اور $s = 16$ جب $v = 4$، $t = 9$ اور $u = 24$

s کی قیمت معلوم کریں جب $t = 36, u = 25$ اور $v = 5$

حل: چونکہ s اور v^3 میں تغیر راست اور $\sqrt{t}$ اور u میں تغیر معکوس ہے۔

$$s \propto \frac{v^3}{u\sqrt{t}} \Rightarrow s = k\frac{v^3}{u\sqrt{t}} \quad ... (i)$$

$s = 16$، $t = 9$، $v = 4$ اور $u = 24$ مساوات (i) میں رکھنے سے

$$16 = \frac{k(4)^3}{\sqrt{9}(24)}$$

$$16 = \frac{k(64)}{72} \Rightarrow k = 16 \times \frac{72}{64} = 18$$

$k = 18$ مساوات (ii) میں رکھنے سے

$$s = \frac{18\, v^3}{\sqrt{t}} \quad ... (ii)$$

$u = 25$، $t = 36$ اور $v = 5$ مساوات (ii) رکھنے سے

ہمیں ملا

$$s = \frac{18\,(5)^3}{\sqrt{36}\,(25)} = \frac{18 \times 125}{6 \times 25} = 15$$

مشق 18.5

1. اگر y کا x^2 اور z کے درمیان تغیر راست ہے اور $y = 6$ جب $x = 4$ ، $z = 9$ بطور x اور z کا تفاعل لکھیں اور y کی قیمت معلوم کریں جب $x = -8$ اور $z = 12$

2. اگر y کا x اور u^2 کے درمیان تغیر راست ہے اور v اور t کے درمیان تغیر معکوس ہے۔ $y = 40$ جب $x = 8$ ، $u = 5$ $v = 3$ اور $t = 2$ ۔ x u v اور t کی صورت میں y معلوم کریں۔ y کی قیمت بھی معلوم کریں جب $x = -2$، $u = 4$، $v = 3$

3. اگر w اور u^2 کے درمیان تغیر راست اور v کے جزر المکعب کے درمیان تغیر معکوس ہے اور $w = 216$ جب $u = 6$ اور $v = 27$۔ w کی قیمت معلوم کریں جب $u = 10$ اور $v = 125$

4. اگر سادہ پنڈولم کا ٹائم پریڈ T اور اُس کی لمبائی L کے جذر المربع میں تغیر راست اور ثقلی اسراع 'g' کے جذر المربع میں تغیر معکوس ہے۔

اگر $T = 2$ سیکنڈ، $L = 100$ سینٹی میٹر اور $g = 9.8$ میٹر فی سیکنڈ تو سادہ پنڈولم کا ٹائم پریڈ T معلوم کریں جب $L = 200$ میٹر اور ایک مخصوص بلندی پر $g = 7.6$ ہے۔

5. ایک خاص گیس کا حجم V اور درجہ حرارت T میں تغیر راست اور دباؤ "P" کے جذر المربع میں تغیر معکوس ہے۔ اگر $V = 100$، $T = 30$ اور $P = 64$ ۔ V معلوم کریں جب $T = 60$ اور $P = 81$

18.4 k- طریقہ (K - Method):

جب دو یا دو سے زیادہ نسبتیں برابر ہوں تو ایک واحد علامت "k" کو متعارف کرتے ہوئے کئی مفید تناسب ثابت کئے جاسکتے ہیں۔ ان مساوی نسبتوں کو "k" سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہر نسبت کے لئے علامت k استعمال کرنے کے اس طریقے کو k طریقہ کہتے ہیں k طریقہ بہت سے مسائل حل کرنے میں بہت مفید ہے۔

18.4 (i) k- طریقہ استعمال کرتے ہوئے تناسب پر مبنی مشترکہ مساوات ثابت کرنا:

اگر $a:b::c:d$ ایک تناسب ہے

تو بذریعہ k- طریقہ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

$$\Rightarrow \frac{c}{d} = k \text{ اور } \frac{a}{b} = k$$

$$c = dk \; ... \text{(ii)} \quad \text{اور} \quad a = bk \; ... \text{(i)}$$

ان مساوات کے ذریعے ہم تناسب سے متعلق مسائل حل کرسکتے ہیں

مثال 1: اگر $a:b::c:d$ تو ثابت کریں $\dfrac{8a-5b}{8a+5b} = \dfrac{8c-5d}{8c+5d}$

حل: چونکہ $a : b = c : d$

فرض کریں $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$

تو $a = bk$ ، $c = dk$

اب

$$\text{L.H.S} = \frac{8a-5b}{8a+5b} = \frac{8bk-5b}{8bk+5b} = \frac{b(8k-5)}{b(8k+5)} = \frac{8k-5}{8k+5}$$

$$\text{R.H.S} = \frac{8c-5d}{8c+5d} = \frac{8dk-5d}{8dk+5d} = \frac{d(8k-5)}{d(8k+5)} = \frac{8k-5}{8k+5}$$

$\because \quad \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

$$\therefore \quad \frac{8a-5b}{8a+5b} = \frac{8c-5d}{8c+5d}$$

پس ثابت ہوا

مثال 2: اگر $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$ تو ثابت کریں کہ $\dfrac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \dfrac{ace}{bdf}$

حل: ہمارے پاس $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$

فرض کریں $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} = k$

تو $\dfrac{a}{b} = k$ ، $\dfrac{c}{d} = k$ ، $\dfrac{e}{f} = k$

$$\Rightarrow a = bk \quad \Rightarrow c = dk \quad \text{؛} \quad \Rightarrow e = fk$$

اب

$$\text{L.H.S} = \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{(bk+dk+fk)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{[k(b+d+f)]^3}{(b+d+f)^3} = k^3$$

$$\text{R.H.S} = \frac{ace}{bdf} = \frac{(bk)(dk)(fk)}{bdf} = \frac{k^3 bdf}{bdf} = k^3$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$$\therefore \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{ace}{bdf}$$

پس ثابت ہوا

مثال 3:

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ تو ثابت کریں کہ $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab+cd+ef)^2$

حل: فرض کریں $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

$\Rightarrow a = bk$ ، $c = dk$ ، $e = fk$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) \\ &= (b^2k^2+d^2k^2+f^2k^2)(b^2+d^2+f^2) \\ &= k^2(b^2+d^2+f^2)(b^2+d^2+f^2) \\ &= k^2(b^2+d^2+f^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S} &= (ab+cd+ef)^2 \\ &= \left[(bk)b+(dk)d+(fk)f\right]^2 \\ &= \left[kb^2+kd^2+kf^2\right]^2 \\ &= \left[k(b^2+d^2+f^2)\right]^2 \\ &= k^2(b^2+d^2+f^2)^2 \end{aligned}$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$$\therefore (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab+cd+ef)^2$$

پس ثابت ہوا

مشق 18.6

1. اگر $p : q = r : s$ تو ثابت کریں

(i) $\frac{8p-3q}{8p+3q} = \frac{8r-3s}{8r+3s}$

(ii) $3\sqrt{\frac{p^3+r^3}{q^3+s^3}} = \frac{p}{q}$

(iii) $(p^2+q^2) : \frac{p^3}{p+q} = (r^2+s^2) : \frac{r^3}{r+s}$

(iv) $p^5+r^5 : q^5+s^5 = p^3r^2 : q^3s^2$

(v) $\frac{p-q}{p} : \frac{q}{p+q} = \frac{r-s}{r} : \frac{s}{r+s}$

2. اگر $a : b = c : d = e : f$ تو ثابت کریں

(i) $\frac{a^4b^2+a^2e^2-e^4f}{b^6+b^2f^2-f^5} = \frac{a^4}{b^4}$

(ii) $\frac{a^2b+c^2d+e^2f}{ab^2+cd^2+ef^2} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$

(iii) $\frac{ac}{bd}+\frac{ce}{df}+\frac{ea}{fb} = \frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{d^2}+\frac{e^2}{f^2}$

18.4 (ii) تغیرات پر مبنی روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1: جسم کی مخفی توانائی کا جسم کی کمیت اور اونچی 'h' میں شتر کہ تغیر ہے اگر مخفی توانائی 1960 حول جب کہ m=2 کلو گرام اور اونچائی h=100 جسم کا وزن 5 کلو گرام اور اونچائی 300 میٹر ہے تو جسم کی مخفی توانائی معلوم کریں۔

حل:

$p \propto \text{mh}$

$p = \text{kmh} \ldots \text{(i)}$ (جبکہ k مستقل ہے)

$h = 100, m = 2$ اور $p = 1960$ مساوات (i) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $1960 = k\,(2)\,(100)$

$\Rightarrow k = \dfrac{1960}{200} = 9.8$

K کی قیمت مساوات (i) میں رکھنے سے

$p = 9.8\text{mh} \ldots \text{(ii)}$

اب اور مساوات (ii) میں $m=5$ ء $h = 300$ رکھنے سے

ہمیں ملا $p = 9.8\,(5)\,(300)$

$= 14700$ جول

مثال 2: ہک کے قانون کے مطابق اسپرنگ کو کھینچنے والی قوت اور کل طوائی میں تغیر راست ہے جب کہ F=64 پاؤنڈ S=3.2 انچ

معلوم کریں (i) S جب F = 100 lb

(ii) F جب S = 0.4 انچ

حل: چونکہ $F \propto S$

$\Rightarrow F=kS \ldots \text{(i)}$

F=64 اور S=3.2 مساوات (i) میں میں رکھنے سے

$64=3.2\,k$

$\Rightarrow k= \dfrac{64}{3.2} = 20$

K=20 مساوات (i) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $F=20\,S \ldots \text{(ii)}$

(i) F=100 مساوات (ii) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $100=20\,S$

$\Rightarrow S=5$ انچ

(ii) S=0.4 مساوات (ii) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $F=20\,(0.4)$

$= 8$ پاؤنڈ

مثال 3: مزدوری c اور مزدوروں کی تعداد "n" اور اوسط دنوں کی تعداد d میں مشترکہ تغیر ہے اگر 200 مزدوروں کی 10 دنوں کی مزدوری 450,000 روپے ہے تو 300 مزدوروں کی 16 دنوں کی مزدوری معلوم کریں

حل: مزدوری کا مزدوروں کی تعداد اور دنوں میں تغیر راست ہے

$C \propto nd$

$C = knd \qquad \text{(i)}$

$C = 450{,}000,\ n = 200$ اور $d = 10$ مساوات (i) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $450{,}000 = k(200)(10)$

$\Rightarrow k = \dfrac{450{,}000}{2000} = 225$

$k = 225$ مساوات (i) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $C = 225 \cdot nd \ \cdots \text{(ii)}$

$n = 300$ اور $d = 16$ مساوات (ii) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $C = 225 \times 300 \times 16$

$C = 1080000$

پس 300 مزدوروں کی 16 دنوں کی مزدوری 1080000 روپے ہے

مثال 4: ہاسٹل کے اخراجات طالب علموں کی تعداد کے مطابق کبھی ایک جیسے اور کبھی مختلف ہوتے ہیں۔ جب طالب علم 140 ہیں تو 19300 روپے اور جب 200 طالب علموں کے لیئے 26500 روپے ہیں۔ 300 طالب علموں کے لیئے اخراجات معلوم کریں

حل: فرض کریں ایک جیسے اخراجات کو "C" اور مختلف اخراجات "Q" کو سے ظاہر کیا جاتا ہے x طلباء کی تعداد اور کل اخراجات کو P سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

چونکہ اخراجات اور طلباء کی تعداد میں تغیر راست ہے

$\because \quad Q \propto x$

$\therefore \quad Q = nx$ (n ایک مستقل ہے)

$P = C + Q$

$P = C + nx$

دی گئی شرط کے مطابق

$19300 = C + 140n \quad ...(i)$ اور $26500 = C + 200n \quad ...(ii)$

$P = C + 300n \quad ...(iii)$

مساوات (i) اور (ii) سے ہمیں ملا: $C = 2500$ اور $n = 120$

اب مساوات (iii) ہوئی۔

$P = 2500 + 300(120) = 38500$

300 طالب علموں کے کل اخراجات 38500 روپے ہیں

مشق 18.7

1. تار میں کرنٹ اور پوٹینشل ڈفرنس میں تغیر راست اور مزاحمت میں تغیر معکوس ہے۔ اگر I=6amp جب V=220 volt اور R=5ohm۔ I معلوم کریں جب V=180 volt اور R=8ohm ہے۔
2. روشنی کی شدت جو کہ فٹ کینڈلز میں ناپی جاتی ہے۔ روشنی کے منبع سے فاصلے کے مربع کے ساتھ تغیر معکوس ہے۔ فرض کریں کہ ایک اُنچے بلب کی شدت 3 میٹر کے فاصلے پر 0.08 فٹ کینڈلز ہے۔ 8 میٹر پر شدت کی سطح معلوم کریں۔
3. مستطیل بیم کی طاقت "S" جو کہ تغیر راست ہے چوڑائی "b" اور گہرائی "d" کے مربع کے ساتھ۔ اگر بیم 9 سینٹی میٹر چوڑی اور 12 سینٹی میٹر گہری سپورٹ 1000 پاؤنڈ کے ساتھ۔ معلوم کریں کہ 12 سینٹی میٹر چوڑی اور 9 سینٹی میٹر گہرائی والی بیم کتنے وزن کو سہارا دے گی۔
4. مزدوروں کی مزدوری "c" اور مزدوروں کی تعداد "n" اور اوسط دونوں کی تعداد "d" میں مشترکہ تغیر ہے اگر 100 مزدوروں کی 15 دنوں کی مزدوری 9000 روپے ہے تو 300 مزدوروں کی 20 دنوں کی مزدوری معلوم کریں۔
5. نئی کار کی خریداری پر سیل ٹیکس اور کار کی قیمت میں تغیر راست ہے۔ اگر ایک نئی کار 2000000 روپے خریدی جاتی ہے تو سیل ٹیکس 40000 روپے ہے۔ اگر نئی کار کی قیمت 280000 روپے ہو تو کتنا سیل ٹیکس لیا جائے گا۔

اعادہ مشق 18

1. مندرجہ ذیل میں درست جواب کا انتخاب کریں

(i) تناسب $p:q::r:s$ میں p کہلاتا ہے

(a) تیسرا تناسب (b) وسطین (c) چوتھا تناسب (d) پہلا تناسب

(ii) نسبت $l : m$ میں l _____ کہلاتا ہے۔

(a) مقدم (b) موخر (c) تعلق (d) ان میں کوئی نہیں

(iii) نسبت $u : v$ میں v _____ کہلاتا ہے۔

(a) مقدم (b) موخر (c) تعلق (d) ان میں کوئی نہیں

(iv) اگر a، b، c مسلسل تناسب میں ہیں تو b _____ تناسب a اور c کے درمیان کہلاتا ہے۔

(a) پہلا (b) وسطین (c) تیسرا (d) ان میں سے کوئی نہیں

(v) a^2 اور b^2 کے درمیان وسطین _____ ہے۔

(a) $\sqrt{ab}$ (b) ab (c) $\frac{a}{b}$ (d) $-ab$

(vi) اگر $x+5 : x+7 = 5 : 7$ تو x _____ برابر ہے۔

(a) 2 (b) −1 (c) 0 (d) 1

(vii) اگر 1، 9، x اور 45 تناسب میں ہیں تو $x =$ _____

(a) 27 (b) $\frac{1}{5}$ (c) 5 (d) 405

(viii) اگر $p : q = r : 5$ تو $p : r = q : 5$ یہ _____ خاصیت کہلاتی ہے۔

(a) ترکیب نسبت (b) عکس نسبت

(c) تفصیل نسبت (d) ابدال نسبت

(ix) اگر $x : y = z : w$ تو ترتیب نسبت کے مطابق

(a) $\frac{x}{x+y} = \frac{z}{z+w}$ (b) $\frac{x}{x-y} = \frac{z}{z-w}$

(c) $\frac{x-y}{x+y} = \frac{z-w}{z+w}$ (d) $\frac{x-y}{y} = \frac{z-w}{w}$

(x) اگر $a : b = c : d$ تو پھر ابدال نسبت کے مطابق

(a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (b) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{c}$ (c) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (d) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

(xi) 3,5,12 چوتھا متناسب _____ ہے

(a) 20 (b) 15 (c) 60 (d) 36

(xii) اگر $2x$، $3y$ اور $6z$ مسلسل تناسب میں ہے تو _____

(a) $y^2 = 12xy$ (b) $9y^2 = xz$ (c) $9y^2 = 12xz$ (d) $3y^2 = 4xz$

(xiii) اگر $\frac{x}{y} = \frac{w}{z}$ تو تفصیل نسبت کے مطابق ہے

(a) $\frac{x-y}{y} = \frac{w-z}{z}$ (b) $\frac{x+y}{y} = \frac{w+z}{z}$

(c) $\frac{x}{x+y} = \frac{w}{w+z}$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

(xiv) قوت اور اسراع _____ ہیں

(a) تغیر راست (b) مشترکہ راست (c) تغیر معکوس (d) ان میں سے کوئی نہیں

(xv) اگر $a : 4 = 15 : 5$ تو $a =$ _____

(a) 20 (b) 15 (c) 12 (d) 10

2. نسبت معلوم کریں

(i) 100 میٹر اور 500 سنٹی میٹر (ii) 500 کلوگرام اور 300 گرام

3. مندرجہ ذیل میں x کی قیمت معلوم کریں

(i) $9:x-10=x+13:12$ (ii) $5:x-3=x+11:3$

4. y اور x میں تغیر راست ہے اور $y=25$ جب کہ $x=75$ تو y معلوم کریں جبکہ $x=144$

5. y اور x میں تغیر معکوس ہے اور $y=100$ جبکہ $x=\frac{1}{2}$ تو y معلوم کریں جب $x=4$

6. اگر $x:y=3:w$ تو ثابت کریں کہ $\frac{7x+5y}{7x-5y}=\frac{7z+5w}{7z+5w}$

7. مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کی مدد سے حل کریں

$$\frac{(x-3)(x-5)}{(x-7)(x-2)}=\frac{(x-6)(x-2)}{(x-1)(x-8)}$$

8. اگر x اور y میں تغیر راست اور z تغیر معکوس ہے۔ اگر $x=30$ جب کہ $y=15$ اور $z=2$ ۔ x معلوم کریں اگر $y=30$ جبکہ $z=12$

9. سرکٹ میں کرنٹ اور مزاحمت (پیائش اوہم ہیں) تغیر معکوس ہے اگر سرکٹ میں کرنٹ 40amp اور مزاحمت 10 ohms ہے تو کرنٹ معلوم کریں اگر اس کی مزاحمت 12 ohms ہے

خلاصہ:

- ایک ہی قسم کی دو مقداروں کا موازنہ نسبت کہلاتا ہے۔
- دو نسبتیں $a:b$ اور $c:d$ باہم برابر ہیں تو ہم لکھ سکتے ہیں $a:b::c:d$
- دو نسبتوں کی برابری تناسب کہلاتی ہے۔
- اگر دو متغیرات اس طرح مربوط ہوں کہ ایک کی مقدار میں اضافہ (یا کمی) دوسری مقدار میں باترتیب اضافہ (یا کمی) کا باعث بنے تو یہ تغیر راست کہلاتی ہیں۔
- اگر متغیرات اس طرح مربوط ہوں کہ ایک کی مقدار میں اضافہ (یا کمی) دوسری مقدار میں بالترتیب کمی (یا اضافہ) کا باعث بنے تو یہ تغیر معکوس کہلاتی ہیں۔
- تناسب سے متعلق مسئلے

(i) مسئلہ عکس نسبت: اگر $a:b=c:d$ تو $b:a=d:c$

(ii) مسئلہ ابدال نسبت: اگر $a:b=c:d$ تو $a:c=b:d$

(iii) مسئلہ ترکیب نسبت: اگر $a:b=c:d$ تو (a) $a+b:b=c+d:d$ (b) $a:a+b=c:c+d$

(iv) مسئلہ تفصیل نسبت: اگر $a:b=c:d$ تو (a) $a-b:b=c-d:d$ (b) $a:a-b=c:c-d$

(v) مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت: اگر $a:b=c:d$ تو $a+b:a-b=c+d:c-d$

- اگر ایک متغیر ایک یا ایک سے زائد متغیرات میں تغیر راست یا تغیر معکوس ہو تو یہ مشترکہ تغیر کہلاتا ہے۔

یونٹ نمبر 19

قالب اور مقطع

طلباء کے آموزشی حاصلات

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہوجائیں گے کہ

- حقیقی اندراج (ارکان) والے قابل مستطیل شکل کا عملی زندگی سے ربط قائم کر سکیں۔
- قالب کی قطاروں اور قالموں کے بارے میں جان سکیں
- قالب کے مرتبہ۔
- دو مساوی قالب۔
- قطاری قالب، کالمی قالب، مستطیلی قالب، مربعی قالب، صفری قالب، اکائی قالب، اسکیلر یا میزانیہ قالب، وتری قالب، قالب کا بدل، سمیٹرک قالب (3x3) اور اسکیو سمیٹرک قالب کی تعریف اور نشان دہی کر سکیں۔
- جانتا کہ دیئے گے قالموں کی جمع اور تفریق ممکن ہے۔
- قالب کی حقیقی عدد سے اسکیلر کی ضرب۔
- قالبوں کی جمع اور تفریق۔
- قانون مبادلہ اور قانون تلازم بلحاظ جمع کی تصدیق کرنا
- جمع ذاتی قالب۔
- قالب کا جمع المعکوس معلوم کرنا۔
- جاننا کہ آیا دیے گئے قالبوں کی ضرب ممکن ہے یا نہیں۔
- دو (یا تین) قالبوں کی ضرب۔
- قانون تلازم بلحاظ ضرب کی تصدیق۔
- قانون تقسیمی کی تصدیق۔
- مثال کی مدد سے ثابت کریں کہ قانون مبادلہ بلحاظ ضرب عموماً نہیں ہوتا ہے (جیسے AB≠BA)
- ضربی ذاتی قالب کا جاننا۔
- $(AB)^t = B^tA^t$ کی تصدیق۔
- مربعی قالب کا مقطع
- قالب کے مقطع کی قیمت معلوم کریں
- نادر اور غیر نادر قالب
- مائینرز اور کو فیکٹرس
- قالب کا مُتصل
- غیر نادر قالب A کا ضربی معکوس معلوم کریں اور تصدیق کریں کہ جب کہ I ضربی ذاتی قالب ہے
- بذریعہ طریقہ متصل، غیر نادر قالب کا ضربی معکوس معلوم کرنا
- دو متغیرات والی یک درجی ہمزاد مساواتوں کو عملی زندگی کے مسائل سے ربط پیدا کرتے ہوئے حل کریں
- معکوس قالب کا طریقہ
- کریمر (Crammer) کے اصول

19.1 قالبوں کا تعارف Introduction to Matrices

قالبوں کے تعلق ریاضی کی شاخ یک درجی الجبرا اس کا استعمال خاص طور پر بزنس، انجنیئرنگ، فزکس اور کمپیوٹر سائنس میں کیا جاتا ہے۔ قالب کا نظریہ مشہور ریاضی دان ارتھر کیلی (1821-1895) نے پیش کیا۔

19.1 (i) حقیقی اندراج (ارکان) والے قالب مستطیلی شکل کا عملی زندگی سے ربط

قالب عناصر کی مستطیلی شکل ہوتی ہے۔ عناصر کو علاقی طور پر اظہارے یا اعداد میں ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔ قالب کو عموماً انگریزی کے بڑے حروف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے اور ہر ارکان یا عنصر کو چھوٹے حرف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ قالب کے عناصر (ارکان) کو [ ] یا () ہیں بند کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ یا } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

a_{11}، a_{22}، اور a_{33} خاص وتر کے ارکان یا عناصر میں اور وتری عناصر (ارکان) کہلاتے ہیں۔

آئیں روز مرہ زندگی سے ایک مثال لیتے ہیں، مندرجہ ذیل جدول تین گھروں میں رہنے والوں کی تعداد، ٹیلی وژن اور کمپیوٹر ظاہر کئے گئے ہیں۔

	کمپیوٹر	ٹیلی وژن	رہائشی
گھر A	2	4	1
گھر B	2	6	3
گھر C	1	2	0

اوپر والا مواد قالبی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نوٹ: لفظ "قالب" کی جمع "قالبوں" ہے

19.1 (ii) قالب کی قطاروں اور کالموں کے بارے میں جاننا

قالب میں افقی خط میں اندراج قالب کی قطار کہلاتی ہے اور قالب میں عمودی خط میں اندراج قالب کا کالم کہلاتا ہے

مثال کے طور پر $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ دو افقی خطوط میں اندراج ہے لہٰذا یہ دو قطاروں پر مشتمل ہے۔ اس کا چار عمودی خطوط میں اندراج ہے یہ چار کالموں پر مشتمل ہے

19.1. (iii) قالب کا مرتبہ

قالب کے مرتبہ کو اُس کی قطاروں اور کالموں کی تعداد سے وضاحت کی جاتی ہے۔

قالب کے مرتبہ کو mxn (m سے n پڑھتے ہیں) ظاہر کرتے ہیں۔ دیئے گئے قالب میں m قطاروں کی تعداد اور n کالموں کی تعداد ہے۔

مثال کے طور پر

اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 12 & 11 & 35 \end{bmatrix}$ تو A کا مرتبہ 2x3 ہے

(iv) 19.1. دو مساوی قالب Equality of two matrices

دو قالب A اور B مساوی قالب کہلاتے ہیں اگر ان کی مرتبے ایک جیسے اور ان کی متناظرہ ارکان (عناصر) برابر ہوں علامتی طور پر ہم یوں A=B لکھتے ہیں۔

مثال کے طور پر

$$A=\begin{pmatrix}2&6&1\\0&5&3\end{pmatrix}$$ اور $$B=\begin{pmatrix}2&6&1\\0&5&3\end{pmatrix}$$ مساوی قالب ہیں

$$P=\begin{pmatrix}1&2\\5&4\end{pmatrix}$$ اور $$Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$ مساوی قالب نہیں ہیں

کیونکہ ان کا مرتبہ ایک جیسا نہیں ہے۔

19.2 قالبوں کی اقسام Types of Matrices

(i) 19.2. قطاری قالب، کالمی قالب، مستطیلی قالب مربعی قالب، صفری قالب، اکائی قالب، اسکیر یا میزانیہ قالب، وتری قالب، قالب کابدل، سمیٹرک قالب (3x3 تک) اور اسکیو سمیٹرک قالب کی تعریف اور نشان دہی کریں

قطاری قالب (Row Matrix):

کسی قالب میں صرف ایک قطار ہو وہ قطاری قالب کہلاتا ہے

مثال کے طور پر $\begin{bmatrix}1&4&7\end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix}4&3&8&6\end{bmatrix}$ قطاری قالب ہیں

کالمی قالب Column matrix

کسی قالب میں صرف ایک کالم ہو وہ کالمی قالب کہلاتا ہے

مثال کے طور پر

$$\begin{bmatrix}7\\5\\9\end{bmatrix}$$ اور $$\begin{bmatrix}1\\2\\0\\5\end{bmatrix}$$ کالمی قالب ہیں

مستطیلی قالب Rectangular matrix

کسی قالب جس میں قطاروں کی تعداد اور کالموں کی تعداد برابر نہ ہو وہ مستطیلی قالب کہلاتا ہے جیسے $m \neq n$.

مثال کے طور پر

$$A=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}5&3&9\\1&-7&10\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}2&1\\7&2\\-1&1\end{bmatrix}$$ مستطیلی قالب ہیں

مربعی قالب (Square Matrix)

قالب جس میں قطاروں کی تعداد اور کالموں کی تعداد برابر ہو وہ مربعی قالب کہلاتا ہے جیسے $m = n$ مثال کے طور پر

$$A=\begin{bmatrix}3&2\\1&4\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}9&5&2\\1&8&5\\3&1&6\end{bmatrix}$$ اور $$C=\begin{bmatrix}x&y&z&1\\a&b&c&1\\p&q&r&1\\m&n&o&1\end{bmatrix}.$$ مربعی قالب ہیں

صفری قالب Zero/null matrix

صفری قالب کا ہر عنصر صفر کے برابر ہو اِسے عموماً بڑا حرف تہجی 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ صفری قالب کی چند مثالیں مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ، } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ اور } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وتری قالب Diagonal matrix

مربعی قالب وتری قالب کہلاتا ہے اگر اس کے تمام عناصر صفر ہوں سوائے کم از کم ایک عنصر کے جو خاص وتر پر ہو

مثال کے طور پر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ اور } C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وتری قالب ہیں

اسکیلر (میزانیہ قالب) ScalarMatrix

وتری قالب جس میں وتر کے تمام عناصر ایک جیسے ہوں اسکیلر (میزانیہ قالب) ہیں

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ اور } C = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

اسکیلر (میزانیہ قالب) ہیں

اکائی قالب Identity/unit matrix

وتری قالب جس میں خاص وتر کا ہر عنصر ا ہوتا ہے

اسے عموماً بڑے حرف I سے ظاہر کرتے ہیں

مثال کے طور پر

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

قالب کا بدل Transpose of a matrix

کسی قالب کی قطاروں کو کالموں میں یا کالموں کو قطاروں میں تبدیل کرنے سے جو قالب حاصل ہوتا ہے وہ قالب کا بدل کہلاتا ہے اسے A^t سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}. \text{ اور } \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ کا بدل ہے}$$

سمیٹرک قالب Symmetric Mystic

مربعی قالب کو سمیٹرک قالب کہا جاتا ہے اگر اُس کا بدل خود وہ ہی ہوتا ہے یعنی $A^t = A$. جیسے

مثال کے طور پر

اگر
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 2 & 5 & -11 \\ 17 & -11 & 9 \end{bmatrix} \text{ تو } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 2 & 5 & -11 \\ 17 & -11 & 9 \end{bmatrix}.$$

جیسا کہ $A^t = A$. لہذا سمیٹرک قالب ہے

اسکیو سمیٹرک قالب Skew symmetric matrix

مربعی قالب کو اسکیو سمیٹرک قالب کہا جاتا ہے اگر اُس کا بدل خود وہ ہی ہو مگر منفی

جیسے مثال کے طور پر

اگر $A=\begin{bmatrix}0&3&4\\-3&0&7\\-4&-7&0\end{bmatrix}$ تو $A^{T}=\begin{bmatrix}0&-3&-4\\3&0&-7\\4&7&0\end{bmatrix}=-A$

جیسا کہ $A^{t}=-A$ لہذا A اسکیو سمیٹرک قالب ہے

19.3 قالبوں کی جمع اور تفریق Addition and Subtraction of Matrices

19.3 (i) جاننا کہ آیا دیئے گئے قالبوں کی جمع اور تفریق ممکن ہے

اگر دو قالب A اور B ایک جیسے مراتب رکھتے ہیں تو ان کی جمع اور تفریق ممکن ہے

مثال کے طور پر

$\begin{bmatrix}2&6\\5&9\end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix}1&4\\4&3\end{bmatrix}$ کی جمع اور تفریق ممکن ہے

19.3(ii) قالب کی حقیقی عدد سے میزانیہ ضرب

کسی قالب کی حقیقی عدد سے ضرب میزانیہ ضرف کہلاتی ہے۔ میزانیہ ضرب میں قالب میں ہر اندراج (سفر) دیے ہوئے میزانیہ C سے ضرب بنتا ہے۔ اگر C ایک میزانیہ ہے اور A قالب ہے تو قالب کی میزانیہ ضرب کو CA سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر

اگر $A=\begin{pmatrix}0&-1&5\\-1&2&3\\-2&0&4\end{pmatrix}$ اور $c=-5$ تو $cA=-5\begin{pmatrix}0&-1&5\\-3&2&1\\-2&0&4\end{pmatrix}$

یعنی $cA=\begin{pmatrix}0&5&-25\\15&-10&-5\\-10&0&20\end{pmatrix}$

19.3(iii) قالبوں کی جمع اور تفریق Add and Subtract Matrices

دو قالب A اور B جمع اور تفریق کئے جاتے ہیں دونوں قالبوں کے متناظرہ عناصر کی جمع اور تفریق کے ذریعے

مثال کے طور پر

اگر $A=\begin{pmatrix}2&5\\-1&3\end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix}1&4\\3&7\end{pmatrix}$ تو $A+B=\begin{pmatrix}2+1&5+4\\-1+3&3+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&9\\2&10\end{pmatrix}$

تفریق کے لیے

اگر $P=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&6&1\\2&9&0\end{pmatrix}$، $Q=\begin{pmatrix}10&4&2\\2&7&1\\1&9-4\end{pmatrix}$ تو $P-Q=\begin{pmatrix}1-10&0-4&2-2\\4-2&6-7&1-1\\-2-1&9-9&0-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&-4&0\\2&-1&0\\-3&0&-4\end{pmatrix}$

19.3(iv) قانون مبادلہ اور قانون تلازم بلحاظ جمع تصدیق

قانون مبادلہ بلحاظ جمع

اگر A اور B قالبوں کے مراتب ایک ہی ہوں تو قانون مبادلہ بلحاظ جمع ہم یوں واضح کرتے ہیں

مثال: قانون مبادلہ بلحاظ جمع تصدیق کریں

اگر $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & 6 & 1\\ -2 & 9 & 0\end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix}10 & 4 & 2\\ 2 & 7 & 1\\ 1 & 9 & 4\end{pmatrix}$

یہاں
$$A+B=\begin{pmatrix}1+10 & 0+4 & 2+2\\ 4+2 & 6+7 & 1+1\\ -2+1 & 9+9 & 0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 4 & 4\\ 6 & 13 & 2\\ -1 & 18 & 4\end{pmatrix}$$

اب
$$B+A=\begin{pmatrix}10+1 & 4+0 & 2+2\\ 2+4 & 7+6 & 1+1\\ 1-2 & 9+9 & 4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 4 & 4\\ 6 & 13 & 2\\ -1 & 18 & 4\end{pmatrix}.$$

چونکہ ، $A+B=B+A$ اس لئے قانون مبادلہ بلحاظ جمع تصدیق ہوا

قانون تلازم بلحاظ جمع Associative law w.r.t addition

اگر A،B اور C ایک ہی مراتب کے تین قالب ہیں تو قانون تلازم بلحاظ جمع کی یوں وضاحت کی جاتی ہے

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

مثال: قانون تلازم بلحاظ جمع تصدیق کریں

اگر $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$، $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$ اور $C=\begin{pmatrix}9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}$

یہاں
$$(A+B)+C=\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}$$
$$(A+B)+C=\begin{pmatrix}15 & 18\\ 21 & 24\end{pmatrix}$$

اب
$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}14 & 16\\ 18 & 20\end{pmatrix}$$
$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}15 & 18\\ 21 & 24\end{pmatrix}$$

چونکہ $(A+B)+C=A+(B+C)$ اس لیئے قانون تلازم بلحاظ جمع تصدیق ہوا

19.3(v) جمع ذاتی قالب (Additive Identity)

اگر O اور A ایک ہی مراتب کے دو قالب ہیں اور جبکہ $A+O=A=O+A$. یہاں O صفری قالب ہے اور A کا جمع ذاتی قالب کہلاتا ہے

19.3 (vi) قالب جمعی معکوس معلوم کریں Find additive inverse of a matrix

اگر B اور A ایک ہی مراتب کے دو قالب ہیں اس طرح کی $A + B = O = B + A$ تو A اور B ایک دوسرے کے جمع معکوس ہیں۔ قالب A کے جمع معکوس کو A– سے ظاہر کرتے ہیں

مثال کے طور پر

اگر
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

تو
$$-A = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -4 & -6 & -1 \\ 2 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

19.4 قالبوں کی ضرب (2 سے 2 تک)

19.4 (i) جاننا کہ آیا دیئے گئے قالبوں کی ضرب ممکن ہے یا نہیں

دو قالب A اور B کی ضرب ممکن ہے اگر پہلے قالب کے قالموں کی تعداد دوسرے قالب کی قطاروں کی تعداد کے برابر ہو

مثال کے طور پر

$\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ کی ضرب ممکن ہے

19.4 (ii) دو (یا تین) قالبوں کی ضرب Multiply two (or three) matrices

اگر دو قالبوں کی ضرب ممکن ہے تو حاصل ضرب AB کا عنصر a_{ij} حاصل ہو گا بذریعہ ضرب A کی i ویں قطار اور B کی j واں قالم سے

مثال نمبر 1

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ تو AB معلوم کریں

حل

یہاں AB ممکن ہے کیونکہ A کے کالموں کی تعداد 2 ہے اور B کی قطاروں کی تعداد بھی 2 ہے

اب
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1(0)+2(6) & 1(-1)+2(7) \\ 3(0)+4(6) & 3(-1)+4(7) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0+12 & -1+14 \\ 0+24 & -3+28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$

مثال 2

حاصل ضرب معلوم کریں

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\5 & 1\end{pmatrix}$$

حل

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\5 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4+12 & 5+0\\8+16 & 10+0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\5 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}16 & 5\\24 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\5 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}96+25 & 128+5\\144+50 & 192+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}121 & 133\\194 & 202\end{pmatrix}$$

(iii) 19.4 قانون تلازم بلحاظ ضرب کی تصدیق

فرض کریں A ,B اور C تین قالب ہیں تو قانون تلازم بلحاظ ضرب یوں جاتی ہے .(AB)C=A(BC)

مثال نمبر 1 قانون تلازم بلحاظ ضرب تصدیق کریں جب کہ

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 5\\1 & 2\end{pmatrix} \text{ اور } B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\4 & 2\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix}.$$

پڑتال

$$\text{L.H.S}=(AB)C$$

$$\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\4 & 2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-1 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 13\\2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11 & 36\\-5 & 4\end{bmatrix}$$

$$\text{R.H.S}=A(BC)$$

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-2 & 3\\4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -4\\-2 & 24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11 & 36\\-5 & 4\end{bmatrix}$$

پس قانون تلازم بلحاظ ضرب تصدیق ہوا

(iv) 19.4 قانون تقسیمی کی تصدیق Verify distributive laws

فرض کریں A ,B اور C تین قالب ہیں تو قانون تقسیمی ہوتے ہیں

(بایاں قانون تقسیمی) A(B+C) = (AB)+(AC)

(دایاں قانون تقسیمی) (B+C) A = (BA)+(CA)

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}$ تو مندرجہ ذیل کی تصدیق کریں

(i) $A(B+C)=(AB)+(AC)$ (ii) $(B+C)A=(BA)+(CA)$

پڑتال

(i) $A(B+C)=(AB)+(AC)$

$$\text{L.H.S}=A(B+C)$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-1\\1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&3\\-1&-2\end{bmatrix}$$

$$\text{R.H.S}=AB+AC$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&1\\-1&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&2\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&3\\-1&-2\end{bmatrix}$$

پس $LHS = RHS$

لہذا $A(B+C)=(AB)+(AC)$

پس تصدیق ہوا

جبکہ اس ہی طریقے کے مطابق $(B+C)A=(BA)+(CA)$ کی بھی تصدیق کی جاسکتی ہے

19.4 (v) مثال کی مدد سے ثابت کریں کہ قانون مبادلہ بلحاظ ضرب عموماً نہیں ہوتا ہے

مثال

فرض کریں $A=\begin{bmatrix}5&2\\-2&-1\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}-1&2\\3&-2\end{bmatrix}$ تصدیق کریں کہ $AB \neq BA$

پڑتال:

$$AB=\begin{bmatrix}5&2\\-2&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&2\\3&-2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}(-5+6)&(10-4)\\(2-3)&(-4+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6\\-1&-2\end{bmatrix}$$

Now, اب

$$BA=\begin{bmatrix}-1&2\\3&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5&2\\-2&-1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}(-5-4)&(-2-2)\\(15+4)&(6+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9&-4\\19&8\end{bmatrix}$$

$$\because AB \neq BA \quad \therefore$$

لہذا قانون مبادلہ بلحاظ ضرب عموماً نہیں ہوتا ہے

19.4 (vi) ضربی ذاتی قالب (Multiplicative Identity of a matrix)

فرض کریں A، n مرتبہ کا مربعی قالب ہے تو I_n اکائی قالب ہے یہ ذاتی قالب بلحاظ ضرب یا ضربی ذاتی قالب کہلائے گا یوں $AI_n = A$ یا $I_nA = A$ واضح کرتے ہیں۔

مثال

فرض کریں $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ تصدیق کریں کہ $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ضربی ذاتی قالب ہے

حل دیا ہوا ہے کہ

$$AI_2=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=A$$

$$I_2A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=A.$$

19.4 (vii) تصدیق کریں $(AB)^t = B^tA^t$ Verify the result

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\end{bmatrix}$. تصدیق کریں کہ $(AB)^t=B^tA^t$

پڑتال

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2\\11&-4\end{bmatrix}$$

$$(AB)^t=\begin{bmatrix}5&11\\-2&-4\end{bmatrix}.$$

اب

$$B^tA^t=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&11\\-2&-4\end{bmatrix}$$

$(AB)^t=B^tA^t.$

پس تصدیق ہوئی

مثال 2:

اگر $A=\begin{pmatrix}6&5&2\\4&6&3\\0&1&7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}6&8&0\\5&1&2\\3&6&4\end{pmatrix}$. تصدیق کریں $AB'=B'A'$

تصدیق

$$AB=\begin{pmatrix}6&5&2\\4&6&3\\0&1&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&8&0\\5&1&2\\3&6&4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}36+25+6&48+5+12&0+10+8\\24+30+9&32+6+18&0+12+12\\0+5+21&0+1+42&0+2+28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}67&65&18\\63&56&24\\26&43&30\end{pmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 67 & 65 & 18 \\ 63 & 56 & 24 \\ 26 & 43 & 30 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 67 & 63 & 26 \\ 65 & 56 & 43 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

اب، $B^tA^t = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}^t$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 36+25+6 & 24+30+9 & 0+5+21 \\ 48+5+12 & 32+6+18 & 0+1+42 \\ 0+10+8 & 0+12+12 & 0+2+28 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 67 & 63 & 26 \\ 65 & 56 & 43 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

پس تصدیق ہوئی $(AB)^t = B^tA^t$.

مشق 19.1

1. مندرجہ ذیل قالبوں کی قسم بتائیں

(i). $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (ii). $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (iii). $\begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$ (iv). $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ (v). $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$.

2. مندرجہ ذیل ہر قالب کا مرتبہ کیا ہے

(i). $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ (ii). $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (iii). $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (iv). $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (v). $[0]$

3. جانچیں آیا مندرجہ ذیل قالب سمیٹرک ہیں یا سکیو سمیٹرک

(i). $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (ii). $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iii). $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 7 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ (iv). $\begin{bmatrix} 0 & -6 & 4 \\ -6 & 0 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

4. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ اور $E=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

ممکن ہو مندرجہ ذیل معلوم کریں

(i) $A+C$ (ii) $A+E$ (iii) $B-D$ (iv) $2B+3A$

(v) $B-C$ (vi) A^2 (vii) B^2 (viii) $D+E$

5. اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\ -2 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ مندرجہ ذیل معلوم کریں

(i) $A+B$ (ii) $A-B$ (iii) $3A+2B$

(iv) AB (v) BA (vi) A^2

6. تصدیق کریں کہ (i) $A+B=B+A$ (ii) $C-D\neq D-C$

اگر $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 7 & -4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 1 & -4\\ 4 & 3 & 1\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$ اور $D=\begin{pmatrix}2 & 7 & -5\\ -2 & 1 & 0\\ 6 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}8 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & -4\\ 2 & 5 & 7\\ 0 & -4 & 3\end{pmatrix}$. ثابت کریں $AB\neq BA$ چونکہ

8. اگر $A=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 7 & -4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{pmatrix}$ اور $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -4\end{pmatrix}$, تو $2A-3B+4C$. معلوم کریں

9. اگر $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ تو a، b، c اور d معلوم کریں

10. $\begin{bmatrix}x & -1 & y\\ 2 & 0 & 3\\ z & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & a & x\\ b & 0 & c\\ 2 & 3 & d\end{bmatrix}$ تو a، b، c، d، x، y اور z معلوم کریں

11. مندرجہ ذیل قالبوں کے ممکنہ حاصل ضرب معلوم کریں

$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 0 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

12. معلوم کریں $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

13. اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$

تو تصدیق کریں (i). $A(B+C)=AB+AC$ (ii). $(B+C)A=BA+CA.$

14. مندرجہ ذیل کی تصدیق کریں، اگر $A=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ 4 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6 & 8 & 0\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & 6 & 4\end{pmatrix}$ اور $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

(a) $A+B=B+A$ (b) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(c) $(A+B)C=AC+BC$ (d) $A(B+C)=AB+AC$

15. اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ تو

ثابت کریں کہ $A(BC)=(AB)C.$

19.5 قالب کا مقطع Determinant of a Matrix

19.5 (i) مربعی قالب کا مقطع Determinant of a Matrix

ہم ہر مربعی قالب کے ساتھ ایک عدد $|A|$ منسوب کرسکتے ہیں جن کا تعلق R سے ہوتا ہے۔ اُسے قالب (A) کا مقطع کہا جاتا ہے۔

اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، تو قالب A کا مقطع $|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}.$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

19.5 (ii) قالب کے مقطع کی قیمت معلوم کریں

اگر $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$، تو قالب A کا مقطع

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}= ad-bc$$

مثال کے طور پر

$$\begin{vmatrix}3 & 7\\ 1 & 4\end{vmatrix}=3\times(-4)-7\times1=-19.$$

اب قالب (3x3) $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ کے مقطع

کے لیئے پینئیر فارمولا مندرجہ ذیل ہے

$$|A|=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

نوٹ 1: مقطع کا معلوم کرنا اوپر دیئے گئے پھیلاؤ R_1 کے ذریعے

2:

مثلاً: اگر $A=[a_{11}]$ پھر $|A|=|a_{11}|=a_{11}$

اگر $A=[-2]$ پھر $|A|=|-2|=-2$

اگر $A=[3]$ پھر $|A|=|3|=3$

مثال

$|A|$ معلوم کریں اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

حل: مقطع $|A|$ معلوم کرنے کے لیئے آئیں مقطع کو R_1 کے ذریعے پھلا دیں

$$|A| = 4\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

پس

$$|A| = 4(0-15)+3(2+3)+5(5+0) = -20.$$

19.5 (iii) نادر اور غیر نادر قالب Define singular and non_singular matrices

اگر کسی قالب کا مقطع صفر ہو اِسے نادر قالب کہا جاتا ہے جیسے $|A| = 0$ اگر کسی قالب کا مقطع صفر نہ ہو تو غیر نادر قالب کہا جاتا ہے۔ جیسے $|A| \neq 0$

نوٹ: ایک نادر قالب کو قالب (non-invertible) بھی کہا جاتا ہے اور ایک غیر نادر قالب کو (invertible) قالب بھی کہا جاتا ہے۔

مثال

معلوم کریں آیا نادر قالب ہے یا نہیں $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 14 \end{bmatrix}$

حل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 14 \end{vmatrix} = 2(0-16)-4(28-12)+6(16-0) = -32-64+96 = 0.$$

چونکہ $|A| = 0$

A نادر قالب ہے

19.5 (iv) مائنرز اور کو فیکٹرس (Minors and Cofactors)

آئیں فرض کریں ایک مربعی قالب A کا مرتبہ 3x3 ہے تو عنصر a_{ij} کے مائنرز M_{ij} ظاہر کئے جاتے ہیں۔ عنصر a_{ij} کے مائنرز کا مقطع قالب A کے قطار اور j^{th} کالم کو ترک کرکے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ A تو A کی قطار اور کالم ترک کرنے بعد

قالب ملے گا اور اس کا مقطع M_{12} جو مائنرز ہے۔ یوں واضح کہا جاتا ہے نیچے

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

جبکہ عنصر (الکان) a_{ij} کا کو فیکٹرس A_{ij} ظاہر کیا جاتا ہے اور معلوم کیا جاسکتا ہے

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

جبکہ M_{ij} مربعی قالب A کے عنصر a_{ij} کا مائنر ہے

مثال

فرض کریں $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$

تو A_{12} اور M_{12} معلوم کریں

یہاں $M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 6\,(-7) - 4(1) = -46$

اور $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,

اگر $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}$

$A_{12} = (-1)^3(-46)$

$A_{12} = (-1)(-46) = 46$۔

19.6 قالب کا ضربی معکوس Multiplicative Inverse of a Matrix

19.6(i) قالب کا مُتصل Define adjoint of a matrix

مرتبہ 2x2 کے قالب کا مُتصل Adjoint of a matrix with order 2 × 2

فرض کریں $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو قالب A کا مُتصل adjA یا AdjA سے ظاہر کرتے ہیں۔

اور $\operatorname{Adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ تو

$$\operatorname{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t.$$

جبکہ A_{11}، A_{12}، ...A_{33}، A کے کوفیکٹرز ہیں۔

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ تو

قالب A کا مُتصل (Ad joint) معلوم کریں۔

حل: سب سے پہلے ہم قالب A کے تمام کوفیکٹرز (Confects) معلوم کرتے ہیں۔

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

اب $Adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t.$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & -8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 6 & -5 & -8 \end{bmatrix}.$$

19.6(iii) غیر نادر قالب A کا ضربی معکوس معلوم کریں اور تصدیق کریں کہ I ضربی ذاتی قالب ہے۔

جبکہ $AA^{-1} = I = A^{-1}A,$

اگر A اور B مراتب mxn کے غیر نادر قالب ہیں اس طرح $AB = BA = I_n$ تو A اور B ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔ A کے معکوس کو A^{-1} سے ظاہر کرتے ہیں

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ تو معلوم کریں A اور B ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں

حل

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-14 & -21+21 \\ 10-10 & -14+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اس ہی طرح $BA = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-14 & 35-35 \\ -6+6 & -14+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

یوں $AB = BA = I_2$

پس A اور B ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

19.6(iii) بذریعہ طریقہ مُتصل (Ad joint) غیر نادر قالب کا ضربی معکوس معلوم کریں۔

فرض کریں $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ایک غیر نادر قالب ہے تو A معلوم کیا جاسکتا ہے

$$A^{-1}=\frac{Adj(A)}{|A|} \quad \text{جب کہ} \quad |A|\neq 0.$$

ضربی معکوس معلوم کرنے کا طریقہ، طریقہ مُتصل (Adjoint Method) کہلاتا ہے۔

مثال

$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ کا ضربی معکوس بذریعہ طریقہ مُتصل معلوم کریں۔

حل چونکہ $|A|\neq 0$ کا ضربی معکوس ممکن ہے

یہاں $|A|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2.$

اب $Adj(A)=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{bmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -2 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}.$$

مثال

بذریعہ طریقہ مُتصل $A=\begin{bmatrix}9 & 2 & 1\\ 5 & -1 & 6\\ 4 & 0 & -2\end{bmatrix}$ کا ضربی معکوس بذریعہ طریقہ مُتصل معلوم کریں۔

حل

یہاں

$$|A|=\begin{vmatrix}9 & 2 & 1\\ 5 & -1 & 6\\ 4 & 0 & -2\end{vmatrix}$$

$$=9(2-0)-2(-10-24)+1(0+4)$$

$$=18+68+4$$

$$=90.$$

چونکہ $|A|\neq 0,$ لہذا A^{-1} ممکن ہے

اب ہم A کے تمام کوفیکٹر (Cofactors) معلوم کریں۔

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -6\\ 0 & -2\end{vmatrix}=2-0=2$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & 6\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-(-10-24)=34$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=0+4=4$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-(-4-0)=4$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}9 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=(-18-4)=-22$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}9 & 2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-(0-8)=8$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 6\end{vmatrix}=12+1=13$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}9 & 1\\ 5 & 6\end{vmatrix}=-(54-5)=-49$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}9 & 2\\ 5 & -1\end{vmatrix}=-9-10=-19$$

پس $\text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}^t$. اب $\text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}2 & 4 & 13\\ 34 & -22 & -49\\ 4 & 8 & -19\end{bmatrix}$

اب $A^{-1}=\dfrac{\text{Adj}(A)}{|A|}$

$$A^{-1}=\frac{1}{90}\begin{bmatrix}2 & 4 & 13\\ 34 & -22 & -49\\ 4 & 8 & -19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{45} & \frac{2}{45} & \frac{13}{90}\\ \frac{17}{45} & \frac{-11}{45} & \frac{-49}{90}\\ \frac{2}{45} & \frac{4}{45} & \frac{-19}{90}\end{bmatrix}$$

19.6. (iv) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ کی تصدیق کریں Verify the result $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}$. تو تصدیق کریں کہ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

حل

دیئے گئے $A=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}$.

AB کا ضربی معکوس

$$AB=\begin{bmatrix}3&7\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&8\\7&9\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}18+49&24+63\\12+35&16+45\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}67&87\\47&61\end{bmatrix}.$$

اب $|AB|=4087-4089=-2$

چونکہ $|AB|\neq 0$

لہٰذا $,\ (AB)^{-1}$

اب

$$(AB)^{-1}=\frac{\text{adj}\ (AB)}{|AB|}$$

$$=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}61&-87\\-47&67\end{bmatrix}\quad ...(i)$$

A کا ضربی معکوس

ہمارے پاس $A=\begin{bmatrix}3&7\\2&5\end{bmatrix}$

$|A|=15-14=1$

چونکہ $|A|\neq 0$

لہٰذا A^{-1} , A ممکن ہے

$$A^{-1}=\frac{\text{adj}\ A}{|A|}=\begin{bmatrix}5&-7\\-2&3\end{bmatrix}$$

B کا ضربی معکوس

ہمارے پاس $B=\begin{bmatrix}6&8\\7&9\end{bmatrix}$

اب

$|B|=54-56=-2$

چونکہ $|B|\neq 0$,

لہٰذا B^{-1} ممکن ہے

$$B^{-1}=\frac{\text{adj}\ B}{|B|}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}9&-8\\-7&6\end{bmatrix}$$

اب

$$B^{-1}A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}9&-8\\-7&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-7\\-2&3\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}45+16&-63-24\\-35-12&49+18\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}61&-87\\-47&67\end{bmatrix}\quad ...(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے یہ واضح ہوتا ہے۔

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

پس تصدیق ہوئی

19.7 (i) ہمزاد ایک درجی مساواتوں کا حل Solution of Simultaneous Linear Equations

غور کریں کہ دو متغیرات پر مشتمل دو یک درجی مساوات کا نظام

$$\left.\begin{aligned}a_1x+b_1y&=c_1\\a_2x+b_2y&=c_2\end{aligned}\right\}\quad (i)$$

مساوات کے نظام کو قالبوں کی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$AX=B\quad (ii)$$

جب کہ $A=\begin{bmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}.$

قالب A مساوات کے عددی سروں کا قالب کہلاتا ہے۔ قالب x متغیرات کا کالمی قالب ہے اور B مستقل کا کالمی قالب ہے۔

مرتب جوڑا $(x.y)$ دی گئی مساواتوں کا حل کہلاتا ہے اور ہمزاد یک درجی مساواتوں کا حل کہلاتا ہے۔

19.7(i) دو متغیرات والی یک درجی ہمزاد مساواتوں کو عمل زندگی کے مسائل سے رابطہ پیدا کرتے ہوئے حل کریں۔

معکوس قالب کا طریقہ

فرض کریں قالی مساوات جو پچھلے سیکشن 19.7 میں بحث کی گئی ہیں۔

یعنی $\quad (i) \qquad AX = B,$

یہاں A ضربی قالب اور غیر نادر قالب ہے۔ مساوات (i) کے دونوں اطراف کو A^{-1} ضرب دینے سے۔

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \qquad \text{[خاصیت تلازم ضرب کے لحاظ سے]}$$

$$\Rightarrow \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B \qquad [A^{-1}A = I, \quad IX = X]$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B \quad (ii)$$

مساوات (ii) میں متغیرات کا قالب X معلوم کرنا معکوس قالب کا طریقہ کہلاتا ہے۔ جب کہ A ضربی قالب اور غیر نادر قالب ہے۔

مثال: مندرجہ ذیل یک درجی مساوات کو بذریعہ معکوس قالب کا طریقہ حل کریں۔

$$5x + 2y = 3$$
$$3x + 2y = 5$$

حل: دی گئی مساوات کو قالبی شکل میں لکھیں

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

یعنی $\quad AX = B$

جب کہ $\quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

پہلے ہم A^{-1} ذریعہ مُتصل (Ad joint) معلوم کرتے ہیں۔

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}}{10-6} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

اب بذریعہ معکوس قالب کا طریقہ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-10 \\ -9+25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

یا $\quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

پس $x = -1$ اور $x = 4$ حل ہے۔ حل سیٹ $\{(-1, 4)\}.$ ہے۔

مثال: ایک سول انجینئر کو 6000 مکعب میٹر بجری اور 9000 مکعب میٹر کنکریٹ کی ایک بلڈنگ پروجیک کے لیئے ضرورت ہے یہ سامان حاصل کرنے کے لیئے دو اقسام کے دفائر ہیں جو نیچے جدول میں دیئے گئے ہیں۔

	کنکریٹ	بجری
ذخیرہ - I	3	8
ذخیرہ - II	4	11

بذریعہ طریقہ معکوس قالب سامان (بجری اور کنکریٹ) مقدار معلوم کریں جو انجینئر ضرورت پوری کرنے کے لیئے ذخائر میں سے لانا ہونگے۔

حل فرض x بجری اور y کنکریٹ کو ظاہر کرتا ہے۔

معکوس قالب کا طریقہ ہے $X = A^{-1}B$............(i)

دیئے گئے مواد کو قالبی شکل میں لکھیں

$$AX = B$$

یا

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \end{bmatrix}$$

اب A^{-1}، متصل کے فارمولے سے معلوم کرتے ہیں

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}}{3(11)-8(4)} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

لہٰذا

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

اب مساوات (i) کا استعمال کرنے پر

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

منفی نشان نظر انداز کرنے کے بعد ہمارے پاس آیا: $x=6000$ اور $y=3000$

لہٰذا 6000 مکعب سینٹی میٹر ریت اور 3000 مکعب میٹر کنکریٹ سے روکا جاسکتا ہے

19.2(ii) کریمر کے اصول **Cramer's rule**

کریمر کے اصول یک درجی مساواتوں کے نظام کو حل کرنے کا ایک طریقہ ہے۔

آئیں غور کریں کہ دو متغیرات x اور y پر مشتمل یک درجی مساوات کے نظام کو یوں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

مساوات کے نظام (i) کو قالبی شکل میں لکھتے ہیں۔

$$AX = B,$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

مساوات کا نظام (i) کا بالکل ایک ہی حل ہو گا اگر $|A| \neq 0.$ جبکہ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

جو حاصل ہو گا بذریعہ

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{اور} \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

جبکہ $A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}$ ء $A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$

مثال: بذریعہ کریمر کے اصول مساوات کا نظام حل کریں۔

$$3x + 2y = 10$$
$$-6x + 4y = 4$$

حل

یہاں $|A| = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

$12 + 12 = 24$

یعنی $|A| \neq 0 \quad \therefore$

اب دیئے گئے نظام کو قالبی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{40 - 8}{24}$$

$$= \frac{32}{24}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}{24}$$

$$= \frac{12 + 60}{24}$$

$$= \frac{72}{24}$$

$$y = 3$$

پس سیٹ حل $\left\{\left(\frac{4}{3}, 3\right)\right\}$ ہے

EXERCISE 19.2 مشق 19.2

1. مندرجہ ذیل کے مقطع (determinents) معلوم کریں۔

i) $\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$ ii) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ iii) $\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

iv) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ v) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ vi) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

vii) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ viii) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & -5 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ ix) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

x) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & x & y \end{vmatrix}$ xi) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -6 & x & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

2. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ تو M_{12} ، M_{22} ، M_{21} ، A_{12} ، A_{22} ، A_{21}. معلوم کریں

3. x کی کس قیمت کے لیئے قالب $\begin{bmatrix} 5-x & x+1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ غیر نادر ہے۔

4. دیئے گئے مربعی قالبوں میں سے نادر اور غیر نادر قالب کی نشاندہی کریں۔

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

5. مندرجہ ذیل کا مُتصل (Ad joint) معلوم کریں۔

$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

6. تصدیق کریں $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$. جبکہ $A(\text{adj } A) = |A|I$

7. مندرجہ ذیل قالبوں کا ضربی معکوس بذریعہ طریقہ مُتصل (Adjoint) معلوم کریں۔

i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ii) $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

iii) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ iv) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ v) $E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

8. بذریعہ معکوس قالب طریقہ اور بذریعہ کریمر کے اصول معلوم کریں۔

1) $2x + 3y = 14$
$-4 + y = 28$

2) $2x - 4y = -12$
$2y + 3x = 0$

REVIEW EXERCISE اعادہ مشق 19

1. درست جواب پر نشان لگائیں۔

i. اگر m قطاروں کی تعداد اور n کالموں کی تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔ اس طرح ______ قالب کہلاتا ہے۔

(a) مستطیل (b) مساوی (c) مربعی (d) صفری

ii. اگر $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ تو A^2 ______ ہے

(a) I_2 (b) I_3 (c) $-I_2$ (d) O

iii. اگر A کوئی بھی مربعی قالب ہے جیسے $A^t = -A$ کو کہا ______ جاتا ہے۔

(a) وتری قالب (b) اسکیلر قالب

(c) سمیٹرک قالب (d) سکیو سمیٹرک قالب

iv. اگر A، B اور C قالب ہیں تو $(ABC)^t =$ ______

(a) $A^t.B^t.C^t$ (b) $C^tB^tA^t$ © $C^tA^tB^t$ (d) $(B^tA^t)C^t$

v. اگر $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 0 & i^2 \\ -i^2 & 0 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

(a) $A^2 = -I$ (b) $B^2 = -I$

(c) $C^2 = -I$ (d) ان میں سے تمام

vi. دو قالب A اور B ہیں اگر $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ تو $AB =$ ____

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

vii. x y اور z کی قیمتیں معلوم کریں اگر $2\begin{bmatrix} x \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ z \end{bmatrix}$

(a) $2, \frac{3}{2}, \frac{10}{3}$ (b) $\frac{3}{2}, 2, \frac{10}{3}$

(c) $\frac{3}{2}, \frac{10}{3}, 2$ (d) 1,2,3

viii. $\left(A^{-1}\right)^{-1} =$ ______

(a) A^{-2} (b) A (c) A^{-1} (d) A^{2}

ix. اگر $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x + 4$ کی قیمت معلوم کریں x

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ © 0 (d) ان میں کوئی نہیں

x. اگر قالب $\begin{bmatrix} \lambda & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ معکوس پذیر ہے تو $\lambda \neq$ ______

(a) -15 (b) -17 (c) -16 (d) ان میں کوئی نہیں

2. قطاری اور کالمی قالبوں کی تعریف بیان کریں۔

3. قالبوں کے مراتب معلوم کریں۔

i) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

4. مندرجہ ذیل قالبوں کی تعریف بیان کریں۔

(I) مربعی قالب (ii) مستطیل قالب (iii) وتری قالب (iv) اسکیپر (میزانیہ) قالب

(v) سمیٹرک قالب (vi) اسکیو سمیٹرک قالب

5. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ تو معلوم کریں

i) $A + B$ ii) $A - B$ iii) AB iv) BA

v) $5A$ vi) $7B$ vii) $8A - 9B$

6. مقطع معلوم کریں $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \\ -7 & 8 & -10 \end{vmatrix}$

7. مثالوں کی مدد سے نادر اور غیر نادر قالبوں کی تعریف بیان کریں۔

8. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ تو A^{-1} معلوم کریں

9. حل کریں

$2x + 5y = 27$

$7x + y = 12$

(I) معکوس قالب کا طریقہ (ii) کریمر کا اصول

Summary (خلاصہ)

- قالب عناصر کی مستطیلی شکل ہے۔
- قالب میں اندراج کی افقی خط قطار کہلاتی ہے اور قالب میں اندراج کی عمودی خط کالم کہلاتا ہے۔
- دو قالب مساوی قالب کہلاتے ہیں اگر ان مراتب اور متناظرہ عناصر ایک جیسے ہوتے ہیں۔
- قالب کی ایک قطارہ ہو تو وہ قطاری قالب کہلاتا ہے اور ایک کالم ہو تو وہ کالمی قالب کہلاتا ہے۔
- قالب کی قطاروں کی تعداد اور کالموں کی تعداد برابر ہوتی ہے تو وہ مربعی قالب ورنہ مستطیلی قالب کہلاتا ہے۔
- مربعی قالب وتری قالب ہے اگر وتر کے کسی ایک عنصر تمام عناصر صفر ہو۔
- مربعی قالب، وتری قالب کہلاتا ہے۔ اگر اس کے تمام عناصر صفر ہوں سوائے کم از کم ایک عنصر کے جو خاص وتر پر ہو۔
- وتری قالب جس میں وتر کے تمام عناصر ایک جیسے ہوں، اسکیلر (میزانیہ) قالب کہلاتا ہے۔
- وتری قالب جس میں خاص وتر کا ہر عنصر ا ہوتا ہے، اکائی قالب کہلاتا ہے۔
- ایک مربعی قالب کو سمیٹرک قالب کہا جاتا ہے اگر اس کا بدل خود وہی ہوتا ہے۔
- ایک مربعی قالب کو اسکیو سمیٹرک کہا جاتا ہے اگر اس کا بدل خود وہی ہو مگر منفی۔
- دو قالبوں کی جمع اور تفریق کئے جاتے ہیں دونوں قالبوں کے متناظرہ عناصر کی جمع اور تفریق کے ذریعے۔
- اگر A اور B قالبوں کے مراتب ایک ہی ہوں تو قانون مبادلہ بلحاظ جمع یوں واضع کرتے ہیں $A+B=B+A$
- اگر A، B اور C ایک ہی مراتب کے تین قالب ہوں تو قانون تلازم بلحاظ جمع کی وضاحت یوں کی جاتی ہے

  $(A+B)+C=A+(B+C)$
- دو قالب A اور B کی ضرب ممکن ہے اگر پہلے قالب کے کالموں کی تعداد دوسرے قالب کی قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔
- ہر مربعی قالب کے ساتھ ایک عدد $|A|$ ہے جس کا تعلق R سے ہوتا ہے۔ اسے مقطع کہا جاتا ہے۔
- اگر A اور B دو غیر صفری قالب ہوں ایسے $AB=BA=I$ تو A اور B دونوں ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہونگے۔
- یک درجی مساوات کا نظام بذریعہ معکوس قالب کا طریقہ اور کریمر کے اصول کے تحت حل کیا جاسکتا ہے۔

یونٹ 20

دو درجی مساوات کا نظریہ
THEORY OF QUADRATIC EQUATIONS

Student Learning Outcomes (SLOs)

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے۔

- دو درجی اظہاریہ $ax^2 + bx + c$ کے فرق کنندہ $(b^2 - 4ac)$ کی تعریف کر سکیں۔
- دی گئی دو درجی مساوات کا فرق کنندہ معلوم کر سکیں۔
- فرق کنندہ کے ذریعے دو درجی مساوات کے روٹس پر بحث کر سکیں۔
- دی گئی دو درجی مساوات کے روٹس کی نوعیت معلوم کر سکیں مساوات کو حل کر کے نتائج کی تصدیق کر سکیں۔
- دی گئی دو درجی مساوات میں نامعلوم کی قیمت معلوم کر سکیں جب کہ اس کے روٹس کی نوعیت دی گئی ہو۔
- اکائی کے مکعب روٹس معلوم کر سکیں۔
- اکائی کے کمپلیکس مکعب روٹس جیسے ω اور ω^2 لگائی پہچان کر سکیں
- اکائی کے مکعب روٹس کی خصوصیت کی تصدیق کر سکیں۔
- اکائی کے مکعب روٹس کی خصوصیت استعمال کرتے ہوئے سوالات حل کر سکیں۔
- دو درجی مساوات کے روٹس اور عددی سروں کے درمیان تعلق معلوم کر سکیں۔
- دی گئی مساوات کو حل کئے بغیر ان کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
- دی گئی دو درجی مساوات میں نامعلوم کی قیمت معلوم کر سکیں۔ جب
  - روٹس کی مجموعہ روٹس کے حاصل ضرب کے برابر ہو۔
  - روٹس کے مربعوں کا مجموعہ دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔
  - روٹس میں دیئے گئے عدد کا فرق ہو۔
  - روٹس دیئے گئے تعلق کی تصدیق کرتے ہو(مثلاً $2\alpha + 5\beta = 7$ جبکہ α اور β دی گئی مساوات کے روٹس ہو)
  - روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔
- دو درجی مساوات کے روٹس کے سیمٹرک تفاعل کی تعریف کر سکیں۔
- سیمٹرک تفاعل کو گرافیکل ظاہر کر سکیں۔
- دو درجی مساوات کے روٹس کے سیمٹرک تفاعل کو اس کے عددی سروں کی لحاظ سے حل کر سکیں۔
- کلیہ تشکیل دے سکیں۔
  $x^2 -$ (روٹس کے مجموعہ) x + (روٹس کا حاصل ضرب) = 0
  دیئے گئے روٹس سے دو درجی مساوات معلوم کر سکیں۔
- دو درجی مساوات بنا سکیں جس کے روٹس مثلاً اس قسم کے ہوں۔
  - $2\alpha+1, 2\beta+1$
  - α^2, β^2
  - $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$
  - $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$
  - $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

  جبکہ α اور β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں۔
- α اور β کی قیمتیں معلوم کر سکیں جبکہ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ دو درجی مساوات کے روٹس ہیں۔
- مکعب مساوات کو حل کر سکیں اگر مساوات کا ایک روٹ دیا گیا ہو۔
- چار درجی (Biquadratic) مساوات کو حل کر سکیں اگر مساوات کے دو حقیقی روٹس دے گئے ہوں۔
- دو تغیرات والی دو مساوات کے نظام حل کر سکیں جب کہ
  - ایک مساوات یک درجی اور دوسری دو درجی ہو۔
  - دونوں مساوات دو درجی ہوں۔
- دو درجی مساوات سے متعلق روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔

20.1 دو درجی مساوات کے روٹس کی نوعیت Nature of the Roots of a Quadratic Equation:

20.1 (i) دو درجی اظہاریہ $ax^2+bx+c, a\neq 0.$ کے فرق کنندہ $\left(b^2-4ac\right)$ کی تعریف کرنا۔

ایک دو درجی کثیر رقمی دو درجی اظہاریہ کہلاتی ہے۔ یہ دو درجی اظہارے پر عمومی شکل $ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ ہے جبکہ a اور b باترتیب x^2 اور x کے عددی سر ہیں اور c ایک منقل رقم ہو۔

دو درجی اظہارے کا فرق کنندہ

اظہاریہ b^2-4ac دو درجی اظہارے $ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ کا فرق کنندہ کہلاتا ہے اور Δ یا D سے ظاہر کیا جاتا ہے

یعنی $\Delta=b^2-4ac$

20.1. (ii) دی گئی دو درجی مساوات کا فرق کنندہ معلوم کرنا

ہم پہلے ہی جانتے ہیں کہ دو درجی مساوات کا حل $ax^2+bx+c, a\neq 0$ ہے۔ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ یہاں b^2-4ac ہمیں روٹس کی نوعیت بتانے میں مدد دیتا ہے کہ روٹس حقیقی (Real) یا کمپلیکس(complex) ہیں اظہاریہ b^2-4ac دو درجی مساوات کا فرق کنندہ ہے۔ $ax^2+bx+c, a\neq 0.$

مثال $2x^2+5x-4=0$ کے فرق کنندہ معلوم کریں

حل: $2x^2+5x-4=0$

یہاں $a=2$ $b=5$ اور $c=-4$

اب

$$\Delta=b^2-4ac=(5)^2-4(2)(-4)$$
$$=25+32=57$$

20.1. (iii) فرق کنندہ کے ذریعے دو درجی مساوات کے روٹس (roots) پر بحث کرنا۔

ہم فرق کنندہ کے ذریعے دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0,$ کے روٹس کی نوعیت (nature) معلوم کر سکتے ہیں یعنی $\Delta=b^2-4ac.$

دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے روٹس $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ہیں۔ روٹس کی نوعیت کا انحصار b^2-4ac کی قیمت پر ہوتا ہے۔ جبکہ a,b اور c حقیقی اعداد ہیں۔

i. اگر $\Delta=b^2-4ac>0,$ تو روٹس حقیقی اور غیر مساوی (Unequal) ہوتے ہے۔
ii. اگر $\Delta=b^2-4ac<0,$ تو روٹس حقیقی اور غیر حقیقی (کمپلیکس یا فرضی) ہوتے ہیں۔
iii. اگر $\Delta=b^2-4ac<0,$ کو روٹس ناطق اور مساوی ہوتے ہیں اور ہر ایک $-\dfrac{b}{2a}$. کے مساوی ہوتا ہے۔
iv. اگر a,b,c ناطق ہیں اور $\Delta=b^2-4ac<0,$ مکمل مربع ہے تو روٹس ناطق اور غیر مساوی ہوتے ہیں ورنہ غیر ناطق ہیں۔

20.1. (iv) دی گئی دو درجی مساوات کے روٹس کی نوعیت معلوم کرنا۔ مساوات کو حل کر کے نتائج کی تصدیق کرنا۔

مثال

بذریعہ فرق کنندہ مندرجہ ذیل مساوات کے روٹس کی نوعیت معلوم کریں اور مساوات کو حل کر کے تصدیق کریں۔

(i) $x^2+5x-14=0$ (ii) $5x^2+3x+1=0$
(iii) $x^2-9x+5=0$ (iv) $9x^2=6x-1$

حل

(i) $x^2+5x-14=0$

یہاں $a=1, b=5$ اور $c=-14$

$\Delta = b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta = (5)^2-4(1)(-14)$

$\Rightarrow \quad \Delta = 25+56$

$\Rightarrow \quad \Delta = 81=(9)^2>0,$

مکمل مربع اور مثبت پس روٹس حقیقی، ناطق اور غیر مساوی ہیں۔

پڑتال

$$x^2+5x-14=0$$
$$x^2+7x-2x-14=0$$
$$x(x+7)-2(x+7)=0$$
$$x+7=0 \quad \text{or} \quad (x-2)=0$$
$$\Rightarrow \quad x=-7 \quad \text{or} \quad x=2$$

یہاں روٹس حقیقی ناطق اور غیر مساوی ہے بس تصدیق ہوئی

حل

(ii) $5x^2+3x+1=0,$

یہاں $a=5, b=3$ اور $c=1$

$\Delta = b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta = (3)^2-4(5)(1)$

$\Rightarrow \quad \Delta = 9-20$

$\Rightarrow \quad \Delta = -11<0,$ (یعنی منفی)

پس روٹس کمپلیکس ہیں۔

پڑتال

دو درجی کلیہ کی مدد سے

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-20}}{2}$$
$$x=\frac{-3\pm\sqrt{11}\,i}{2} \qquad (i^2=-1)$$

پس روٹس کمپلیکس میں پس تصدیق ہوئی

حل

(iii) $x^2-9x+5=0,$

یہاں $a=1$ $b=-9$ اور $c=5$

$\Delta = b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta = (-9)^2-4(1)(5)$

$\Rightarrow \quad \Delta = 81-20$

$\Rightarrow \quad \Delta = 61>0,$ مکمل مربع نہیں ہے

پس روٹس حقیقی، غیر ناطق اور غیر مساوی ہیں

پڑتال

$x^2-9x+5=0,$

دو درجی کلیہ کی مدد سے

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-20}}{2}$$
$$x=\frac{-3\pm\sqrt{61}}{2}$$

پس تصدیق ہوئی

حل

(iv) $9x^2=6x-1$

یہاں $\Rightarrow 9x^2-6x+1=0$

$a=9,$ $b=-6$ $c=1$

$\because \quad \Delta = b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta = (6)^2-4(9)(1)$

$\Rightarrow \quad \Delta = 36-36$

$\Rightarrow \quad \Delta = 0,$

مکمل مربع اور 0 کے برابر پس روٹس حقیقی اور مساوی ہیں

پڑتال

$$9x^2-6x+1=0$$
$$(3x)^2-2(3x)(1)+(1)^2=0$$
$$(3x-1)^2=0$$
$$3x-1=0 \quad \text{یا} \quad 3x-1=0$$
$$\Rightarrow \quad x=\frac{1}{3} \quad \text{یا} \quad x=\frac{1}{3}$$

پس روٹس حقیقی اور مساوی ہیں

پس تصدیق ہوئی

مثال ۱

ثابت کریں کہ $abc^2x^2 + c\left(3a^2+b^2\right)x + 3a^2 + b^2 - ab = 0,$ کے روٹس ناطق ہیں۔

حل

یہاں $abc^2x^2 + c\left(3a^2+b^2\right)x + 3a^2 + b^2 - ab = 0$

$A = abc^2,$ $B = c\left(3a^2+b^2\right)$ اور $C = 3a^2 + b^2 - ab$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$
$$\Delta = \left[c\left(3a^2+b^2\right)\right]^2 - 4\left(abc^2\right)\left(3a^2+b^2-ab\right)$$
$$= c^2\left(3a^2+b^2\right)^2 - 4abc^2\left(3a^2+b^2-ab\right)$$
$$= c^2\left[\left(3a^2+b^2\right)^2 - 4ab\left(3a^2+b^2\right) + 4a^2b^2\right]$$
$$= c^2\left[\left(3a^2+b^2\right)^2 - 2\left(3a^2+b^2\right)(2ab) + (2ab)^2\right] \qquad \because\ 4ab = 2(2ab)$$
$$= c^2\left[\left(3a^2+b^2-2ab\right)^2\right]$$
$$= \left[c\left(3a^2+b^2-2ab\right)\right]^2$$

جو کہ Δ مکمل مربع ہے

پس روٹس ناطق ہیں۔

20.1. (v) دی گئی دو درجی مساوات میں نامعلوم کی قیمت معلوم کرنا۔ جب کہ اس کے روٹس کی نوعیت دی گئی ہو۔

مندرجہ ذیل مثالیں دو درجی مساوات موجود میں نامعلوم کی قیمت معلوم کرنے میں ہماری مدد کریں گی جبکہ روٹس کی نوعیت دی گئی ہو۔

مثال

کی کسی قیمت کے لیئے مساوات $3x^2 + 5x + p = 0$ کے روٹس

(i) مساوی

(ii) ناطق

(iii) کمپلیکس ہونگے

حل

$$3x^2 + 5x + p = 0$$

یہاں $a = 3,$ $b = 5$ اور $c = p?$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\therefore \qquad \Delta = (5)^2 - 4(3)(p) = 25 - 12p,$$

مساوی روٹس کے لیئے

یعنی $\Delta = 0$

$25 - 12p = 0$

$\Rightarrow \quad -12p = -25,$

$\Rightarrow \quad p = \frac{25}{12},$

جب $p = \frac{25}{12}$، پر دی گئی مساوات کے مساوی روٹس ہے

(ii) ناطق روٹس کے لیئے

Δ کو مکمل مربع ہونا چاہیئے

یعنی $25 - 12p$ مکمل مربع ہونا چاہیئے

$p = 0,$ 2 اور -2 وغیرہ

اسی طرح $p = 0, 2, -2$ اور کچھ دوسری قیمت بھی فرق کندہ کو مکمل مربع بناتی ہیں

(iii) کمپلیکس روٹس کے لیئے

یعنی $25 - 12p < 0$

$\Rightarrow \quad 12p > 25$

$\Rightarrow \quad p > \frac{25}{12}$

جب $p > \frac{25}{12}$، دی گئی مساوات کے کمپلیکس روٹس ہیں

مثال اگر مساوات $x^2 - 15 - k(2x - 8) = 0$ کے روٹس مساوی ہیں تو k کی قیمت معلوم کریں

حل مساوات $x^2 - 15 - k(2x - 8) = 0,$ کو معیاری شکل میں لکھیں

یعنی $x^2 - 2kx + 8k - 15 = 0$

یہاں $a = 1$ ،$b = -2k$ اور $c = 8k - 15$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\therefore \quad \Delta = (-2k)^2 - 4(1)(8k - 15)$

$\Rightarrow \quad \Delta = 4k^2 - 4(8k - 15)$

مساوی روٹس کے لیئے

$\Delta = 0$

$\therefore \quad 4k^2 - 4(8k - 15) = 0$

$\Rightarrow \quad k^2 - 8k + 15 = 0$ (دونوں اطراف کو 4 سے تقسیم کرنے سے)

$\Rightarrow \quad k^2 - 5k - 3k + 15 = 0$

$\Rightarrow \quad k(k - 5) - 3(k - 5) = 0$

$\Rightarrow \quad (k - 5)(k - 3) = 0$

یعنی $k - 5 = 0$ یا $k - 3 = 0$

$k = 3$ $\qquad \Rightarrow \quad k = 5$

$k = 3$

لہٰذا k کی قیمتیں 3 اور 5 ہیں

مثال 3. P کی کس قیمت کے لیے مساوات $2x^2 - px + 18 = 0,$ کے روٹس حقیقی اور غیر مساوی ہیں

حل

$$2x^2 - px + 18 = 0,$$

$a = 2,$ $b = -p$ اور $c = 18$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\therefore \quad \Delta = (-p)^2 - 4(2)(18) = p^2 - 144$$

حقیقی اور غیر مساوی روٹس کے لیئے

$$\Delta > 0$$

$$\therefore \quad p^2 - 144 > 0$$

$$\Rightarrow \quad p^2 > 144 \Rightarrow \sqrt{p^2} > \sqrt{144} \Rightarrow |p| > 12$$

$\Rightarrow \quad \pm p > 12 \Rightarrow p > 12$ اور $-p > 12$

$$\Rightarrow \quad p > 12 \text{ or } p < -12$$

لہذا $p < -12$ یا $p > 12$ کے لیئے دی گئی مساوات کے حقیقی روٹس ہیں

EXERCISE 20.1 مشق

1. بذریعہ فرق کنندہ (Discriminant) مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کے روٹس کی نوعیت (Nature) معلوم کریں

(i) $x^2 + 5x - 6 = 0$ (ii) $x^2 = 6x$ (iii) $2x^2 + 8 = 6x$

(iv) $1 + 6x + 9x^2 = 0$ (v) $24x^2 + 12x + 36 = 0$ (vi) $x = x^2 + 1$

(vii) $3x^2 + 6 = 5x$ (viii) $3x^2 + 9 = 0$

2. k کی قیمتیں معلوم کریں کہ یقینی بنائے کہ مندرجہ ذیل دو درجی مساوات رکھتی ہیں (I) ایک جیسا حل (ii) مختلف حقیقی حل
(اشارہ) ایک جیسے حل کے لیئے $\Delta = 0$ اور مختلف حل کے لیئے $\Delta > 0$ ہے)

(i) $x^2 - 3x + k = 0$ (ii) $x^2 + k = 4$

(iii) $x^2 + kx + 2 = 0$ (iv) $(k-1)x^2 - 4x + 2 = 0$

(v) $x^2 + kx + 4 = 0$ (vi) $9x^2 + kx = -16$

(vii) $(k-2)x^2 = 4x + (k+2)$ (viii) $x^2 + 1 = kx$

3. مندرجہ ذیل ہر ایک دو درجی مساوات میں m کی قیمت معلوم کریں جو کہ روٹس کو مساوی بناتے ہیں

(i) $(m+1)x^2 + 2(m+3)x + (2m+3) = 0,$ (بشرطیکہ) $m \neq -1$

(ii) $9x^2 + mx + 16 = 0$

4. ثابت کریں کہ مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کے روٹس حقیقی ہیں۔

(i) $x^2 - 2x\left(k + \frac{1}{k}\right)x + 3 = 0, \ \forall k \in R - \{0\}$

(ii) $2nx^2 + 2(l+m+n)x + (l+m) = 0, \ \forall l, m, n \in \mathbb{R}$ and $n \neq 0$

5. ثابت کریں کہ مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کے روٹس ناطق ہیں

(i) $(l-m)x^2 + (m+n-l)x - n = 0, \ \forall l, m, n \in \mathbb{R}$ and $l \neq m$

(ii) $(a+c-b)x^2 + 2cx + (b+c-a) = 0, \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

6. p اور q کی کس قیمتوں کے لیے دو درجی مساوات $x^2+(2p-4)x-(3q+5)=0$ کے روٹس ختم ہو جائینگے

7. ثابت کریں کہ دی گئی دو درجی مساوات $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ کے روٹس حقیقی ہیں اور وہ مساوی نہیں ہوسکتے جب تک $a=b=c.$

20.2 اکائی کے مکعب روٹس اور ان کی خصوصیات Cube Roots of Unity and their properties

20.2. (i) اکائی کے مکعب روٹس معلوم کرنا

فرض کریں x اکائی کا مکعب روٹ ہے $\quad x=(1)^{1/3}$ یا $x=\sqrt[3]{1}$

$$x^3=1$$

$$\Rightarrow \quad (x)^3-(1)^3=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+1)=0, \quad \left[\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\right]$$

یعنی $x-1=0$

$$\Rightarrow \quad x=1$$

یا $x^2+x+1=0,$

یہاں $a=b=c=1,$

دو درجی مساوات کی مدد سے ہمارے پاس

$$\therefore \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-1\times3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}, \quad (i^2=-1)$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

لہذا اکائی کے مکعب روٹس

$1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ اور $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$ ہیں

20.2. (ii) اکائی کے کمپلیکس مکعب روٹس ω اور ω^2 (Complex cube roots) جیسے ω اور ω^2 کی پہچان کرنا۔

دو کمپلیکس مکعب روٹس ہیں

$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ اور $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ان دو کمپلیکس روٹس کے لیئے ہم یونانی حرف تہجی استعمال کرتے ہیں اور "ω" اومیگا پڑھتے ہیں

آئیں ہم فرض کرتے ہیں $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ تو $\omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$ اس لیئے اکائی کے مکعب روٹس $1,\omega$ اور $\omega^2.$ ہیں

20.2. (iii) اکائی مکعب روٹس کی خصوصیات کی تصدیق کرنا اکائی کے مکعب روٹ ، کی خصوصیات ہیں۔

(i) ہر اکائی کا مکعب کمپلیکس روٹ دوسرے کا مربع ہوتا ہے۔

تصدیق

اگر $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ اکائی کا ایک کمپلیکس روٹ ہے۔

اب

$$\therefore \quad \omega^2=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2i\sqrt{3}+3i^2}{4}=\frac{1-2i\sqrt{3}+3(-1)}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}=\frac{2\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{4} \qquad \left(\because i^2=-1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Now} \quad \left(\omega^2\right)^2=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1+2i\sqrt{3}+3i^2}{4}=\frac{1+2i\sqrt{3}+3(-1)}{4} \qquad \left(\because i^2=-1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega^2\right)^2=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}=\frac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega^2\right)^2=\omega.$$

ہر اکائی کا مکعب کمپلیکس روٹ دوسرے کا مربع ہوتا ہے۔

پس تصدیق ہوا۔

(ii) اکائی کے تین مکعب روٹس کا مجموعہ صفر ہوتا ہے یعنی $1+\omega+\omega^2=0$

پڑتال

L.H.S $=1+\omega+\omega^2$

$$=1+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right), \qquad \omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ اور } \omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ جبکہ}$$

$$=\frac{2-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{2-2}{2}=\frac{0}{2}=0=\text{R.H.S.}$$

پس تصدیق ہوا

(iii) اکائی کے تین مکعب روٹس کا حاصل ضرب "1" ہوتا ہے $\omega\cdot\omega^2\cdot 1=1$ یا $\omega^3=1$

پڑتال

L.H.S $=\omega\cdot\omega^2\cdot 1$

$$=1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{1-i^2 3}{4}$$

$$=\frac{1-(-1)(3)}{4}, \qquad \left(\ i^2=-1\right)$$

$$=\frac{1+3}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$=\text{R.H.S}$ $\qquad$ یعنی $1\cdot\omega\cdot\omega^2=1$ یا $\omega^3=1$

پس تصدیق ہوا

(iv) ہر اکائی مکعب کمپلیکس روٹ دوسرے کا معکوس (Reciprocal) ہوتا ہے

پڑتال $\omega^3 = 1,$

ثبوت: ایک کمپلیکس روٹ ω ہے۔

$\Rightarrow \quad \omega \cdot \omega^2 = 1,$

$\Rightarrow \quad \omega^2 = \dfrac{1}{\omega}$ یا $\omega = \dfrac{1}{\omega^2}.$

ہر اکائی کا مکعب کمپلیکس روٹ دوسرے کا معکوس (reciprocal) ہوتا ہے۔

(v) ہر ω^3 کی لازمی طاقت اکائی ہوتی ہے۔

$\because \quad \omega^3 = 1,$

$\therefore \quad (\omega^3)^m = 1, \quad \forall m \in Z.$

$\Rightarrow \quad \omega^{3m} = 1.$

پس ثابت ہو

20.2. (iv) اکائی کے مکعب روٹس کی خصوصیات استعمال کرتے ہوئے سوالات حل کرنا۔

اکائی کے مکعب روٹ سے متعلق سوالات مندرجہ ذیل ہے۔

مثال $-27.$ کے مکعب روٹس (Cube roots) معلوم کریں۔

حل فرض کریں 27- کا مکعب روٹ x ہے۔

$\therefore \quad x = (-27)^{\frac{1}{3}}$ یعنی

دونوں اطراف مکعب کرنے سے ہمارے پاس $x^3 = -27$

$\Rightarrow \quad x^3 + 27 = 0$

$\Rightarrow \quad (x)^3 + (3)^3 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0, \qquad \left[a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^3)\right]$

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3,$

$x^2 - 3x + 9 = 0$

اب $a = 1$ ، $b = -3$ اور $c = 9.$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9 - 36}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-27}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-1 \times 27}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{i^2 \times 27}}{2} \qquad (\because i^2 = -1)$$

مثال 4. ثابت کریں

$$(x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)=x^3+y^3+z^3-3xyz,$$

جبکہ ω^2 اور ω اکائی کے کمپلیکس مکعب روٹس ہیں

ثبوت $\quad$ **L.H.S** $=(x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$

$$=(x+y+z)\left[(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)\right]$$

$$=(x+y+z)\left[x^2+xy\omega^2+xz\omega+xy\omega+y^2\omega^3+yz\omega^2+xz\omega^2+yz\omega^4+z^2\omega^3\right]$$

$$=(x+y+z)\left[x^2+y^2(1)+z^2(1)+xy(\omega^2+\omega)+yz(\omega^2+\omega^4)+zx(\omega+\omega^2)\right]$$

$$=(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2+xy(-1)+yz(-1)+zx(-1)\right],$$

$$=(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right] \qquad \left(\begin{array}{l}\because\ \omega^3=1, \omega^2+\omega=-1\\ \text{and } \omega^2+\omega^4=\omega+\omega^2=-1\end{array}\right)$$

$$=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

$$=\text{R.H.S}$$

پس ثابت ہوا

EXERCISE 20.2 مشق

1. تمام مکعب روٹس معلوم کریں

(i) 64 $\quad$ (ii) -125 $\quad$ (iii) 216

2. مندرجہ ذیل کو حل کریں۔

(i) $(1+\omega^2)^4$ $\quad$ (ii) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)$

(iii) $(2+5\omega+2\omega^2)^6$ $\quad$ (iv) $(-1+\sqrt{-3})^4+(-1-\sqrt{-3})^4$

3. ثابت کریں

(i) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)=(\omega+\omega^2)^4$

(ii) $(a+b)(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)=a^3+b^3$

(iii) $(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)=a^2+b^2+c^2-ab-ba-ca$

(iv) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^9+\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^9-2=0$

(v) $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=0$

20.3. دو درجی مساوات کے روٹس اور عددی سر

20.3. (i) دو درجی مساوات کے روٹس اور عددی سروں کے درمیان تعلق معلوم کرنا۔

فرض کریں $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کے دو روٹس کو α اور β سے ظاہر کرتے ہیں

تو $\quad \beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\quad$ اور $\quad \alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\therefore \quad \alpha+\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} \qquad (1)$$

اور

$$\alpha\beta = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha\beta = \frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \qquad (2)$$

لہٰذا (1) روٹس کے مجموعہ کو ظاہر کرتی ہے $= -\dfrac{x \text{ کا عددی سر}}{x^2 \text{ کا عددی سر}}$

اور (2) روٹس کے حاصل ضرب کو ظاہر کرتی ہے $= \dfrac{\text{مستقل رقم}}{x^2 \text{ کا عددی سر}}$

اس طرح ہمارے پاس اہم نتیجہ ہے۔

اگر α اور β مساوات $ax^2+bx+c=0, a \neq 0,$ روٹس ہیں

تو $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}.$ اور $\alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}$

20.3. (ii) دی گئی مساوات کو حل کئے بغیر ان کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کرنا۔

مثال حل کئے بغیر مندرجہ ذیل پر مساوات کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $4x^2+6x+1=0$ (ii) $3(5x^2+1)=17x$

حل (i):

$4x^2+6x+1=0$

یہاں $a=4, \ b=6 \ c=1$

$\alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}$ اور $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

$\alpha+\beta = -\dfrac{6}{4}$ اور $\alpha\beta = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \quad \alpha+\beta = -\dfrac{3}{2}$ اور $\alpha\beta = \dfrac{1}{4}$

حل (ii): $3(5x^2+1)=17x$

یہاں $15x^2-17x+3=0$

$a=15, b=-17$ اور $c=3$

$\alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}$ اور $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

$\alpha+\beta = -\dfrac{(-17)}{15}$ اور $\alpha\beta = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$

$\alpha+\beta = \dfrac{17}{15}$ اور $\alpha\beta = \dfrac{1}{5}$

20.3. (iii) دی گئی مساوات میں نامعلوم کی قیمت معلوم کرنا جب کہ

(a) روٹس کا مجموعہ روٹس کے حاصل ضرب کے برابر ہو۔
(b) روٹس کے مربعوں کا مجموعہ دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔
(c) روٹس میں دیئے گئے عدد کا فرق ہو۔

(d) روٹس دیئے گئے تعلق کی تصدیق کرتے ہو (مثلاً $2\alpha+5\beta=7$ جبکہ α اور β دی گئی مساوات کے روٹس ہیں)

(e) روٹس کو مجموعہ اور حاصل ضرب دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔ اوپر دی گئیں تمام شرائط کی وضاحت مثالوں کی جاسکتی ہے

(a) روٹس کا مجموعہ روٹس کے حاصل ضرب کے برابر ہو۔

مثال 1: k کی قیمتیں معلوم کریں۔ اگر $6x^2-3kx+5=0$ کے روٹس کا مجموعہ روٹس کے حاصل ضرب کے برابر ہو۔

حل فرض کریں α اور β مساوات $6x^2-3kx+5=0$ کے روٹس ہیں

یہاں $a=6$ $b=-3k$ ؛ $c=5$

اب $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(-3k)}{6}=\frac{3k}{6}$ اور $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{5}{6}$

دیا گیا ہے

روٹس کا مجموعہ = روٹس کے حاصل ضرب

یعنی $\alpha+\beta=\alpha\beta$

$\therefore \quad \frac{3k}{6}=\frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad k=\frac{5}{3}.$

مثال 2: P کی قیمت معلوم کریں۔ اگر مساوات $2x^2+(8-4p)x+3p=0$ کے روٹس کا مجموعہ، روٹس کے حاصل ضرب کے دو گناہ کے برابر ہے۔

حل فرض کریں α اور β مساوات $2x^2+(8-4p)x+3p=0$ کے روٹس ہیں

$a=2,$ $b=8-4p$ اور $c=3p$

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(8-4p)}{2}=2p-4$ اور $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{3p}{2}$

دی گئی شرط کے مطابق

$\alpha+\beta=2(\alpha\beta)$

یعنی $2p-4=2\left(\frac{3p}{2}\right)=3p$

$\Rightarrow \quad p=-4.$

(b) روٹس کے مربعوں کا مجموعہ دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔

مثال 3: k معلوم کریں اگر مساوات $2x^2+3kx+k^2=0$ کے روٹس کے مربعوں کا مجموعہ 5 ہے

حل فرض کریں α اور β مساوات $2x^2+3kx+k^2=0$ کے روٹس ہیں

یہاں $a=2,$ $b=3k$ ؛ $c=k^2$

اب $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{3k}{2}$ اور $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{k^2}{2}$

دی گئی شرط کے مطابق

$\alpha^2+\beta^2=5$

$\Rightarrow \quad (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 5 \qquad \because [a^2+b^2=(a+b)^2-2ab]$

$\Rightarrow \quad \left(\frac{-3k}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{k^2}{2}\right) = 5$

$\Rightarrow \quad \frac{9k^2}{4} - k^2 = 5$

$\Rightarrow \quad \frac{9k^2-4k^2}{4} = 5$

$\Rightarrow \quad 5k^2 = 5\times 4$

$\Rightarrow \quad k^2 = 4$

$\Rightarrow \quad k = \pm 2$

(c) روٹس میں دیئے گئے عدد کا فرق ہو

مثال 4: p معلوم کریں مساوات $x^2 - px + 8 = 0$ کے روٹس میں فرق 2 ہے

حل: فرض کریں α اور β مساوات $x^2 - px + 8 = 0$ کے روٹس ہیں

یہاں $a=1,\ b=-p$ اور $c=8$

اب $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$ اور $\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-p)}{1} = p$

دی گئی شرط کے مطابق $\alpha-\beta = 2$

دونوں اطراف مربع کرنے سے ہمارے پاس

$(\alpha-\beta)^2 = 4$

$\Rightarrow \quad (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \qquad \left[\because (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab\right]$

$\Rightarrow \quad p^2 - 4(8) = 4$

$\Rightarrow \quad p^2 - 32 = 4$

$\Rightarrow \quad p^2 = 36$

$\Rightarrow \quad p = \pm 6$

(d) روٹس دیئے گئے تعلق کے تصدیق کرتے ہو (مثلاً $2\alpha+5\beta=7$, جبکہ α اور β دی گئی مساوسات کے روٹس ہیں)

مثال 5: k معلوم کریں اگر α اور β مساوات $x^2-5x+k=0$ کے روٹس میں شرط $2\alpha+5\beta=7$ کی تصدیق کریں۔

حل: دی گئی مساوات , $x^2-5x+k=0$

یہاں $a=1,\ b=-5$ ، $c=k$

فرض کریں α اور β دی گئی مساوات کے روٹس ہیں

$\because$ جبکہ $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$ اور $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$\therefore \quad \alpha+\beta = -\frac{(-5)}{1} = 5$

$\Rightarrow \quad \alpha = 5-\beta \qquad$ (i)

اور $\alpha\beta = \frac{k}{1} = k$

$\Rightarrow \quad \alpha\beta = k \qquad \text{(ii)}$

دیا گیا ہے

$\because \quad 2\alpha + 5\beta = 7$

$\therefore \quad 2(5-\beta)+5\beta = 7$ یعنی

$\Rightarrow \quad 10-2\beta+5\beta = 7$

$\Rightarrow \quad 3\beta = -3$

$\Rightarrow \quad \beta = -1$

$\therefore$ مساوات (i) سے ہمیں پاس ہے

$\alpha = 5-(-1) = 5+1 = 6,$

k کی قیمت معلوم کرنے کے لیئے α اور β کی قیمتیں مساوات (2) میں رکھنے سے ہمیں جلد

$k = 6(-1) = -6$

$\Rightarrow \quad k = -6$

(e) روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب دیئے گئے عدد کے برابر ہو

مثال 6: k معلوم کریں اور مساوات $6x^2-3kx+5=0$ کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب $\frac{5}{6}$. کے برابر ہے۔

حل فرض کریں α اور β مساوات, $6x^2-3kx+5=0$ کے روٹس میں تو

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3k)}{6} = \frac{k}{2} \qquad \text{(i)}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{5}{6} \qquad \text{(ii)}$$ اور

دی گئی شرط کے مطابق کہ روٹس کا مجموعہ او حاصل ضرب $\frac{5}{6}$. کے برابر ہیں

$$\alpha+\beta = \alpha\beta = \frac{5}{6}$$ یعنی

$$\frac{k}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{5}{3},$$

بس $k = \frac{5}{3}$, پر دی گئی مساوات کے روٹس کا مجموعہ اور روٹس کا حاصل ضرب طور. $\frac{5}{6}$ کے برابر ہے۔

مشق 20.3 EXERCISE

1. حل کئے بغیر مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس کا مجموعہ اور روٹس کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $x^2 - x - 1 = 0$ (ii) $2x^2 - 3x - 4 = 0$

(iii) $x^2 - \frac{3}{4}a^2 = ax$ (iv) $7x^2 - 5kx + 7k = 0$

2. m کی قیمت معلوم کریں اگر

(i) مساوات $x^2 + (3m-7)x + 5m = 0$ کے روٹس کا مجموعہ اس کے روٹس کے حاصل ضرب کا $\frac{3}{2}$ گنا ہے

(ii) مساوات $2x^2 - 3x + 4m = 0$ کے روٹس کا مجموعہ اس کے روٹس کے حاصل ضرب کا 6 گنا ہے۔

3. p کی قیمت معلوم کریں اگر

(i) مساوات $x^2 - px + 6 = 0$ کے روٹس کے مربعوں کا مجموعہ 13 کے برابر ہے۔

(ii) مساوات $x^2 - 2px + (2p-3) = 0$ کے روٹس کے مربعوں کا مجموعہ 6 ہے

4. m کی قیمت معلوم کریں اگر

(i) مساوات $x^2 - 5x + 2m = 0$ کے روٹس میں 1 کا فرق ہے۔

(ii) مساوات $x^2 - 8x + m + 2 = 0$ کے روٹس میں 2 کا فرق ہے۔

5. k کی قیمت معلوم کریں اگر

(i) مساوات $5x^2 - 7x + k - 2 = 0$ کے روٹس تعلق $2\alpha + 5\beta = 1$ کی تصدیق کرتے ہیں۔

(ii) مساوات $3x^2 - 2x + 7k + 2 = 0$ کے روٹس تعلق $7\alpha - 3\beta = 18.$ کی تصدیق کرتے ہیں۔

6. p کی قیمت معلوم کریں اگر مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس کا مجموعہ اور روٹس کا حاصل ضرب برابر ہیں۔

(i) $(2p+3)x^2 + (7p-5)x + (3p-10) = 0$ (ii) $4x^2 - (5p+3)x + 17 - 9p = 0$

20.4 دو درجی مساوات کے روٹس کے سمیٹرک تفاعل

دو درجی مساوات کے روٹس کے سمیٹرک تفاعل کی تعریف

فرض کریں α اور β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں α اور β کا تفاعل f سمیٹرک تفاعل کہہ تا ہے کہ جب α اور β کو آپس میں تبدیل کیا جائے تو تفاعل تبدیل نہیں ہو ویسا ہی رہتا ہے۔ یعنی $f(\alpha,\beta) = f(\alpha,\beta)$

$\alpha + \beta$ اور (α,β)، α اور β کے پرائمری سمیٹرک تفاعل کے طور پر جانے جاتے ہیں۔

نوٹ کریں کہ $\alpha - \beta \neq \beta - \alpha$ لہذا $\alpha-\beta$ روٹس کا سیمٹرک تفاعل نہیں ہے۔

روٹس کے سمیٹرک کے تفاعل کی قیمت دو درجی مساوات کے عددی سروں کی صورت میں $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$. اور $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ کی جاسکتی ہے $\alpha + \beta$ اور $\alpha\beta$ کی

صورت میں بیان کرتے ہوئے سیمٹرک تفاعل کی مثالیں نیچے دی گئی ہیں۔

- $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
- $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=\ (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\ \ -2(\alpha\beta)^{\ 2}$

مثال $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta,$ کی قیمت معلوم کریں جب کہ $\alpha=2$ اور $\beta=3$ اور ثابت کریں کہ یہ α اور β کا سیمٹرک تفاعل ہے جبکہ α اور β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں۔

حل فرض کریں $f(\alpha\ \beta)=\alpha\ \ +\beta\ \ +\alpha\beta,$

دیا گیا ہے $\alpha=2$ اور $\beta=3$

$$\therefore\qquad f(2,3)=2^2+3^2+(2)(3)=4+9+6=19,$$

اب

$$f(\beta,\alpha)=\beta^2+\alpha^2+\beta\alpha=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=f(\alpha,\beta)$$

$$\because\qquad f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$$

$\therefore$ f سیمٹرک تفاعل ہے

پس ثابت ہوا دیا گیا اظہار یہ روٹس α اور β کا سیمٹرک تفاعل ہے

20 4 (ii) سیمٹرک تفاعل کو گرائیفکلی (Graphically) ظاہر کریں۔

20.4.1 میں ہم پہلے ہی دو درجی مساوات کے روٹس کے سیمٹرک تفاعل کی وضاحت کر چکے ہیں۔ جیسے

$\alpha+\beta,\alpha\beta,\alpha^2+\beta^2,\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta,\alpha^3+\beta^3$ وغیرہ

جب ایک سیمٹرک تفاعل کو مستقل کے مساوی ہوتا ہے $c\in R$ ہمیں ایسا سیمٹرک مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اور سیمٹرک مساوات کے روٹس ہوں لکھے جا سکتے ہیں $f(\alpha,\beta)=c.$

ہر مساوات کو گرافیکلی (Graphically) ظاہر کیا جا سکتا ہے باطور تمام نقاط کا سیٹ $G(f)$ کی وضاحت کی گئی ہے۔

$$G(f)=\{(\alpha,\beta)\mid f(\alpha,\beta)=c\wedge\alpha,\beta\in R\}$$

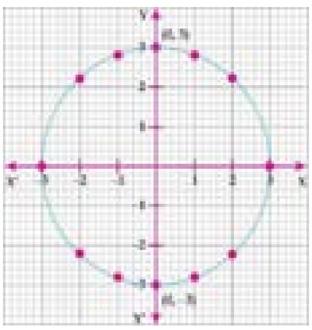
مثال سیمٹر کمساوات $\alpha^2+\beta^2=9$ گرافیکلی (Graphically) ظاہر کریں اور گراف بنائیں۔

حل دیا گیا ہے کہ

$$\therefore\qquad \alpha^2+\beta^2=9$$

$$\Rightarrow\qquad \beta=\pm\sqrt{9-\alpha^2}$$

گراف بنانے کے لیئے ہم کچھ نقاط لیتے ہیں α کی مختلف قیمتیں رکھنے سے β کے قیمتیں ملتی ہیں۔



α	0	1	2	3	−1	−2	−3
β	±3	±2.828	±2.2360	0	±2.828	±2.2360	0

لہذا سیمٹرک تفاعل $\alpha^2+\beta^2$ دائرے کو ظاہر کرتا ہے جب $c=9$ کے برابر ہوتا ہے۔

20.4. (iii) دو درجی مساوات کے روٹس کے سمیٹرک تفاعل کو اس کے عددی سر وں کی لحاظ سے حل کرنا

فرض کریں کہ α اور β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\alpha+\beta=-\,a \qquad \text{(ii)}$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \qquad \text{(iii)}$$

اوپر مساوات (ii) اور (iii) دو درجی مساوات (i) کے پرائمری سمیٹرک تفاعل کو ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1: اگر α,β مساوات $x^2-px+q=0$ کے روٹس ہیں۔ α اور β کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $\alpha^2+\beta^2$ (ii) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$

حل: α اور β $x^2-px+q=0$ کے روٹس ہیں

$a=1,\ b=-p$ اور $c=q$

$$\therefore \qquad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(-p)}{1}=p$$

اور $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{q}{1}=q$ اور

یہاں
$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=(p)^2-2q \qquad (\because \alpha+\beta=p \text{ اور } \alpha\beta=q)$$
$$=p^2-2q$$

(ii)
$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{p^2-2q}{q} \qquad (\because \alpha+\beta=p \text{ اور } \alpha\beta=q)$$

مشق 20.4 EXERCISE

1. اگر α,β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں مندرجہ ذیل سمیٹرک تفاعل کو $\alpha+\beta$ اور $\alpha\beta$ کی صورت بیان کریں۔

(i) $(\alpha-\beta)^2$ (ii) $(\alpha+\beta)^3$ (iii) $\alpha^2\beta^{-1}+\beta^2\alpha^{-1}$

(iv) $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$ (v) $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$ (vi) $\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)^2$

2. اگر α,β مساوات $2x^2-3x+7=0,$ کے روٹس ہیں۔
مندرجہ ذیل سمیٹرک تفاعل کی قیمت معلوم کریں

(i) $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}$ (iii) $\frac{1}{a\alpha+1}+\frac{1}{a\beta+1}$

3. اگر α,β مساوات $px^2+qx+q=0, p\neq 0,$ کے روٹس ہیں تو $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ کی قیمت معلوم کریں

4. سمیٹرک تفاعل $\alpha+\beta=8$ کو گرافیکلی (Graphically) ظاہر کریں جب کہ α اور β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں

20.5 دو درجی مساوات کی تشکیل

20.5.(i) کلیہ تشکیل دینا x^2- (روٹس کا مجموعہ) $x+$ (روٹس کا حاصل ضرب) $=0$, دیئے گئے روٹس سے دو درجی مساوات تشکیل دینا۔

فرض کریں α,β دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کے روٹس ہیں۔

تو $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ اور $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

اب مساوات (i) کو دوبارہ لکھیں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے

بشرطیکہ $a\neq 0$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-(\text{روٹس کا مجموعہ})x+(\text{روٹس کی حاصل ضرب})=0$$

جبکہ $\frac{-b}{a}$ اور $\frac{c}{a}$ الترتیب روٹس کے مجموعہ اور روٹس کے حاصل ضرب کو ظاہر کرتے ہیں

یعنی اب اس کو واضح طور پر یوں لکھا جاسکتا ہے۔ جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے

$x^2-Sx+P=0$ جبکہ S اور P بالترتیب دی گئی دو درجی مساوات کے روٹ کا مجموعہ اور روٹس کا حاصل ضرب کو ظاہر کرتے ہیں۔

مثال: مساوات تشکیل دیں جس کے روٹس ہیں

(i) $-\frac{4}{5},\frac{3}{7}$ (ii) $7\pm 2\sqrt{5}$

حل (i) فرض کریں $\alpha = -\frac{4}{5}$ اور $\beta = \frac{3}{7}$

$\therefore \quad S = \alpha + \beta = -\frac{4}{5} + \frac{3}{7} = \frac{-28+15}{35} = \frac{-13}{35}$

اور $P = \alpha\beta = \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{-12}{35}$

جب روٹس معلوم ہیں تو مساوات ہو گی

$x^2 - Sx + P = 0$

i.e, یعنی $x^2 - \left(\frac{-13}{35}\right)x + \left(\frac{-12}{35}\right) = 0$

$\Rightarrow \quad 35x^2 + 13x - 12 = 0.$

مطلوبہ مساوات ہے

حل (ii) فرض کریں $\alpha = 7 + 2\sqrt{5}$ اور $\beta = 7 - 2\sqrt{5}$

$\therefore \quad S = \alpha + \beta = 7 + 2\sqrt{5} + 7 - 2\sqrt{5} = 14$

اور $P = \alpha\beta = \left(7 + 2\sqrt{5}\right)\left(7 - 2\sqrt{5}\right) = 49 - 20 = 29$

جب روٹس معلوم ہیں تو مساوات ہو گی

$x^2 - Sx + P = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 14x + 29 = 0,$ مطلوبہ مساوات ہے

20.5.(ii) دو درجی مساوات تشکیل دیں جن کے روٹس کی اقسام یہ ہیں

(a) $2\alpha+1, 2\beta+1$ (b) α^2, β^2 (c) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

(d) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (e) $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},$

جبکہ α,β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں

مثال: اگر α,β دو درجی مساوات $x^2 - 5x + 6 = 0$ کے روٹس ہیں۔ مساوات تشکیل دیں جس کے روٹس ہیں

(i) $2\alpha+1, 2\beta+1$ (ii) α^2, β^2 (iii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

(iv) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (v) $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

حل (i): چونکہ α,β مساوات $x^2 - 5x + 6 = 0$ کے روٹس ہیں $a = 1, b = -5$ اور $c = 6$

یہاں

$\therefore \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6,$ اور $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-5)}{1} = 5$

مطلوبہ مساوات کے روٹس $2\alpha+1$ اور $2\beta+1$ ہیں

اب ہم روٹس کا مجموعہ اور روٹس کا حاصل ضرب معلوم کرتے ہیں

$S=(2\alpha+1)+(2\beta+1)$
$S=2(\alpha+\beta)+2$
$S=2(5)+2$ $\quad (\because\ \alpha+\beta=5)$
$S=10+2=12$
یہاں $P=(2\alpha+1)(2\beta+1)$
$P=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$
$P=4(6)+2(5)+1$ $\quad (\because \alpha\beta=6$ و $\alpha+\beta=5)$
$P=24+10+1=35$
$x^2+12x+35=0$ مطلوبہ مساوات ہے

حل **(ii):** مطلوبہ مساوات کے روٹس α^2 اور β^2 ہیں۔

$S=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(5)^2-2(6)=25-12=13, (\because \alpha+\beta=5 \text{ and } \alpha\beta=6)$
اور $P=\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(6)^2=36$
$x^2-Sx+P=0$
$\therefore \quad x^2-13x+36=0,$
مطلوبہ مساوات ہے

حل **(iii):** مطلوبہ مساوات کے روٹس $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ ہیں

$S=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{5}{6},$ $\quad (\because \alpha\beta=6$ اور $\alpha+\beta=5)$
اور $P=\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{6}$
$x^2-Sx+P=0$
$\therefore \quad x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$
لہذا $\Rightarrow \quad 6x^2-5x+1=0,$
مطلوبہ مساوات ہے

حل **(iv):** مطلوبہ مساوات کے روٹس $\frac{\alpha}{\beta}$ اور $\frac{\beta}{\alpha}$ ہیں

$S=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$ $\quad (\because \alpha\beta=6$ اور $\alpha+\beta=5)$
$=\frac{25-2(6)}{6}=\frac{25-12}{6}=\frac{13}{6},$
اور $P=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{6}{6}=1$
$x^2-Sx+P=0$
$\therefore \quad x^2-\frac{13}{6}x+1=0$
$\Rightarrow \quad 6x^2-13x+6=0,$
مطلوبہ مساوات ہے

حل (v) مطلوبہ مساوات کے روٹس $\alpha+\beta$ اور $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ہیں۔

$$S=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)+\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)$$
$$=5\left(1+\frac{1}{6}\right)=5\left(\frac{7}{6}\right)=\frac{35}{6} \qquad (\because \alpha\beta=6 \text{ اور } \alpha+\beta=5)$$
$$P=(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{25}{6} \qquad (\because \alpha\beta=6 \text{ اور } \alpha+\beta=5)$$
$$x^2-Sx+P=0$$
$$\therefore \quad x^2-\frac{35}{6}x+\frac{25}{6}=0$$
$$\Rightarrow \quad 6x^2-35x+25=0,$$
مطلوبہ مساوات ہے

20.5.(iii) α، β کی قیمت معلوم کریں جبکہ $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ مساوات کے روٹس ہیں

مثال: اگر $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ مساوات $x^2-6x+8=0$ کے روٹس ہیں α اور β کی قیمت معلوم کریں

حل: چونکہ $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ مساوات $x^2-6x+8=0$ کے روٹس ہیں

یہاں $a=1$، $b=-6$ اور $c=8$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{b}{a}=-\left(\frac{-6}{1}\right)=6,$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6$$
$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta=6\alpha\beta \qquad \ldots \qquad (i)$$
اور
$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{c}{a}=\frac{8}{1}=8$$
$$\Rightarrow \quad \alpha\beta=\frac{1}{8} \qquad (ii)$$
مساوات (i) سے
$$\beta=6\left(\frac{1}{8}\right)-\alpha=\frac{3-4\alpha}{4} \qquad (iii)$$

مساوات (ii) میں β کی قیمت رکھنے سے

$$\alpha\left(\frac{3-4\alpha}{4}\right)=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8\alpha}{4}(3-4\alpha)-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 2\alpha(3-4\alpha)-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 6\alpha-8\alpha^2-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 8\alpha^2-6\alpha+1=0$$

$$\Rightarrow \quad 8\alpha^2-4\alpha-2\alpha+1=0$$

$$\Rightarrow \quad 4\alpha(2\alpha-1)-1(2\alpha-1)=0$$

$$\Rightarrow \quad (2\alpha-1)(4\alpha-1)=0$$

$2\alpha-1=0$ یا $4\alpha-1=0$

$\Rightarrow \quad \alpha=\frac{1}{2}$ یا $\alpha=\frac{1}{4},$

مساوات (iii) ہمارے پاس

$$\beta=\frac{3-4\left(\frac{1}{2}\right)}{4}=\frac{1}{4} \quad \text{or} \quad \beta=\frac{3-4\left(\frac{1}{4}\right)}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

لہٰذا $\alpha=\frac{1}{2}$ اور $\beta=\frac{1}{4}$ یا $\alpha=\frac{1}{4}$ اور $\beta=\frac{1}{2}$

مشق 20.5

1. مساوات تشکیل دیں جس روٹس ہے

(i) $-2, 3$ (ii) ω, ω^2 (iii) $2+i, 2-i$ (iv) $2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$

2. اگر β اور α مساوات $6x^2-3x+1=0$ کے روٹس ہیں۔مساوات تشکیل دیں جس روٹس ہے

(i) $2\alpha+1, 2\beta+1$ (ii) α^2, β^2 (iii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

(iv) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (v) $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

3. مساوات معلوم کریں جس کے روٹس مساوات $px^2-qx+r=0, p\neq 0$ کے روٹس کے معکوس ہیں

4. مساوات معلوم کریں جس کے روٹس مساوات $x^2-px+q=0$ کے روٹس کے دوگنا ہیں

5. مساوات معلوم کریں جس کے روٹس مساوات $px^2+qx+r=0$ کے روٹس کے 2 زیادہ ہو

6. شرط معلوم کریں کہ مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کا ایک روٹ ہو سکتا ہے

(i) دوسرے کا تین گنا (ii) دوسرے کا بھی معکوس

(iii) دوسرے کا مربع (iv) دوسرے کا ضربی معکوس

20.6 اعلیٰ درجے کی مساوات کو دو درجی شکل تک کم کرنا

20.6.(a) مکعب مساوات کو حل کریں اگر مساوات کا ایک روٹ دیا گیا ہو

فرض کریں $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ مکعب مساوات ہے اور اس روٹ α ہے

فرض کریں کہ $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ کا ایک روٹ α ہے تو:

$$f(x)=0$$

$f(x)=(x-\alpha)\cdot f_1(x)$ جبکہ $f_1(x)$ دو درجی اظہاریہ ہے

مثال: $x^3-6x^2+11x-6=0$ کو حل کریں اگر اس مساوات کا ایک روٹ 1 ہے

حل: $x^3-6x^2+11x-6=0$

پر دیا گیا ہے کہ ایک روٹ 1 ہے

یعنی $x=1$ ضرب دیندہ جز ہے

ترکیبی تقسیم کے طریقے سے

1	1	−6	11	−6
	↓	1	−5	6
	1	−5	6	0 = باقی

نیچے ہمارے پاس دو درجی مساوات ہے

$$x^2-5x+6=0$$

$\Rightarrow \quad x^2-2x-3x+6=0$

$\Rightarrow \quad x(x-2)-3(x-2)=0$

$\Rightarrow \quad (x-2)(x-3)=0$

i.e, $\quad x-2=0 \quad$ or $\quad x-3=0$

$\Rightarrow \quad x=2 \quad$ or $\quad x=3$

حل سیٹ $=\{1,2,3\}$

20.6.(b) چار درجی (Biquadratic) مساوات حل کرنا اگر مساوات کے دو حقیقی روٹس دیئے گئے ہوں

فرض کریں $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0, a_0\neq 0$ چار درجی مساوات ہے اور α اور β اس کے دو روٹس ہیں

اگر $f(x)=0$ کے دو روٹس α اور β ہیں تو

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\cdot f_1(x)$$

جبکہ $f_1(x)$ دو درجی اظہاریہ ہے

مثال: چار درجی مساوات $x^4-9x^3+19x^2+9x-20=0$ کے بقیہ دو روٹس معلوم کریں اگر اس کے دو روٹس 5 اور 1

حل: دی گئی چار درجی مساوات $x^4-9x^3+19x^2+9x-20=0$ ہے جس کے روٹس 1 اور 5 دیئے گئے ہیں یعنی ضرب دہندہ 5 اور 1 ہیں

طریقہ ترکیبی تقسیم سے ہمیں ملا

5	1	−9	19	9	−20
	↓	5	−20	−5	20
1	1	−4	−1	4	0 = باقی
	↓	1	−3	−4	
	1	−3	−4	0 = باقی	

اس طرح ہمارے پاس دو درجی مساوات ہے

$$x^2-3x-4=0$$

$\Rightarrow \quad x^2-4x+x-4=0$

$\Rightarrow \quad x(x-4)+1(x-4)=0$

$\Rightarrow \quad (x-4)(x+1)=0$

یعنی $\quad x-4=0 \quad$ یا $\quad x+1=0$

$\Rightarrow \quad x=4 \quad \Rightarrow \quad x=-1$

اس لیئے بقیہ دو روٹس 4 اور -1 ہیں

مشق 20.6

1. مکعب مساوات کے بقایا دو روٹس معلوم کریں جبکہ اس کا ایک روٹ دیا گیا ہے

(i) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ اور $x = 1$

(ii) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ اور $x = 3$

(iii) $x^3 - 28x + 48 = 0$ اور $x = 2$

2. چار درجی مساوات کے بقایا دو روٹس معلوم کریں۔ جب کہ اس کے دو روٹس دیئے گئے ہیں

(i) $12x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$ اور $x = 1, -\dfrac{1}{2}$

(ii) $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$ ء $x = 1, -1$

(iii) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ اور $x = 3, -4$

3. m کی قیمت معلوم کریں اور مساوات $2x^3 - 3mx^2 + 9 = 0$ کے بقایا روٹس معلوم کریں اگر ایک روٹ 3 ہے

4. اگر مساوات $x^3 - 3ax^2 - x + 6 = 0$ کا ایک روٹ 1 ہے تو a کی قیمت معلوم کریں اور اس کے بقایا روٹس بھی معلوم کریں

5. a اور b کی قیمت معلوم کریں اگر مساوات $x^4 - ax^2 + bx + 252 = 0$ دو روٹس 6 اور -2 ہیں۔ اس کے بقایا دو روٹس بھی معلوم کریں

20.7 ہمزاد مساواتیں (Simultaneous Equations):

دو یا دو سے زیادہ مساوات ایک ساتھ جائیں تو اسے ہمزاد مساواتوں کا نظام کہتے ہیں۔ دو نامعلوم تغیرات کی قیمت معلوم کرنے کے لیئے ہمیں مساواتوں کے ایک جوڑے کی ضرورت ہے

تمام متر تیب جوڑوں (x, y) کا سیٹ جو مساوارتوں کے نظام کی تسلی کرتے ہیں نظام کا حل سیٹ کہلاتے ہیں

20.7.(i)(a) دو متغیرات والي دو مساواتوں کو حل کرنا جب ایک مساوات یک درجی اور دوسری دو درجی ہو

مساوات کے نظام کو حل کرنے کا مکمل طریقہ جب ایک مساوات ایک درجی دوسری دو درجی ہو مثالوں کی حل کرکے بجی دکھایا گیا ہے

مثال 1: $2x + y = 10$ اور $4x^2 + y^2 = 68$ مساواتوں کے نظام کو حل کریں

حل:

$$2x + y = 10 \qquad \text{(i)}$$

$$4x^2 + y^2 = 68 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (i) سے

$$y = 10 - 2x \qquad \text{(iii)}$$

y کی قیمت کو مساوات (ii) میں رکھنے سے y

$$4x^2 + (10 - 2x)^2 = 68$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 + 100 - 40x + 4x^2 - 68 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 8x^2 - 40x + 32 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-5x+4=0$$
$$x^2-4x-x+4=0$$
$$(x-4)(x-1)=0$$
$\Rightarrow \quad x-4=0$ یا $x-1=0$

$\Rightarrow \quad x=4$ یا $x=1$

x کی ان قیمتوں کو مساوات (iii) میں رکھنے سے

جب $x=4$ تو $y=10-2(4)=2$

جب $x=1$ تو $y=10-2(1)=8$

بس حل سیٹ $\{(4,2),(1,8)\}$ ہے

مثال 2: $3x-2y=7$ اور $xy=20$ مساوات کا نظام حل کریں

حل:

$$3x-2y=7 \qquad \text{(i)}$$
اور
$$xy=20 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (i) سے ہمارے پاس

$$x=\frac{7+2y}{3} \qquad \text{(iii)}$$

x کی قیمت کو مساوات (ii) میں رکھنے سے

$$\left(\frac{7+2y}{3}\right)y=20$$
$$\Rightarrow \quad 7y+2y^2=20\times 3=60$$
$$\Rightarrow \quad 2y^2+7y-60=0$$
$$\Rightarrow \quad 2y^2-8y+15y-60=0$$
$$\Rightarrow \quad 2y(y-4)+15(y-4)=0$$
$$\Rightarrow \quad (y-4)(2y+15)=0$$

یعنی $y-4=0$ یا $2y+15=0$

$\Rightarrow \quad y=-\frac{15}{2}$ $\quad\Rightarrow\quad y \quad 4$

y کی قیمت کو مساوات (iii) رکھنے سے

جب $y=4$ تو $x=\frac{7+2(4)}{3}=\frac{15}{3}=5$

جب $y=-\frac{15}{2}$ تو $x=\frac{7+2\left(\frac{-15}{2}\right)}{3}=-\frac{8}{3}$

پس حل سیٹ $\left\{(5,4),\left(-\frac{8}{3},-\frac{15}{2}\right)\right\}$ ہے

(b) 20.7.(i) جب دونوں مساواتیں دو درجی ہو (When both the equations are quadratic):

ہم نظام کو حل کرنے کے طریقے وضاحت کرتے ہیں مندرجہ ذیل مثال کے ذریعے جب دونوں مساوات دو درجی ہوں

مثال 3: $x^2 + y^2 = 4$ اور $2x^2 - y^2 = 8$ مساواتوں کے نظام کو حل کریں

حل:

$x^2 + y^2 = 4$ (i)

$2x^2 - y^2 = 8$ (ii) اور

y^2 خارج کرنے کے لیئے مساوات (i) اور (ii) کو جمع کرنے سے ہمیں پاس

$\therefore \quad 3x^2 = 12$

$\Rightarrow \quad x^2 = 4$

$\Rightarrow \quad x = \pm 2,$

$\therefore$ مساوات (i) میں $x = \pm 2$ رکھنے سے ہمیں ملا

$(2)^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow \quad 4 + y^2 = 4$

$\Rightarrow \quad y^2 = 4 - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad y = 0$

$(-2)^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow \quad 4 + y^2 = 4$

$\Rightarrow \quad y^2 = 4 - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad y = 0$

پس حل سیٹ $\{(-2,0),(2,0)\}$ ہے

مثال4: $x^2 + y^2 = 13$ اور $xy = 6$ مساوات کے نظام حل کریں

حل:

$x^2 + y^2 = 13 \quad \ldots \quad$ (i)

$xy = 6 \quad \ldots \quad$ (ii) اور

مساواتوں کے اس اقسام میں ہم مستقل کو خارج کرتے ہیں

مساوات (i) کو 6 سے اور مساوات (ii) کو 13 سے ضرب دینے سے ہمیں ملا

$\therefore \quad 6x^2 + 6y^2 = 78 \quad \ldots \quad$ (iii)

$13xy = 78 \quad \ldots \quad$ (iv) اور

مساوات (iii) اور (iv) کو تفریق کرنے سے

$6x \; - 13xy + 6y \; = 0$

$\Rightarrow \quad 6x^2 - 9xy - 4xy + 6y^2 = 0$

$\Rightarrow \quad 3x(2x - 3y) - 2y(2x - 3y) = 0$

$2x - 3y = 0$ یا $3x - 2y = 0$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{3y}{2}$ یا $x = \dfrac{2y}{3}$

پس ہمارے مندرجہ ذیل دو نظام ہیں

$$\left.\begin{array}{l} xy = 6 \\ x = \dfrac{3y}{2} \end{array}\right\} \quad (A)$$

اور

$$\left.\begin{array}{l} xy = 6 \\ x = \dfrac{2y}{3} \end{array}\right\} \quad (B)$$

نظام A میں

$$\left(\frac{3y}{2}\right)y = 6, \qquad \left(\because\ x = \frac{3y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 3y^2 = 2\times 6$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{2\times 6}{3} = 4$$

$$y = \pm 2$$

جب $y = \pm 2$ تو $x = \frac{3}{2}(\pm 2) = \pm 3$

نظام B میں

$$\left(\frac{2y}{3}\right)\cdot y = 6 \qquad \left(\because\ x = \frac{2y}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2 = 3\times 6$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{3\times 6}{2} = 9$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm 3,$$

جب $y = \pm 3$ تو $x = \frac{2}{3}(\pm 3) = \pm 2$

پس حل سیٹ $\{(3,2),(-3,-2),(2,3),(-2,-3)\}$. ہے

20.7.(ii) دو درجی مساوات سے متعلق روز مرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1: دو متواتر مثبت صحیح اعداد معلوم کریں جن کا حاصل ضرب 72 ہے

حل: فرض کریں x اور $x+1$ متواتر صحیح اعداد ہیں

دی گئی شرط کے مطابق

$$x(x+1) = 72$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + x - 72 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+9)(x-8) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x+9 = 0 \quad \text{یا} \quad x-8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -9 \qquad \Rightarrow \quad x = 8$$

$x = -9$ کا منفی عدد ہونا نظر انداز کر دیں

8 اور 9 مطلوبہ متواتر صحیح اعداد ہیں

مثال 2: مستطیل پلاٹ کا رقبہ 320 مربع میٹر ہے۔ پلاٹ کی چوڑائی پلاٹ کی لمبائی 4 میٹر کم ہے۔ پلاٹ کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں

حل: فرض کریں پلاٹ ک لمبائی x ہے تو چوڑائی x-4 ہے

دیا گیا ہے

پلاٹ کا رقبہ $= 320\ m^2$ مربع میٹر

$$\Rightarrow \quad x(x-4) = 320 \qquad [\text{رقبہ = لمبائی X چوڑائی مربع میٹر}]$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x - 320 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 20x + 16x - 320 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x(x-20) + 16(x-20) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x-20)(x+16) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x - 20 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 16 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 20 \quad \Rightarrow \quad x = -16$$

$x = -16$ کو نظر انداز کریں کیونکہ لمبائی ہمیشہ مثبت ہوتی ہے

پس پلاٹ کی لمبائی 20 میٹر ہے اور پلاٹ کی چوڑائی 16 میٹر

مشق 20.7

مندرجہ ذیل مساواتوں کے نظام کل حل کریں

1. $2x - y = 3$ یا $x^2 + y^2 = 2$
2. $2x + y = 4$ یا $x^2 - 2x + y^2 = 0$
3. $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 2$ یا $4x + 3y = 25$
4. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ ؛ $x^2 + (y+1)^2 = 10$
5. $x^2 + y^2 = 25$ یا $(4x - 3y)(x - y - 5) = 0$
6. $x^2 + y^2 = 16$ یا $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$
7. $x^2 + y^2 = 5$ یا $xy = 2$
8. $x^2 + xy = 5$ یا $x^2 - 2xy = 2$
9. $x + \frac{4}{y} = 1$ یا $y + \frac{4}{x} = 25$
10. 12 کو دو حصوں میں اس طرح تقسیم کریں کہ ان کے مربعوں کا مجموعہ ان کے حاصل ضرب سے 4 زیادہ ہے۔
11. نماز کے ہال کی لمبائی اس کی چوڑائی سے 5 میٹر زیادہ ہے اگر ہال کا رقبہ 36 مربع میٹر ہے تو ہال کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں۔
12. دو مثبت اعداد کے مربعوں کا مجموعہ 100 ہے ایک عدد دوسرے عدد سے 2 زیادہ ہے۔ اعداد معلوم کریں
13. قائمۃ الزاویہ مثلث کے قاعدے کی لمبائی عمود کی لمبائی سے 3cm زیادہ ہے۔ جبکہ مثلث کا وتر 15cm ہے تو قاعدہ اور عمود کی لمبائی معلوم کریں۔
14. ایک متماثل الساقین مثلث کا احاطہ 36 سنٹی میٹر ہے مثلث دو غیر مساوی اضطلاع کا ارتفاع 12 سنٹی میٹر ہے۔ مثلث کی تینوں اطراف کی لمبائی معلوم کریں۔
15. دو اعداد کا فرق 5 ہے اور ان کے مربعوں کا فرق 275 ہے اعداد معلوم کریں

اعادہ مشق 20

1. کثیر انتخابی سوالات

درست جواب پر دائرہ لگائیں

i. اگر p اور q مساوات $2x^2+5x+3=0$ کے روٹس ہیں تو $p+q =$ ________

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{5}{2}$ (d) $-\frac{5}{2}$

ii. اگر $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ کے روٹس ہیں تو $\alpha+\beta =$ ____

(a) $-\frac{b}{a}$ (b) $\frac{b}{c}$ (c) $-\frac{b}{c}$ (d) $-\frac{c}{b}$.

iii. اگر $(p+1)x^2+(2p+3)x+(3p+4)=0$ کے روٹس کا مجموعہ -1 ہے تو روٹس کا حاصل ضرب ____ ہے

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

iv. $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ کے روٹس کی نوعیت معلوم کی جاتی بذریعہ: ________

(a) روٹس کا مجموعہ (b) روٹس کا حاصل ضرب

(c) فرق کنندہ (d) ان میں کوئی نہیں

v. اگر دو درجی مساوات کا روٹس کا مجموعہ $\frac{b}{a}$ اور روٹس کا حاصل ضرب $\frac{c}{a}$ ہے تو مساوات ہے: ________

(a) $ax^2+bx+c=0$ (b) $ax^2+bx-c=0$

(c) $ax^2-bx+c=0$ (d) $ax^2-bx-c=0$

vi. مطلوبہ مساوات ________ ہے جس کے روٹس معکوس ہیں $ax^2+bx+c=0$ کے روٹس کے

(a) $ax^2+bx+c=0$ (b) $cx^2+bx+a=0$

(c) $cx^2+ax+b=0$ (d) $cx^2-bx-a=0$

vii. اگر $x^2-2x-15=0$ کے روٹس α اور β ہیں تو $\alpha^2+\beta^2$ کی قیمت ________ ہے

(a) 34 (b) −34 (c) 26 (d) − 26

viii. اگر دو درجی مساوات کا $\Delta=b^2-4ac$ جس کے حقیقی عددی سر مکمل مربع ہیں تو روٹس ہیں ________

(a) حقیقی اور مساوی (b) حقیقی، ناطق اور غیر مساوی

(c) حقیقی، غیر ناطق اور غیر مساوی (d) غیر حقیقی

ix. اگر دو درجی مساوات کا ایک روٹ $2+\sqrt{3}$ ہے تو دوسرا روٹ ________ ہوگا

(a) 2 (b) $-2+\sqrt{3}$ (c) $2-\sqrt{3}$ (d) $-2-\sqrt{3}$

x. دو درجی مساوات ________ جس کے روٹس کمپلیکس مکعب روٹ ہے

(a) $x^2-x-1=0$ (b) $x^2-x+1=0$

(c) $x^2+x+1=0$ (d) $x^2+x-1=0$

2. مندرجہ ذیل مساوات کے روٹس کی نوعیت پر بحث کریں۔

i) $x^2-7x+12=0$ ii) $x^2-14x+49=0$

iii) $x^2-x+7=0$ iv) $x^2-5=0$

3. k کس قیمت کے لیئے مساوات $x^2+kx+4=0$

i) مساوی روٹس ہیں   ii) کمپلیکس روٹس ہیں

iii) حقیقی روٹس ہیں   iv) ناطق روٹس ہیں

4. 729 کے مکعب روٹس معلوم کریں

5. مندرجہ ذیل دو درجی مساواتوں کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کریں

i) $x^2-7x+29=0$ ii) $x^2-px+q=0$

iii) $7x-8=5x^2$ iv) $11x=9x^2-28$

6. دو درجی مساوات کے سمیٹرک تفاعل کی تعریف کریں

7. دو درجی مساوات تشکیل دیں جس کے روٹس $1-\sqrt{3}$ اور $1+\sqrt{3}$ ہیں

8. مساوات معلوم کریں جس کے روٹس مساوات $x^2-10x+16=0$ کے روٹس کے معکوس ہیں۔

9. مندرجہ ذیل مساوات کے نظام کو حل کریں۔

i) $x^2+y^2=13$, $x+y=5$ ii) $x^2+y^2=37$, $2xy=12$

خلاصہ

- دو درجی اظہاریے $ax^2+bx+c, a\neq 0$ کا فرق کنندہ $\Delta=b^2-4ac$ ہے
  - i. اگر $\Delta=b^2-4ac>0$ تو روٹس حقیقی اور غیر مساوی ہیں
  - ii. اگر $\Delta=b^2-4ac<0$ تو روٹس غیر حقیقی ہیں (کمپلیکس یا غیر حقیقی)
  - iii. اگر $\Delta=b^2-4ac=0$ تو روٹس ناطق اور مساوی ہیں، ہر ایک $-\frac{b}{2a}$ کے برابر ہے
  - iv. اگر a,b,c ناطق ہیں اور $\Delta=b^2-4ac$ مکمل مربع ہے تو روٹس ناطق اور غیر مساوی ہیں ورنہ غیر ناطق
- اکائی مکعب روٹس ا، ω اور ω^2 ہیں
- اکائی مکعب روٹس کی خصوصیات ہیں
  - i. ہر اکائی کا مکعب کمپلیکس روٹ دوسرے کا مربع ہوتا ہے
  - ii. اکائی کے تینوں مکعب روٹس کا مجموعہ صفر ہوتا ہے
  - iii. اکائی کے تینوں مکعب روٹس کا حاصل ضرب 1 ہوتا ہے
  - iv. ہر اکائی کے مکعب کا کمپلیکس روٹ دوسرا کا معکوس ہوتا ہے
- اگر α اور β دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کے روٹس ہیں تو:
  $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ اور $\alpha\beta=\frac{c}{a}$
- دو درجی مساوات کے روٹس کے سمیٹرک تفاعل ایسے تفاعل ہوتے ہیں جب روٹس آپس میں تبدیل کئے جاتے ہیں تو تفاعل تبدیل نہیں ہوتے ہیں ویسے ہی رہتے ہیں۔ یعنی: $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$