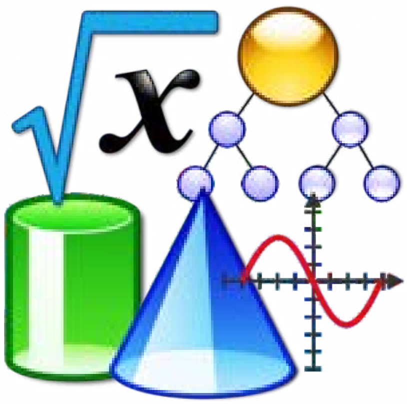
آزمائشی اشاعت

درسی کتاب

ریاضی

برائے جماعت 10

SHAHEED BENAZIR BHUTTO FREE TEXTBOOK SERIES



سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ

طبع کنندہ: یونیورسل بک ڈپو، حیدرآباد۔

مفت تقسیم کے لیے

تیار کردہ: سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ

سندھ کے تعلیمی مدارس کراچی، حیدر آباد، سکھر، لاڑکانہ، میر پور خاص اور شہید بینظیر آباد بورڈ کیلئے بطور واحد درسی کتاب۔

نظر ثانی: صوبائی ریویو کمیٹی ڈائریکٹوریٹ آف کریکیولم اسیسمنٹ اینڈ ریسرچ، سندھ جام شورو۔

منظور کردہ: محکمۂ تعلیم مدارس و خواندگی ادارۂ نصاب جائزہ و تحقیق حکومت سندھ

مراسلہ نمبر: No. SELD/CA/CW/396/2021

نگران اعلیٰ

عبدالعلیم لاشاری

چیئرمین سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ

چیف سپر وایزر

یوسف احمد شیخ

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ

سپر وایزر

داریوش کافی

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ

مصنفین

☆ مسٹر عبدل سلیم میمن
☆ مسٹر اعجاز علی سہچپوٹو
☆ ڈاکٹر کاشف علی ابڑو
☆ ڈاکٹر محمد مجتبیٰ شیخ
☆ پروفیسر محمد فاروق خان
☆ ڈاکٹر حفیظ اللہ مہر

نظر ثانی کردہ

☆ پروفیسر ڈاکٹر زین العابدین کھوڑو
☆ پروفیسر محمد فاروق خان
☆ مسٹر محمد صغیر شیخ
☆ مسٹر اعجاز علی سہچپوٹو
☆ مسٹر محمد وسیم
☆ مسٹر ذوہیب حسیب
☆ مسٹر ریاض حسین
☆ مسٹر آفتاب علی
☆ مسٹر میر سرفراز خلیل ساند

ایڈیٹر

☆ ڈاکٹر زبیر احمد کلہوڑو
☆ مسٹر میر سرفراز خلیل ساند

کنسلٹنٹ:

☆ کامران لطیف لغاری : ای ایس ایس
☆ میر سرفراز خلیل ساند : جی ایس ایس

مترجمین

☆ مسٹر آفتاب علی
☆ مسٹر ریاض احمد

ڈزائننگ اور لے آؤٹ

☆ جناب محمد ارسلان شفاعت گدی

اشاعت کا سال: 2024

مطبع یونیورسل بک ڈپو، حیدر آباد۔

پیش لفظ

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ کو نصابی کتب کی تیاری اور اشاعت کا کام سونپا گیا ہے تاکہ ہماری نئی نسل کو سائنس، ٹیکنالوجی اور ہیو مینٹیز کے شعبوں میں نئی صدی کے چیلنجز کا مقابلہ کرنے کے لیے علم، ہنر اور صلاحیتوں سے آراستہ کیا جاسکے۔ نصابی کتب کا مقصد عالمی برادری کے اجزا کو اجاگر کرنا اور ہمارے آباؤاجداد کے شاندار کارناموں کی عکاسی کرنا اور ہمارے شاندار ثقافتی ورثے اور روایات کی روشن مثالیں پیش کرنا ہے۔

نصابی کتاب، آپ کے ہاتھ میں، کلاس کے لیے صوبائی ریاضی کے نصاب ۲۰۱۷ کے مطابق کلاس IX کے لیے ریاضی کی ترتیب میں تیار کی گئی ہے۔ نصاب 30 اکائیوں پر مشتمل ہے جس میں سے پہلی 16 اکائیاں کلاس نہم ریاضی میں شامل ہیں۔ لہٰذا، بقیہ 14 یونٹس (17 سے 30 تک) دسویں جماعت کے لیے ریاضی کی اس نصابی کتاب میں شامل ہیں۔

اپنی حدود کے باوجود سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ نے اس کتاب کی طباعت میں بہت تکلیفیں اور اخراجات اٹھائے ہیں۔ درسی کتاب واقعی آخری لفظ نہیں ہے اور اس میں ہمیشہ بہتری کی گنجائش رہتی ہے۔ اگرچہ مصنفین نے اپنی سطح پر کوشش کی ہے کہ تصورات اور علاج دونوں لحاظ سے مناسب ترین پیشکش پیش کی جائے، پھر بھی کچھ کوتاہیاں اور خامیاں رہ سکتی ہیں۔ اس لیے مستند اساتذہ اور اہل طلبہ سے گزارش ہے کہ برائے مہربانی متن یا خاکہ میں موجود خامیوں کی نشاندہی کریں اور اس کتاب کے اگلے ایڈیشن کی بہتری کے لیے اپنی تجاویز اور اعتراضات دیں۔

آخر میں، میں اپنے مصنفین، ایڈیٹرز اور بورڈ کے ماہرین کا تعلیم کے لیے ان کی بے پناہ خدمات کے لیے شکریہ ادا کرنا چاہوں گا۔

چیئرمین
سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جام شورو

بِسۡمِ اللّٰہِ الرَّحۡمٰنِ الرَّحِیۡمِ

فہرست

یونٹ 17

سیٹ اور تفاعل

SETS AND FUNCTIONS

طلباء کے آموزشی حاصلات

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- R اور N, W, Z, E, O, P, Q سے ظاہر کئے جانے والے سیٹوں کو دہرا سکیں
- سیٹوں کی اقسام اور سیٹوں کو ظاہر کر سکیں
- سیٹوں پر عوامل کر سکیں
  - اتصال (یونین)
  - تقاطع
  - فرق
  - کمپلینٹ
- دو سیٹوں تشاکلی فرق
- دو یا تین سیٹوں کے اتصال (یونین) اور تقاطع کی ذیل میں دی گئی بنیادی خصوصیات کا عمومی ثبوت دے سکیں۔
  - القال (یونین) کی خاصیت مبادلہ
  - القال (یونین) کی خاصیت تقسیمی بحال تقاطع
  - القال (یونین) کی خاصیت مبادلہ
  - تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ القال
  - القال (یونین کی خاصیت تلازم)
  - ڈی مورگن کے قوانین
  - تقاطع کی خاصیت تلازم
- دیے گئے سیٹوں کے لیئے بنیادی خصوصیات کی تصدیق کر سکیں۔
- وین اشکال استعمال کرتے ہوئے ظاہر کر سکیں گے۔
  - سیٹوں کے یونین اور تقاطع
  - سیٹ کا کمپلینٹ
  - دو سیٹوں کا تشاکلی فرق
- وین اشکال استعمال کرتے ہوئے تصدیق کر سکیں گے۔
  - یونین کی تقاطع پر سیٹوں کی خاصیت مبادلہ
  - ڈی مارگن کے قوانین
  - قانون تلازم
- قوانین تقسیم
- مترتب جوڑوں اور کادتیسی حاصل ضرب کی نشاندہی کر سکیں
- ثنائی ربط کی تعریف اور اس کی حلقہ اثر (Domian) اور (Range) کی نشاندہی کر سکیں
- تفاعل کی تعریف کر سکیں اور اس کی حلقہ (Domian) کو شریک حلقہ اثر (Co-domain) اور زر (Range) کی نشاندہی کر سکیں گے
- مندرجہ ذیل کا مظاہر کر سکیں گے
  - ان ٹو تفاعل اورر ون ون تفاعل (ان جیکٹو فنکشن)
  - آن ٹو تفاعل (سرجیکٹو تفاعل)
  - ون ون اور آن ٹو تفاعل (بائی جیکٹیو)
- یہ جانچ سکیں کہ دیا گیا ربط تفاعل ہے یا نہیں
- (1-1) مطابقت اور (1-1) تفاعل میں تمیز کر سکیں گے۔

17.1 سیٹوں پر عوامل (Operations on Sets):

17.1(i) N, W, Z, E, O, P, Q, Q' اور $\mathbb{R}$ سے ظاہر کئے جانے والے سیٹوں کو دوہرانا

در حقیقت سیٹ ریاضی کا بنیادی تصور ہے جو کہ کہیں ریاضیاتی خیالات کا تجزیہ کرنے اور تشکیل دینے میں مدد گار ہوتا ہے۔ سیٹ کو ہم پچھلی جماعتوں میں پہلے ہی تفصیل سے بحث کر چکے ہیں۔

آئیں چند اہم سیٹ دہراتے ہیں

قدرتی اعداد کا سیٹ $\mathbf{N}=\{1,2,3,...\}$

مکمل اعداد کا سیٹ $\mathbf{W}=\{0,1,2,3,...\}$

صحیح اعداد کا سیٹ $\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,...\}$

جفت اعداد کا سیٹ $\mathbf{E}=\{0,\pm2,\pm4,\pm6,...\}$

طاق اعداد کا سیٹ $\mathbf{O}=\{\pm1,\pm3,\pm5,...\}$

مفرد اعداد کا سیٹ $\mathbf{P}=\{2,3,5,7,...\}$

ناطق اعداد کا سیٹ $\mathbf{Q}=\left\{x \mid x=\frac{p}{q} \text{ where } p,q\in Z\wedge q\neq 0\right\}$

غیر ناطق اعداد کا سیٹ $\mathbf{Q'}=\left\{x \mid x\neq\frac{p}{q} \text{ where } p,q\in Z\wedge q\neq 0\right\}$

حقیقی اعداد کا سیٹ $\mathbf{R}=\left\{x \mid x=\frac{p}{q}\vee x\neq\frac{p}{q} \text{ where } p,q\in Z\wedge q\neq 0\right\}$

یعنی $\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup\mathbf{Q'}$

نوٹ: اوپر دیے گئے سیٹوں کو ہم N, W, Z, E, O, P, Q, Q' اور R لکھ سکتے ہیں۔

- R^+ اور R^- بالترتیب مثبت اور منفی حقیقی اعداد کے سیٹ کو ظاہر کرتے ہیں
- ناطق، غیر ناطق اور حقیقی اعداد کے سیٹ کو اندراجی شکل میں نہیں لکھا جاسکتا ہے۔

17.1 (ii) سیٹوں کی اقسام اور سیٹوں کو ظاہر کرنا (Types of sets and representation of sets):

سب سے پہلے ہم سیٹ کو ظاہر کرنے پر بحث کرینگے۔ سیٹ کو ظاہر کرنے کے تین طریقوں یا اشکال سے ہم پہلے ہی واقف ہیں جو کہ ہم پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں وہ ہیں

1- بیانیہ شکل 2- اندراجی شکل 3- ترقیم سیٹ ساز شکل

بیانیہ شکل میں سیٹ کے ارکان (ممبران) کو عام زبان میں مشترکہ خصوصیات سے واضح کیا جاتا ہے۔

مثلاً 5 اور 10 کے درمیان قدرتی اعداد کا سیٹ = A

اندراجی شکل میں سیٹ کے ارکان (ممبران) کو بریسز (Burses) میں ظاہر کرتے ہیں اوپر دیئے گئے سیٹ کو اندراجی شکل میں یوں لکھتے ہیں $A=\{6,7,8,9\}$

جب کہ ترقیم سیٹ ساز شکل میں ارکان (ممبران) کی مشترک خصوصیات کو علامات کی مدد سے ظاہر کرتے ہیں۔

دیے گئے سیٹ A ترقیم سیٹ ساز شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے $A=\{x \mid x\in \mathbf{N}\wedge 5<x<10\}$

مساوی سیٹ **(Equal Sets):**

دو ایسے سیٹ A اور B جن کے ارکان (ممبران) کی تعداد یکساں ایک جیسے ہوں۔

علامتی طور پر یوں لکھتے ہیں : $A=B$

پس $A=B$ صرف اور صرف $A\subseteq B$ اور $B\subseteq A$

اور $A=B$ صرف اور صرف $A\supseteq B$ اور $B\supseteq A$

مثلاً: فرض کریں $A=\{1,2,3,6\}$ $B=\{x\,|\,x\in N\wedge x\leq 6\}$ اور 6 کے تقسیم کنندہ کا سیٹ $C=$

یہاں $A=C$ لیکن $A\neq B$

نوٹ: سیٹ A کے ارکان (ممبران) کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ $O(A)$ یا $n(A)$ یا $|A|$ لکھتے ہیں۔

مترادف سیٹ **(Equivalent Sets):**

دو سیٹ A اور B مترادف سیٹ کہلاتے ہیں اگر ان کے ارکان (ممبران) کی تعداد برابر ہو۔

علامتی طور پر ہم یوں لکھتے ہیں: $A\sim B$ یعنی $A\sim B$ اس صورت میں ہی $O(A)=O(B)$

اسی طرح اگر $A\sim B$ یعنی اگر ان کے ارکان کے درمیان (1-1) مطابقت قائم کی جاسکتی ہے۔

مثلاً: فرض کریں $A=\{x\,|\,x\in \mathbf{R}\wedge x^2=64\}$ اور 5 سے چھوٹے مفرد اعداد کے سیٹ $B=$

یہاں $A\sim B$ کیونکہ $O(A)=O(B)=2$

واجب تحتی سیٹ (Proper Subset):

فرض کریں سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ تو سیٹ A سیٹ B کا واجب تحتی سیٹ کہلائے گا۔

اگر $A\neq B$ علامتی طور پر ہم یوں لکھ سکتے ہیں $A\subset B$

مثلاً: اگر $A=\{2,4,6\}$ اور $B=\{2,4,6,8\}$

تو $A\subset B$ کیونکہ A ماتحت سیٹ ہے B کا اور $A\neq B$

غیر واجب تحتی سیٹ (Improper Subset):

فرض کریں سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے تو سیٹ A سیٹ B کا غیر واجب تحتی سیٹ کہلائے گا اگر $A=B$

مثلاً: اگر $A=\{a,b,c\}$ اور انگریزی حروف تہجی کے پہلے تین حروف $=B$ تو سیٹ A سیٹ B غیر واجب تحتی سیٹ ہے یعنی $A=B$

قوت سیٹ (Power Subset):

کسی سیٹ A کے تمام تحتی سیٹوں کا سیٹ، سیٹ A قوت سیٹ کہلاتا ہے اسے $P(A)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً: اگر $A=\{x,y,z\}$ تو $P(A)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{y,z\},\{x,z\},\{x,y,z\}\}$

نوٹ: خالی سیٹ کا قوت سیٹ خالی سیٹ ہوتا ہے۔

اکائی سیٹ **(Singleton or Unit):**

ایسا سیٹ جس میں صرف ایک رکن (ممبر) ہو وہ اکائی سیٹ کہلاتا ہے

مثلاً: $A=\{x\,|\,x\in W\wedge x<1\}$ اکائی سیٹ ہے

کائناتی سیٹ **(Universal Set):**

زیر غور مسئلے سے تعلق رکھنے والے تمام سیٹ کا فوقی سیٹ کائناتی سیٹ کہلاتا ہے اور اُسے X یا U سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً: اگر $A=\{1,2,3,4\}$ اور $B=\{2,4,6\}$ پھر $U=\{1,2,3,4,5,6\}$

نوٹ: مزید سیٹ کی اقسام (iv) 17.1 میں زیر بحث لائی جائیں گی

مثال 1: سیٹ $A=\{6,8,10,12\}$ کو بیانیہ اور ترقیم سیٹ ساز شکل میں لکھیں۔

حل:

بیانیہ شکل: 5 اور 13 کے درمیان جفت اعداد کا سیٹ = A

ترقیم سیٹ ساز شکل $A=\{x \mid x\in \mathbb{E} \wedge 5<x<13\}$

مثال 2: سیٹ $B=\{y \mid y\in \mathbf{P} \wedge y<10\}$ کو اندراجی اور بیانیہ شکل میں لکھیں۔

حل:

اندراجی شکل $B=\{2,3,5,7\}$

بیانیہ شکل پہلے 4 مفرد اعداد کا سیٹ = B

اب ہم سیٹ کی اقسام بیان کریں گے

خالی سیٹ (Empty set or Null set):

ایسا سیٹ جس میں کوئی رکن (ممبر) نہیں ہوتا ہے وہ خالی سیٹ کہلاتا ہے۔اس کو $\varnothing$ یا $\{\ \}$ سے ظاہر کرتے ہیں

مثلاً:

(i) 5 اور 6 کے درمیان جفت اعداد کا سیٹ = A

(ii) $B=\{x \mid x\in \mathbb{N} \wedge x<1\}$

متناہی سیٹ (Finite Set):

ایسا سیٹ جس کے ارکان (ممبران) کی تعداد محدود ہو وہ متنائی سیٹ کہلاتا ہے

مثلاً:

(i) $A=\{10,12,14,\ldots,50\}$

(ii) دنیا کے تمام ممالک کا سیٹ = B

یاد رہے خالی سیٹ کو متنائی سیٹ بھی کہا جاسکتا ہے۔

لامتنائی سیٹ (Infinite Set):

ایسا سیٹ جن کے ارکان (ممبران) کی تعداد لامحدود ہو وہ لامتنائی سیٹ کہلاتا ہے

مثلاً:

(i) $P=\{10,20,30,\ldots\}$

(ii) $Q=\{x \mid x\in \mathbf{Q} \wedge 1\le x\le 2\}$

تحتی سیٹ (Subset):

اگر سیٹ A کا ہر رکن (ممبر) سیٹ B کا رکن (ممبر) بھی ہو تو سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ کہلاتا ہے۔ علامتی طور پر ہم یوں لکھتے ہیں۔ $A\subseteq B$

مثلاً: اگر $A=\{2,3,5,7\}$ ، $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ اور $C=\{6,7,8,9\}$

تو $A\subseteq B$ لیکن $A\not\subseteq C$ (A تحتی سیٹ نہیں ہے C کا)

نوٹ:

(i) ہر سیٹ خود اپنا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

(ii) خالی سیٹ ہر سیٹ کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

(iii) ہر ممبر خالی سیٹ کے کم از کم دو تحتی سیٹ ہوتے ہیں۔

(iv) ایسا سیٹ جس کے ارکان (ممبران) کی تعداد n ہوتی ہے۔اُس کے تمام تحتی سیٹ کی تعداد 2^n ہے۔

فوقی سیٹ (Superset):

اگر سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے تو سیٹ B سیٹ A کا فوقی سیٹ کہلاتا ہے۔

علامتی طور پر ہم یوں لکھتے ہیں $B\supseteq A$

مثلاً: اگر $X=\{a,e,i,o,u\}$ اور $Y=\{a,b,c,\ldots,z\}$ تو $Y\supseteq X$

مشق 17.1

.1 مندرجہ ذیل سیٹوں کی اندراجی شکل میں لکھیں

(i) A= 3- اور 3 کے درمیان تمام صحیح اعداد کا سیٹ

(ii) B = 11 سے چھوٹے مرکب اعداد کا سیٹ

(iii) $C=\{x \mid x\in \mathbb{P} \wedge 5<x\leq 13\}$

(iv) $D=\{y \mid y\in \mathbb{O} \wedge 7<y<17\}$

(v) $E=\{z \mid z\in \mathbb{R} \wedge z^2=121\}$

(vi) $F=\{p \mid p\in \mathbb{Q} \wedge p^2=-1\}$

.2 مندرجہ ذیل سیٹوں کو ترقیم سیٹ ساز شکل میں لکھیں

(i) A = 5 اور 6 کے درمیان تمام اطاق اعداد کا سیٹ

(ii) $B=\{1,2,3,4,6,12\}$

(iii) $C=\{0,\pm1,\pm2,...,\pm40\}$

(iv) $D=\{-4,-2,0,2,4\}$

(v) $E=\{1,4,9,16,25\}$

(vi) $F=\{-1,-3,-5,-7,...\}$

.3 خالی سیٹ کوئی پانچ مثالیں لکھیں

.4 ذیل میں کون سے متناہی سیٹ اور لا متناہی سیٹ ہیں

(i) ایشائی ممالک کا سیٹ

(ii) دنیا کی تمام میڈیکل یونیورسٹیوں کا سیٹ

(iii) 6 اور 9 کے درمیان حقیقی اعداد کا سیٹ

(iv) تمام جفت فرد اعداد کا سیٹ

(v) 5 سے چھوٹے طاق اعداد کا سیٹ

.5 ذیل میں دیے گئے ہر سیٹ کا ایک مترادف سیٹ، ایک غیر واجب تحتی سیٹ اور تین واجب تحتی سیٹ لکھیں۔

(i) $P=\{a,e,i,o,u\}$

(ii) $Q=\{x \mid x\in \mathbb{Z} \wedge -2\leq x\leq 2\}$

.6 اکائی سیٹ کی کوئی بھی دو مثالیں ترقیم سیٹ ساز شکل میں لکھیں

.7 ذیل میں دیے گئے سیٹوں کے قوت سیٹ لکھیں

(i) $A=\{5,10,15\}$

(ii) $B=\{x \mid x\in Z \wedge -1<x<4\}$

.8 ایسا سیٹ معلوم کریں جس

(i) کے دو واجب تحتی سیٹ ہوتے ہیں

(ii) کا صرف ایک واجب تحتی سیٹ ہوتا ہے

(iii) کا کوئی واجب تحتی سیٹ نہیں ہوتا ہے۔

17.1 (iii) سیٹ پر عوامل (Operations on sets):

- اتصال (یونین) (Union)
- تقاطع (Intersection)
- فرق (Difference)
- کمپلیمنٹ (Complement)

دو سیٹوں کا القال (یونین) (Union of two sets)

دو سیٹوں X اور Y کا القال $X \cup Y$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس میں وہ ارکان شامل ہوتے ہیں جو X سے Y سے یا دونوں سے تعلق رکھتے ہیں

یعنی $X \cup Y = \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$

مثلاً: اگر $X = \{1,3,5\}$ اور $Y = \{1,2,3,4\}$ تو $X \cup Y = \{1,2,3,4,5\}$

دو سیٹوں کا تقاطع (Intersection of two sets):

دو سیٹوں X اور Y کا تقاطع $X \cap Y$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس میں وہ ارکان شامل ہوتے ہیں جو X اور Y دونوں سے تعلق رکھتے ہیں

یعنی $X \cap Y = \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$

مثلاً: اگر $X = \{2,4,6,8\}$ اور $Y = \{1,2,3,6\}$ تو $X \cap Y = \{2,6\}$

دو سیٹوں کا فرق (Difference of two sets):

کوئی دو سیٹ x اور y ہیں فرق x-y ایسا سیٹ ہے جس میں وہ ارکان ہوتے ہیں جو x سے تعلق رکھتے ہیں لیکن y سے تعلق نہیں رکھتے ہیں اس کو x/y سے بھی ظاہر کرتا ہے جیسے $Y - X = \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$ اسی ہی طرح فرق X-Y ایسا سیٹ ہے جس میں وہ ارکان ہوتے ہیں جو x سے تعلق رکھتے ہیں لیکر y سے تعلق نہیں رکھتے ہیں اس کو x/y سے بھی ظاہر کرتے ہیں

جیسے $Y - X = \{y \mid y \in Y \wedge y \notin X\}$ $Y - X$

مثلاً:

اگر $X = \{4,6,8,9,10\}$ اور $Y = \{2,4,6,8\}$

تو $X - Y = \{9,10\}$ اور $Y - X = \{2\}$

سیٹ کا کمپلیمنٹ (Complement of a set)

اگر ایک سیٹ کائناتی سیٹ U کا تحتی سیٹ ہے تو A کا کمپلیمنٹ ایک ایسا سیٹ ہے تو U کے تمام ارکان پر مشتمل ہو گا جو A میں نہیں ہیں۔ یہ A' یا A^c سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

پس $A' = U - A$

یعنی $A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$

مثلاً:

اگر $U = \{1,2,3,...,20\}$ اور $A = \{1,3,5,...,19\}$ تو $A' = \{2,4,6,...,20\}$

17.1 (iv) دو سیٹوں کا تشاکلی فرق (Symmetric difference of two sets)

دو سیٹوں A اور B کے تشاکلی فرق کو $A \Delta B$ سے ظاہر کرتے ہیں یہ A یا B کے وہ تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے جو دونوں سیٹوں میں مشترکہ نہیں ہوتے ہیں۔

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

مثلاً: اگر $A=\{1,2,3,4,5\}$ اور $B=\{1,3,5,7\}$ تو $A\Delta B=\{2,4,7\}$

حصہ (ii) 17.1 کے تسلسل میں سیٹ کی مزید اقسام نیچے دی گئیں ہیں

ڈس جوائنٹ سیٹ(Disjoint Sets):

دو سیٹ A اور B ڈس جوائنٹ سیٹ کہلاتے ہیں اگر ان میں کوئی مشترک ارکان نہ ہو $A\cap B=\varnothing$

مثلاً: $A=\{1,3,5\}$ اور $B=\{2,4,6\}$ ڈس جوائنٹ سیٹ ہیں

اوورلیپنگ سیٹ(Over lapping Sets):

دو سیٹ A اور B اوورلیپنگ سیٹ کہلاتے ہیں اگر دونوں میں کم از کم ایک رکن مشترک ہو اس کے علاوہ ان میں کوئی دوسرے کا تحتی سیٹ نہیں ہوتا ہے۔ دو سیٹ A اور B اوورلیپنگ سیٹ ہیں

اگر $A\cap B\neq\varnothing$ اور $A\not\subseteq B$ یا $B\not\subseteq A$

مثلاً: سیٹ $A=\{1,2,3,4\}$ اور $B=\{2,4,6,8\}$ اوورلیپنگ سیٹ ہیں

ایگزوسٹیو سیٹ(Exhaustive Sets):

اگر دو سیٹ A اور B یونیورسل سیٹ U کے تحتی سیٹ ہیں تو A اور B ایگزوسٹیو سیٹ کہلاتے ہیں

اگر $A\cup B=U$

مثلاً: اگر $A=\{1,2,3,4\}$ ، $B=\{1,3,5\}$ اور $U=\{1,2,3,4,5\}$ تو A اور B ایگزوسٹیو سیٹ ہیں

کیونکہ $A\cup B=U$

سیل(Cells):

اگر سیٹ A اور B دو غیر خالی یونیورسل سیٹ U کے تحتی سیٹ ہیں تو A اور B سیل کہلاتے ہیں اگر وہ ڈس جوائنٹ بھی ہیں اور ایگزوسٹیو سیٹ بھی ہے

A اور B سیل کہلاتے ہیں اگر A اور B،U کے غیر خالی تحتی سیٹ ہیں اور $A\cap B=\varnothing$ اور $A\cup B=U$

مثلاً: اگر $A=\{1,3,5,7,9\}$ ، $B=\{2,4,6,8,10\}$ اور $U=\{1,2,3,...,10\}$ تو پھر A اور B سیل ہیں

سیٹ کے عوامل سے متعلق کچھ اہم قانون نیچے دیے گئے ہیں۔

آئی ڈینٹیٹی کا قانون (Identity Laws):

کسی سیٹ A کے لئے

(i) $A\cup\varnothing=A$ (ii) $A\cup U=U$ (iii) $A\cap U=A$ (iv) $A\cap\varnothing=\varnothing$

آئی ڈیمپوٹینٹ کا قانون (Idempotent Laws):

کسی سیٹ A کے لئے

(i) $A\cup A=A$ (ii) $A\cap A=A$

کمپلیمنٹ کے قانون (Laws of Complement):

کسی سیٹ A کے لئے

(i) $A\cup A'=U$ (ii) $A\cap A'=\varnothing$

(iii) $(A')'=A$

ڈی مورگن کے قانون (De Morgan's Laws):

کوئی دو سیٹ A اور B کے لیے

(i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (ii) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

مشق 17.2

1. مندرجہ ذیل میں سے کون سے سیٹ ڈس جوائنٹ، اوورلیپنگ، ایگزویٹو اور سیل ہیں

(i) $\{1,2,3,5,7\}$ اور $\{4,6,8,9,10\}$

(ii) $\{1,2,3,6\}$ اور $\{1,2,4,8\}$

(iii) E اور O جب کہ $U=Z$

(iv) $A=\{0,2,4,\ldots\}$ اور $B=N$ جب کہ $U=W$

(v) Q اور Q' جب کہ $U=\mathbf{R}$

2. اگر $\mathbf{A}=\{1,2,3,4,5,6\}$ اور $\mathbf{B}=\{2,4,6,8,10\}$ تو معلوم کریں:

(i) $A\cup B$ (ii) $B\cap A$ (iii) $A-B$
(iv) $B-A$ (v) $A\Delta B$

3. اگر $\mathbf{U}=\{1,2,3,\ldots,10\}$، $\mathbf{A}=\{1,2,3,4,5\}$ اور $\mathbf{B}=\{1,3,5,7,9\}$ تو معلوم کریں:

(i) A' (ii) B' (iii) $A'\cup B'$ (iv) $A'\cap B'$
(v) $(A\cup B)'$ (vi) $(A\cap B)'$ (vii) $A'\Delta B'$ (viii) $(A\Delta B)'$
(ix) $A-B'$ (x) $A'-B$

4. اگر $\mathbf{U}=\{x\mid x\in \mathbf{Z}\wedge -4<x<6\}$، $\mathbf{P}=\{p\mid p\in \mathbf{E}\wedge -4<p<6\}$ اور $\mathbf{Q}=\{q\mid q\in \mathbf{P}\wedge q<6\}$ تو ثابت کریں کہ

(i) $P-Q=P\cap Q'$ (ii) $Q-P=Q\cap P'$
(iii) $(P\cup Q)'=P'\cap Q'$ (iv) $(P\cap Q)'=P'\cup Q'$

5. اگر $\mathbf{A}=\{2n\mid n\in \mathbf{N}\}$، $\mathbf{B}=\{3n\mid n\in \mathbf{N}\}$ اور $\mathbf{C}=\{4n\mid n\in \mathbf{N}\}$ تو معلوم کریں:

(i) $A\cap B$ (ii) $A\cup C$ (iii) $B\cap C$

17.1.2(i) اتصال اور تقاطع کی خصوصیات (Properties of Union and Intersection):

دو یا تین سیٹوں پر اتصال اور تقاطع کی مندرجہ ذیل بنیادی خصوصیات کا رسمی ثبوت دیں

- اتصال (یونین) کی خاصیت مبادلہ (Commutative Property of Union)

ہم جانتے ہیں کہ کسی دو سیٹ A اور B کے لیے $\boxed{A\cup B=B\cup A}$

یہ خاصیت اتصال کی خاصیت مبادلہ کہلاتی ہے

ثبوت:

$$\begin{aligned}
L.H.S &= A\cup B \\
&=\{x\mid x\in A \text{ or } x\in B\} && \text{(اتصال کی تعریف کے مطابق)}\\
&=\{x\mid x\in B \text{ or } x\in A\} && \because \text{(سیٹ میں ارکان کی ترتیب مخصوص نہیں ہوتی)}\\
&= B\cup A && \text{(اتصال کی تعریف کے مطابق)}\\
&= R.H.S
\end{aligned}$$

$\because$ $L.H.S=R.H.S$

$\therefore$ $A\cup B=B\cup A$

پس ثابت ہوا

تقاطع کی خاصیت مبادلہ (Commutative Property of Intersection):

ہم جانتے ہیں کہ کسی دو سیٹ A اور B کے لیے $\boxed{A \cap B = B \cap A}$

یہ خاصیت اتصال کی خاصیت مبادلہ کہلاتی ہے

ثبوت:

$$
\begin{aligned}
L.H.S &= A \cap B \\
&= \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\} && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)} \\
&= \{x \mid x \in B \text{ and } x \in A\} && \because \text{(سیٹ میں ارکان کی ترتیب مخصوص نہیں ہوتی)} \\
&= B \cap A && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)} \\
&= R.H.S
\end{aligned}
$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $A \cap B = B \cap A$

پس ثابت ہوا

اتصال کی خاصیت تلازم (Associative property of union):

ہم پہلے ہی اتصال کی خاصیت تلازم سے واقف ہیں جیساکہ نیچے دی گئی ہے

کسی بھی تین سیٹ A، B اور C کے لیے $\boxed{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$

ثبوت:

$$
\begin{aligned}
L.H.S &= A \cup (B \cup C) \\
&= \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B \cup C\} && \text{(اتصال کی تعریف کی روسے)} \\
&= \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B \text{ یا } x \in C\} \\
&= \{x \mid x \in A \cup B \text{ یا } x \in C\} && \text{(اتصال کی تعریف کی روسے)} \\
&= (A \cup B) \cup C && \text{(اتصال کی تعریف کی روسے)} \\
&= R.H.S
\end{aligned}
$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

پس ثابت ہوا

تقاطع کی خاصیت تلازم (Associative property of intersection):

ہم پہلے ہی تقاطع کی خاصیت تلازم سے واقف ہیں جیساکہ نیچے دی گئی ہے کسی بھی تین سیٹ A، B اور C کے لیے

$\boxed{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$

ثبوت:

$$
\begin{aligned}
L.H.S &= A \cap (B \cap C) \\
&= \{x \mid x \in A \text{ اور } x \in B \cap C\} && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)} \\
&= \{x \mid x \in A \text{ اور } x \in B \text{ اور } x \in C\} \\
&= \{x \mid x \in A \cap B \text{ اور } x \in C\} && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)} \\
&= (A \cap B) \cap C && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)} \\
&= R.H.S
\end{aligned}
$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

پس ثابت ہوا

◄ اتعال کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع (Distributive property of union over intersection):

ہم پہلے ہیں اتقال کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں جیساکہ نیچے دی گئی ہے
کسی تین سیٹ A، B اور C کے لیے $\boxed{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$

ثبوت:

$$
\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= A\cup(B\cap C)\\
&=\{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\cap C\} && \text{(اتعال کی تعریف کی روسے)}\\
&=\{x \mid x\in A \text{ یا } (x\in B \text{ ء } x\in C)\} && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)}\\
&=\{x \mid (x\in A \text{ یا } x\in B) \text{ ء } (x\in A \text{ یا } x\in C)\}\\
&=\{x \mid x\in A\cup B \text{ ء } x\in A\cup C\} && \text{(اتعال کی تعریف کی روسے)}\\
&=(A\cup B)\cap(A\cup C) && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)}\\
&=\text{R.H.S}
\end{aligned}
$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

پس ثابت ہوا

◄ تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتعال (Distributive property of intersection over union):

ہم پہلے ہی تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتعال واقف ہیں جیساکہ نیچے دی گئی ہے
کسی بھی تین سیٹ A ، B اور C کے لیے $\boxed{A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

ثبوت:

$$
\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= A\cap(B\cup C)\\
&=\{x \mid x\in A \text{ ء } x\in B\cup C\} && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)}\\
&=\{x \mid x\in A \text{ ء } (x\in B \text{ یا } x\in C)\} && \text{(اتعال کی تعریف کی روسے)}\\
&=\{x \mid (x\in A \text{ ء } x\in B) \text{ یا } (x\in A \text{ ء } x\in C)\}\\
&=\{x \mid x\in A\cap B \text{ یا } x\in A\cap C\} && \text{(تقاطع کی تعریف کی روسے)}\\
&=(A\cap B)\cup(A\cap C) && \text{(اتعال کی تعریف کی روسے)}\\
&=\text{R.H.S}
\end{aligned}
$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

پس ثابت ہوا

ڈی مورگن کے قوانین (De Morgan's Laws):

ہم پہلے حصہ 17.1 (iv) میں پڑھ چکے ہیں کہ ڈی مورگن کے قوانین دو ہیں جو کہ نیچے دیے گئے ہیں دو سیٹوں A اور B کے لیے

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ثبوت (i):

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$L.H.S = (A \cup B)'$ (کمپلیمنٹ کی تعریف کی رو سے)

$= \{x \mid x \in U$ ء $x \notin A \cup B\}$

$= \{x \mid x \in U$ ء $(x \notin A$ ء $x \notin B)\}$

$= \{x \mid (x \in U$ ء $x \notin A)$ ء $(x \in U$ ء $x \notin B)\}$

$= \{x \mid x \in A'$ ء $x \in B'\}$ (کمپلیمنٹ کی تعریف کی رو سے)

$= A' \cap B'$ (تقاطع کی تعریف کی روسے)

$= R.H.S$

$\because$ $L.H.S = R.H.S$

$\therefore$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

پس ثابت ہوا

ثبوت (ii):

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$L.H.S = (A \cap B)'$

$= \{x \mid x \in U$ ء $x \notin A \cap B\}$ (کمپلیمنٹ کی تعریف کی رو سے)

$= \{x \mid x \in U$ ء $(x \notin A$ یا $x \notin B)\}$

$= \{x \mid (x \in U$ ء $x \notin A)$ یا $(x \in U$ ء $x \notin B)\}$

$= \{x \mid x \in A'$ یا $x \in B'\}$ (کمپلیمنٹ کی تعریف کی رو سے)

$= A' \cup B'$ (تقاطع کی تعریف کی روسے)

$= R.H.S$

$\because$ $L.H.S = R.H.S$

$\therefore$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

پس ثابت ہوا

17.1.2(ii) دیے گئے بنیادی خاصیتوں کی تصدیق کریں (Verify the fundamental properties of given sets):

آئیں مندرجہ ذیل مثالوں کی مدد سے بنیادی خصوصیات کی تصدیق کریں

مثال نمبر 1: اگر $A = \{1,2,3,4,6,12\}$ اور $B = \{4,6,8,9,10,12\}$ اتعال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ کی تصدیق کریں

(الف) اتحاد کی خاصیت مبادلہ

یعنی $A\cup B=B\cup A$

$L.H.S=A\cup B$

$=\{1,2,3,4,6,12\}\cup\{4,6,8,9,10,12\}$

$=\{1,2,3,4,6,8,9,10,12\}$

$R.H.S=B\cup A$

$=\{4,6,8,9,10,12\}\cup\{1,2,3,4,6,12\}$

$=\{1,2,3,4,6,8,9,10,12\}$

$\because\quad L.H.S=R.H.S$

$\therefore\quad A\cup B=B\cup A$

پس تصدیق ہوئی

(ب) تقاطع کی خاصیت مبادلہ

یعنی $A\cap B=B\cap A$

$L.H.S=A\cap B$

$=\{1,2,3,4,6,12\}\cap\{4,6,8,9,10,12\}$

$=\{4,6,12\}$

$R.H.S=B\cap A$

$=\{4,6,8,9,10,12\}\cap\{1,2,3,4,6,12\}$

$=\{4,6,12\}$

$\because\quad L.H.S=R.H.S$

$\therefore\quad A\cap B=B\cap A$

پس تصدیق ہوئی

مثال نمبر 2:

اگر $A=\{1,2,5,10\}$، $B=\{2,3,5,7\}$ اور $C=\{1,3,5,7,9\}$ تو اتحاد اور تقاطع کی خاصیت تلازم کی تصدیق کریں

پڑتال:

(الف) اتحاد کی خاصیت تلازم

یعنی $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$L.H.S=A\cup(B\cup C)$

$=\{1,2,5,10\}\cup[\{2,3,5,7\}\cup\{1,3,5,7,9\}]$

$=\{1,2,5,10\}\cup\{1,2,3,5,7,9\}$

$=\{1,2,3,5,7,9,10\}$

$R.H.S=(A\cup B)\cup C$

$=[\{1,2,5,10\}\cup\{2,3,5,7\}]\cup\{1,3,5,7,9\}$

$=\{1,2,3,5,7,10\}\cup\{1,3,5,7,9\}$

$=\{1,2,3,5,7,9,10\}$

$\because\quad L.H.S=R.H.S$

$\therefore\quad A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

پس تصدیق ہوئی

(ب) تقاطع کی خاصیت تلازم

یعنی $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

$L.H.S=A\cap(B\cap C)$

$=\{1,2,5,10\}\cap[\{2,3,5,7\}\cap\{1,3,5,7,9\}]$

$=\{1,2,5,10\}\cap\{3,5,7\}$

$=\{5\}$

$R.H.S=(A\cap B)\cap C$

$=[\{1,2,5,10\}\cap\{2,3,5,7\}]\cap\{1,3,5,7,9\}$

$=\{2,5\}\cap\{1,3,5,7,9\}$

$=\{5\}$

$\because\quad L.H.S=R.H.S$

$\therefore\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پس تصدیق ہوئی

مثال نمبر 3: اگر $A=\{1,2,3,...,10\}$ ، $B=\{2,4,6,8,10\}$ اور $C=\{3,6,9\}$ تو تصدیق کریں

(الف) اتعال کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع

(ب) تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتعال

پڑتال:

(الف) اتعال کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع

یعنی $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$$
\begin{aligned}
L.H.S &= A\cup(B\cap C)\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cup[\{2,4,6,8,10\}\cap\{3,6,9\}]\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cup\{6\}\\
&=\{1,2,3,...,10\}\\
R.H.S &= (A\cup B)\cap(A\cup C)\\
&=[\{1,2,3,...,10\}\cup\{2,4,6,8,10\}]\cap[\{1,2,3,...,10\}\cup\{3,6,9\}]\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cap\{1,2,3,...,10\}\\
&=\{1,2,3,...,10\}
\end{aligned}
$$

$\because$ $L.H.S=R.H.S$

$\therefore$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

پس تصدیق ہوئی

(ب) تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتعال

یعنی $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$
\begin{aligned}
L.H.S &= A\cap(B\cup C)\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cap[\{2,4,6,8,10\}\cup\{3,6,9\}]\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cap\{2,3,4,6,8,9,10\}\\
&=\{2,3,4,6,8,9,10\}\\
R.H.S &= (A\cap B)\cup(A\cap C)\\
&=[\{1,2,3,...10\}\cap\{2,4,6,8,10\}]\cup[\{1,2,3,...,10\}\cap\{3,6,9\}]\\
&=\{2,4,6,8,10\}\cup\{3,6,9\}\\
&=\{2,3,4,6,8,9,10\}
\end{aligned}
$$

$\because$ $L.H.S=R.H.S$

$\therefore$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

پس تصدیق ہوئی

مثال نمبر 4: اگر $U=\{1,2,3,...,20\}$، $A=\{1,3,5,....,19\}$ اور $B=\{2,4,6,....,20\}$ تو ڈی مورگن کی تصدیق کریں

یعنی (الف) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (ب) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

پڑتال:

(الف) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= (A\cup B)' \\
&= U-(A\cup B) \\
&= \{1,2,3,....,20\}-[\{1,3,5,....,19\}\cup\{2,4,6....,20\}] \\
&= \{1,2,3,....,20\}-\{1,2,3,....,20\} \\
&= \varnothing \\
R.H.S &= A'\cap B' \\
&= (U-A)\cap(U-B) \\
&= [\{1,2,3,....,20\}-\{1,3,5,....,19\}]\cap[\{1,2,3,....,20\}-\{2,4,6,....,20\}] \\
&= \{2,4,6,....,20\}\cap\{1,3,5,....,19\} \\
&= \varnothing
\end{aligned}$$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad (A\cup B)'=A'\cap B'$

پس تصدیق ہوئی

(ب) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= (A\cap B)' \\
&= U-(A\cap B) \\
&= \{1,2,3,....,20\}-[\{1,3,5,....,19\}\cap\{2,4,6....,20\}] \\
&= \{1,2,3,....,20\}-\{\ \} \\
&= \{1,2,3,....,20\} \\
R.H.S &= A'\cup B' \\
&= (U-A)\cup(U-B) \\
&= [\{1,2,3,....,20\}-\{1,3,5,....,19\}]\cup[\{1,2,3,....,20\}-\{2,4,6,....,20\}] \\
&= \{2,4,6,....,20\}\cup\{1,3,5,....,19\} \\
&= \{1,2,3,....,20\}
\end{aligned}$$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad (A\cap B)'=A'\cup B'$

پس تصدیق ہوئی

مشق 17.3

1. مندرجہ ذیل سیٹ کے لیے اتصال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ کی تصدیق کریں

(i) $A=\{a,b,c,d,e\}$ ، $B=\{a,e,i,o,u\}$

(ii) $P=\{x \mid x\in Z \wedge -3<x<3\}$ ، $Q=\{y \mid y\in E^{+} \wedge y\le 4\}$

2. مندرجہ ذیل سیٹ کے لیے اتصال اور تقاطع کی خاصیت تلازم کی تصدیق کریں

(i) $A=\{1,2,4,5,10,20\}$ ، $B=\{5,10,15,20\}$ ، $C=\{1,2,5,10\}$

(ii) $A=\mathbf{N}, B=\mathbf{P}$ ، $C=\mathbf{Z}$

3. تصدیق کریں

(الف) اتصال کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع   (ب) تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتصال

(i) $A=\{1,2,3,...,10\}$ ، $B=\{2,3,5,7\}$ اور $C=\{1,3,5,7,9\}$

(ii) $A=\mathbf{N}, B=\mathbf{P}$ اور $C=\mathbf{W}$

4. ڈی مورگن کے قوانین کی تصدیق کریں اگر $\mathbf{U}=\{\mathbf{1,2,3...,12}\}$ ، $\mathbf{A}=\{\mathbf{1,2,3,4,6,12}\}$ اور $\mathbf{B}=\{\mathbf{2,4,6,8}\}$

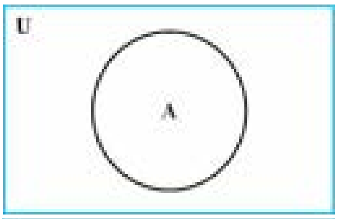
5. اگر A اور B ، U کے تحتی سیٹ ہیں تو مندرجہ ذیل کو خاصیتوں کی مدد سے ثابت کریں

(i) $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)$ (ii) $A\cup B=A\cup(A'\cap B)$

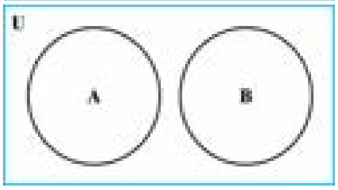
(iii) $B=(A\cap B)\cup(A'\cap B)$ (iv) $B=A\cup(A'\cap B)$, if $A\subseteq B$

17.1.3 وین ڈائی گرام (Venn Diagram):

ہم پہلے ہی پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں کہ سیٹ، ان کے روابط اور عوامل کو جیومٹریکلی بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ اس جیومٹریکلی ظاہر کرنے کو وین ڈائی گرام کہتے ہیں جو انگریز ریاضی دان جون وین (June Venn) کے نام رکھا گیا ہے جس نے اسے 1881ء میں متعارف کروایا تھا۔ وین ڈائی گرام میں کائناتی سیٹ U کو عموماً مستطیل سے ظاہر کیا جاتا ہے جب کہ دائرے اور بیضوی اشکال سیٹ کو ظاہر کرتی ہیں کچھ وین ڈائی گرام دہرائیں

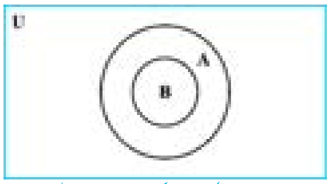


(i) وین ڈائی گرام ظاہر کر رہا ہے کائناتی سیٹ U میں سیٹ A کو

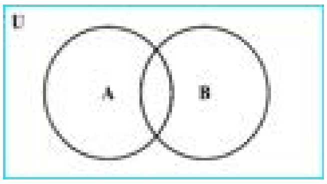


(ii) وین ڈائی گرام ظاہر کر رہا ہے دو ڈس جوائنٹ سیٹ A اور B کو

(iii) وین ڈائی گرام ظاہر کر رہا ہے دو اوور لیپنگ سیٹ A اور B کو



(iv) وین ڈائی گرام ظاہر کر رہا ہے A کے تحتی سیٹ B کو $B \subseteq A$



17.1.3(i) مندرجہ ذیل کو ظاہر کرنے کے لیے وین ڈائی گرام استعمال کریں(Use Venn Diagram to represent):

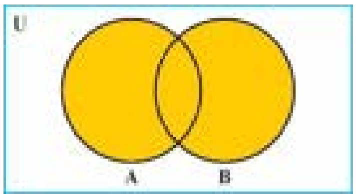
- دو سیٹوں کے اتصال اور تقاطع کو(Union and Intersection of sets):
- ایک سیٹ کے کمپلیمنٹ کو(Complement of a set):
- دو سیٹوں کے تشاکلی فرق کو(Symmetric difference of two sets):

- دو سیٹوں کے اتصال اور تقاطع کو(Union and Intersection of sets):

دو سیٹوں کے اتصال اور تقاطع وین ڈائی گرام ہیں، دو سیٹوں A اور B کا اتصال کو A اور B کا تمام علاقہ ظاہر کرتا ہے۔ شکل (i) سایہ دار یا رنگین علاقہ $A \cup B$ کو ظاہر کرتا ہے

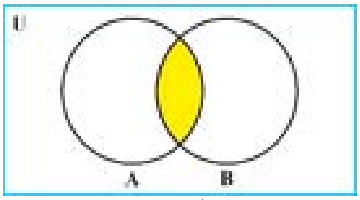
جب کہ دو سیٹوں A اور B کا تقاطع کو A اور B کا مشترکہ علاقہ ظاہر کرتا ہے۔ شکل (ii) سایہ دار یا رنگین علاقہ $A \cap B$ کو ظاہر کرتا ہے۔

$A \cup B$



شکل(i)

$A \cap B$



شکل(ii)

مثال نمبر 1: اگر $U = \{1,2,3,...,10\}$ ، $A = \{1,2,3,4,5\}$ اور $B = \{2,4,6,8\}$ تو $A \cup B$ اور $A \cap B$ کو بذریعہ وین ڈائی گرام ظاہر کریں

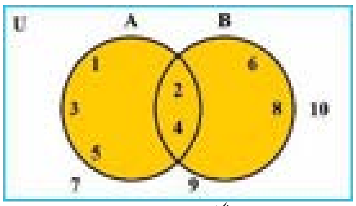
حل:

شکل (الف) میں رنگین یا سایہ دار علاقہ $A \cup B$ کو ظاہر کرتا ہے

وین ڈائی گرام سے ہمیں حاصل ہوا۔

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8\}$

$A \cup B$



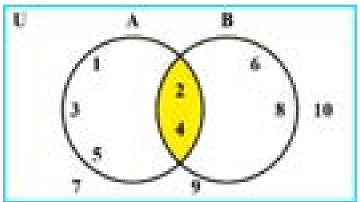
شکل (الف)

شکل (ب) میں رنگین یا سایہ دار علاقہ $A \cap B$ کو ظاہر کرتا ہے

وین ڈائی گرام سے ہمیں حاصل ہوا۔

$A \cap B = \{2,4\}$

$A \cap B$

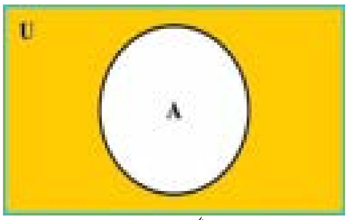


شکل (ب)

ایک سیٹ کا کمپلیمینٹ (Complement of a set):

وین ڈائی گرام میں، سیٹ A کا کمپلیمینٹ کائناتی سیٹ کے علاقہ کو ظاہر کرتا ہے سوائے سیٹ A کے علاقے کو۔ شکل (i) بس سایہ دار یا رنگین علاقہ A' کو ظاہر کرتا ہے۔

A'



شکل(i)

مثال کے طور پر:

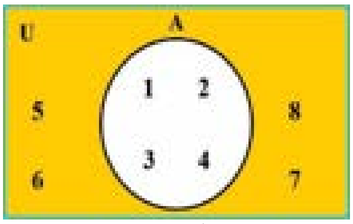
اگر $U=\{1,2,3,...,8\}$ اور $A=\{1,2,3,4\}$ تو بذریعہ وین ڈائی گرام A' ظاہر کریں

حل:

سامنے دی گئی وین ڈائی گرام شکل (ii) میں سایہ دار یا رنگین علاقہ A' کو ظاہر کرتا ہے

لہذا ہمارے پاس ہے: $A'=\{5,6,7,8\}$

A'

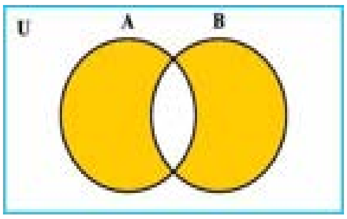


شکل(ii)

دو سیٹوں کا تشاکلی فرق (Symmetric difference of two sets):

وین ڈائی گرام میں، دو سیٹ A اور B کا تشاکلی فرق A اور B کے پورے علاقہ کو ظاہر کرتا ہے۔ سوائے مشترکہ علاقے کے۔ شکل (i) میں رنگین یا سایہ دار علاقہ $A\Delta B$ کو ظاہر کرتا ہے۔

$A\Delta B$



شکل(i)

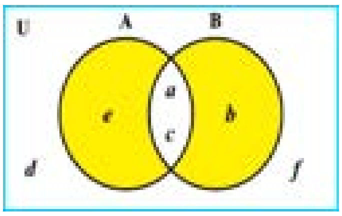
مثال: اگر تو کو بذریعہ وین ڈائی گرام ظاہر کریں۔

اگر $U=\{a,b,c,d,e,f\}$، $A=\{a,c,e\}$ اور $B=\{a,b,c\}$

حل: تو $A\Delta B$ کو بذریعہ وین ڈائی گرام ظاہر کریں

سامنے دیئے گئے وین ڈائی گرام کی شکل (ii) میں سایہ دار یا رنگین علاقہ $A\Delta B$ کو ظاہر کرتا ہے۔ یعنی $A\Delta B=\{a,e\}$

$A\Delta B$



شکل(ii)

17.1.3(ii) بذریعہ وین ڈائی گرام تصدیق کریں (Use Venn diagram to verify):

- اتصال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ (Commutative property of union and intersection):
- قوانین تلازم (Associative laws):
- قوانین تقسیمی (Distributive laws):
- ڈی مورگن کے قوانین (De Morgan's laws):

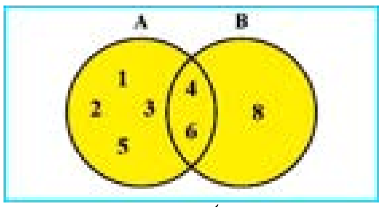
اتصال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ (Commutative property of union and intersection):

آئیں اتصال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ مندرجہ مثالوں کی مدد سے بذریعہ وین ڈائی گرام تصدیق کریں۔

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ اور $B=\{4,6,8\}$ تو اتصال تقاطع کی خاصیت مبادلہ بذریعہ وین ڈائی گرام تصدیق کریں

پڑتال: (i) اتصال کی خاصیت مبادلہ $A\cup B=B\cup A$

$A\cup B$

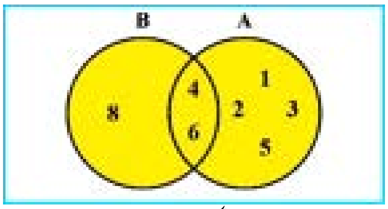


شکل (i)

وین ڈائی گرام کی شکل (i) سے

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\}$

$B\cup A$



شکل (ii)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے

$B\cup A=\{1,2,3,4,5,6,8\}$

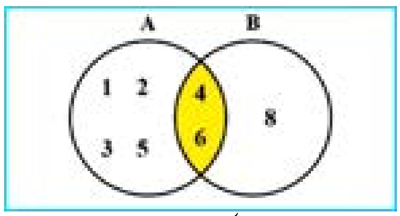
سایہ دار یا رنگین علاقہ اور ان کے ارکان برابر ہیں جیسا کہ شکل (i) اور شکل (ii) میں دکھایا گیا ہے۔

$A\cup B=B\cup A$

پس تصدیق ہوئی

پڑتال: (ii) تقاطع کی خاصیت مبادلہ $A\cap B=B\cap A$

$A\cap B$

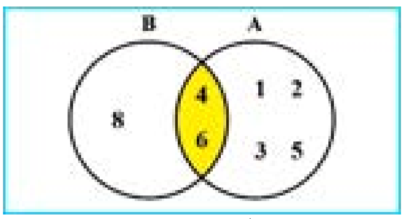


شکل (i)

وین ڈائی گرام کی شکل (i) سے

$A\cap B=\{4,6\}$

$B\cap A$



شکل (ii)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے

$B\cap A=\{4,6\}$

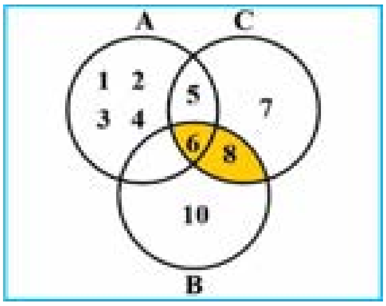
سایہ دار یا رنگین علاقہ اور ان کے ارکان برابر ہیں جیسا کہ شکل (i) اور شکل (ii) میں دکھایا گیا ہے۔

$A\cap B=B\cap A$ پس تصدیق ہوئی

پڑتال: اتعال کے قانونِ تلازم $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

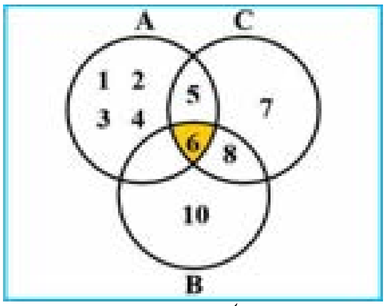
$\underline{L.H.S=A\cap(B\cap C)}$ $\underline{R.H.S=(A\cap B)\cap C}$

$B\cap C$



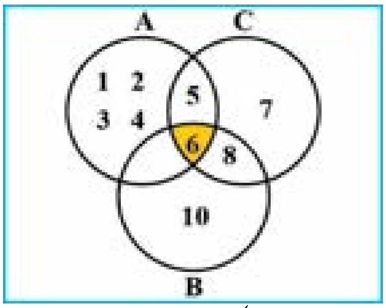
شکل (i)

$A\cap B$



شکل (iii)

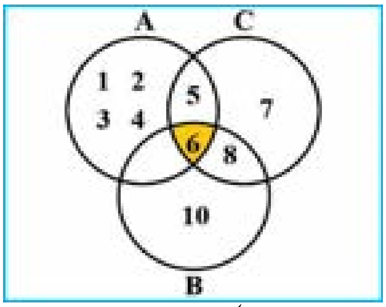
$A\cap(B\cap C)$



شکل (ii)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے
$A\cap(B\cap C)=\{6\}$

$(A\cap B)\cap C$



شکل (iv)

وین ڈائی گرام کی شکل (iv) سے
$(A\cap B)\cap C=\{6\}$

سایہ دار یا رنگین علاقے اور ان کے ارکان برابر ہیں جیسا کہ شکل (ii) اور شکل (iv) میں دکھائے گئے ہیں۔

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

پس تصدیق ہوئی

قوانین تلازم (Distributive Laws):

بذریعہ وین ڈائی گرام قوانین تلازم کی تصدیق کرنے کے لیئے ہم مندرجہ ذیل مثال لیتے ہیں۔

مثال: اگر اور تو اتعال اور تقاطع کے قوانین تلازم کی تصدیق کریں $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ،
$B=\{3,4,5,6,7\}$ ؛ $C=\{2,4,6,8\}$

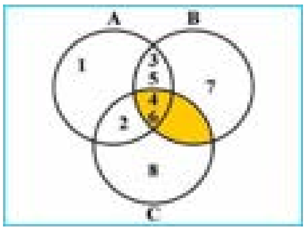
پڑتال:

(i) تقاطع کے قانون تلازم (Distributive law of union over intersection):

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

<u>$L.H.S = A\cup(B\cap C)$</u>

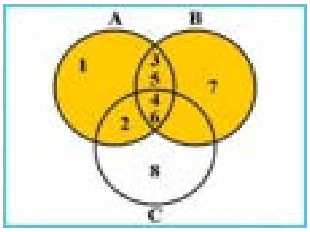
$B\cap C$



شکل(i)

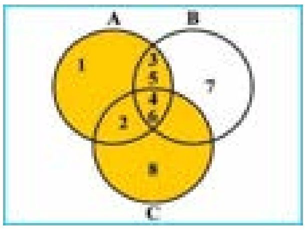
<u>$R.H.S=(A\cup B)\cap(A\cup C)$</u>

$A\cup B$



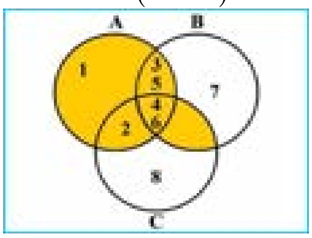
شکل(iii)

$A\cup C$



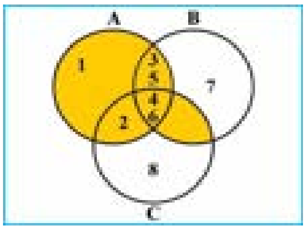
شکل(iv)

$A\cup(B\cap C)$



شکل (ii)

$(A\cup B)\cap(A\cup C)$



شکل (v)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے

$A\cup(B\cap C)=\{1,2,3,4,5,6\}$

وین ڈائی گرام کی شکل (v) سے

$(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1,2,3,4,5,6\}$

رنگین اور سایہ دار علاقے اور ان کے ارکان برابر ہیں جسا کہ شکل (ii) اور شکل (v) دکھا گیا ہے

پس $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

تصدیق ہوئی

قوانین تلازم (Associative Laws):

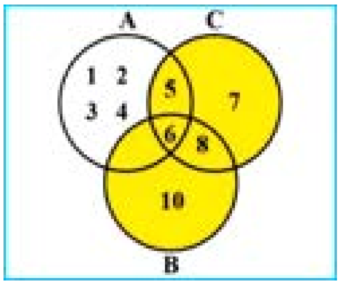
بذریعہ وین ڈائی گرام قوانین تلازم کی تصدیق کرنے کے لیے ہم مندرجہ ذیل مثال لیتے ہیں۔

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ، $B=\{6,8,10\}$ اور $C=\{5,6,7,8\}$ تو اتصال اور تقاطع کے قوانین تلازم کی تصدیق کریں

پڑتال: اتصال کے قانون تلازم یعنی $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

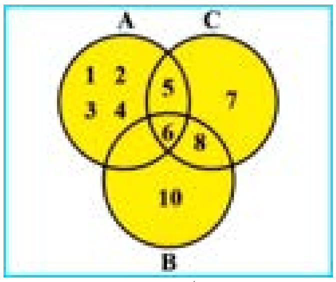
$L.H.S=A\cup(B\cup C)$

$B\cup C$



شکل(i)

$A\cup(B\cup C)$



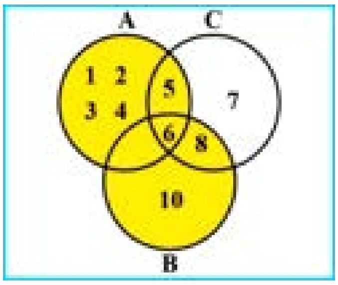
شکل(ii)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے

$A\cup(B\cup C)=\{1,2,3,4,5,6,7,8,10\}$

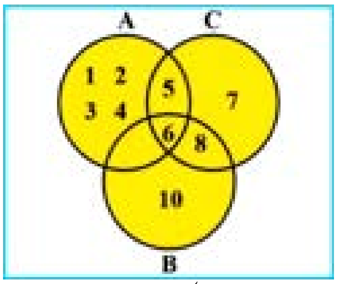
$R.H.S=(A\cup B)\cup C$

$A\cup B$



شکل(iii)

$(A\cup B)\cup C$



شکل(iv)

وین ڈائی گرام کی شکل (iv) سے

$(A\cup B)\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,10\}$

سایہ دار یا رنگین علاقے اور ان کے ارکان برابر ہیں جیسا کہ شکل(i) اور شکل(ii) میں دکھائے گئے ہیں

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

پس تصدیق ہوئی

➤ ڈی مورگن کے قوانین (De Morgan's Laws):

آئیں مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے ڈی مورگن کے قوانین کی بذریعہ وین ڈائی گرام تصدیق کریں

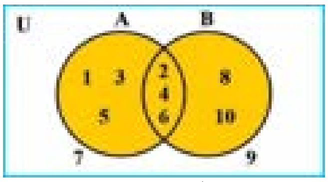
مثال: ڈی مورگن کے قوانین کی بذریعہ وین ڈائی گرام تصدیق کریں

اگر $U=\{1,2,3,...,10\}$ ، $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ اور $B=\{2,4,6,8,10\}$

پڑتال: (i) $(A\cup B)' = A'\cap B'$

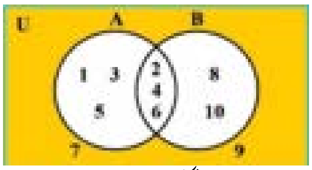
$\underline{L.H.S = (A\cup B)'}$

$A\cup B$



شکل (i)

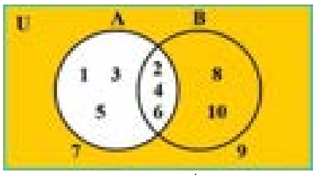
$(A\cup B)'$



شکل (ii)

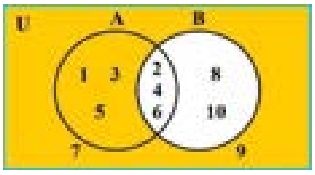
$\underline{R.H.S = A'\cap B'}$

A'



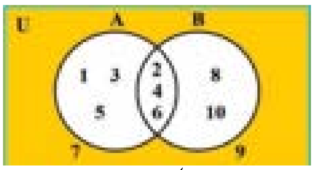
شکل (iii)

B'



شکل (iv)

$A'\cap B'$



شکل (v)

$(A\cup B)' = \{7,9\}$

$A'\cap B' = \{7,9\}$

سایہ دار یا رنگین علاقے اور ان کے ارکان برابر ہیں جب کہ شکل (ii) اور شکل (v) میں دکھایا گیا ہے۔

پس $(A\cup B)' = A'\cap B'$

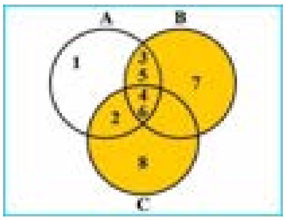
تصدیق ہوئی

(ii) پڑتال: قوانین تقسیمی Distributive law of intersection over union

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

<u>$L.H.S = A\cap(B\cup C)$</u>

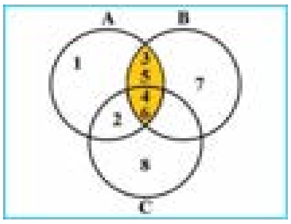
$B\cup C$



شکل (i)

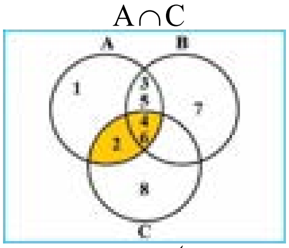
<u>$R.H.S=(A\cap B)\cup(A\cap C)$</u>

$A\cap B$



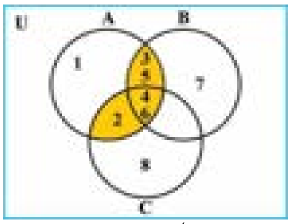
شکل (iii)

$A\cap C$



شکل (iv)

$A\cap(B\cup C)$

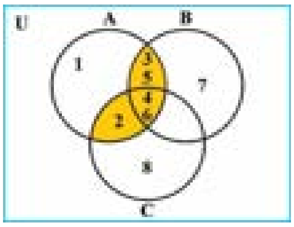


شکل (iv)

وین ڈائی گرام کی شکل (ii) سے

$A\cap(B\cup C)=\{2,3,4,5,6\}$

$(A\cap B)\cup(A\cap C)$



شکل (v)

وین ڈائی گرام کی شکل (v) سے

$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{2,3,4,5,6\}$

سایہ داریا رنگین علاقہ اور ان کے ارکان برابر ہیں جیسا کہ سکل (ii) اور شکل (v) میں دکھایا گیا ہے۔

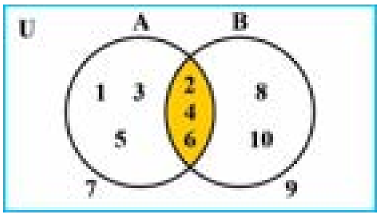
پس $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

تصدیق ہوئی

پڑتال: (ii): $(A\cap B)' = A'\cup B'$

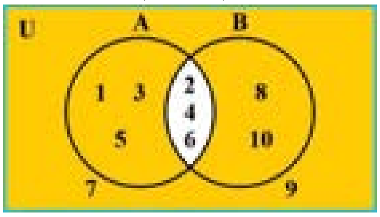
L.H.S $=(A\cap B)'$

$A\cap B$



شکل (i)

$(A\cap B)'$



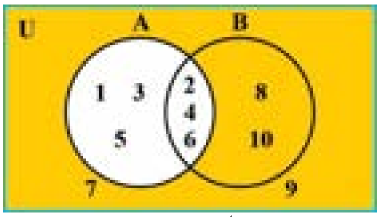
شکل (ii)

وین ڈائی گرام شکل (ii) کے مطابق

$(A\cap B)' = \{1,3,5,7,8,9,10\}$

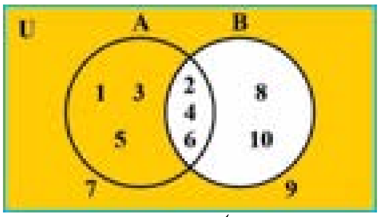
R.H.S $= A'\cup B'$

A'



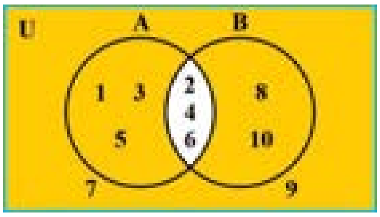
شکل (iii)

B'



شکل (iv)

$A'\cup B'$



شکل (v)

وین ڈائی گرام کی شکل (v) کے مطابق

$A'\cup B' = \{1,3,5,7,8,9,10\}$

سایہ دار یا رنگین علاقے اور ان کے ارکان برابر ہیں جب کہ شکل (ii) اور شکل (v) میں دکھایا گیا ہے۔

پس $(A\cap B)' = A'\cup B'$

تصدیق ہوئی

مشق نمبر 17.4

-1 اگر A اور B کوئی سے U دو کے تحتی سیٹ ہیں تو $A\cup B$، $A\cap B$، $A\Delta B$ اور $A-B$ کے وین ڈائی گرام بنائیں اگر

(i) A اور B ڈس جوائنٹ سیٹ ہیں (ii) A اور B اوور لیپنگ سیٹ ہیں (iii) سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے۔

2. بذریعہ وین ڈائی گرام اتعال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ کی تصدیق کریں اگر

(i) $A=\{a,b,c,d,e\}$ ؛ $B=\{a,e,i,o,u\}$

(ii) $P=\{1,2,3,...,10\}$ ؛ $Q=\{2,4,6,8,10\}$

3. بذریعہ وین ڈائی گرام ڈی مورگن کے قوانین کی تصدیق کریں اگر

اگر $A=\{1,3,5,7,9\}$، $B=\{5,6,7,8\}$ اور $U=\{1,2,3,...,10\}$

4. بذریعہ وین ڈائی گرام قوانین تلازم اور قوانین تقسیمی کی تصدیق کریں اگر

اگر $A=\{1,2,3,...,8\}$، $B=\{4,6,7,8,9,10\}$ اور $C=\{5,7,9,11\}$

17.1.4 مترتب جوڑے اور کارتیسی حاصل ضرب (Ordered pairs and Cartesian products):

کارتیسی حاصل ضرب فرانسیسی ریاضی دان اپنے ڈیکارٹ کے نام پر رکھا گیا ہے جس نے انیلٹیکل جیومٹری متعارف کروائی تھی انیلٹیکل جیومیٹری میں مترتب جوڑے مستوی میں نقاط کو ظاہر کرنے کے لیئے استعمال کیئے جاتے ہیں۔ آئیں مترتب جوڑوں اور کارتیسی حاصل ضرب کو تفصیل سے بحث کرتے ہیں۔

17.1.4 (i) مترتب جوڑے (Recognize ordered pair):

اعداد کا جوڑا جس میں ترتیب کا لازماً خیال رکھا جاتا ہے۔ مترتب جوڑا کہلاتا ہی۔ کسی دو قدرتی اعداد a اور b کے لیئے، اگر ہم a کو پہلا اور b کو دوسرا رکن سمجھتے ہیں تو a اور b کے مترتب جوڑے کو (a,b) سے ظاہر کیا جاتا ہی۔ مترتب جوڑے (a,b) میں a پہلا رکن یا عنصر اور b دوسرا رکن یا عنصر کہلاتا ہے۔ دو مترتب جوڑے برابر ہوتے ہیں اگر ان کے رکن برابر ہوں جیسے

مثال: x اور y کی قیمت معلوم کریں اگر $(x+5,8)$ اور $(9,y-6)$ برابر ہے

حل: ہمارے پاس

$$(9,y-6)=(x+5,8)$$

$$\Rightarrow \quad y-6=8 \qquad\qquad \Rightarrow \quad 9=x+5$$

$$\Rightarrow \quad y=8+6 \qquad\qquad \Rightarrow \quad 9-5=x$$

یا $y=14$ یا $x=4$

لہٰذا x اور y کی قیمت بالترتیب 4 اور 14 ہیں

17.1.4 (ii) کارتیسی حاصل ضرب بنانا (To form Cartesian products):

اگر A اور B دو غیر خالی سیٹ ہیں تو A کی B سے کارتیسی حاصل ضرت سے ظاہر کی جاتی ہے۔ جو تمام مترتب جوڑے (a,b) پر مشتمل ہوتے ہیں جہاں $a\in A$ اور $b\in B$

جیسے $A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A \text{ اور } b\in B\}$

اس ہی طرح B کی A سے کارتیسی حاصل ضرب اس طرح ظاہر کی جاتی ہے

$$B\times A=\{(b,a)\,|\,b\in B \text{ اور } a\in A\}$$

مثال کے طور پر اگر $P=\{1,2,4\}$ اور $Q=\{5,10\}$

تو $P\times Q=\{(1,5),(1,10),(2,5),(2,10),(4,5),(4,10)\}$

اور $Q\times P=\{(5,1),(5,2),(5,4),(10,1),(10,2),(10,4)\}$

نوٹ: (i) $A\times B$ کو "A کراس B" پڑھایا جاتا ہے

(ii) اگر $O(A)=m$ اور $O(B)=n$ تو $O(A\times B)=mn$

(iii) عام طور پر $A\times B\neq B\times A$

17.2 ثنائی ربط (Binary Relations):

ثنائی ربط کی وضاحت کریں اور اُسی کے حلقہ اثر (Domain) اور زد (Range) کی شناخت کریں

ثنائی ربط (Binary Relations):

اگر A اور B کوئی دو غیر خالی سیٹ ہیں تو کارتیسی ضرب AxB کا کوئی تحتی سیٹ R، A سے B کا ثنائی ربط کہلائے گا۔

مثال: اگر $A=\{a,b,c\}$ اور $B=\{2,4\}$ تو معلوم کریں

(a) دو روابط A سے B میں

(b) تین روابط B سے A میں

(c) چار ثنائی رابط B میں

حل: (a) دو روابط A سے B میں

یہاں $A\times B=\{(a,2),(a,4),(b,2),(b,4),(c,2),(c,4)\}$

اب $R_1=\{(a,2),(b,4)\}$ اور $R_2=\{(b,2),(c,2),(c,4)\}$

کوئی سے دو روابط A سے B میں ہیں

(b) کوئی تین روابط B سے A میں ہیں

یہاں $B\times A=\{(2,a),(2,b),(2,c),(4,a),(4,b),(4,c)\}$

اب $R_1=\{(2,a)\}$، $R_2=\{(2,a),(2,b)\}$ اور $R_3=\{(4,a),(4,b),(4,c)\}$

کوئی تین روابط B سے A میں ہیں

(c) چار ثنائی روابط B میں

یہاں $B\times B=\{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$

اب $R_1=\varnothing$، $R_2=\{(2,2)\}$، $R_3=\{(2,4),(4,2)\}$ اور $R_4=\{(2,2),(2,4)\}$

چار ثنائی روابط B میں ہیں

حلقہ اثر (Domain) اور زد (Range)

فرض کریں R ثنائی ربط ہے سیٹ A سے سیٹ B میں۔ تو R کا حلقہ اثر (Domain) ظاہر کیا جاتا ہے بطور DomR، یہ R کے تمام مترتب جوڑوں کے پہلے تمام رکن کا سیٹ ہے۔ R کی زد (Range)، کو Range سے ظاہر کرتے ہیں یہ R کے مترتب جوڑوں کے دوسرے تمام رکن کا سیٹ ہے

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4\}$، $B=\{4,5,6,7\}$ اور $R=\{(1,4),(2,4),(3,5),(3,6)\}$

A سے B میں ایک ثنائی ربط ہے تو $\text{Dom } R=\{1,2,3\}$ اور $\text{Range } R=\{4,5,6\}$

مثال: اگر $x, y \in N$ اور $\mathbb{N}$ ایک ثنائی ربط R، N میں دی گئی ہے جیسے

$R = \{(x,y) \mid x+y=5\}$ تو R کو اندراجی شکل میں لکھیں اور حلقہ اثر اور زر (Range) بھی معلوم کریں۔

حل: اندراجی شکل میں $R = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

یہاں $\text{Dom } R = \{1,2,3,4\}$

اور $\text{Range } R = \{1,2,3,4\}$

17.3 تفاعل (Function)

تفاعل، ریاضی کی ایک شاخ کا ایک بنیادی تصور ہے جس نے سائنس کو یکسر بدل دیا ہے۔ تفاعل در حقیقت تعلق کا ایک اصول ہے جو دو سیٹوں یا مقداروں کا تعلق ہے۔ مثال کے طور پر دائرے کا رقبہ A رداس "r" یوں $A = \pi r^2$ تعلق رکھتا ہے یہاں ہم تناعل کو صرف سیٹ کی بنیادی پر بحث کرینگے۔

17.3 (i) تفاعل کی وضاحت کریں اور اُس کی حلقہ اثر (domain) شریک حلقہ اثر (Co-domain) اور زر (Range) کی شناخت کریں۔

تفاعل (Function) ایک ثنائی ربط ہے جس میں میں حلقہ اثر (domain) کا ہر رکن صرف اور صرف زر (Range) کا ایک رکن کے ساتھ وابستہ ہوتا ہے مثال کے طور پر $\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$ ایک تفاعل ہے

جیسا کہ $\{(1,5),(2,6),(2,7),(3,9)\}$ تفاعل نہیں ہے کیونکہ حلقہ اثر (domain) کا رکن 2، زر (Range) کے دو ارکان کے ساتھ وابستہ ہے

سیٹ A سے سیٹ B میں تفاعل (Function from set A to set B):

فرض کریں A اور B دو غیر خالی سیٹ ہیں اور R، سیٹ A سے سیٹ B میں ثنائی ربط ہے۔ تو R تفاعل کہلائے گا A سے B میں اگر

(i) R کا حلقہ اثر (domain) = A

(ii) R میں A کا ہر رکن وابستہ ہے B کے صرف ایک رکن سے جیسے اگر $(a,b) \in R$ اور $(a,c) \in R$ تو $b=c$ تفاعل عام طور انگریزی اور یونانی حرف تہجی جیسے f.g.h وغیرہ اور α, β, γ وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اگر f ایک تفاعل ہے A سے B میں تو ہم یوں لکھتے ہیں $f: A \to B$ اور ہر $(ab) \in f$ تو b کو f کے تحت a کی شبیہہ کہلاتے ہے اور ہم اسے یوں لکھتے ہیں $b=f(a)$

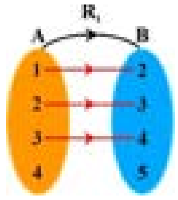
مثال: فرض کریں $A=\{1,2,3,4\}$ اور $B=\{2,3,4,5\}$ شناخت کریں مندرجہ ذیل میں A سے B میں کون سے تفاعل میں

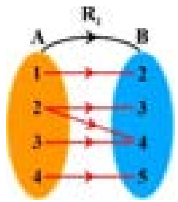
(i) $R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

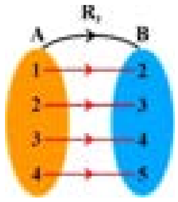
(ii) $R_2 = \{(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,5)\}$

(iii) $R_3 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

میپنگ ڈائی گرام







حل:

(i) $R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

R_1، تفاعل نہیں ہے کیونکہ $\text{Dom } R_1 \neq A$

جیسا کہ متصلہ میپنگ ڈائی گرام سیٹ میں دکھایا گیا ہے۔

(ii) $R_2 = \{(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,5)\}$

R_2، تفاعل نہیں ہے کیونکہ حلقہ اثر (Domain) کا ایک رکن ہے، "2" B کے صرف ایک رکن کے ساتھ وابستہ نہیں ہے

جیسا کہ متصلہ میپنگ ڈرائی گرام میں دکھایا گیا ہے۔

(iii) $R_3 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

R_3 تفاعل ہے کیونکہ $\text{Dom } R_3 = A$ اور

حلقہ اثر کا ہر رکن B کے صرف ایک رکن کے ساتھ وابستہ ہے۔

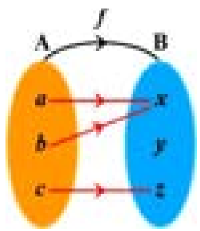
جیسا کہ میپنگ ڈائی گرام میں دکھایا گیا ہے۔

حلقہ اثر (Domain) معاون حلقہ اثر (Co- domain) اور زر (Range)

اگر f، A سے B میں ایک تناعل ہے جیسے $f: A \to B$ تو A اس کا حلقہ اثر (Domain) پہلا سیٹ کہلاتا ہے اور B اس کا معاون حلقہ (Co-domain) دوسرے سیٹ کہلاتا ہے۔

حالانکہ: زر (Range)، f کی تمام شبیہ کا سیٹ ہے

مثال: اگر A سے B میں f ایک تناعل ہے جیسا کہ دیئے گئے میپنگ ڈائی گرام میں دکھایا گیا تو اس کے حلقہ اثر (domain) تعاون حلقہ اثر (co domain) اور زر (Range)



حل: f کے میپنگ ڈائی گرام کے مطابق

$\text{Dom } f = A = \{a,b,c\}$، f $\text{Co-domain } f = b = \{x,y,z\}$, $\text{Range } R = \{x,z\}$

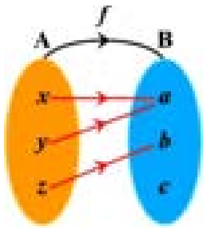
اس کے علاوہ $f(a) = x$ اور $f(c) = z$

نوٹ:
(i) f کی زر (Range) اُسے تعاون حلقہ اثر (Co – domain) کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔
(ii) ہر تفاعل تعلق ہوتا ہے۔ لیکن الٹ درست نہیں ہے۔

17.3 (ii) مندرجہ ذیل کی وضاحت کریں Demonstrate the following

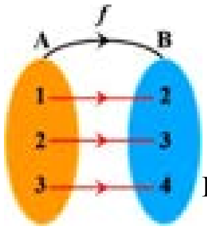
- ان ٹو اور ون–ون تفاعل (ان جیکٹو تفاعل) (Into and one-one function (Injective function)):
- اون ٹو تفاعل (سر جیکٹو تفاعل) (Onto function (Surjective function)):
- ون–ون اور ارونٹو تفاعل (بائی جیکٹو تفاعل) (One-one and onto function (Bijective function)):

ان ٹو تفاعل (Into function):



کوئی سیٹ A اور B کے لیئے، تفاعل $f: A \to B$ ان ٹو تفاعل کہلاتا ہے
اگر f کی زر (Range)، B کا واجب تحتی سیٹ ہے ($Range\ f \subset B$)
مثال : $A = \{x, y, z\}$ اور $B = \{a, b, c\}$ ایک تفاعل $f: A \to B$ یوں واضح کیا جاتا ہے $f = \{(x,a), (y,a), (z,b)\}$ ان ٹو تفاعل ہے کیونکہ $Range\ f \subset B$ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے یہاں $Range\ f = \{a, b\}$

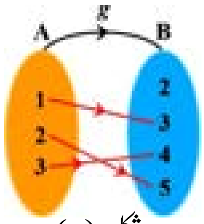
ون-ون تفاعل (One-one function):



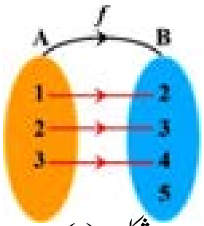
کوئی دو سیٹ A اور B کے لیئے، $f: A \to B$ ون-ون تفاعل کہلاتا ہے
اگر A کا ہر رکن B میں مختلف شبیہ رکھتا ہے۔
مثال : $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{2, 3, 4\}$ کے لیے اور ایک تفاعل $f: A \to B$ یوں واضح کرتے ہیں $f = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ ون ون تفاعل ہے کیونکہ A کا ہر رکن B میں مختلف شبیہ رکھتا ہے جیسا کہ میپنگ ڈائی گرام دکھایا گیا ہے۔

ان ٹو اور ون-ون تفاعل یا ان جیکٹو تفاعل (Into and one-one function or injective function):

ایک تفاعل جو ان ٹو ہے اور ون-ون بھی ہے وہ ان جیکٹو تفاعل کہلاتا ہے۔



شکل (ii)

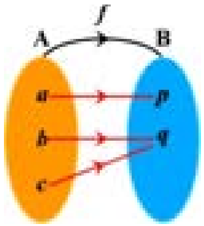


شکل (i)

مثال کے طور پر: $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{2, 3, 4, 5\}$ تفاعل $f: A \to B$ یوں واضح کرتے ہیں
$f = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ ایک ان جیکٹو تفاعل ہے
کیونکہ یہ ان ٹو ہے اور ون-ون بھی ہے
جیسا کہ میپنگ ڈائی گرام شکل (i) میں دکھایا گیا ہے۔
تفاعل $g: A \to B$ یوں واضح کرتے ہے
$g = \{(1,3), (2,5), (3,4)\}$ انجیکٹو تفاعل بھی ہے جیسا کہ میپنگ ڈائی گرام شکل (ii) میں دکھایا گیا ہے۔

آن ٹو تفاعل یا سر جیکٹو تفاعل (Onto function or surjective function):

کوئی سیٹ A اور B کے لیئے، تفاعل $f: A \to B$ آن ٹو تفاعل یا سر جیکٹو تفاعل کہلاتا ہے اگر
$Range\ f = B$ مثال کے طور پر کی وضاحت یوں کی جاتی ہے

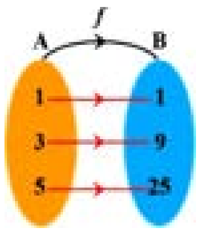


مثال : $A = \{a, b, c\}$ اور $B = \{p, q\}$ تفاعل $f: A \to B$
یوں واضح کیا جاتا ہے۔ $f = \{(a,p), (b,q), (c,q)\}$
آن ٹو تفاعل ہے کیونکہ $f: A \to B$ جیسا کہ متصلہ شکل میں دکھایا گیا ہے

ون-ون اور آن ٹو تفاعل یا بائی جیکٹو تفاعل
(One-one and onto function or bijective function):

تفاعل جو ون-ون ہے اور آن ٹو بھی ہے وہ ون-ون اور آن ٹو تفاعل یا بائی جیکٹو تفاعل کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: $A=\{1,3,5\}$ اور $B=\{1,9,25\}$ تفاعل $f:A\rightarrow B$ یوں واضح کیا جاتا ہے۔
$f=\{(1,1),(3,9),(5,25)\}$ بائی جیکٹو تفاعل ہے کیونکہ یہ ون-ون آن ٹو ہے جیسا کہ متعلقہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔



17.3(iii) مشاہدہ کریں کہ آیا دی گئی ربط تفاعل ہے یا نہیں

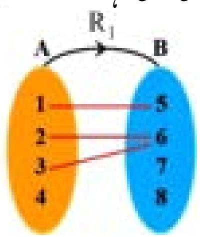
(Examine whether a given relation is a function or not):

مشاہدہ کرنے کے لیئے آیا دی گئی ربط تفاعل ہے یا نہیں ہمیں ربط کے حلقہ اثر (domain) پر توجہ دینی ہو گی۔

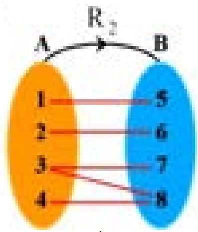
اگر حلقہ اثر (domain) کا کوئی رکن بغیر شبیہ کے ہے یا کوئی حلقہ اثر کا کوئی رکن ربط میں ایک سے زیادہ شبیہ کے ساتھ ہے تو یہ ربط تفاعل نہیں ہے۔

مثال: مشاہدہ کریں کہ دی گئی اور ربط A سے B میں جن کو میپنگ ڈائی گرام میں دیا گیا ہے فیصلہ کریں کہ کون سا تفاعل ہے اور کون سا تفاعل نہیں ہے۔

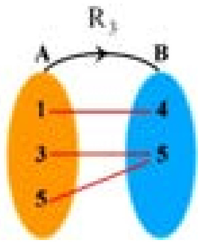
(i)



(ii)



(iii)



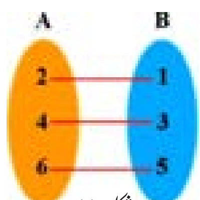
حل: R_1 تفاعل نہیں ہے کیونکہ حلقہ اثر (domain) کے رکن "4" کوئی شبیہ نہیں ہے۔
R_2 کی تفاعل نہیں ہے کیونکہ حلقہ اثر (domain) کے رکن "3" کی ایک سے زیادہ شبیہ ہیں۔
R_3 تفاعل ہے کیونکہ حلقہ اثر (domain) کے ہر رکن کی صرف اور تفرد شبیہ ہے

17.3(iv) ون—ون مطابقت اور ون—ون تفاعل میں فرق واضح کریں

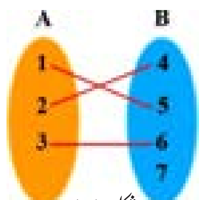
(Differentiate between one-one correspondence and one-one function):

فرض کریں A اور B دو غیر خالی سیٹ ہیں۔ مطابقت A اور B میں پہلے سیٹ کا ہر رکن دوسرے سیٹ کے صرف ایک رکن کے ساتھ وابستہ ہے ون-ون مطابقت ہمیشہ بائی جیکٹو نہیں ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر: شکل (i) ون—ون مطابقت تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔
شکل (ii) ون—ون مطابقت نہیں ہے کیونکہ یہ ون—ون تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔



شکل (i)



شکل (ii)

مشق 17.5

1. x اور y کی قیمتیں معلوم کریں اگر

(i) $(x-5,10)=(11,y-7)$

(ii) $(5x+8,5y-4)=(3x+10,2y+2)$

(iii) $(2x-3y,5x+y)=(3,16)$

2. اگر سیٹ P کے 10 رکن، سیٹ Q کے 15 رکن ہیں تو QxP, PxQ اور PxP کے رکن معلوم کریں

3. اگر $A=\{1,2\}$ ، $B=\{2,3\}$ اور $C=\{1,3,5\}$ تو معلوم کریں

(i) $A\times B$ (ii) $B\times C$ (iii) $A\times(B\cup C)$

(iv) $B\times(A\cup C)$ (v) $(A\cap B)\times(B\cap C)$

4. اگر $A=\{5,6\}$ اور $B=\{1,2,3\}$ تو معلوم کریں

(i) $A\times B$ میں تین روابط (ii) $B\times A$ میں چار روابط

(iii) B میں پانچ روابط (iv) A میں تمام روابط

5. دو سیٹ A اور B کے لیئے، اگر O(A) = 3 اور O(B)=4 تو AxB میں تمام روابط کی تعداد معلوم کریں

6. $A\times B$ مندرجہ ذیل کی ثنائی روابط کو اندراجی شکل میں لکھیں جب کے $A=\{0,1,2,3\}$ اور $B=\{2,4,6,8\}$
یہاں اور جیسا کہ $a\in A$ اور $b\in B$

(i) $R_1=\{(a,b)\mid b<5\}$ (ii) $R_2=\{(a,b)\mid a+b=9\}$

(iii) $R_3=\{(a,b)\mid a-b=1\}$

7. اگر ربط $R=\{(x,y)\mid y=2x+5\}$, Z میں ہے تو

(i) زر (Range) معلوم کریں اگر حلقہ اثر (domain) میں $\{-2,-1,0,1,2\}$ ہے۔

(ii) حلقہ اثر (domain) معلوم کریں اگر زر (Range) میں $\{11,13,15,17\}$ ہے۔

8. اگر x, y سیٹ W کے ارکان کو ظاہر کرتے ہیں تو مندرجہ ذیل روابط کی حلقہ اثر (domain) اور زر (Range) معلوم کریں

(i) $\{(x,y)\mid 3x+y=11\}$ (ii) $\{(x,y)\mid x-y=6\}$

9. اگر $f: A\rightarrow B$ تفاعل دیا گیا ہے $f=\{(1,5),(2,6),(3,7),(4,8)\}$ جہاں اور کی قیمتیں بھی معلوم کریں
$A=\{1,2,3,4\}$ اور $B=\mathbb{N}$ تو اس کے معاون حلقہ اثر (co-domain) اور زر (Range) معلوم کریں $f(2)$ اور $f(4)$

10. اگر $A=\{0,1,2,3,4\}$ اور $B=\{2,4,6,8,10\}$ تو معلوم کریں آیا مندرجہ ذیل A سے B میں ربط تفاعل ہیں
یا نہیں تفاعل میں توان کی اقسام بھی معلوم کریں

(i) $R_1=\{(0,2),(1,4),(2,6),(3,8)\}$

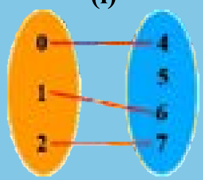
(ii) $R_2=\{(0,10),(1,8),(2,6),(2,4),(3,4),(4,2)\}$

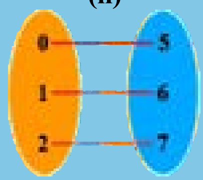
(iii) $R_3=\{(0,2),(1,4),(2,6),(3,8),(4,8)\}$

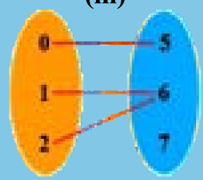
(iv) $R_4=\{(0,2),(1,2),(2,2),(3,2),(4,8)\}$

(v) $R_5=\{(0,2),(1,4),(2,6),(3,8),(4,10)\}$

11. مندرجہ ذیل میں کونسا ون—ون تفاعل ہے یا ون-ون مطابقت ہے یا دونوں میں سے کوئی نہیں ہے۔

(i)


(ii)


(iii)


12. اگر $P=\{a,b,c\}$، $Q=\{x,y,z\}$ اور $R=\{p,q,r,s\}$ تو معلوم کریں

(i) تفاعل f، P ان ٹو q

(ii) تفاعل g، R ان ٹو P

(iii) تفاعل h، P سے ٹو p، جو کہ ان جیکٹو ہے

(iv) تفاعل K، Q سے ٹو P، جو کہ بائی جیکٹو ہے

Review Exercise 17

1. درست جواب کا انتخاب کریں:

(i) کونسا N کا تحتی سیٹ ہے۔

(a) Z (b) Q (c) E (d) P

(ii) $A=\{x\,|\,x\in Z\wedge x^2=25\}$ کی اندراجی شکل ________ ہے۔

(a) $\{1,5\}$ (b) $\{-5,5\}$

(c) $\{1,5,25\}$ (d) $\{-5\}$

(iii) دو سیٹ A اور B کے لیئے، اگر $O(A)=O(B)$ تو

(a) $A\subseteq B$ (b) $B=A$

(c) $A\sim B$ (d) $A\subset B$

(iv) $\{x\,|\,x\in N\wedge x<1\}$ ________ ہے

(a) اکائی سیٹ (b) لا متناہی

(c) خالی سیٹ (d) فوقی

(v) اگر $A=\{1,2,3,4\}$ اور $B=\{2,4,6\}$ تو $A\Delta B=$ ________

(a) $\{1,2\}$ (b) $\{6\}$

(c) $\{1,3\}$ (d) $\{1,3,6\}$

(vi) کونسا عمل مبادلہ نہیں ہے۔

(a) تشاکلی فرق (b) اتصال

(c) فرق (d) تقاطع

(vii) $\{x \mid x \in P \vee x \in Q\} = \underline{\hspace{3cm}}$.

(a) $P \cap Q$ (b) $P \cup Q$

(c) $P - Q$ (d) $P \Delta Q$

(viii) $\{x \mid x \in U \wedge x \notin A \cap B\} = \underline{\hspace{3cm}}$.

(a) $A \cap B$ (b) $(A \cup B)'$

(c) $(A \cap B)'$ (d) $A' \cap B'$

(ix) کوئی دو غیر خالی سیٹ A اور B کے لیئے۔ $A \cup B = U$ اور $A \cap B = \varnothing$ تو A اور B ________ ہیں

(a) سیل (b) اوورلیپنگ سیٹ

(c) مساوی سیٹ (d) کوئی نہیں

(x) $\left((A')'\right)' = \underline{\hspace{3cm}}$.

(a) (A') (b) A'

(c) A (d) B

(xi) اگر $A \supseteq B$ تو $A \cup B = \underline{\hspace{3cm}}$

(a) A (b) B

(c) $\varnothing$ (d) U

(xii) وین ڈائی گرام میں یونیورسل سیٹ ________ کرتا ہے۔

(a) مستطیل (b) دائرہ

(c) بیضوی (d) ان میں سے تمام

(xiii) اگر $(x, 6) = (2, y - 6)$ $x + y = \underline{\hspace{3cm}}$

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 14

(xiv) اگر $O(A \times B) = 100$ اور $O(B) = 5$ تو $O(A) = \underline{\hspace{3cm}}$

(a) 10 (b) 15 (c) 20 (d) 25

(xv) تفاعل سرجیکٹو کہلاتا ہے اگر زر ________ (Rang) معاون حلقہ اثر

(a) $\supseteq$ (b) $\subset$

(c) $=$ (d) ان میں سے سب

(xvi) تفاعل ان ٹو کہلاتا ہے اگر زر (Range) = ________ معاون حلقہ اثر (Co- domain)

(a) $\supseteq$ (b) $\subset$

(c) $=$ (d) ان میں کوئی نہیں

(xvii) اگر $A=\{0,1,2\}$ اور $B=\{3,4\}$ پھر مندرجہ ذیل میں فیصلہ کریں کے کونسا تفاعل $f: A \rightarrow B$ ہے۔

(a) $\{(0,3), (1,4)\}$ (b) $\{(0,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$

(c) $\{(0,3), (1,4), (2,4)\}$ (d) کوئی نہیں

(xviii) کونسا ہمیشہ بائی جیکٹو ہوگا

(a) اون ٹو تفاعل (b) ون—ون تفاعل

(c) ان ٹو تفاعل (d) ون—ون مطابقت

(xix) اگر $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ تو کونسا ممکن نہیں ہے

(a) $f(5)=6$ (b) $f(7)=8$

(c) $f(-2)=6$ (d) $f(9)=0$

(xx) کونسا مبادلہ ہے

(a) فرق (b) اتصال

(c) کارتیسی حاصل ضرب (d) کوئی نہیں

2. اگر $A=\{1,2,5\}$ ، $B=\{2,4,6\}$ اور $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ تو مندرجہ ذیل معلوم کریں

(a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$ (c) $A \Delta B$

(d) $A - B$ (e) A' (f) B'

3. سوال نمبر 2 کے سیٹوں کے لیئے ڈی مورگن کے قوانین کی تصدیق کریں

4. سیٹ $A=\{a,b,d\}$ اور $B=\{a,d,e\}$ کے لیئے اتصال اور تقاطع کی خصوصیات کی تصدیق کریں

5. سیٹ $P=\{1,3,5\}$ اور $Q=\{1,3,7\}$ کے لیئے، مندرجہ ذیل کو بذریعہ وین ڈائی گرام ظاہر کریں

(a) $P \cup Q$ (b) $P \cap Q$ (c) $P \Delta Q$ (d) $P - Q$

6. اگر $A=\{a,c\}$ اور $B=\{b,d\}$ تو معلوم کریں

(a) A میں دو ربط (b) B میں دو ربط

(c) A x B میں تین ربط (d) $A \cup B$ میں دو ربط

7. اگر $A=\{1,2,5\}$ اور $B=\{6,8\}$ تو A سے B میں تفاعل معلوم کریں جو

(a) آن ٹو تفاعل (b) ان ٹو تفاعل

(خلاصہ)

- اندراجی، بیانیہ اور ترقیم سیٹ ساز شکل سیٹ کو ظاہر کرنے کے تین طریقے ہیں
- خالی سیٹ میں تو عنصر نہیں ہوتا ہے
- اگر A تحتی سیٹ ہے B کا تو B فوقی سیٹ ہوتا ہے A کا
- اگر $B \subseteq A$ اور $A \subseteq B$ تو $A = B$.
- مترادف سیٹ ون—ون مطابقت رکھتے ہیں
- اگر $B \subseteq A$ اور $B \neq A$ تو $A \subset B$.
- اتعال، تقاطع، فرق، تشا مکلی فرق، کمپلیمنیٹ اور کار تیسی حاصل ضرب سیٹوں پر عوامل ہیں۔
- اگر $A \cap B = \varnothing$ تو A اور B ڈس جوائنٹ سیٹ ہیں۔
- اگر $A \cup B = U$ تو A اور B ایگزوسٹیو سیٹ ہیں۔
- سیل ہمیشہ ڈس جوائنٹ اور ایگزیٹو ہوتے ہیں۔
- فرق اور کار تیی حاصل ضرب مبادلہ نہیں ہوتی ہے۔
- اتصال ارو تقاطع ایک دوسرے پر تقیمی ہوتے ہیں۔
- ڈی مورگن کے قوانین (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- سیٹ اروان کی روابط ارو عوامل کی جیوٹریکل مظاہر وین ڈائی گرام کہلاتا ہے۔
- وین ڈائی گرام کو جون وین 1881 قبل مسیحی مین متعارف کروایا تھا۔
- سیٹ، یونیورسل سیٹ وین ڈائی گرام بالترتیب دائرے یا بیضوی اور مستطیل سے ظاہر کئے جاتے ہیں۔
- اگر $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ و $b = d$
- $O(A \times B) = O(A) \cdot O(B)$
- $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- کار تیی حاصل ضرب کا ہر تحتی سیٹ ثنائی ربط کہلاتا ہے۔
- ثنائی ربط تقاعل ہے جس میں حلقہ اثر (Domain) کا ہر رکن صرف ایک شبیہ رکھتا ہے۔
- اگر $f: X \to Y$ تقاعل ہے تو X اور Y بلترتیب حلقہ اثر (Domain) اور معاون حلقہ اثر (Co-Domain) جب کہ تمام شبیوں کا سیٹ زد (Range) ہے۔
- تقاعل کہلاتا ہے (i) ان تو اگر زد (Range) معاون حلقہ اثر (Co-Domain)
  (ii) آن ٹو اگر زد (Range) = معاون حلقہ اثر (Co-Domain)
  (iii) ون-ون اگر حلقہ اثر (Domain) کا ہر رکن معاون حلقہ اثر (Co-Domain) میں صرف یک اشبیہ رکھتا ہے۔
- تقاعل کہلاتا ہے (i) ان جیکٹوا گروہ ون-ون اور ان ٹو ہے۔
  (ii) سر جیکٹوا گروہ آن ٹو ہو۔
  (iii) بائی جیکٹوا گروہ ون-ون اور آن ٹو ہو۔
- ون-ون مطابقت ہمیشہ بائی جیکٹو ہوئی ہے۔
- ون-ون تقاعل ہمیشہ بائی جیکٹو نہیں ہوتے ہے۔

یونٹ نمبر 18

تغیرات
VARIATIONS

طلباء کے آزموزشی حاصلات (SLOs)

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- نسبت، تناسب اور تغیرات (راست اور معکوس) کی تعریف کر سکیں
- تیسرا، چوتھا، وسطی اور مسلسل تناسب معلوم کر سکیں۔
- عکس نسبت (Invertendo)، ابدال نسبت (Alternando)، ترکیب نسبت (Components)، تفصیل نسبت (Dividendo)، تفصیل و ترکیب نسبت، تناسب معلوم کرنے کے لیے مسئلہ کا اطلاق کر سکیں۔
- مشترکہ تغیرات کی تعریف کر سکیں
- مشترکہ تغیرات سے متعلق مسائل حل کر سکیں
- طریقہ استعمال کرتے ہوئے تناسب پر مبنی شرطیہ مساوات ثابت کر سکیں۔
- تغیرات پر مبنی روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں

18.1 نسبت، تناسب اور تغیرات (Ratio, Proportions and variations)

18.1.1 نسبت، تناسب اور تغیرات (راست و معکوس) کی تعریف کرنا

(a) نسبت (Ratio):

ایک ہی اکائی کی دو مقداروں کا موازنہ نسبت ہے۔ یہ ایک ہی قسم کی دو مقداروں کا باہمی تعلق ہے دوسرے الفاظ میں نسبت کا مطلب ہے۔ اگر a اور b ایک ہی قسم کی دو مقداریں ہیں اور b صفر نہیں ہے تو a اور b کی نسبت کو یوں لکھا جاتا ہے : $a:b$ یا $\frac{a}{b}$

مثلاً: اگر ایک جماعت میں 13 لڑکے اور 8 لڑکیاں ہیں تو لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد کی نسبت کو یوں $13:8$ یا $\frac{13}{8}$ کسر میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

نوٹ:
(i) نسبت میں رقموں کی ترتیب اہم ہوتی ہے
(ii) نسبت کی کوئی اکائی نہیں ہوتی ہے
(iii) نسبت $a:b$ میں پہلی رقم (First term) مقدم (Antecedent) اور دوسری رقم (Second term) مؤخر (Consequent) کہلاتی ہے

مثال 1: نسبت معلوم کریں:

(i) 400 میٹر اور 900 میٹر
(ii) 700 گرام اور 2 کلو گرام
(iii) 300 سیکنڈ اور 2 منٹ
(iv) 200 روپے اور 300 گرام

حل:

(i) 400 میٹر اور 900 میٹر کی نسبت

$$400:900=\frac{400}{900}=\frac{4}{9}=4:9$$

400 : 900 کی مختصر ترین صورت 4 : 9 ہے

(ii) 700 گرام اور 2 کلو گرام کی نسبت

چونکہ 1 کلو گرام = 1000 گرام

اس لیئے 2 کلو گرام = 2000 گرام

اب

$$700:2000=\frac{700}{2000}=\frac{7}{20}=7:20$$

(iii) 30 سیکنڈ اور 2 منٹ

چونکہ 1 منٹ = 60 سیکنڈ

اس لیئے 2 منٹ = 120 سیکنڈ

اب

$$30:120=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}=1:4$$

(iv) 200 روپے اور 300 گرام کی نسبت

چونکہ مقداریں ایک قسم کی نہیں ہیں لہذا 200 روپے اور 300 گرام کے درمیان نسبت معلوم نہیں کی جاسکتی ہے

مثال 2: نسبت $5a+2b : 4a+3b$ معلوم کریں اگر $a:b=4:5$

حل: دیا گیا ہے کہ $a:b=4:5$ یا $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$

اب

$$5a+2b : 4a+3b = \frac{5a+2b}{4a+3b}$$

$$=\frac{\frac{5a+2b}{b}}{\frac{4a+3b}{b}} = \frac{5(\frac{a}{b})+2(\frac{b}{b})}{4(\frac{a}{b})+3(\frac{b}{b})}$$ (شمار کنندہ اور نسبت نما کو b سے تقسیم کرنے سے)

$$=\frac{5(\frac{4}{5})+2}{4(\frac{4}{5})+3} = \frac{4+2}{\frac{16}{5}+3} = \frac{6}{\frac{31}{5}} = \frac{30}{31} \qquad \left(\because \frac{a}{b}=\frac{4}{5}\right)$$

پس

$$5a+2b : 4a+3b = 30 : 31$$

مثال 3: m کی قیمت معلوم کریں

$3m+5 : 4m+3$ اور $2:3$ برابر ہیں

حل:

دی گئی شرط کے مطابق

$$\Rightarrow \frac{3m+5}{4m+3}=\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow 3(3m+5)=2(4m+3)$$
$$\Rightarrow 9m+15=8m+6$$
$$\Rightarrow 9m-8m=6-15$$
$$\Rightarrow m=-9$$

پس m کی مطلوبہ قیمت 9- ہے

مثال 4: نسبت 4:15 کی ہر رقم میں کونسا عدد جمع کیا جائے کہ یہ $\frac{2}{3}$ کے برابر ہو جائے

حل: فرض کریں کہ مطلوبہ عدد a ہے

دی گئی شرط کے مطابق

$$\Rightarrow \frac{4+a}{15+a}=\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow 3(4+a)=2(15+a)$$
$$\Rightarrow 12+3a=30+2a$$
$$\Rightarrow 3a-2a=30-12$$
$$\Rightarrow a=18$$

پس مطلوبہ عدد 18 ہے۔

(d) تناسب (Proportion):

دو نسبتوں کی برابری تناسب کہلاتی ہے جن کو دو نسبتوں کے برابر ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تو a، b، c اور d تناسب میں ہیں اور ہم یوں لکھ سکتے ہیں: $a:b::c:d$ جبکہ مقداریں a اور d طرفین جبکہ b اور c وسطین کہلاتی ہیں a، b، c اور d کا تناسب یوں لکھا جاتا ہے

$$a:b::c:d$$

یا $a:b = c:d$

یا $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

یا $ad = bc$

نوٹ: طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب

مثال 5: x کی قیمت معلوم کریں اگر $40:60=50:x$

حل: دیا گیا ہے $40:60=50:x$

چونکہ طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب

یعنی $40x = 60 \times 50$

یا $x = \dfrac{60 \times 50}{40} = 75$

لہٰذا $x = 75$

مشق 18.1

1. مندرجہ ذیل کی نسبت معلوم کریں:

(i) 70 کلو گرام اور 25 کلو گرام
(ii) 60 سنٹی میٹر سنٹی میٹر اور 1 میٹر
(iii) 40 سیکنڈ اور 3 منٹ
(iv) 200 ملی لیٹر اور 2 لیٹر
(v) $135°$ اور $360°$
(vi) 3.5 کلو گرام، 5 کلو گرام 200 گرام

2. ایک فیکٹری میں 120 کام کرنے والے ہیں جس میں 45 عورتیں ہیں اور باقی مرد ہیں۔ نسبت معلوم کریں:

(i) مرد اور عورتیں
(ii) عورتیں اور مرد
(iii) عورتیں اور کل کام کرنے والے
(iv) مرد اور کل کام کرنے والے

3. اگر $5(4x-2y)=3x-4y$ تو $x:y$ معلوم کریں

4. "a" کی قیمت معلوم کریں۔ اگر $3a+4:2a+5$ اور $4:3$ برابر ہیں۔

5. نسبت 5:27 کی ہر رقم میں کونسا عدد جمع کیا جائے کہ یہ 1:3 کے برابر ہو جائے.

6. اگر $a:b=5:8$ تو $3a+4b:5a+7b$ کی قیمت معلوم کریں

7. مندرجہ ذیل میں x معلوم کریں

(i) $2x+5:5::3x-2:7$
(ii) $\dfrac{4x-3}{5}:\dfrac{3}{4}::\dfrac{4x}{3}:\dfrac{7}{2}$
(iii) $\dfrac{x-3}{2}:\dfrac{5}{x-1}::\dfrac{x-1}{3}:\dfrac{4}{x+4}$
(iv) $(a^2-ab+b^2):x::\dfrac{a^3+b^3}{a-b}:(a+b)^2$
(v) $11-x:8-x::25-x:16-x$

(e) تغیر (Variation):

تغیر کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ ایک مقدار میں تبدیلی دوسری مقدار میں تبدیلی کا باعث ہے۔ تغیرات دو اقسام کے ہوتے ہیں

➢ تغیر راست (Direct Variation) ➢ تغیر معکوس (Inverse Variation)

تغیر راست (Direct variation) :

اگر دو مقداروں A اور B کے درمیان ایسا تعلق ہے جس میں ایک مقدار A دی گئی نسبت سے بڑھے یا کم ہو تو دوسری مقدار A بھی اُسی نسبت سے بڑھتی یا کم ہوتی ہے۔ اگر مقدار y اور مقدار x میں تغیر راست ہو تو اسے یوں لکھتے ہیں:

$y \propto x$ یا $y = k\,x$ جبکہ $k \neq 0$

علامت "$\propto$" تناسب یا تغیر کی علامت کہلاتی ہے اور ایک k (Constant of variation) متقل کہلاتا ہے۔

مثال طور:

(i) مربع کے ضلع کی لمبائی اور اس کے رقبے میں تغیر راست ہوتا ہے۔

(ii) سائیکل کی رفتار اور طے کردہ فاصلے میں تغیر راست ہوتا ہے

مثال 1: اگر y اور x میں تغیر راست ہے تو معلوم کریں

(a) x اور y کو منسلک کرنے والی مساوات (b) x اور y میں تعلق جبکہ $x = 3$ اور $y = 7$

(c) y کی قیمت جبکہ $x = 24$ (d) x کی قیمت جبکہ $y = 21$

حل: (a) جیسے کے y میں x تغیر راست ہے۔

لہٰذا $y \propto x$

یعنی $y = kx \quad \ldots \text{(i)}$

جبکہ k تغیر کا مستقل ہے

(b) مساوات (i) میں $x = 3$ اور $y = 7$ رکھنے سے،

ہمیں ملا $7=3k$

$$\Rightarrow k = \frac{7}{3}$$

مساوات (i) میں x کی قیمت رکھنے سے، ہمیں ملا $y = \frac{7}{3}x \quad \ldots\text{(ii)}$

(c) مساوات (ii) میں $x = 24$ کی قیمت رکھنے سے، ہمیں ملا $y = \frac{7}{3}(24) = 56$

(d) مساوات (ii) میں $y = 21$ کی قیمت رکھنے سے، ہمیں ملا

$$21 = \frac{7}{3}x \Rightarrow x = \frac{3 \times 21}{7} = 9$$

مثال 2: اگر y اور x کے جزر المربع میں تغیر راست ہے، جبکہ $x = 16$ اور $y = 10$ تو معلوم کریں جبکہ $x = 36$

حل: y اور x کے جزر المربع میں تغیر راست ہے۔

یعنی $y \propto \sqrt{x}$

یا $y = k\sqrt{x} \quad \ldots \quad \text{(i)}$

جبکہ k تغیر کا مستقل ہے۔

مساوات (i) میں $x = 16$ اور $y = 10$ رکھنے سے ہمیں ملا

$$10 = k\sqrt{16}$$

$$\Rightarrow k = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

مساوات (i) میں $k = \frac{5}{2}$ رکھنے سے ہمیں ملا

$$y = \frac{5}{2}\sqrt{x} \quad \ldots\text{(ii)}$$

مساوات (ii) میں $x = 36$ رکھنے سے ہمیں ملا

$$y = \frac{5}{2}\sqrt{36}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{2}(6) = 15$$

مثال 3: اگر V اور r کے مکعب میں تغیر راست ہے اور $V=\frac{792}{7}$ جبکہ $r=3$
V کی قیمت معلوم کریں جبکہ $r=7$

حل: چونکہ V اور r کے مکعب میں تغیر راست ہے

لہٰذا
$$V \propto r^3$$
$$V = kr^3 \quad \text{(i)}$$
(جبکہ k تغیر کا مستقل ہے)

مساوات (i) میں $r=3$ اور $V=\frac{792}{7}$ رکھنے سے

ہمیں ملا
$$\frac{792}{7} = k(3)^3 \Rightarrow k = \frac{792}{7\times 27} = \frac{88}{21}$$

پس
$$V = \frac{88}{21}r^3 \quad \cdots \text{(ii)}$$

مساوات (ii) میں $r=7$ رکھنے سے

ہمیں ملا
$$V = \frac{88}{21}(7)^3 = \frac{4312}{3}$$

تغیر معکوس (Inverse Variation):

اگر دو متغیرات (مقداروں) میں اس طرح تعلق ہے ایک مقدار میں اضافہ دوسری مقدار میں کمی کا باعث بنے اور اس کا الٹ تو مقداروں (متغیرات) کے دوسرے کے تغیر معکوس ہوتے ہیں۔ اگر y اور x میں تغیر معکوس ہو تو ہم یوں کہتے ہیں۔

$$y \propto \frac{1}{x} \quad \text{یا} \quad y = \frac{k}{x} \quad \text{جبکہ} \quad k \neq 0 \quad \text{(تغیر کا مستقل)}$$
$$\Rightarrow yx = k$$

مثال 1: اگر y اور x میں تغیر معکوس ہے اور $y=7$ جبکہ $x=2$ تو y کی قیمت معلوم کریں اگر $x=126$

حل: یہاں y اور x میں تغیر معکوس ہے

یعنی
$$y \propto \frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow y = k\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{k}{x}$$
$$\Rightarrow k = xy \quad \ldots \text{(i)}$$

مساوات (i) میں $y=7$ اور $x=2$ رکھنے سے

ہمیں ملا
$$k = (2)(7) = 14$$
$$\Rightarrow xy = 14 \quad \ldots \text{(ii)}$$

مساوات (ii) میں $x=126$ رکھنے سے

ہمیں ملا
$$(126)y = 14$$
$$y = \frac{14}{126}$$
$$y = \frac{1}{9}$$

مثال 2: اگر y اور x کے معکب میں تغیر معکوس ہے اور $y=27$ اور $x=8$ تو x معلوم کریں جبکہ $y=36$

حل: یہاں y اور $\sqrt[3]{x}$ میں تغیر معکوس ہے

یعنی
$$y \propto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

یا
$$y = \frac{k}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y\left(\sqrt[3]{x}\right) = k \quad \ldots \text{(i)}$$

مساوات (i) میں $x=8$ اور $y=27$ رکھنے سے

ہمیں ملا
$$k = (27)(\sqrt[3]{8}) = 54$$

اب مساوات (i) میں $k=54$ رکھنے سے

ہمیں ملا
$$\left(y\sqrt[3]{x}\right) = 54 \ldots \text{(ii)}$$

اب مساوات (ii) میں $y=36$ رکھنے سے

ہمیں ملا
$$(36)\left(\sqrt[3]{x}\right) = 54$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{54}{36} = \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow x = \frac{27}{8}$$

مشق 18.2

1. اگر y اور x میں تغیر راست ہے اور $y=10$ جبکہ $x=3$ تو معلوم کریں
(i) x کی صورت میں y (ii) y جبکہ $x=6$ (iii) x جبکہ $y=15$
2. اگر $V \propto T$ اور $V=15$ جبکہ $T=24$ تو معلوم کریں
(i) V اور T منسلک کرنے والی مساوات (ii) $T=30$ (iii) $V=10$
3. اگر $u \propto \sqrt[3]{v}$ اور $u=4$ جب $v=64$ تو u کی قیمت معلوم کریں جبکہ $v=216$ اور v کی قیمت جبکہ $u=5$
4. اگر F اور m^3 میں تغیر راست ہے جب $m=3$ اور $F=81$ تو F معلوم کریں جبکہ $m=5$
5. اگر y اور x میں تغیر معکوس ہے جب $y=10$ اور $x=3$ تو y معلوم کریں جبکہ $x=10$
6. گیس کا حجم V اور دباؤ P کے جذر ایمربع میں تغیر معکوس ہے اگر $V=12$ جبکہ $P=9$ معلوم کریں جبکہ $V=4$
7. اگر $F \propto \frac{1}{r^2}$ اور $F=8$ جب $r=2$ تو معلوم کریں
(i) F جبکہ $r=5$ (ii) r جبکہ $F=24$
8. x کے جذر المکعب اور y کے جذر المربع میں تغیر معکوس ہے اگر $x=8$ جب $y=3$ معلوم کریں جب $y=\frac{3}{2}$
9. دو اجسام کے درمیان قوت F اور ان مراکز کے درمیان فاصلہ d کے مربعے میں تغیر معکوس ہے۔ اگر $F=2$ اور $d=3$ تو d معلوم کریں جب $F=72$
10. اگر y اور $(x-5)$ میں تغیر معکوس ہے جب کہ $y=6$ اور $x=8$ تو y معلوم کریں جب $x=10$

18.1(ii) تیسرا، چوتھا تناسب کے متناسب اور مسلسل تناسب میں وسطی متناسب معلوم کرنا۔

ہم تناسب سے پہلے ہی سے واقف ہیں کہ اگر a، b، c اور d تناسب میں ہیں تو $a:b::c:d$
لہٰذا a، b، c اور d بالترتیب پہلا، دوسرا، تیسرا اور چوتھا تناسب کہلاتے ہیں

(a) تیسرا متناسب (Third Proportional):

مثال 1:
اگر 4، 7 اور 14 تناسب میں پہلا، دوسرا اور چوتھا متناسب ہیں تو اس کا تیسرا متناسب معلوم کریں

حل: فرض کریں x تیسرا متناسب ہے
تو

$$4:7::x:14$$
$$\Rightarrow 7x=56$$
$$\Rightarrow x=8$$

مثال 2:
اگر $(a-b)$، (a^2+ab+b^2) اور (a^3-b^3) بالترتیب پہلا، دوسرا اور چوتھا متناسب ہیں تو تیسرا متناسب معلوم کریں

حل: فرض کریں x تیسرا متناسب ہے
تو

$$(a-b):(a^2+ab+b^2)::x:a^3-b^3$$
$$\Rightarrow (a^2+ab+b^2)x=(a-b)(a^3-b^3)$$
$$(a^2+ab+b^2)\,x=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$$
$$\Rightarrow x=\frac{(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)}$$
$$\Rightarrow x=(a-b)^2$$

(b) چوتھا متناسب (Fourth Proportional):

مثال 1: چوتھا متناسب معلوم کریں اگر پہلے تین متناسب a^3+b^3، $a-b$، a^2-ab+b^2 ہیں

حل: فرض کریں چوتھا متناسب x ہے تو

$$a^3+b^3 : a-b :: (a^2-ab+b^2) : x$$

یعنی

$$x\,(a^3+b^3) = (a-b)(a^2-ab+b^2)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(a-b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a-b}{a+b}$$

مسلسل متناسب (Continued Proportion) اور وسطی متناسب (Mean Proportional):

مقداریں a، b، c مسلسل تناسب کہلاتی ہیں اگر

$$a:b=b:c$$

یا

$$a:b::b:c$$

$$\Rightarrow b^2=ac$$

لہذا b وسطی متناسب کہلاتا ہے

مثال 1: x^2-y^2 اور $\frac{x-y}{x+y}$ کا وسطی متناسب معلوم کریں

حل: فرض کریں z وسطی متناسب ہے تو

$$x^2-y^2 : z :: z : \frac{x-y}{x+y}$$

یعنی

$$z^2 = (x^2-y^2)\frac{(x-y)}{x+y} = (x-y)^2$$

$$\Rightarrow \quad z = x-y$$

مثال 2: a کی قیمت معلوم کریں اگر 7، $a-3$ اور 28 مسلسل تناسب میں ہیں۔

حل: چونکہ 7، $a-3$ اور 28 مسلسل تناسب میں ہیں۔

پس

$$7:a-3::a-3:28$$

یعنی

$$(a-3)^2 = 7\times 28$$

$$\Rightarrow \quad (a-3)^2 = 196$$

$$\Rightarrow \quad a-3 = 14$$

$$\Rightarrow \quad a = 14+3$$

$$\Rightarrow \quad a = 17$$

مشق 18.3

1. تیسرا متناسب معلوم کریں اگر پہلا، دوسرا اور چوتھا متناسب ہیں

(i) 6، 18 اور 54 (ii) a^2-b^2، $a+b$ اور $a-b$

(iii) $(x+y)^2$، x^3+y^3 اور $x+y$ (iv) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$، $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$ اور $a+b$

2. چوتھا متناسب معلوم کریں

(i) 8, 4, 2 (ii) $a^3+b^3,\ a^2-b^2,\ a^2-ab+b^2$

(iii) $a^2-8a+12,\ a-2,\ 2a^3-12a^2$

(iv) $(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2), a^3+b^3, a^3-b^3$

3. وسطی متناسب معلوم کریں

(i) 8, 18 (ii) $5ab^2, 20a^3b^2$

(iii) $a^4-b^4, \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ (iv) $a^3-b^3, \dfrac{a-b}{a^2+ab+b^2}$

4. مندرجہ ذیل مسلسل تناسب میں x کی قیمت معلوم کریں

(i) $45, x, 5$ (ii) $16, x, 9$

(iii) $12, 3x\text{-}6, 27$ (iv) $7, x\text{-}3, 112$

18.2 تناسب سے متعلق مسئلے

18.2.1 عکس نسبت، ابدال نسبت، ترکیب نسبت، تفصیل نسبت کے مسئلوں کو حل کرنے کے لیے لاگو کریں۔

(i) مسئلہ عکس نسبت (Theorem of invertendo):

اگر $a:b=c:d$ تو $b:a=d:c$

اوپر دیا گیا بیان مسئلہ عکس نسبت کہلاتا ہے

ثبوت: چونکہ $a:b=c:d$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$ (دونوں اطراف معکوس لینے سے)

یعنی $b:a=d:c$ پس ثابت ہوا

مثلاً: (i) اگر $2:3=4:6$ تو مسئلہ عکس نسبت کی رو سے

$3:2=6:4$

(ii) اگر $4p:5q=2r:5s$ تو مسئلہ عکس نسبت کی رو سے

$5q:4p=5s:2r$

(ii) مسئلہ ابدال نسبت (Theorem of Alternando):

اگر $a:b=c:d$ تو $a:c=b:d$

یہاں مسئلہ ابدال نسبت کہلاتا ہے

ثبوت: چونکہ $a:b=c:d$

یا $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow \quad ad=bc$$

دونوں اطراف cd سے تقسیم کرنے سے ہمیں ملا

ہمیں ملا $$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

یعنی $a:c=b:d$

مثال:

(i) اگر $2:5=6:15$ تو مسئلہ ابدال نسبت کی رو سے

$2:6=5:15$

(ii) اگر $4p-1:2-3q=5+2r:2s+1$ تو مسئلہ ابدال نسبت کی رو سے

$4p-1:5+2r=2-3q:2s+1$

(iii) مسئلہ ترکیب نسبت (Theorem of Componendo):

اگر $a:b=c:d$ تو مسئلہ ترکیب نسبت کے مطابق

(i) $a+b:b=c+d:d$ (ii) $a:a+b=c:c+d$

ثبوت: (i) چونکہ $a:b=c:d$

تو $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

دونوں اطراف 1 جمع کرنے سے

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

یا $a+b:b=c+d:d$

پس ثابت ہوا

ثبوت: (ii) چونکہ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تو $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (مسئلہ عکس نسبت کی رو سے)

یا دونوں اطراف 1 جمع کرنے سے

$$\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1$$

$$\frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+a}=\frac{c}{c+d}$$

یا $a:a+b=c:c+d$

پس ثابت ہوا

مثال: اگر $p+2:q=r:s-3$ تو مسئلہ ترکیب نسبت (i) کی رو سے

$p+2+q:q=r+s-3:s-3$

اس ہی طرح، مسئلہ ترکیب نسبت (ii) کی رو سے

$p+2:p+2+q=r:r+s-3$

(iv) مسئلہ تفصیل نسبت (Theorem of Dividendo):

اگر $a:b=c:d$ تو مسئلہ تفصیل نسبت کی رو سے

(i) $a-b:b=c-d:d$ (ii) $a:a-b=c:c-d$

ثبوت:(i) چونکہ $a:b=c:d$

یا $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

دونوں اطراف 1 تفریق کرنے سے

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

یا $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

یا $a-b:b=c-d:d$

پس ثابت ہوا

ثبوت:(ii) چونکہ $a:b=c:d$

لہٰذا $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

(مسئلہ عکس نسبت کی رو سے)

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

دونوں اطراف 1 تفریق کرنے سے

$$\frac{b}{a}-1=\frac{d}{c}-1$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}$$

(مسئلہ عکس نسبت کی رو سے)

$$\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$$

یا $a:b-a=c:d-c$

پس ثابت ہوا

مثال: اگر $m+5:n-3=4p+7:3q+2$ تو ثابت کریں کہ
$m-n+8:n-3=4p-3q+5:3q+2$

حل: چونکہ $m+5:n-3=4p+7:3q+2$

$$\Rightarrow \frac{m+5}{n-3}=\frac{4p+7}{3q+2}$$

تو مسئلہ تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{(m+5)-(n-3)}{n-3}=\frac{(4p+7)-(3q+2)}{3q+2}$$

$$\Rightarrow \frac{m-n+8}{n-3}=\frac{4p-3q+5}{3q+2}$$

یعنی $m-n+8:n-3=4p-3q+5:3q+2$

پس ثابت ہوا

(v) ترکیب و تفصیل نسبت (Theorem of componendo and dividendo):

اگر $a:b=c:d$ تو مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کے مطابق

(i) $a+b:a-b=c+d:c-d$

(ii) $a-b:a+b=c-d:c+d$

مثال 1: اگر $m:n=p:q$ تو ثابت کریں کہ $3m-2n:3m+2n=3p-2q:3p+2q$

حل: چونکہ $m:n=p:q$

لہٰذا $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$

دونوں اطراف $\frac{3}{2}$ سے ضرب دینے سے

$$\frac{3m}{2n}=\frac{3p}{2q}$$

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت (ii) کی رو سے

$$\frac{3m-2n}{3m+2n}=\frac{3p-2q}{3p+2q}$$

یا $3m-2n:3m+2n=3p-2q:3p+2q$

پس ثابت ہوا۔

مثال 2: اگر $3p+4q:3p-4q=3r+4s:3r-4s$ تو ثابت کریں کہ $p:q=r:s$

حل: چونکہ $3p+4q:3p-4q=3r+4s:3r-4s$

بذریعہ مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت (i)

$$\therefore \quad \frac{(3p+4q)+(3p-4q)}{(3p+4q)-(3p-4q)}=\frac{(3r+4s)+3r-4s}{(3r+4s)-(3r-4s)}$$

$$\frac{3p+4q+3p-4q}{3p+4q-3p+4q}=\frac{3r+4s+3r-4s}{3r+4s-3r+4s}$$

$$\frac{6p}{8q}=\frac{6r}{8s}$$ (دونوں اطراف $\frac{6}{8}$ کاٹنے سے)

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{q}=\frac{r}{s}$$

یا $p:q=r:s$

پس ثابت ہوا۔

مثال 3: بذریعہ مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت x کی قیمت معلوم کریں

اگر $$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}=\frac{2}{5}$$

حل: ہمارے پاس: $$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}=\frac{2}{5}$$

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6})+(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6})}{(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6})-(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6})}=\frac{2+5}{2-5}$$

$$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}+\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}-\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}=\frac{7}{-3}$$

$$\frac{2\sqrt{x+6}}{-2\sqrt{x-6}}=\frac{7}{-3} \Rightarrow \frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-6}}=\frac{7}{3}$$

دونوں اطراف مربع لینے سے

$$\frac{x+6}{x-6}=\frac{49}{9}$$

$$9x+54=49x-294$$

$$9x-49x=-294-54$$

$$-40x=-348$$

$$x=\frac{348}{40}=\frac{87}{10}$$

مثال 4: بذریعہ مسئلہ ترکیب و تفصیل مساوات $\frac{(x+3)^2+(x-1)^2}{(x+3)^2-(x-1)^2}=\frac{5}{4}$ کو حل کریں

حل: ہمارے پاس: $\frac{(x+3)^2+(x-1)^2}{(x+3)^2-(x-1)^2}=\frac{5}{4}$

مسئلہ ترکیب و تفصیل کی رو سے

$$\frac{(x+3)^2+(x-1)^2+(x+3)^2-(x-1)^2}{(x+3)^2+(x-1)^2-(x+3)^2+(x-1)^2}=\frac{5+4}{5-4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2(x+3)^2}{2(x-1)^2}=\frac{9}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2=9$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+3}{x-1}=\pm 3$$

$\frac{x+3}{x-1}=3$ یا $\frac{x+3}{x-1}=-3$

$x+3=3x-3$ $x+3=-3x+3$

$-2x=-6$ $4x=0$

$x=3$ $x=0$

اس لیے حل سیٹ $\{0,3\}$ ہے

مثال 5: ثابت کریں کہ $a:b=c:d$ اگر $\frac{ac^2-bd^2}{ac^2+bd^2}:\frac{c^3-d^3}{c^3+d^3}$

حل:

چونکہ $\frac{ac^2-bd^2}{ac^2+bd^2}=\frac{c^3-d^3}{c^3+d^3}$

مسئلہ ترکیب و تفصیل کی رو سے

$$\frac{ac^2-bd^2+ac^2+bd^2}{ac^2-bd^2-ac^2-bd^2}=\frac{c^3-d^3+c^3+d^3}{c^3-d^3-c^3-d^3}$$

$$\frac{2ac^2}{-2bd^2}=\frac{2c^3}{-2d^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

یا $a:b=c:d$

پس ثابت ہوا۔

مشق 18.4

1. اگر $x:y=z:w$ تو ثابت کریں

(i) $\dfrac{4x+3y}{4x-3y}=\dfrac{4z+3w}{4z-3w}$ (ii) $\dfrac{5x-3y}{5x+3y}=\dfrac{5z-3w}{5z+3w}$

(iii) $\dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3}=\dfrac{z^3+w^3}{z^3-w^3}$ (iv) $\dfrac{3x+2y}{3x-2y}=\dfrac{3z+2w}{3z-2w}$

(v) $\dfrac{2x+3y+2z+3w}{2x+3y-2z-3w}=\dfrac{2x-3y+2z-3w}{2x-3y-2z+3w}$

2. ثابت کہ اگر $a:b=c:d$

(i) $a^2-b^2:a^2+b^2=ac-bd:ac+bd$

(ii) $\dfrac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\dfrac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$

3. مندرجہ ذیل مساوات کو بذریعہ مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت حل کریں

(i) $\dfrac{(x+3)^2-(x-5)^2}{(x+3)^2+(x-5)^2}=\dfrac{4}{5}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{2}$

(iii) $\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}}=\dfrac{1}{10}$ (iv) $\dfrac{(x+3)^2+(x-1)^2}{(x+3)^2-(x-1)^2}=\dfrac{5}{4}$

18.3 مشترکہ تغیر (Joint Variation):

18.3(i) مشترکہ تغیر کی تعریف

مشترکہ تغیر ایک تغیر یا ایک سے زائد تغیرات پر منحصر ہوتا ہے۔ مشترکہ تغیریت واقع ہوتا ہے جب ایک تغیر دوسرے کئی متغیرات کے ساتھ تغیر راست یا تغیر معکوس ہوتا ہے۔

مثلاً: (i) اگر x اور y ، z دونوں میں تغیر راست ہو تو ہمارے پاس $x \propto yz$
$\Rightarrow x = kyz$

(ii) اگر x اور y میں تغیر راست اور z میں تغیر معکوس ہے تو ہمارے پاس $x \propto \dfrac{y}{z} \Rightarrow x=\dfrac{ky}{z}$

18.3 (ii) مشترکہ تغیر سے متعلق مسائل حل کرنا:

مثال 1: اگر y اور xz^2 تغیر راست ہے اور $y=4$ جب $x=6$ اور $z=3$ ۔ y کی قیمت معلوم کریں جب $x=-81$ اور $z=5$

$$y \propto xz^2$$

$$y = k\,xz^2 \qquad \text{(i)}$$

$y=4$ $x=6$ اور $z=3$ مساوات (i) میں رکھنے سے

$$4=k\,(6)\,(3)^2 \Rightarrow k=\frac{4}{54}=\frac{2}{27}$$

$k = \frac{2}{27}$ مساوات (i) میں رکھنے سے

ہمیں ملا
$$y = \frac{2}{27} x z^2 \quad ...(ii)$$

اب $x = -81$ اور $z = 5$ مساوات (ii) میں رکھنے سے
$$y = \frac{2}{27}(-81)(5)^2 = 2(-3)(25) = -150$$

مثال 2: اگر s اور v^3 میں تغیر راست اور $\sqrt{t}$ اور u میں تغیر معکوس ہو اور s = 16 جب v = 4، t = 9 اور u = 24
s کی قیمت معلوم کریں جب t = 36، u = 25 اور v = 5

حل: چونکہ s اور v^3 میں تغیر راست اور $\sqrt{t}$ اور u میں تغیر معکوس ہے۔

$$s \propto \frac{v^3}{u\sqrt{t}} \Rightarrow s = k\frac{v^3}{u\sqrt{t}} \quad ...(i)$$

s = 16، t = 9، v = 4 اور u = 24 مساوات (i) میں رکھنے سے

$$16 = \frac{k(4)^3}{\sqrt{9}(24)}$$

$$16 = \frac{k(64)}{72} \Rightarrow k = 16 \times \frac{72}{64} = 18$$

k = 18 مساوات (ii) میں رکھنے سے

$$s = \frac{18\,v^3}{\sqrt{t}} \quad ...(ii)$$

u = 25، t = 36 اور v = 5 مساوات (ii) رکھنے سے

ہمیں ملا
$$s = \frac{18\,(5)^3}{\sqrt{36}\,(25)} = \frac{18 \times 125}{6 \times 25} = 15$$

مشق 18.5

1. اگر y کا x^2 اور z کے درمیان تغیر راست ہے اور y = 6 جب $x = 4$ ، $z = 9$ بطور x اور z کا تفاعل لکھیں اور y کی قیمت معلوم کریں جب $x = -8$ اور $z = 12$
2. اگر y کا x اور u^2 کے درمیان تغیر راست ہے اور v اور t کے درمیان تغیر معکوس ہے۔ y=40 جب x=8 ، u=5 ، v =3 اور t = 2۔ x u v اور t کی صورت میں y معلوم کریں۔ y کی قیمت بھی معلوم کریں جب $x = -2$، u=4، v =3
3. اگر w اور u^2 کے درمیان تغیر راست اور v کے جزر المکعب کے درمیان تغیر معکوس ہے اور w = 216 جب u = 6 اور v=27۔ w کی قیمت معلوم کریں جب u =10 اور v =125
4. اگر سادہ پنڈولم کا ٹائم پریڈ T اور اُس کی لمبائی L کے جذر المربع میں تغیر راست اور ثقلی اسراع 'g' کے جذر المربع میں تغیر معکوس ہے۔
اگر T=2 سیکنڈ، L=100 سینٹی میٹر اور g=9.8 میٹر فی سیکنڈ تو سادہ پنڈولم کا ٹائم پریڈ T معلوم کریں جب L=200 میٹر اور ایک مخصوص بلندی پر g=7.6 ہے۔
5. ایک خاص گیس کا حجم V اور درجہ حرارت T میں تغیر راست اور دباؤ "P" کے جذر المربع میں تغیر معکوس ہے۔ اگر V=100، T =30 اور P =64 ۔ V معلوم کریں جب T=60 اور P=81

18.4 k- طریقہ (K - Method):

جب دو یا دو سے زیادہ نسبتیں برابر ہوں تو ایک واحد علامت "k" کو متعارف کرتے ہوئے کئی مفید تناسب ثابت کئے جاسکتے ہیں۔ ان مساوی نسبتوں کو "k" سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہر نسبت کے لئے علامت k استعمال کرنے کے اس طریقے کو k طریقہ کہتے ہیں k طریقہ بہت سے مسائل حل کرنے میں بہت مفید ہے۔

18.4 (i) k- طریقہ استعمال کرتے ہوئے تناسب پر مبنی مشترکہ مساوات ثابت کرنا:

اگر $a:b::c:d$ ایک تناسب ہے

تو بذریعہ k- طریقہ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

$$\Rightarrow \frac{c}{d} = k \text{ اور } \frac{a}{b} = k$$

$$c = d\,k \;...\;\text{(ii)} \quad \text{اور} \quad a = b\,k \;...\;\text{(i)}$$

ان مساوات کے ذریعے ہم تناسب سے متعلق مسائل حل کرسکتے ہیں

مثال 1: اگر $a:b::c:d$ تو ثابت کریں $\dfrac{8a-5b}{8a+5b} = \dfrac{8c-5d}{8c+5d}$

حل: چونکہ $a : b = c : d$

فرض کریں $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$

تو $a = bk$ ، $c = dk$

اب

$$\text{L.H.S} = \frac{8a-5b}{8a+5b} = \frac{8bk-5b}{8bk+5b} = \frac{b(8k-5)}{b(8k+5)} = \frac{8k-5}{8k+5}$$

$$\text{R.H.S} = \frac{8c-5d}{8c+5d} = \frac{8dk-5d}{8dk+5d} = \frac{d(8k-5)}{d(8k+5)} = \frac{8k-5}{8k+5}$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$$\therefore \frac{8a-5b}{8a+5b} = \frac{8c-5d}{8c+5d}$$

پس ثابت ہوا

مثال 2: اگر $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$ تو ثابت کریں کہ $\dfrac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \dfrac{ace}{bdf}$

حل: ہمارے پاس $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$

فرض کریں $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} = k$

تو $\dfrac{a}{b} = k$ ، $\dfrac{c}{d} = k$ ، $\dfrac{e}{f} = k$

$$\Rightarrow a = bk \quad \Rightarrow c = dk \text{ اور } \Rightarrow e = fk$$

اب

$$\text{L.H.S} = \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{(bk+dk+fk)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{[k(b+d+f)]^3}{(b+d+f)^3} = k^3$$

$$\text{R.H.S} = \frac{ace}{bdf} = \frac{(bk)(dk)(fk)}{bdf} = \frac{k^3bdf}{bdf} = k^3$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$$\therefore \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{ace}{bdf}$$

پس ثابت ہوا

مثال 3:

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ تو ثابت کریں کہ $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab+cd+ef)^2$

حل: فرض کریں $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

$\Rightarrow a = bk$ ، $c = dk$ ، $e = fk$

$$\begin{aligned}\text{L.H.S} &= (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)\\ &= (b^2k^2+d^2k^2+f^2k^2)(b^2+d^2+f^2)\\ &= k^2(b^2+d^2+f^2)(b^2+d^2+f^2)\\ &= k^2(b^2+d^2+f^2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{R.H.S} &= (ab+cd+ef)^2\\ &= \left[(bk)b+(dk)d+(fk)f\right]^2\\ &= \left[kb^2+kd^2+kf^2\right]^2\\ &= \left[k(b^2+d^2+f^2)\right]^2\\ &= k^2(b^2+d^2+f^2)^2\end{aligned}$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$$\therefore (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab+cd+ef)^2$$

پس ثابت ہوا

مشق 18.6

1. اگر $p:q = r:s$ تو ثابت کریں

(i) $\frac{8p-3q}{8p+3q} = \frac{8r-3s}{8r+3s}$ (ii) $3\sqrt{\frac{p^3+r^3}{q^3+s^3}} = \frac{p}{q}$

(iii) $(p^2+q^2):\frac{p^3}{p+q} = (r^2+s^2):\frac{r^3}{r+s}$ (iv) $p^5+r^5:q^5+s^5 = p^3r^2:q^3s^2$

(v) $\frac{p-q}{p}:\frac{q}{p+q} = \frac{r-s}{r}:\frac{s}{r+s}$

2. اگر $a:b = c:d = e:f$ تو ثابت کریں

(i) $\frac{a^4b^2+a^2e^2-e^4f}{b^6+b^2f^2-f^5} = \frac{a^4}{b^4}$ (ii) $\frac{a^2b+c^2d+e^2f}{ab^2+cd^2+ef^2} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$

(iii) $\frac{ac}{bd}+\frac{ce}{df}+\frac{ea}{fb} = \frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{d^2}+\frac{e^2}{f^2}$

(ii) 18.4 تغیرات پر مبنی روزمرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1: جسم کی مخفی توانائی کا جسم کی کمیت اور اونچی 'h' میں شتر کہ تغیر ہے اگر مخفی توانائی 1960 جول جب کہ m=2 کلو گرام اور اونچائی h=100 جسم کا وزن 5 کلو گرام اور اونچائی 300 میٹر ہے تو جسم کی مخفی توانائی معلوم کریں۔

حل:

$p \propto mh$

$p = kmh \ldots (i)$ (جبکہ k متقل ہے)

$p = 1960$ اور $h = 100, m = 2$ مساوات (i) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $1960 = k\,(2)\,(100)$

$\Rightarrow k = \frac{1960}{200} = 9.8$

K کی قیمت مساوات (i) میں رکھنے سے

$p = 9.8mh \ldots (ii)$

اب اور مساوات (ii) میں $m=5$ ء $h = 300$ رکھنے سے

ہمیں ملا $p = 9.8\,(5)\,(300)$

$= 14700$ جول

مثال 2: ہک کے قانون کے مطابق اسپرینگ کو کھینچنے والی قوت اور کل طبائی میں تغیر راست ہے جب کہ F=64 پاؤنڈ S=3.2 انچ

(i) S معلوم کریں جب $F = 100$ lb

(ii) F جب $S = 0.4$ انچ

حل: چونکہ $F \propto S$

$\Rightarrow F=kS \ldots (i)$

F=64 اور S=3.2 مساوات (i) میں میں رکھنے سے

$64=3.2\,k$

$\Rightarrow k = \frac{64}{3.2} = 20$

K=20 مساوات (i) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $F=20\,S \ldots (ii)$

(i) F=100 مساوات (ii) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $100=20\,S$

$\Rightarrow S=5$ انچ

(ii) S=0.4 مساوات (ii) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $F=20\,(0.4)$

$= 8$ پاؤنڈ

مثال 3: مزدوری c اور مزدوروں کی تعداد "n" اور اوسط دنوں کی تعداد d میں مشترکہ تغیر ہے اگر 200 مزدوروں کی 10 دنوں کی مزدوری 450,000 روپے ہے تو 300 مزدوروں کی 16 دنوں کی مزدوری معلوم کریں

حل: مزدوری کا مزدوروں کی تعداد اور دنوں میں تغیر راست ہے

$C \propto nd$

$C = knd \qquad (i)$

$C = 450{,}000, n = 200$ اور $d = 10$ مساوات (i) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $450{,}000 = k(200)(10)$

$\Rightarrow k = \frac{450{,}000}{2000} = 225$

$k = 225$ مساوات (i) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $C = 225 \cdot nd \quad \cdots (ii)$

$n = 300$ اور $d = 16$ مساوات (ii) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $C = 225 \times 300 \times 16$

$C = 1080000$

پس 300 مزدوروں کی 16 دنوں کی مزدوری 1080000 روپے ہے

مثال 4: ہاسٹل کے اخراجات طالب علموں کی تعداد کے مطابق کبھی ایک جیسے اور کبھی مختلف ہوتے ہیں۔ جب طالب علم 140 ہیں تو 200 طالب علموں کے لیئے 26500 روپے ہیں۔ 300 طالب علموں کے لیئے اخراجات معلوم کریں

حل: فرض کریں ایک جیسے اخراجات کو "C" اور مختلف اخراجات "Q" کو سے ظاہر کیا جاتا ہے x طلباء کی تعداد اور کل اخراجات کو P سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

چونکہ اخراجات اور طلباء کی تعداد میں تغیر راست ہے

$\because \quad Q \propto x$

$\therefore \quad Q = nx$ (n ایک متقل ہے)

$P = C + Q$

$P = C + nx$

دی گئی شرط کے مطابق

$19300 = C + 140n \quad ...(i)$ ؛ $26500 = C + 200n \quad ...(ii)$

$P = C + 300n \quad ...(iii)$

مساوات (i) اور (ii) سے ہمیں ملا: $C = 2500$ اور $n = 120$

اب مساوات (iii) ہوئی۔

$P = 2500 + 300(120) = 38500$

300 طالب علموں کے کل اخراجات 38500 روپے ہیں

مشق 18.7

1. تار میں کرنٹ اور پوٹینشل ڈفرنس میں تغیر راست اور مزاحمت میں تغیر معکوس ہے۔ اگر I=6amp جب V=220 volt اور R=5ohm،I معلوم کریں جب V=180 volt اور R=8ohm ہے۔
2. روشنی کی شدت جو کہ فٹ کینڈلز میں ناپی جاتی ہے۔ روشنی کے منبع سے فاصلے کے مربع کے ساتھ تغیر معکوس ہے۔ فرض کریں کہ ایک اُنچے بلب کی شدت 3 میٹر کے فاصلے پر 0.08 فٹ کینڈلز ہے۔ 8 میٹر پر شدت کی سطح معلوم کریں۔
3. مستطیل بیم کی طاقت "S" جو کہ تغیر راست ہے چوڑائی "b" اور گہرائی "d" کے مربع کے ساتھ۔ اگر بیم 9 سینٹی میٹر چوڑی اور 12 سینٹی میٹر گہری سپورٹ 1000 پاؤنڈ کے ساتھ۔ معلوم کریں کہ 12 سینٹی میٹر چوڑی اور 9 سینٹی میٹر گہرائی والی بیم کتنے وزن کو سہارا دے گی۔
4. مزدوروں کی مزدوری "c" اور مزدوروں کی تعداد "n" اور اوسط دونوں کی تعداد "d" میں مشترکہ تغیر ہے اگر 100 مزدوروں کی 15 دنوں کی مزدوری 9000 روپے ہے تو 300 مزدوروں کی 20 دنوں کی مزدوری معلوم کریں۔
5. نئی کار کی خریداری پر سیل ٹیکس اور کار کی قیمت میں تغیر راست ہے۔ اگر ایک نئی کار 2000000 روپے خریدی جاتی ہے تو سیل ٹیکس 40000 روپے ہے۔ اگر نئی کار کی قیمت 280000 روپے ہو تو کتنا سیل ٹیکس لیا جائے گا۔

اعادہ مشق 18

1. مندرجہ ذیل میں درست جواب کا انتخاب کریں

(i) تناسب $p:q::r:s$ میں p کہلاتا ہے

(a) تیسرا تناسب (b) وسطین (c) چوتھا تناسب (d) پہلا تناسب

(ii) نسبت $l : m$ میں l ______ کہلاتا ہے۔

(a) مقدم (b) موخر (c) تعلق (d) ان میں کوئی نہیں

(iii) نسبت $u : v$ میں v ______ کہلاتا ہے۔

(a) مقدم (b) موخر (c) تعلق (d) ان میں کوئی نہیں

(iv) اگر a، b، c مسلسل تناسب میں ہیں تو b ______ تناسب a اور c کے درمیان کہلاتا ہے۔

(a) پہلا (b) وسطین (c) تیسرا (d) ان میں سے کوئی نہیں

(v) a^2 اور b^2 کے درمیان وسطین ______ ہے۔

(a) $\sqrt{ab}$ (b) ab (c) $\frac{a}{b}$ (d) $-ab$

(vi) اگر $x+5 : x+7 = 5:7$ تو x ______ برابر ہے۔

(a) 2 (b) -1 (c) 0 (d) 1

(vii) اگر 1، 9، x اور 45 تناسب میں ہیں تو $x =$ ______

(a) 27 (b) $\frac{1}{5}$ (c) 5 (d) 405

(viii) اگر $p : q = r : 5$ تو $p : r = q : 5$ یہ ______ خاصیت کہلاتی ہے۔

(a) ترکیب نسبت (b) عکس نسبت
(c) تفصیل نسبت (d) ابدال نسبت

(ix) اگر $x : y = z : w$ تو ترتیب نسبت کے مطابق

(a) $\frac{x}{x+y} = \frac{z}{z+w}$ (b) $\frac{x}{x-y} = \frac{z}{z-w}$
(c) $\frac{x-y}{x+y} = \frac{z-w}{z+w}$ (d) $\frac{x-y}{y} = \frac{z-w}{w}$

(x) اگر $a : b = c : d$ تو پھر ابدال نسبت کے مطابق

(a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (b) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{c}$ (c) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (d) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

(xi) 3,5,12 چوتھا متناسب ______ ہے

(a) 20 (b) 15 (c) 60 (d) 36

(xii) اگر $2x$، $3y$ اور $6z$ مسلسل تناسب میں ہے تو ______

(a) $y^2 = 12xy$ (b) $9y^2 = xz$ (c) $9y^2 = 12xz$ (d) $3y^2 = 4xz$

(xiii) اگر $\frac{x}{y} = \frac{w}{z}$ تو تفصیل نسبت کے مطابق ہے

(a) $\frac{x-y}{y} = \frac{w-z}{z}$ (b) $\frac{x+y}{y} = \frac{w+z}{z}$
(c) $\frac{x}{x+y} = \frac{w}{w+z}$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

(xiv) قوت اور اسراع ______ ہیں

(a) تغیر راست (b) مشترکہ راست (c) تغیر معکوس (d) ان میں سے کوئی نہیں

(xv) اگر $a : 4 = 15 : 5$ تو $a =$ ______

(a) 20 (b) 15 (c) 12 (d) 10

2. نسبت معلوم کریں

(i) 100 میٹر اور 500 سنٹی میٹر (ii) 500 کلو گرام اور 300 گرام

3. مندرجہ ذیل میں x کی قیمت معلوم کریں

(i) $9:x-10=x+13:12$ (ii) $5:x-3=x+11:3$

4. y اور x میں تغیر راست ہے اور $y=25$ جب کہ $x=75$ تو y معلوم کریں جبکہ $x=144$

5. y اور x میں تغیر معکوس ہے اور $y=100$ جبکہ $x=\frac{1}{2}$ تو y معلوم کریں جب $x=4$

6. اگر $x:y=3:w$ تو ثابت کریں کہ $\frac{7x+5y}{7x-5y}=\frac{7z+5w}{7z+5w}$

7. مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کی مدد سے حل کریں

$$\frac{(x-3)(x-5)}{(x-7)(x-2)}=\frac{(x-6)(x-2)}{(x-1)(x-8)}$$

8. اگر x اور y میں تغیر راست اور z تغیر معکوس ہے۔ اگر $x=30$ جب کہ $y=15$ اور $z=2$ ۔ x معلوم کریں اگر $y=30$ جبکہ $z=12$

9. سرکٹ میں کرنٹ اور مزاحمت (پیائش اوہم ہیں) تغیر معکوس ہے اگر سرکٹ میں کرنٹ 40amp اور مزاحمت 10 ohms ہے تو کرنٹ معلوم کریں اگر اس کی مزاحمت 12 ohms ہے

خلاصہ:

- ایک ہی قسم کی دو مقداروں کا موازنہ نسبت کہلاتا ہے۔
- دو نسبتیں $a:b$ اور $c:d$ باہم برابر ہیں تو ہم لکھ سکتے ہیں $a:b::c:d$
- دو نسبتوں کی برابری تناسب کہلاتی ہے۔
- اگر دو متغیرات اس طرح مربوط ہوں کہ ایک کی مقدار میں اضافہ (یا کمی) دوسری مقدار میں باترتیب اضافہ (یا کمی) کا باعث بنے تو یہ تغیر راست کہلاتی ہیں۔
- اگر متغیرات اس طرح مربوط ہوں کہ ایک کی مقدار میں اضافہ (یا کمی) دوسری مقدار میں بالترتیب کمی (یا اضافہ) کا باعث بنے تو یہ تغیر معکوس کہلاتی ہیں۔
- تناسب سے متعلق مسئلے

(i) مسئلہ عکس نسبت: اگر $a:b=c:d$ تو $b:a=d:c$

(ii) مسئلہ ابدال نسبت: اگر $a:b=c:d$ تو $a:c=b:d$

(iii) مسئلہ ترکیب نسبت: اگر $a:b=c:d$ تو (a) $a+b:b=c+d:d$ (b) $a:a+b=c:c+d$

(iv) مسئلہ تفصیل نسبت: اگر $a:b=c:d$ تو (a) $a-b:b=c-d:d$ (b) $a:a-b=c:c-d$

(v) مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت: اگر $a:b=c:d$ تو $a+b:a-b=c+d:c-d$

- اگر ایک متغیر ایک یا ایک سے زائد متغیرات میں تغیر راست یا تغیر معکوس ہو تو یہ مشترکہ تغیر کہلاتا ہے۔

یونٹ نمبر 19

قالب اور مقطع

طلباء کے آموزشی حاصلات

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- حقیقی اندراج (ارکان) والے قابل مستطیل شکل کا عملی زندگی سے ربط قائم کر سکیں۔
- قالب کی قطاروں اور قالموں کے بارے میں جان سکیں
- قالب کے مرتبہ۔
- دو مساوی قالب۔
- قطاری قالب، کالمی قالب، مستطیلی قالب، مربعی قالب، صفری قالب، اکائی قالب، اسکیلر یا میزانیہ قالب، وتری قالب، قالب کا بدل، سمیٹرک قالب (3x3) اور اسکیو سمیٹرک قالب کی تعریف اور نشان دہی کر سکیں۔
- جاننا کہ دیئے گے قالموں کی جمع اور تفریق ممکن ہے۔
- قالب کی حقیقی عدد سے اسکیلر کی ضرب۔
- قالبوں کی جمع اور تفریق۔
- قانون مبادلہ اور قانون تلازم بلحاظ جمع کی تصدیق کرنا
- جمع ذاتی قالب۔
- قالب کا جمع المعکوس معلوم کرنا۔
- جاننا کہ آیا دیے گئے قالبوں کی ضرب ممکن ہے یا نہیں۔
- دو (یا تین) قالبوں کی ضرب۔
- قانون تلازم بلحاظ ضرب کی تصدیق۔
- قانون تقسیمی کی تصدیق۔
- مثال کی مدد سے ثابت کریں کہ قانون مبادلہ بلحاظ ضرب عموماً نہیں ہوتا ہے (جیسے AB≠BA)
- ضربی ذاتی قالب کا جاننا۔
- $(AB)^t = B^tA^t$ کی تصدیق۔
- مربعی قالب کا مقطع
- قالب کے مقطع کی قیمت معلوم کریں
- نادر اور غیر نادر قالب
- مائینرز اور کو فیکٹرس
- قالب کا مُتصل
- غیر نادر قالب A کا ضربی معکوس معلوم کریں اور تصدیق کریں کہ جب کہ I ضربی ذاتی قالب ہے
- بذریعہ طریقہ متصل، غیر نادر قالب کا ضربی معکوس معلوم کرنا
- دو متغیرات والی یک درجی ہمزاد مساواتوں کو عملی زندگی کے مسائل سے ربط پیدا کرتے ہوئے حل کریں
- معکوس قالب کا طریقہ
- کریمر (Crammer) کے اصول

19.1 قالبوں کا تعارف Introduction to Matrices

قالبوں کے تعلق ریاضی کی شاخ یک درجی الجبرا اس کا استعمال خاص طور پر بزنس, انجنیئرنگ, فزکس اور کمپیوٹر سائنس میں کیا جاتا ہے۔ قالب کا نظریہ مشہور ریاضی دان ارتھر کیلی (1821-1895) نے پیش کیا۔

19.1 (i) حقیقی اندراج (ارکان) والے قالب مستطیلی شکل کا عملی زندگی سے ربط

قالب عناصر کی مستطیلی شکل ہوتی ہے۔ عناصر کو علاقی طور پر اظہارے یا اعداد میں ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔ قالب کو عموماً انگریزی کے بڑے حروف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے اور ہر ارکان یا عنصر کو چھوٹے حرف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ قالب کے عناصر (ارکان) کو [ ] یا () میں بند کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ یا } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

a_{11}، a_{22}، اور a_{33} خاص وتر کے ارکان یا عناصر میں اور وتری عناصر (ارکان) کہلاتے ہیں۔

آئیں روز مرہ زندگی سے ایک مثال لیتے ہیں, مندرجہ ذیل جدول تین گھروں میں رہنے والوں کی تعداد, ٹیلی وژن اور کمپیوٹر ظاہر کئے گئے ہیں۔

	کمپیوٹر	ٹیلی وژن	رہائشی
گھر A	2	4	1
گھر B	2	6	3
گھر C	1	2	0

اوپر والا مواد قالبی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نوٹ: لفظ "قالب" کی جمع "قالبوں" ہے

19.1 (ii) قالب کی قطاروں اور کالموں کے بارے میں جاننا

قالب میں افقی خط میں اندراج قالب کی قطار کہلاتی ہے اور قالب میں عمودی خط میں اندراج قالب کا کالم کہلاتا ہے

مثال کے طور پر $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ دو افقی خطوط میں

اندراج ہے لہٰذا یہ دو قطاروں پر مشتمل ہے۔ اس کا چار عمودی خطوط میں اندراج ہے یہ چار کالموں پر مشتمل ہے

19.1. (iii) قالب کا مرتبہ

قالب کے مرتبہ کو اُس کی قطاروں اور کالموں کی تعداد سے وضاحت کی جاتی ہے۔

قالب کے مرتبہ کو mxn (m سے n پڑھتے ہیں) ظاہر کرتے ہیں۔ دیئے گئے قالب میں m قطاروں کی تعداد اور n کالموں کی تعداد ہے۔

مثال کے طور پر

اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 12 & 11 & 35 \end{bmatrix}$ تو A کا مرتبہ 2x3 ہے

19.1. (iv) دو مساوی قالب Equality of two matrices

دو قالب A اور B مساوی قالب کہلاتے ہیں اگر ان کی مرتبے ایک جیسے اور ان کی متناظرہ ارکان (عناصر) برابر ہوں علامتی طور پر ہم یوں A=B لکھتے ہیں۔

مثال کے طور پر

$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ مساوی قالب ہیں

$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ اور $Q=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ مساوی قالب نہیں ہیں

کیونکہ ان کا مرتبہ ایک جیسا نہیں ہے۔

19.2 قالبوں کی اقسام Types of Matrices

19.2. (i) قطاری قالب، کالمی قالب، مستطیلی قالب مربعی قالب، صفری قالب، اکائی قالب، اسکیر یا میزانیہ قالب، وتری قالب، قالب کا بدل، سمیٹرک قالب (3x3 تک) اور اسکیو سمیٹرک قالب کی تعریف اور نشان دہی کریں

قطاری قالب (Row Matrix):

کسی قالب میں صرف ایک قطار ہو وہ قطاری قالب کہلاتا ہے

مثال کے طور پر $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ قطاری قالب ہیں

کالمی قالب Column matrix

کسی قالب میں صرف ایک کالم ہو وہ کالمی قالب کہلاتا ہے

مثال کے طور پر

$\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ کالمی قالب ہیں

مستطیلی قالب Rectangular matrix

کسی قالب جس میں قطاروں کی تعداد اور کالموں کی تعداد برابر نہ ہو وہ مستطیلی قالب کہلاتا ہے جیسے $m \neq n$.

مثال کے طور پر

$A=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 1 & -7 & 10 \end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ مستطیلی قالب ہیں

مربعی قالب (Square Matrix)

قالب جس میں قطاروں کی تعداد اور کالموں کی تعداد برابر ہو وہ مربعی قالب کہلاتا ہے جیسے $m = n$ مثال کے طور پر

$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ p & q & r & 1 \\ m & n & o & 1 \end{bmatrix}$. مربعی قالب ہیں

صفری قالب Zero/null matrix

صفری قالب کا ہر عنصر صفر کے برابر ہو اِسے عموماً بڑا حرف تہجی 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ صفری قالب کی چند مثالیں مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ، } \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \text{ اور } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وتری قالب Diagonal matrix

مربعی قالب وتری قالب کہلاتا ہے اگر اس کے تمام عناصر صفر ہوں سوائے کم از کم ایک عنصر کے جو خاص وتر پر ہو

مثال کے طور پر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ اور } C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ وتری قالب ہیں

اسکیلر (میزانیہ قالب) ScalarMatrix

وتری قالب جس میں وتر کے تمام عناصر ایک جیسے ہوں اسکیلر (میزانیہ قالب) ہیں

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ اور } C = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$ اسکیلر (میزانیہ قالب) ہیں

اکائی قالب Identity/unit matrix

وتری قالب جس میں خاص وتر کا ہر عنصر ا ہو تا ہے

اسے عموماً بڑے حرف I سے ظاہر کرتے ہیں

مثال کے طور پر

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

قالب کا بدل Transpose of a matrix

کسی قالب کی قطاروں کو کالموں میں یا کالموں کو قطاروں میں تبدیل کرنے سے جو قالب حاصل ہو تا ہے وہ قالب کا بدل کہلاتا ہے اسے A^t سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}. \text{ اور } \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$ کا بدل ہے

سمیٹرک قالب Symmetric Mystic

مربعی قالب کو سمیٹرک قالب کہا جاتا ہے اگر اُس کا بدل خود وہ ہی ہو تا ہے یعنی $A^t = A$. جیسے

مثال کے طور پر

اگر $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 2 & 5 & -11 \\ 17 & -11 & 9 \end{bmatrix}$$ تو $$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 2 & 5 & -11 \\ 17 & -11 & 9 \end{bmatrix}.$$

جیسا کہ $A^t = A$. لہٰذا سمیٹرک قالب ہے

اسکیو سمیٹرک قالب Skew symmetric matrix

مربعی قالب کو اسکیو سمیٹرک قالب کہا جاتا ہے اگر اُس کا بدل خود وہ ہی ہو مگر منفی

جیسے مثال کے طور پر

$$\text{اگر} \quad A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 4\\ -3 & 0 & 7\\ -4 & -7 & 0\end{bmatrix} \quad \text{تو} \quad A^T=\begin{bmatrix}0 & -3 & -4\\ 3 & 0 & -7\\ 4 & 7 & 0\end{bmatrix}=-A$$

جیسا کہ $A^t=-A$ لہذا A اسکیو سمیٹرک قالب ہے

19.3 قالبوں کی جمع اور تفریق Addition and Subtraction of Matrices

19.3 (i) جاننا کہ آیا دیئے گئے قالبوں کی جمع اور تفریق ممکن ہے

اگر دو قالب A اور B ایک جیسے مراتب رکھتے ہیں تو ان کی جمع اور تفریق ممکن ہے

مثال کے طور پر

$$\begin{bmatrix}2 & 6\\ 5 & 9\end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$ کی جمع اور تفریق ممکن ہے

19.3(ii) قالب کی حقیقی عدد سے میزانیہ ضرب

کسی قالب کی حقیقی عدد سے ضرب میزانیہ ضرف کہلاتی ہے۔ میزانیہ ضرب میں قالب میں ہر اندراج (سفر) دیے ہوئے میزانیہ C سے ضرب بنتا ہے۔ اگر C ایک میزانیہ ہے اور A قالب ہے تو قالب کی میزانیہ ضرب کو CA سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر

$$\text{اگر} \quad A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 5\\ -1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix} \quad \text{اور} \quad c=-5 \quad \text{تو} \quad cA=-5\begin{pmatrix}0 & -1 & 5\\ -3 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$\text{یعنی} \quad cA=\begin{pmatrix}0 & 5 & -25\\ 15 & -10 & -5\\ -10 & 0 & 20\end{pmatrix}$$

19.3(iii) قالبوں کی جمع اور تفریق Add and Subtract Matrices

دو قالب A اور B جمع اور تفریق کئے جاتے ہیں دونوں قالبوں کے متناظرہ عناصر کی جمع اور تفریق کے ذریعے

مثال کے طور پر

$$\text{اگر} \quad A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix} \quad \text{اور} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 7\end{pmatrix} \quad \text{تو} \quad A+B=\begin{pmatrix}2+1 & 5+4\\ -1+3 & 3+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 2 & 10\end{pmatrix}$$

تفریق کے لیئے

$$\text{اگر} \quad P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & 6 & 1\\ 2 & 9 & 0\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}10 & 4 & 2\\ 2 & 7 & 1\\ 1 & 9- & 4\end{pmatrix} \quad \text{تو} \quad P-Q=\begin{pmatrix}1-10 & 0-4 & 2-2\\ 4-2 & 6-7 & 1-1\\ -2-1 & 9-9 & 0-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & -4 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ -3 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

19.3(iv) قانون مبادلہ اور قانون تلازم بلحاظ جمع تصدیق

قانون مبادلہ بلحاظ جمع

اگر A اور B قالبوں کے مراتب ایک ہی ہوں تو قانون مبادلہ بلحاظ جمع ہم یوں واضح کرتے ہیں

مثال: قانون مبادلہ بلحاظ جمع تصدیق کریں

اگر $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & 6 & 1\\ -2 & 9 & 0\end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix}10 & 4 & 2\\ 2 & 7 & 1\\ 1 & 9 & 4\end{pmatrix}$

یہاں
$$A+B=\begin{pmatrix}1+10 & 0+4 & 2+2\\ 4+2 & 6+7 & 1+1\\ -2+1 & 9+9 & 0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 4 & 4\\ 6 & 13 & 2\\ -1 & 18 & 4\end{pmatrix}$$

اب
$$B+A=\begin{pmatrix}10+1 & 4+0 & 2+2\\ 2+4 & 7+6 & 1+1\\ 1-2 & 9+9 & 4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 4 & 4\\ 6 & 13 & 2\\ -1 & 18 & 4\end{pmatrix}.$$

چونکہ $A+B=B+A$، اس لئے قانون مبادلہ بلحاظ جمع تصدیق ہوا

قانون تلازم بلحاظ جمع Associative law w.r.t addition

اگر A،B اور C ایک ہی مراتب کے تین قالب ہیں تو قانون تلازم بلحاظ جمع کی یوں وضاحت کی جاتی ہے

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

مثال: قانون تلازم بلحاظ جمع تصدیق کریں

اگر $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$، $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$ اور $C=\begin{pmatrix}9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}$

یہاں
$$(A+B)+C=\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}$$
$$(A+B)+C=\begin{pmatrix}15 & 18\\ 21 & 24\end{pmatrix}$$

اب
$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}14 & 16\\ 18 & 20\end{pmatrix}$$
$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}15 & 18\\ 21 & 24\end{pmatrix}$$

چونکہ $(A+B)+C=A+(B+C)$ اس لیئے قانون تلازم بلحاظ جمع تصدیق ہوا

19.3(v) جمع ذاتی قالب (Additive Identity)

اگر O اور A ایک ہی مراتب کے دو قالب ہیں اور جبکہ $A+O=A=O+A$. یہاں O صفری قالب ہے اور A کا جمع ذاتی قالب کہلاتا ہے

19.3 (vi) قالب جمعی معکوس معلوم کریں Find additive inverse of a matrix

اگر B اور A ایک ہی مراتب کے دو قالب ہیں اس طرح کی $A + B = O = B + A$ تو A اور B ایک دوسرے کے جمع معکوس ہیں۔ قالب A کے جمع معکوس کو A− سے ظاہر کرتے ہیں

مثال کے طور پر

اگر
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

تو
$$-A = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -4 & -6 & -1 \\ 2 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

19.4 قالبوں کی ضرب (2 سے 2 تک)

19.4 (i) جاننا کہ آیا دیئے گئے قالبوں کی ضرب ممکن ہے یا نہیں

دو قالب A اور B کی ضرب ممکن ہے اگر پہلے قالب کے قالموں کی تعداد دوسرے قالب کی قطاروں کی تعداد کے برابر ہو

مثال کے طور پر

$\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ کی ضرب ممکن ہے

19.4 (ii) دو (یا تین) قالبوں کی ضرب Multiply two (or three) matrices

اگر دو قالبوں کی ضرب ممکن ہے تو حاصل ضرب AB کا عنصر a_{ij} حاصل ہو گا بذریعہ ضرب A کی i ویں قطار اور B کی j واں قالم سے

مثال نمبر 1

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ تو AB معلوم کریں

حل

یہاں AB ممکن ہے کیونکہ A کے کالموں کی تعداد 2 ہے اور B کی قطاروں کی تعداد بھی 2 ہے

اب
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} 1(0)+2(6) & 1(-1)+2(7) \\ 3(0)+4(6) & 3(-1)+4(7) \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} 0+12 & -1+14 \\ 0+24 & -3+28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$

مثال 2

حاصل ضرب معلوم کریں

$$\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&5\\4&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&8\\5&1\end{pmatrix}$$

حل

$$\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&5\\4&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&8\\5&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4+12&5+0\\8+16&10+0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&8\\5&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}16&5\\24&10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&8\\5&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}96+25&128+5\\144+50&192+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}121&133\\194&202\end{pmatrix}$$

19.4 (iii) قانون تلازم بلحاظ ضرب کی تصدیق

فرض کریں B, Aاور Cتین قالب ہیں تو قانون تلازم بلحاظ ضرب یوں جاتی ہے .(AB)C=A(BC)

مثال نمبر 1 قانون تلازم بلحاظ ضرب تصدیق کریں جب کہ

$$C=\begin{pmatrix}-1&5\\1&2\end{pmatrix}\text{ اور } B=\begin{pmatrix}-2&3\\4&2\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}3&2\\-1&0\end{pmatrix}.$$

پڑتال

$$\text{L.H.S}=(AB)C$$

$$\left(\begin{bmatrix}3&2\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&3\\4&2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-1&5\\1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&13\\2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&5\\1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11&36\\-5&4\end{bmatrix}$$

$$\text{R.H.S}=A(BC)$$

$$\begin{bmatrix}3&2\\-1&0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-2&3\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&5\\1&2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2&2\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-4\\-2&24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11&36\\-5&4\end{bmatrix}$$

پس قانون تلازم بلحاظ ضرب تصدیق ہوا

19.4 (iv) قانون تقسیمی کی تصدیق Verify distributive laws

فرض کریں B، A اور C تین قالب ہیں تو قانون تقسیمی ہوتے ہیں

(بایاں قانون تقسیمی) A(B+C) = (AB)+(AC)

(دایاں قانون تقسیمی) (B+C) A = (BA)+(CA)

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}$ تو مندرجہ ذیل کی تصدیق کریں

(i) $A(B+C)=(AB)+(AC)$ (ii) $(B+C)A=(BA)+(CA)$

پڑتال

(i) $A(B+C)=(AB)+(AC)$

$$\text{L.H.S}=A(B+C)$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-1\\1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&3\\-1&-2\end{bmatrix}$$

$$\text{R.H.S}=AB+AC$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&1\\-1&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&2\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&3\\-1&-2\end{bmatrix}$$

لہذا پس $LHS=RHS$

$A(B+C)=(AB)+(AC)$

پس تصدیق ہوا

جبکہ اس ہی طریقے کے مطابق $(B+C)A=(BA)+(CA)$ کی بھی تصدیق کی جاسکتی ہے

19.4 (v) مثال کی مدد سے ثابت کریں کہ قانون مبادلہ بلحاظ ضرب عموماً نہیں ہوتا ہے

مثال

فرض کریں $A=\begin{bmatrix}5&2\\-2&-1\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}-1&2\\3&-2\end{bmatrix}$ تصدیق کریں کہ $AB\neq BA$

پڑتال:

$$AB=\begin{bmatrix}5&2\\-2&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&2\\3&-2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}(-5+6)&(10-4)\\(2-3)&(-4+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6\\-1&-2\end{bmatrix}$$

Now, اب

$$BA=\begin{bmatrix}-1&2\\3&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5&2\\-2&-1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}(-5-4)&(-2-2)\\(15+4)&(6+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9&-4\\19&8\end{bmatrix}$$

$$\because AB\neq BA \quad \therefore$$

لہذا قانون مبادلہ بلحاظ ضرب عموماً نہیں ہوتا ہے

19.4 (vi) ضربی ذاتی قالب (Multiplicative Identity of a matrix)

فرض کریں A، n مرتبہ کا مربعی قالب ہے تو I_n اکائی قالب ہے یہ ذاتی قالب بلحاظ ضرب یا ضربی ذاتی قالب کہلائے گا یوں $AI_n=A$ یا $I_nA=A$ واضح کرتے ہیں۔

مثال

فرض کریں $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ تصدیق کریں کہ $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ضربی ذاتی قالب ہے

حل دیا ہوا ہے کہ

$$AI_2=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=A$$

$$I_2A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=A.$$

19.4 (vii) تصدیق کریں $(AB)^t = B^tA^t$ Verify the result

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\end{bmatrix}$ تصدیق کریں کہ $(AB)^t=B^tA^t$

پڑتال

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2\\11&-4\end{bmatrix}$$

$$(AB)^t=\begin{bmatrix}5&11\\-2&-4\end{bmatrix}.$$

اب

$$B^tA^t=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&11\\-2&-4\end{bmatrix}$$

$$(AB)^t=B^tA^t.$$

پس تصدیق ہوئی

مثال 2:

اگر $A=\begin{pmatrix}6&5&2\\4&6&3\\0&1&7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}6&8&0\\5&1&2\\3&6&4\end{pmatrix}$. تصدیق کریں $AB'=B'A'$

تصدیق

$$AB=\begin{pmatrix}6&5&2\\4&6&3\\0&1&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&8&0\\5&1&2\\3&6&4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}36+25+6&48+5+12&0+10+8\\24+30+9&32+6+18&0+12+12\\0+5+21&0+1+42&0+2+28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}67&65&18\\63&56&24\\26&43&30\end{pmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 67 & 65 & 18 \\ 63 & 56 & 24 \\ 26 & 43 & 30 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 67 & 63 & 26 \\ 65 & 56 & 43 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

اب، $B^tA^t = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}^t$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 36+25+6 & 24+30+9 & 0+5+21 \\ 48+5+12 & 32+6+18 & 0+1+42 \\ 0+10+8 & 0+12+12 & 0+2+28 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 67 & 63 & 26 \\ 65 & 56 & 43 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

پس تصدیق ہوئی $(AB)^t = B^tA^t$.

مشق 19.1

1. مندرجہ ذیل قالبوں کی قسم بتائیں

(i). $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (ii). $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (iii). $\begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$ (iv). $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ (v). $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$.

2. مندرجہ ذیل ہر قالب کا مرتبہ کیا ہے

(i). $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ (ii). $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (iii). $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (iv). $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (v). $[0]$

3. جانچیں آیا مندرجہ ذیل قالب سمیٹرک ہیں یا سکیو سمیٹرک

(i). $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (ii). $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iii). $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 7 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ (iv). $\begin{bmatrix} 0 & -6 & 4 \\ -6 & 0 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

4. اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2&3\\-1&2\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$ اور $E=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&0&2\\2&1&0\end{bmatrix}$

ممکن ہو مندرجہ ذیل معلوم کریں

(i) $A+C$ (ii) $A+E$ (iii) $B-D$ (iv) $2B+3A$
(v) $B-C$ (vi) A^2 (vii) B^2 (viii) $D+E$

5. مندرجہ ذیل معلوم کریں اگر $A=\begin{bmatrix}-1&0&1\\2&1&0\\3&2&-1\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}4&2&3\\-2&4&1\\3&2&1\end{bmatrix}$

(i) $A+B$ (ii) $A-B$ (iii) $3A+2B$
(iv) AB (v) BA (vi) A^2

6. تصدیق کریں کہ (i) $A+B=B+A$ (ii) $C-D\neq D-C$

اگر $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-7&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3&0\\7&-4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3&1&-4\\4&3&1\\1&4&-3\end{pmatrix}$ اور $D=\begin{pmatrix}2&7&-5\\-2&1&0\\6&3&4\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}8&2&-1\\2&1&2\\2&3&0\end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix}1&4&-4\\2&5&7\\0&-4&3\end{pmatrix}$. ثابت کریں $AB\neq BA$ چونکہ

8. اگر $A=\begin{pmatrix}-3&0\\7&-4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&-1\\-7&4\end{pmatrix}$ اور $C=\begin{pmatrix}1&0\\-2&-4\end{pmatrix}$, تو $2A-3B+4C$. معلوم کریں

9. اگر $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ تو a،b،c اور d معلوم کریں

10. $\begin{bmatrix}x&-1&y\\2&0&3\\z&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&a&x\\b&0&c\\2&3&d\end{bmatrix}$ تو a،b،c،d،x،y اور z معلوم کریں

11. مندرجہ ذیل قالبوں کے ممکنہ حاصل ضرب معلوم کریں

$A=\begin{bmatrix}1&-2\\3&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}0&-1&2\\-1&0&-4\\3&1&2\end{bmatrix}$.

12. معلوم کریں $\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&2\\1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&0\\1&3&2\\3&2&0\end{pmatrix}$.

13. اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$

تو تصدیق کریں (i). $A(B+C)=AB+AC$ (ii). $(B+C)A=BA+CA.$

14. مندرجہ ذیل کی تصدیق کریں، اگر $A=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ 4 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6 & 8 & 0\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & 6 & 4\end{pmatrix}$ اور $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

(a) $A+B=B+A$ (b) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(c) $(A+B)C=AC+BC$ (d) $A(B+C)=AB+AC$

15. اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ تو

ثابت کریں کہ $A(BC)=(AB)C.$

19.5 قالب کا مقطع Determinant of a Matrix

19.5 (i) مربعی قالب کا مقطع Determinant of a Matrix

ہم ہر مربعی قالب کے ساتھ ایک عدد |A| منسوب کرسکتے ہیں جن کا تعلق R سے ہوتا ہے۔ اُسے قالب (A) کا مقطع کہا جاتا ہے۔

اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، تو قالب A کا مقطع $|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$. سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

19.5 (ii) قالب کے مقطع کی قیمت معلوم کریں

اگر $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$، تو قالب A کا مقطع

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}= ad-bc$$

مثال کے طور پر

$$\begin{vmatrix}3 & 7\\ 1 & 4\end{vmatrix}=3\times(-4)-7\times 1=-19.$$

اب قالب (3x3) $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ کے مقطع

کے لیئے پینئیر فارمولا مندرجہ ذیل ہے

$$|A|=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

نوٹ1: مقطع کا معلوم کرنا اوپر دیئے گئے پھیلاؤ R_1 کے ذریعے

:2

مثلاً: اگر $A=[a_{11}]$ پھر $|A|=|a_{11}|=a_{11}$

اگر $A=[-2]$ پھر $|A|=|-2|=-2$

اگر $A=[3]$ پھر $|A|=|3|=3$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ $|A|$ معلوم کریں

حل: مقطع $|A|$ معلوم کرنے کے لیئے آئیں مقطع کو R_1 کے ذریعے پھلادیں

$$|A| = 4\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 4(0-15)+3(2+3)+5(5+0) = -20.$$

پس

19.5 (iii) نادر اور غیر نادر قالب **Define singular and non_singular matrices**

اگر کسی قالب کا مقطع صفر ہو اِسے نادر قالب کہا جاتا ہے جسے $|A| = 0$ اگر کسی قالب کا مقطع صفر نہ ہو تو غیر نادر قالب کہا جاتا ہے۔ جیسے $|A| \neq 0$

نوٹ: ایک نادر قالب کو قالب (non-invertible) بھی کہا جاتا ہے اور ایک غیر نادر قالب کو (invertible) قالب بھی کہا جاتا ہے۔

مثال

معلوم کریں آیا نادر قالب ہے یا نہیں $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 14 \end{bmatrix}$

حل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 14 \end{vmatrix} = 2(0-16)-4(28-12)+6(16-0) = -32-64+96 = 0.$$

چونکہ $|A| = 0$

A نادر قالب ہے

19.5 (iv) مائینرز اور کوفیکٹرس **(Minors and Cofactors)**

آئیں فرض کریں ایک مربعی قالب A کا مرتبہ 3x3 ہے تو عنصر a_{ij} کے مائینرز M_{ij} ظاہر کئے جاتے ہیں۔ عنصر a_{ij} کے مائینرز کا مقطع قالب A کے قطار اور j^{th} کالم کو ترک کرکے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ A تو A کی قطار اور کالم ترک کرنے بعد

قالب ملے گا اور اس کا مقطع M_{12} جو مائینز ہے۔ یوں واضح کہا جاتا ہے نیچے

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

جبکہ عنصر (اَلکان) a_{ij} کا کوفیکٹرس A_{ij} ظاہر کیا جاتا ہے اور معلوم کیا جاسکتا ہے

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

جبکہ M_{ij} مربعی قالب A کے عنصر a_{ij} کا مائنز ہے

مثال

فرض کریں $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$

تو A_{12} اور M_{12} معلوم کریں

یہاں $M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 6(-7) - 4(1) = -46$

اور $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$،

اگر $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}$

$A_{12} = (-1)^{3}(-46)$

$A_{12} = (-1)(-46) = 46$۔

19.6 قالب کا ضربی معکوس Multiplicative Inverse of a Matrix

(i)19.6 قالب کا مُتصل Define adjoint of a matrix

مرتبہ 2x2 کے قالب کا مُتصل Adjoint of a matrix with order 2 × 2

فرض کریں $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو قالب A کا مُتصل adjA یا AdjA سے ظاہر کرتے ہیں۔

اور $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ تو

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{t}.$$

جبکہ A_{11}، A_{12}، ...A_{33}، A کے کوفیکٹرز ہیں۔

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ تو

قالب A کا مُتصل (Ad joint) معلوم کریں۔

حل: سب سے پہلے ہم قالب A کے تمام کوفیکٹرز (Confects) معلوم کرتے ہیں۔

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix} = -8$$

اب $Adj(A) = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}^t.$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix}2 & 2 & 6\\ -1 & -2 & -5\\ -2 & -2 & -8\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -2\\ 6 & -5 & -8\end{bmatrix}.$$

19.6(iii) غیر نادر قالب A کا ضربی معکوس معلوم کریں اور تصدیق کریں کہ I ضربی ذاتی قالب ہے۔

جبکہ $AA^{-1} = I = A^{-1}A,$

اگر A اور B مراتب mxn کے غیر نادر قالب ہیں اس طرح $AB = BA = I_n$ تو A اور B ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔
A کے معکوس کو A^{-1} سے ظاہر کرتے ہیں

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ تو معلوم کریں A اور B ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں

حل

$$AB = \begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15-14 & -21+21\\ 10-10 & -14+15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

اس ہی طرح $BA = \begin{bmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15-14 & 35-35\\ -6+6 & -14+15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

یوں $AB = BA = I_2$

پس A اور B ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

19.6(iii) بذریعہ طریقہ مُتصل (Ad joint) غیر نادر قالب کا ضربی معکوس معلوم کریں۔

فرض کریں $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک غیر نادر قالب ہے تو A معلوم کیا جاسکتا ہے

$A^{-1}=\dfrac{\text{Adj}(A)}{|A|}$ جب کہ $|A|\neq 0.$

ضربی معکوس معلوم کرنے کا طریقہ، طریقہ مُتصل (Adjoint Method) کہلاتا ہے۔

مثال

$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ کا ضربی معکوس بذریعہ طریقہ مُتصل معلوم کریں۔

حل چونکہ $|A|\neq 0$ کا ضربی معکوس ممکن ہے

یہاں $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2.$

اب $\text{Adj}(A)=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ ؛

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

مثال

بذریعہ طریقہ مُتصل $A=\begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ کا ضربی معکوس بذریعہ طریقہ مُتصل معلوم کریں۔

حل

یہاں

$$|A|=\begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=9(2-0)-2(-10-24)+1(0+4)$$

$$=18+68+4$$

$$=90.$$

چونکہ $|A|\neq 0,$ لہٰذا A^{-1} ممکن ہے

اب ہم A کے تمام کو فیکٹر (Cofactors) معلوم کریں۔

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=2-0=2$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-(-10-24)=34$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=0+4=4$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-(-4-0)=4$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}9 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=(-18-4)=-22$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}9 & 2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-(0-8)=8$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 6\end{vmatrix}=12+1=13$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}9 & 1\\ 5 & 6\end{vmatrix}=-(54-5)=-49$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}9 & 2\\ 5 & -1\end{vmatrix}=-9-10=-19$$

پس $\mathrm{Adj}(A)=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}^t$. اب $\mathrm{Adj}(A)=\begin{bmatrix}2 & 4 & 13\\ 34 & -22 & -49\\ 4 & 8 & -19\end{bmatrix}$

اب $A^{-1}=\dfrac{\mathrm{Adj}(A)}{|A|}$

$$A^{-1}=\frac{1}{90}\begin{bmatrix}2 & 4 & 13\\ 34 & -22 & -49\\ 4 & 8 & -19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{45} & \frac{2}{45} & \frac{13}{90}\\ \frac{17}{45} & \frac{-11}{45} & \frac{-49}{90}\\ \frac{2}{45} & \frac{4}{45} & \frac{-19}{90}\end{bmatrix}$$

19.6. (iv) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ کی تصدیق کریں Verify the result $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}$. تو تصدیق کریں کہ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

حل

دیئے گئے $A=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}$.

AB کا ضربی معکوس

$$AB = \begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix}18+49 & 24+63\\ 12+35 & 16+45\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}67 & 87\\ 47 & 61\end{bmatrix}.$$

اب $|AB| = 4087 - 4089 = -2$

چونکہ $|AB| \neq 0$

لہذا $(AB)^{-1}$,

اب

$$(AB)^{-1} = \frac{\text{adj }(AB)}{|AB|}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix}61 & -87\\ -47 & 67\end{bmatrix} \quad ...(i)$$

A کا ضربی معکوس

ہمارے پاس $A = \begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

$|A| = 15 - 14 = 1$

چونکہ $|A| \neq 0$

لہذا A^{-1}, A ممکن ہے

$$A^{-1} = \frac{\text{adj }A}{|A|} = \begin{bmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

B کا ضربی معکوس

ہمارے پاس $B = \begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}$

اب

$|B| = 54 - 56 = -2$

چونکہ $|B| \neq 0$,

لہذا B^{-1} ممکن ہے

$$B^{-1} = \frac{\text{adj }B}{|B|} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix}9 & -8\\ -7 & 6\end{bmatrix}$$

اب

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix}9 & -8\\ -7 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix}45+16 & -63-24\\ -35-12 & 49+18\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix}61 & -87\\ -47 & 67\end{bmatrix} \quad ...(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) یہ واضح ہوتا ہے۔

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

پس تصدیق ہوئی

19.7 (i) ہمزاد ایک درجی مساواتوں کا حل Solution of Simultaneous Linear Equations

غور کریں کہ دو متغیرات پر مشتمل دو یک درجی مساوات کا نظام

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1\\ a_2x + b_2y &= c_2\end{aligned}\right\} \quad (i)$$

مساوات کے نظام کو قالبوں کی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$AX = B \quad (ii)$$

جب کہ $A = \begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$.

قالب A مساوات کے عددی سروں کا قالب کہلاتا ہے۔ قالب x متغیرات کا کالمی قالب ہے اور B متقل کا کالمی قالب ہے۔

مرتب جوڑا (x.y) دی گئی مساواتوں کا حل کہلاتا ہے اور ہمزاد یک درجی مساواتوں کا حل کہلاتا ہے۔

19.7(i) دو متغیرات والی یک درجی ہمزاد مساواتوں کو عمل زندگی کے مسائل سے رابطہ پیدا کرتے ہوئے حل کریں۔

معکوس قالب کا طریقہ

فرض کریں قالی مساوات جو پچھلے سیکشن 19.7 میں بحث کی گئی ہیں۔

یعنی $\quad$ (i) $\quad AX = B,$

یہاں A ضربی قالب اور غیر نادر قالب ہے۔ مساوات (i) کے دونوں اطراف کو A^{-1} ضرب دینے سے۔

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \qquad \text{[خاصیت تلازم ضرب کے لحاظ سے]}$$

$$\Rightarrow \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B \qquad [A^{-1}A = I, \quad IX = X]$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B \quad \text{(ii)}$$

مساوات (ii) میں متغیرات کا قالب X معلوم کرنا معکوس قالب کا طریقہ کہلاتا ہے۔ جب کہ A ضربی قالب اور غیر نادر قالب ہے۔

مثال: مندرجہ ذیل یک درجی مساوات کو بذریعہ معکوس قالب کا طریقہ حل کریں۔

$$5x + 2y = 3$$
$$3x + 2y = 5$$

حل: دی گئی مساوات کو قالبی شکل میں لکھیں

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

یعنی $\quad AX = B$

جب کہ $\quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

پہلے ہم A^{-1} ذریعہ مُتصل (Ad joint) معلوم کرتے ہیں۔

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}}{10-6} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

اب بذریعہ معکوس قالب کا طریقہ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-10 \\ -9+25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

یا $\quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

پس $x = -1$ اور $x = 4$ حل ہے۔ حل سیٹ $\{(-1,4)\}.$ ہے۔

مثال: ایک سول انجینئر کو 6000 مکعب میٹر بجری اور 9000 مکعب میٹر کنکریٹ کی ایک بلڈنگ پروجیکٹ کے لیئے ضرورت ہے یہ سامان حاصل کرنے کے لیئے دو اقسام کے دفائر ہیں جو نیچے جدول میں دیئے گئے ہیں۔

	کنکریٹ	بجری
ذخیرہ-I	3	8
ذخیرہ-II	4	11

بذریعہ طریقہ معکوس قالب سامان (بجری اور کنکریٹ) مقدار معلوم کریں جو انجینئر ضرورت پوری کرنے کے لیئے ذخائر میں سے لانا ہونگے۔

حل فرض x بجری اور y کنکریٹ کو ظاہر کرتا ہے۔

معکوس قالب کا طریقہ ہے $X = A^{-1}B$............(i)

دیئے گئے مواد کو قالبی شکل میں لکھیں

$$AX = B$$

یا

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \end{bmatrix}$$

اب A^{-1}، متصل کے فارمولے سے معلوم کرتے ہیں

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}}{3(11)-8(4)} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

لہٰذا

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

اب مساوات (i) کا استعمال کرنے پر

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

منفی نشان نظر انداز کرنے کے بعد ہمارے پاس آیا: $x=6000$ اور $y=3000$

لہٰذا 6000 مکعب سینٹی میٹر ریت اور 3000 مکعب میٹر کنکریٹ سے روکا جاسکتا ہے

19.2 (ii) کریمر کے اصول Cramer's rule

کریمر کے اصول یک درجی مساواتوں کے نظام کو حل کرنے کا ایک طریقہ ہے۔

آئیں غور کریں کہ دو متغیرات x اور y پر مشتمل یک درجی مساوات کے نظام کو یوں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

مساوات کے نظام (i) کو قالبی شکل میں لکھتے ہیں۔

$$AX = B,$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

مساوات کا نظام (i) کا بلکل ایک ہی حل ہو گا $\quad$ جبکہ $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

اگر $|A| \neq 0.$

جو حاصل ہو گا بذریعہ $\quad x=\dfrac{|A_1|}{|A|}=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ اور $y=\dfrac{|A_2|}{|A|}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$

جبکہ $A_1=\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}$ ؛ $A_2=\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$

مثال: بذریعہ کریمر کے اصول مساوات کا نظام حل کریں۔

$$3x+2y=10$$
$$-6x+4y=4$$

حل

یہاں $\quad |A|=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

$$12+12=24$$

یعنی $\quad |A| \neq 0 \quad \therefore$

اب دیئے گئے نظام کو قابی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$x=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}$$
$$=\frac{40-8}{24}$$
$$=\frac{32}{24}$$
$$x=\frac{4}{3}$$

$$y=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}{24}$$
$$=\frac{12+60}{24}$$
$$=\frac{72}{24}$$
$$y=3$$

پس سیٹ حل $\left\{\left(\frac{4}{3},3\right)\right\}$ ہے

EXERCISE 19.2 مشق 19.2

1. مندرجہ ذیل کے مقطع (determinents) معلوم کریں۔

i) $\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$ ii) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ iii) $\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

iv) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ v) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ vi) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

vii) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ viii) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & -5 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ ix) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

x) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & x & y \end{vmatrix}$ xi) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -6 & x & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

2. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ تو A_{21}. M_{12} , M_{22} , M_{21}, A_{12} , A_{22} , معلوم کریں

3. x کی کس قیمت کے لیئے قالب $\begin{bmatrix} 5-x & x+1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ غیر نادر ہے۔

4. دیئے گئے مربع قالبوں میں سے نادر اور غیر نادر قالب کی نشاندہی کریں۔

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

5. مندرجہ ذیل کا مُتصل (Ad joint) معلوم کریں۔

$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

6. تصدیق کریں $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$. جبکہ $A(\text{adj } A) = |A| I$

7. مندرجہ ذیل قالبوں کا ضربی معکوس بذریعہ طریقہ مُتصل (Adjoint) معلوم کریں۔

i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ii) $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

iii) $C=\begin{bmatrix}2&1&1\\3&2&1\\2&1&2\end{bmatrix}$ iv) $D=\begin{bmatrix}1&0&1\\-4&1&-1\\6&-2&1\end{bmatrix}$ v) $E=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&1&2\\-2&-2&1\end{bmatrix}$.

8. بذریعہ معکوس قالب طریقہ اور بذریعہ کریمر کے اصول معلوم کریں۔

1) $2x+3y=14$, $-4+y=28$ 2) $2x-4y=-12$, $2y+3x=0$

REVIEW EXERCISE اعادہ مشق 19

1. درست جواب پر نشان لگائیں۔

i. اگر m قطاروں کی تعداد اور n کالموں کی تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔اس طرح ______ قالب کہلاتا ہے۔

(a) مستطیل (b) مساوی (c) مربعی (d) صفری

ii. اگر $A=\begin{bmatrix}i&0\\0&-i\end{bmatrix}$ تو A^2 ______ ہے

(a) I_2 (b) I_3 (c) $-I_2$ (d) O

iii. اگر A کوئی بھی مربعی قالب ہے جیسے $A^t=-A$ کو کہا ______ جاتا ہے۔

(a) وتری قالب (b) اسکیلر قالب
(c) سمیٹرک قالب (d) سکیو سمیٹرک قالب

iv. اگر A، B اور C قالب ہیں تو $(ABC)^t=$ ______

(a) $A^t.B^t.C^t$ (b) $C^tB^tA^t$ © $C^tA^tB^t$ (d) $(B^tA^t)C^t$

v. اگر $A=\begin{bmatrix}i&0\\0&-i\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}0&i^2\\-i^2&0\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}$

(a) $A^2=-I$ (b) $B^2=-I$
(c) $C^2=-I$ (d) ان میں سے تمام

vi. دو قالب A اور B ہیں اگر $A=\begin{bmatrix}\sin\theta&-\cos\theta\\\cos\theta&\sin\theta\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}\sin\theta&\cos\theta\\-\cos\theta&\sin\theta\end{bmatrix}$ تو $AB=$ ______

(a) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

vii. x y اور z کی قیمتیں معلوم کریں اگر $2\begin{bmatrix}x\\3\\4\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-1\\y\\0\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}0\\4\\z\end{bmatrix}$

(a) $2,\frac{3}{2},\frac{10}{3}$ (b) $\frac{3}{2},2,\frac{10}{3}$
(c) $\frac{3}{2},\frac{10}{3},2$ (d) 1,2,3

viii. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = \_\_\_\_$

(a) A^{-2} (b) A (c) A^{-1} (d) A^{2}

ix. x کی قیمت معلوم کریں اگر $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x + 4$

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ © 0 (d) ان میں کوئی نہیں

x. اگر قالب $\begin{bmatrix} \lambda & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ معکوس پذیر ہے تو $\lambda \neq \_\_\_\_$

(a) -15 (b) -17 (c) -16 (d) ان میں کوئی نہیں

2. قطاری اور کالمی قالبوں کی تعریف بیان کریں۔

3. قالبوں کے مراتب معلوم کریں۔

i) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

4. مندرجہ ذیل قالبوں کی تعریف بیان کریں۔

(I) مربعی قالب (ii) مستطیلی قالب (iii) وتری قالب (iv) اسکیلر (میزانیہ) قالب

(v) سیمٹرک قالب (vi) اسکیو سیمٹرک قالب

5. اگر $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ تو معلوم کریں

i) $A + B$ ii) $A - B$ iii) AB iv) BA

v) $5A$ vi) $7B$ vii) $8A - 9B$

6. مقطع معلوم کریں $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \\ -7 & 8 & -10 \end{vmatrix}$

7. مثالوں کی مدد سے نادر اور غیر نادر قالبوں کی تعریف بیان کریں۔

8. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ تو A^{-1} معلوم کریں

9. حل کریں

$2x + 5y = 27$
$7x + y = 12$

(I) معکوس قالب کا طریقہ (ii) کریمر کا اصول

Summary (خلاصہ)

- قالب عناصر کی مستطیلی شکل ہے۔
- قالب میں اندراج کی افقی خط قطار کہلاتی ہے اور قالب میں اندراج کی عمودی خط کالم کہلاتا ہے۔
- دو قالب مساوی قالب کہلاتے ہیں اگر ان مراتب اور متناظرہ عناصر ایک جیسے ہوتے ہیں۔
- قالب کی ایک قطارہ ہو تو وہ قطاری قالب کہلاتا ہے اور ایک کالم دو کو وہ کالمی قالب کہلاتا ہے۔
- قالب کی قطاروں کی تعداد اور کالموں کی تعداد برابر ہوتی ہے تو وہ مربعی قالب ورنہ مستطیلی قالب کہلاتا ہے۔
- مربعی قالب وتری قالب ہے اگر وتر کے کسی ایک عنصر تمام عناصر صفر ہو۔
- مربعی قالب، وتری قالب کہلاتا ہے۔ اگر اس کے تمام عناصر صفر ہوں سوائے کم از کم ایک عنصر کے جو خاص وتر پر ہو۔
- وتری قالب جس میں وتر کے تمام عناصر ایک جیسے ہوں، اسکیلر (میزانیہ) قالب کہلاتا ہے۔
- وتری قالب جس میں خاص وتر کا ہر عنصر ا ہوتا ہے، اکائی قالب کہلاتا ہے۔
- ایک مربعی قالب کو سیمیٹرک قالب کہا جاتا ہے اگر اس کا بدل خود وہی ہوتا ہے۔
- ایک مربعی قالب کو اسکیو سیمیٹرک کہا جاتا ہے اگر اس کا بدل خود وہی ہو مگر منفی۔
- دو قالبوں کی جمع اور تفریق کئے جاتے ہیں دونوں قالبوں کے متناظرہ عناصر کی جمع اور تفریق کے ذریعے۔
- اگر A اور B قالبوں کے مراتب ایک ہی ہوں تو قانون مبادلہ بلحاظ جمع یوں واضع کرتے ہیں $A+B=B+A$
- اگر A، B اور C ایک ہی مراتب کے تین قالب ہوں تو قانون تلازم بلحاظ جمع کی وضاحت یوں کی جاتی ہے

  $(A+B)+C=A+(B+C)$
- دو قالب A اور B کی ضرب ممکن ہے اگر پہلے قالب کے کالموں کی تعداد دوسرے قالب کی قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔
- ہر مربعی قالب کے ساتھ ایک عدد $|A|$ ہے جس کا تعلق R سے ہوتا ہے۔ اسے مقطع کہا جاتا ہے۔
- اگر A اور B دو غیر صفری قالب ہوں ایسے $AB=BA=I$ تو A اور B دونوں ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہونگے۔
- یک درجی مساوات کا نظام بذریعہ معکوس قالب کا طریقہ اور کریمر کے اصول کے تحت حل کیا جاسکتا ہے۔

یونٹ 20

دو درجی مساوات کا نظریہ

THEORY OF QUADRATIC EQUATIONS

Student Learning Outcomes (SLOs)

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے۔

- دو درجی اظہاریہ $ax^2 + bx + c$ کے فرق کنندہ $(b^2 - 4ac)$ کی تعریف کر سکیں۔
- دی گئی دو درجی مساوات کا فرق کنندہ معلوم کر سکیں۔
- فرق کنندہ کے ذریعے دو درجی مساوات کے روٹس پر بحث کر سکیں۔
- دی گئی دو درجی مساوات کے روٹس کی نوعیت معلوم کر سکیں مساوات کو حل کر کے نتائج کی تصدیق کر سکیں۔
- دی گئی دو درجی مساوات میں نامعلوم کی قیمت معلوم کر سکیں جب کہ اس کے روٹس کی نوعیت دی گئی ہو۔
- اکائی کے مکعب روٹس معلوم کر سکیں۔
- اکائی کے کمپلیکس مکعب روٹس جیسے ω اور ω^2 کی پہچان کر سکیں
- اکائی کے مکعب روٹس کی خصوصیت کی تصدیق کر سکیں۔
- اکائی کے مکعب روٹس کی خصوصیت استعمال کرتے ہوئے سوالات حل کر سکیں۔
- دو درجی مساوات کے روٹس اور عددی سروں کے درمیان تعلق معلوم کر سکیں۔
- دی گئی مساوات کو حل کئے بغیر ان کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
- دی گئی دو درجی مساوات میں نامعلوم کی قیمت معلوم کر سکیں۔ جب
  - روٹس کی مجموعہ روٹس کے حاصل ضرب کے برابر ہو۔
  - روٹس کے مربعوں کا مجموعہ دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔
  - روٹس میں دیئے گئے عدد کا فرق ہو۔
  - روٹس دیئے گئے تعلق کی تصدیق کرتے ہو (مثلاً $2\alpha + 5\beta = 7$ جبکہ α اور β دی گئی مساوات کے روٹس ہو)
  - روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔
- دو درجی مساوات کے روٹس کے سمیٹرک تفاعل کی تعریف کر سکیں۔
- سمیٹرک تفاعل کو گرافیکل ظاہر کر سکیں۔
- دو درجی مساوات کے روٹس کے سمیٹرک تفاعل کو اس کے عددی سروں کی لحاظ سے حل کر سکیں۔
- کلیہ تشکیل دے سکیں۔
  $x^2 -$(روٹس کے مجموعہ)$x +$(روٹس کا حاصل ضرب)$=0$
  دیئے گئے روٹس سے دو درجی مساوات معلوم کر سکیں۔
- دو درجی مساوات بنا سکیں جس کے روٹس مثلاً اس قسم کے ہوں۔
  - $2\alpha+1, 2\beta+1$
  - α^2, β^2
  - $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$
  - $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$
  - $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

  جبکہ α اور β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں۔
- α اور β کی قیمتیں معلوم کر سکیں جبکہ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ دو درجی مساوات کے روٹس ہیں۔
- مکعب مساوات کو حل کر سکیں اگر مساوات کا ایک روٹ دیا گیا ہو۔
- چار درجی (Biquadratic) مساوات کو حل کر سکیں اگر مساوات کے دو حقیقی روٹس دے گئے ہوں۔
- دو تغیرات والی دو مساوات کے نظام حل کر سکیں جب کہ
  - ایک مساوات یک درجی اور دوسری دو درجی ہو۔
  - دونوں مساوات دو درجی ہوں۔
- دو درجی مساوات سے متعلق روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔

20.1 دو درجی مساوات کے روٹس کی نوعیت Nature of the Roots of a Quadratic Equation:

20.1 (i) دو درجی اظہاریہ $ax^2+bx+c, a\neq 0.$ کے فرق کنندہ $\left(b^2-4ac\right)$ کی تعریف کرنا۔

ایک دو درجی کثیر رقمی دو درجی اظہاریہ کہلاتی ہے۔ یہ دو درجی اظہاریے پر عمومی شکل $ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ ہے جبکہ a اور b بالترتیب x^2 اور x کے عددی سر ہیں اور c ایک منقل رقم ہو۔

دو درجی اظہاریے کا فرق کنندہ

اظہاریہ b^2-4ac دو درجی اظہاریے $ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ کا فرق کنندہ کہلاتا ہے اور Δ یا D سے ظاہر کیا جاتا ہے

یعنی $\Delta=b^2-4ac$

20.1. (ii) دی گئی دو درجی مساوات کا فرق کنندہ معلوم کرنا

ہم پہلے ہی جانتے ہیں کہ دو درجی مساوات کا حل $ax^2+bx+c, a\neq 0$ ہے۔ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ہے یہاں b^2-4ac ہمیں روٹس کی نوعیت بتانے میں مدد دیتا ہے کہ روٹس حقیقی (Real) یا کمپلیکس (complex) ہیں اظہاریہ b^2-4ac دو درجی مساوات کا فرق کنندہ ہے۔

$ax^2+bx+c, a\neq 0.$

مثال $2x^2+5x-4=0$ کے فرق کنندہ معلوم کریں

حل: $2x^2+5x-4=0$

یہاں $a=2$ $b=5$ اور $c=-4$

اب

$$\Delta=b^2-4ac=(5)^2-4(2)(-4)$$
$$=25+32=57$$

20.1. (iii) فرق کنندہ کے ذریعے دو درجی مساوات کے روٹس (roots) پر بحث کرنا۔

ہم فرق کنندہ کے ذریعے دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0,$ کے روٹس کی نوعیت (nature) معلوم کر سکتے ہیں یعنی $\Delta=b^2-4ac.$

دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے روٹس $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ہیں۔ روٹس کی نوعیت کا انحصار b^2-4ac کی قیمت پر ہوتا ہے۔ جبکہ a,b اور c حقیقی اعداد ہیں۔

i. اگر $\Delta=b^2-4ac>0,$ تو روٹس حقیقی اور غیر مساوی (Unequal) ہوتے ہے۔
ii. اگر $\Delta=b^2-4ac<0,$ تو روٹس حقیقی اور غیر حقیقی (کمپلیکس یا فرضی) ہوتے ہیں۔
iii. اگر $\Delta=b^2-4ac<0,$ کو روٹس ناطق اور مساوی ہوتے ہیں اور ہر ایک $-\dfrac{b}{2a}$ کے مساوی ہوتا ہے۔
iv. اگر a,b,c ناطق ہیں اور $\Delta=b^2-4ac<0,$ مکمل مربع ہے تو روٹس ناطق اور غیر مساوی ہوتے ہیں ورنہ غیر ناطق ہیں۔

20.1. (iv) دی گئی دو درجی مساوات کے روٹس کی نوعیت معلوم کرنا۔ مساوات کو حل کر کے نتائج کی تصدیق کرنا۔

مثال

بذریعہ فرق کنندہ مندرجہ ذیل مساوات کے روٹس کی نوعیت معلوم کریں اور مساوات کو حل کر کے تصدیق کریں۔

(i) $x^2+5x-14=0$ (ii) $5x^2+3x+1=0$
(iii) $x^2-9x+5=0$ (iv) $9x^2=6x-1$

حل

$x^2+5x-14=0$ (i)

یہاں $a=1, b=5$ اور $c=-14$

$\Delta = b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta=(5)^2-4(1)(-14)$

$\Rightarrow \quad \Delta = 25+56$

$\Rightarrow \quad \Delta = 81=(9)^2>0,$

مکمل مربع اور مثبت پس روٹس حقیقی، ناطق اور غیر مساوی ہیں۔

پڑتال

$x^2+5x-14=0$

$x^2+7x-2x-14=0$

$x(x+7)-2(x+7)=0$

$x+7=0 \quad \text{or} \quad (x-2)=0$

$\Rightarrow \quad x=-7 \quad \text{or} \quad x=2$

یہاں روٹس حقیقی ناطق اور غیر مساوی ہے بس تصدیق ہوئی

حل

$5x^2+3x+1=0,$ (ii)

یہاں $a=5, b=3$ اور $c=1$

$\Delta = b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta=(3)^2-4(5)(1)$

$\Rightarrow \quad \Delta=9-20$

$\Rightarrow \quad \Delta=-11<0,$ (یعنی منفی)

پس روٹس کمپلیکس ہیں۔

پڑتال

دو درجی کلیہ کی مدد سے

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-20}}{2}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{11}\,i}{2} \qquad (i^2=-1)$$

پس روٹس کمپلیکس میں پس تصدیق ہوئی

حل

$x^2-9x+5=0,$ (iii)

یہاں $a=1$ $b=-9$ اور $c=5$

$\Delta=b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta=(-9)^2-4(1)(5)$

$\Rightarrow \quad \Delta=81-20$

$\Rightarrow \quad \Delta=61>0,$ مکمل مربع نہیں ہے

پس روٹس حقیقی، غیر ناطق اور غیر مساوی ہیں

پڑتال

$x^2-9x+5=0,$

دو درجی کلیہ کی مدد سے

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-20}}{2}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{61}}{}$$

پس تصدیق ہوئی

حل

$9x^2=6x-1$ (iv)

یہاں $\Rightarrow 9x^2-6x+1=0$

$a=9, \ b=-6 \ \ c=1$

$\because \quad \Delta=b^2-4ac$

$\therefore \quad \Delta=(6)^2-4(9)(1)$

$\Rightarrow \quad \Delta=36-36$

$\Rightarrow \quad \Delta=0,$

مکمل مربع اور 0 کے برابر پس روٹس حقیقی اور مساوی ہیں

پڑتال

$9x^2-6x+1=0$

$(3x)^2-2(3x)(1)+(1)^2=0$

$(3x-1)^2=0$

$3x-1=0$ یا $3x-1=0$

$\Rightarrow \quad x=\frac{1}{3}$ یا $x=\frac{1}{3}$

پس روٹس حقیقی اور مساوی ہیں

پس تصدیق ہوئی

مثال ا

ثابت کریں کہ $abc^2x^2+c\left(3a^2+b^2\right)x+3a^2+b^2-ab=0,$ کے روٹس ناطق ہیں۔

حل

یہاں $abc^2x^2+c\left(3a^2+b^2\right)x+3a^2+b^2-ab=0$

$A=abc^2,$ $B=c\left(3a^2+b^2\right)$ اور $C=3a^2+b^2-ab$

$$\Delta = B^2-4AC$$
$$\Delta=\left[c\left(3a^2+b^2\right)\right]^2-4\left(abc^2\right)\left(3a^2+b^2-ab\right)$$
$$=c^2\left(3a^2+b^2\right)^2-4abc^2\left(3a^2+b^2-ab\right)$$
$$=c^2\left[\left(3a^2+b^2\right)^2-4ab\left(3a^2+b^2\right)+4a^2b^2\right]$$
$$=c^2\left[\left(3a^2+b^2\right)^2-2\left(3a^2+b^2\right)(2ab)+(2ab)^2\right] \qquad \because\ 4ab=2(2ab)$$
$$=c^2\left[\left(3a^2+b^2-2ab\right)^2\right]$$
$$=\left[c\left(3a^2+b^2-2ab\right)\right]^2$$

جو کہ Δ مکمل مربع ہے

پس روٹس ناطق ہیں۔

20.1. (v) دی گئی دو درجی مساوات میں نامعلوم کی قیمت معلوم کرنا۔ جب کہ اس کے روٹس کی نوعیت دی گئی ہو۔

مندرجہ ذیل مثالیں دو درجی مساوات موجود میں نامعلوم کی قیمت معلوم کرنے میں ہماری مدد کریں گی جبکہ روٹس کی نوعیت دی گئی ہو۔

مثال

p کی کسی قیمت کے لیئے مساوات $3x^2+5x+p=0$ کے روٹس

(i) مساوی

(ii) ناطق

(iii) کمپلیکس ہونگے

حل

$$3x^2+5x+p=0$$

یہاں $a=3,$ $b=5$ اور $c=p?$

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\therefore \quad \Delta=(5)^2-4(3)(p)=25-12p,$$

مساوی روٹس کے لیئے

یعنی $\Delta = 0$

$25 - 12p = 0$

$\Rightarrow \quad -12p = -25,$

$\Rightarrow \quad p = \frac{25}{12},$

جب $p = \frac{25}{12},$ پر دی گئی مساوات کے مساوی روٹس ہے

(ii) ناطق روٹس کے لیئے

Δ کو مکمل مربع ہونا چاہیئے

یعنی $25 - 12p$ مکمل مربع ہونا چاہیئے

$p = 0,$ 2 اور -2 وغیرہ

اسی طرح $p = 0, 2, -2$ اور کچھ دوسری قیمت بھی فرق کندہ کو مکمل مربع بناتی ہیں

(iii) کمپلیکس روٹس کے لیئے

یعنی $25 - 12p < 0$

$\Rightarrow \quad 12p > 25$

$\Rightarrow \quad p > \frac{25}{12}$

جب $p > \frac{25}{12},$ دی گئی مساوات کے کمپلیکس روٹس ہیں

مثال اگر مساوات $x^2 - 15 - k(2x - 8) = 0$ کے روٹس مساوی ہیں تو k کی قیمت معلوم کریں

حل مساوات $x^2 - 15 - k(2x - 8) = 0,$ کو معیاری شکل میں لکھیں

یعنی $x^2 - 2kx + 8k - 15 = 0$

یہاں $a = 1$ $b = -2k,$ اور $c = 8k - 15$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\therefore \quad \Delta = (-2k)^2 - 4(1)(8k - 15)$

$\Rightarrow \quad \Delta = 4k^2 - 4(8k - 15)$

مساوی روٹس کے لیئے

$\Delta = 0$

$\therefore \quad 4k^2 - 4(8k - 15) = 0$

$\Rightarrow \quad k^2 - 8k + 15 = 0$ (دونوں اطراف کو 4 سے تقسیم کرنے سے)

$\Rightarrow \quad k^2 - 5k - 3k + 15 = 0$

$\Rightarrow \quad k(k - 5) - 3(k - 5) = 0$

$\Rightarrow \quad (k - 5)(k - 3) = 0$

یعنی $k - 5 = 0$ یا $k - 3 = 0$

$\Rightarrow \quad k = 3 \qquad k = 5$

$k = 3$

لہذا k کی قیمتیں 3 اور 5 ہیں

مثال 3. P کی کس قیمت کے لیے مساوات $2x^2 - px + 18 = 0$, کے روٹس حقیقی اور غیر مساوی ہیں

حل

$$2x^2 - px + 18 = 0,$$

$a = 2,$ $b = -p$ اور $c = 18$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\therefore \quad \Delta = (-p)^2 - 4(2)(18) = p^2 - 144$$

حقیقی اور غیر مساوی روٹس کے لیئے

$$\Delta > 0$$

$$\therefore \quad p^2 - 144 > 0$$

$$\Rightarrow \quad p^2 > 144 \Rightarrow \sqrt{p^2} > \sqrt{144} \Rightarrow |p| > 12$$

$\Rightarrow \quad \pm p > 12 \Rightarrow p > 12$ اور $-p > 12$

$$\Rightarrow \quad p > 12 \text{ or } p < -12$$

لہٰذا $p < -12$ یا $p > 12$ کے لیئے دی گئی مساوات کے حقیقی روٹس ہیں

مشق EXERCISE 20.1

1. بذریعہ فرق کنندہ (Discriminant) مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کے روٹس کی نوعیت (Nature) معلوم کریں

(i) $x^2 + 5x - 6 = 0$ (ii) $x^2 = 6x$ (iii) $2x^2 + 8 = 6x$

(iv) $1 + 6x + 9x^2 = 0$ (v) $24x^2 + 12x + 36 = 0$ (vi) $x = x^2 + 1$

(vii) $3x^2 + 6 = 5x$ (viii) $3x^2 + 9 = 0$

2. k کی قیمتیں معلوم کریں کہ یقینی بنائے کہ مندرجہ ذیل دو درجی مساوات رکھتی ہیں (I) ایک جیسا حل (ii) مختلف حقیقی حل

(اشارہ) ایک جیسے حل کے لیئے $\Delta = 0$ اور مختلف حل کے لیئے $\Delta > 0$ ہے)

(i) $x^2 - 3x + k = 0$ (ii) $x^2 + k = 4$

(iii) $x^2 + kx + 2 = 0$ (iv) $(k-1)x^2 - 4x + 2 = 0$

(v) $x^2 + kx + 4 = 0$ (vi) $9x^2 + kx = -16$

(vii) $(k-2)x^2 = 4x + (k+2)$ (viii) $x^2 + 1 = kx$

3. مندرجہ ذیل ہر ایک دو درجی مساوات میں m کی قیمت معلوم کریں جو کہ روٹس کو مساوی بناتے ہیں

(i) $(m+1)x^2 + 2(m+3)x + (2m+3) = 0,$ (بشرطیکہ) $m \neq -1$

(ii) $9x^2 + mx + 16 = 0$

4. ثابت کریں کہ مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کے روٹس حقیقی ہیں۔

(i) $x^2 - 2x\left(k + \frac{1}{k}\right)x + 3 = 0, \ \forall k \in R - \{0\}$

(ii) $2nx^2 + 2(l+m+n)x + (l+m) = 0, \ \forall l, m, n \in \mathbb{R}$ and $n \neq 0$

5. ثابت کریں کہ مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کے روٹس ناطق ہیں

(i) $(l-m)x^2 + (m+n-l)x - n = 0, \ \forall l, m, n \in \mathbb{R}$ and $l \neq m$

(ii) $(a+c-b)x^2 + 2cx + (b+c-a) = 0, \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

6. p اور q کی کس قیمتوں کے لیے دو درجی مساوات $x^2+(2p-4)x-(3q+5)=0$ کے روٹس ختم ہوجائینگے

7. ثابت کریں کہ دی گئی دو درجی مساوات $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ کے روٹس حقیقی ہیں اور وہ مساوی نہیں ہوسکتے جب تک $a=b=c.$

20.2 اکائی کے مکعب روٹس اور ان کی خصوصیات Cube Roots of Unity and their properties

20.2. (i) اکائی کے مکعب روٹس معلوم کرنا

فرض کریں x اکائی کا مکعب روٹ ہے $x=(1)^{1/3}$ یا $x=\sqrt[3]{1}$

$$x^3=1$$

$$\Rightarrow \quad (x)^3-(1)^3=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+1)=0, \quad \left[\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\right]$$

یعنی $x-1=0$

$$\Rightarrow \quad x=1$$

یا $x^2+x+1=0,$

یہاں $a=b=c=1,$

دو درجی مساوات کی مدد سے ہمارے پاس

$$\therefore \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-1\times 3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}, \quad (i^2=-1)$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

لہٰذا اکائی کے مکعب روٹس

$1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ اور $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$ ہیں

20.2. (ii) اکائی کے کمپلیکس مکعب روٹس ω اور ω² (Complex cube roots) جیسے ω اور ω² کی پہچان کرنا۔

دو کمپلیکس مکعب روٹس ہیں

$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ اور $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ان دو کمپلیکس روٹس کے لیئے ہم یونانی حرف تہجی استعمال کرتے ہیں اور "ω" اومیگا پڑھتے ہیں

آئیں ہم فرض کرتے ہیں $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ تو $\omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$ اس لیئے اکائی کے مکعب روٹس $1,\omega$ اور $\omega^2.$ ہیں

20.2. (iii) اکائی مکعب روٹس کی خصوصیات کی تصدیق کرنا اکائی کے مکعب روٹ، کی خصوصیات ہیں۔

(i) ہر اکائی کا مکعب کمپلیکس روٹ دوسرے کا مربع ہوتا ہے۔

تصدیق

اگر $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ اکائی کا ایک کمپلیکس روٹ ہے۔

اب

$$\therefore \quad \omega^2=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2i\sqrt{3}+3i^2}{4}=\frac{1-2i\sqrt{3}+3(-1)}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}=\frac{2\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{4} \qquad \left(\because i^2=-1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Now} \quad \left(\omega^2\right)^2=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1+2i\sqrt{3}+3i^2}{4}=\frac{1+2i\sqrt{3}+3(-1)}{4} \qquad \left(\because i^2=-1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega^2\right)^2=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}=\frac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega^2\right)^2=\omega.$$

ہر اکائی کا مکعب کمپلیکس روٹ دوسرے کا مربع ہوتا ہے۔

پس تصدیق ہوا۔

(ii) اکائی کے تین مکعب روٹس کا مجموعہ صفر ہوتا ہے یعنی $1+\omega+\omega^2=0$

پڑتال

L.H.S $=1+\omega+\omega^2$

$$=1+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right), \qquad \omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ اور } \omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ جبکہ}$$

$$=\frac{2-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{2-2}{2}=\frac{0}{2}=0=\text{R.H.S.}$$

پس تصدیق ہوا

(iii) اکائی کے تین مکعب روٹس کا حاصل ضرب "1" ہوتا ہے $\omega\cdot\omega^2\cdot 1=1$ یا $\omega^3=1$

پڑتال

L.H.S $=\omega\cdot\omega^2\cdot 1$

$$=1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{1-i^2 3}{4}$$

$$=\frac{1-(-1)(3)}{4}, \qquad \left(i^2=-1\right)$$

$$=\frac{1+3}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$=\text{R.H.S}$ $\quad 1\cdot\omega\cdot\omega^2=1$ یعنی یا $\omega^3=1$

پس تصدیق ہوا

(iv) ہر اکائی مکعب کمپلیکس روٹ دوسرے کا معکوس (Reciprocal) ہوتا ہے

پڑتال $\omega^3 = 1,$

$\Rightarrow \quad \omega \cdot \omega^2 = 1,$

$\Rightarrow \quad \omega^2 = \dfrac{1}{\omega}$ یا $\omega = \dfrac{1}{\omega^2}.$ ثبوت: ایک کمپلیکس روٹ ω ہے۔

ہر اکائی کا مکعب کمپلیکس روٹ دوسرے کا معکوس (reciprocal) ہوتا ہے۔

(v) ہر ω^3 کی لازمی طاقت اکائی ہوتی ہے۔

$\because \quad \omega^3 = 1,$

$\therefore \quad (\omega^3)^m = 1, \quad \forall m \in Z.$

$\Rightarrow \quad \omega^{3m} = 1.$

پس ثابت ہو

20.2. (iv) اکائی کے مکعب روٹس کی خصوصیات استعمال کرتے ہوئے سوالات حل کرنا۔

اکائی کے مکعب روٹ سے متعلق سوالات مندرجہ ذیل ہے۔

مثال -27. کے مکعب روٹس (Cube roots) معلوم کریں۔

حل فرض کریں -27 کا مکعب روٹ x ہے۔ یعنی $\therefore \quad x = (-27)^{\frac{1}{3}}$

دونوں اطراف مکعب کرنے سے ہمارے پاس $x^3 = -27$

$\Rightarrow \quad x^3 + 27 = 0$

$\Rightarrow \quad (x)^3 + (3)^3 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0, \qquad \left[a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^3)\right]$

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3,$

$x^2 - 3x + 9 = 0$

اب $a = 1$ ، $b = -3$ اور $c = 9.$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9 - 36}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-27}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-1 \times 27}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{i^2 \times 27}}{2} \qquad (\because i^2 = -1)$$

مثال 4. ثابت کریں

$$(x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)=x^3+y^3+z^3-3xyz,$$

جبکہ ω^2 اور ω اکائی کے کمپلیکس مکعب روٹس ہیں

ثبوت $\quad$ **L.H.S** $=(x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$

$$=(x+y+z)\left[(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)\right]$$

$$=(x+y+z)\left[x^2+xy\omega^2+xz\omega+xy\omega+y^2\omega^3+yz\omega^2+xz\omega^2+yz\omega^4+z^2\omega^3\right]$$

$$=(x+y+z)\left[x^2+y^2(1)+z^2(1)+xy(\omega^2+\omega)+yz(\omega^2+\omega^4)+zx(\omega+\omega^2)\right]$$

$$=(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2+xy(-1)+yz(-1)+zx(-1)\right],$$

$$=(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right] \qquad \left(\because\ \omega^3=1,\omega^2+\omega=-1 \text{ and } \omega^2+\omega^4=\omega+\omega^2=-1\right)$$

$$=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

$=$ R.H.S

پس ثابت ہوا

EXERCISE 20.2 مشق

1. تمام مکعب روٹس معلوم کریں

(i) 64 $\qquad$ (ii) -125 $\qquad$ (iii) 216

2. مندرجہ ذیل کو حل کریں۔

(i) $(1+\omega^2)^4$ $\qquad$ (ii) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)$

(iii) $(2+5\omega+2\omega^2)^6$ $\qquad$ (iv) $(-1+\sqrt{-3})^4+(-1-\sqrt{-3})^4$

3. ثابت کریں

(i) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)=(\omega+\omega^2)^4$

(ii) $(a+b)(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)=a^3+b^3$

(iii) $(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)=a^2+b^2+c^2-ab-ba-ca$

(iv) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^9+\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^9-2=0$

(v) $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=0$

20.3. دو درجی مساوات کے روٹس اور عددی سر

20.3. (i) دو درجی مساوات کے روٹس اور عددی سروں کے درمیان تعلق معلوم کرنا۔

فرض کریں $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کے دو روٹس کو α اور β سے ظاہر کرتے ہیں

تو $\quad \beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\quad$ اور $\quad \alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\therefore \quad \alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a} \qquad (1)$$

اور

$$\alpha\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha\beta=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a} \qquad (2)$$

لہٰذا (1) روٹس کے مجموعہ کو ظاہر کرتی ہے $= -\dfrac{x \text{ کا عددی سر}}{x^2 \text{ کا عددی سر}}$

اور (2) روٹس کے حاصل ضرب کو ظاہر کرتی ہے $= \dfrac{\text{مستقل رقم}}{x^2 \text{ کا عددی سر}}$

اس طرح ہمارے پاس اہم نتیجہ ہے۔

اگر α اور β مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0,$ روٹس ہیں

تو $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}.$ اور $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

20.3. (ii) دی گئی مساوات کو حل کئے بغیر ان کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کرنا۔

مثال حل کئے بغیر مندرجہ ذیل پر مساوات کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $4x^2+6x+1=0$ (ii) $3(5x^2+1)=17x$

حل: (i)

$$4x^2+6x+1=0$$

یہاں $a=4,\ b=6\ c=1$

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ اور $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$\alpha+\beta=-\dfrac{6}{4}$ اور $\alpha\beta=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \alpha\beta=\dfrac{1}{4}$ اور $\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2}$

حل: (ii) $3(5x^2+1)=17\,x$

یہاں $15x^2-17x+3=0$

$a=15, b=-17$ اور $c=3$

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ اور $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$\alpha+\beta=-\dfrac{(-17)}{15}$ اور $\alpha\beta=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$

$\alpha\beta=\dfrac{1}{5}$ اور $\alpha+\beta=\dfrac{17}{15}$

20.3. (iii) دی گئی مساوات میں نامعلوم کی قیمت معلوم کرنا جب کہ

(a) روٹس کا مجموعہ روٹس کے حاصل ضرب کے برابر ہو۔

(b) روٹس کے مربعوں کا مجموعہ دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔

(c) روٹس میں دیئے گئے عدد کا فرق ہو۔

(d) روٹس دیئے گئے تعلق کی تصدیق کرتے ہو (مثلاً $2\alpha + 5\beta = 7$ جبکہ α اور β دی گئی مساوات کے روٹس ہیں)

(e) روٹس کو مجموعہ اور حاصل ضرب دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔ اوپر دی گئیں تمام شرائط کی وضاحت مثالوں کی جاسکتی ہے

(a) روٹس کا مجموعہ روٹس کے حاصل ضرب کے برابر ہو۔

مثال 1: k کی قیمتیں معلوم کریں۔ اگر $6x^2 - 3kx + 5 = 0$ کے روٹس کا مجموعہ روٹس کے حاصل ضرب کے برابر ہو۔

حل فرض کریں α اور β مساوات $6x^2 - 3kx + 5 = 0$ کے روٹس ہیں

یہاں $a = 6$ $b = -3k$ ؛ $c = 5$

اب $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{5}{6}$ اور $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3k)}{6} = \frac{3k}{6}$

دیا گیا ہے

روٹس کا مجموعہ = روٹس کے حاصل ضرب

یعنی $\alpha + \beta = \alpha\beta$

$$\therefore \quad \frac{3k}{6} = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{5}{3}.$$

مثال 2: P کی قیمت معلوم کریں۔ اگر مساوات $2x^2 + (8-4p)x + 3p = 0$ کے روٹس کا مجموعہ، روٹس کے حاصل ضرب کے دوگناہ کے برابر ہے۔

حل فرض کریں α اور β مساوات $2x^2 + (8-4p)x + 3p = 0$ کے روٹس ہیں

$a = 2,$ $b = 8-4p$ اور $c = 3p$

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(8-4p)}{2} = 2p - 4$ اور $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3p}{2}$

دی گئی شرط کے مطابق

$$\alpha + \beta = 2(\alpha\beta)$$

یعنی $2p - 4 = 2\left(\frac{3p}{2}\right) = 3p$

$$\Rightarrow \quad p = -4.$$

(b) روٹس کے مربعوں کا مجموعہ دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔

مثال 3: k معلوم کریں اگر مساوات $2x^2 + 3kx + k^2 = 0$ کے روٹس کے مربعوں کا مجموعہ 5 ہے

حل فرض کریں α اور β مساوات $2x^2 + 3kx + k^2 = 0$ کے روٹس ہیں

یہاں $a = 2,$ $b = 3k$ ؛ $c = k^2$

اب $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{k^2}{2}$ اور $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3k}{2}$

دی گئی شرط کے مطابق

$$\alpha^2 + \beta^2 = 5$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 5 \qquad \because [a^2+b^2=(a+b)^2-2ab]$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{-3k}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{k^2}{2}\right) = 5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9k^2}{4} - k^2 = 5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9k^2-4k^2}{4} = 5$$

$$\Rightarrow \quad 5k^2 = 5\times 4$$

$$\Rightarrow \quad k^2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad k = \pm 2$$

(c) روٹس میں دیئے گئے عدد کا فرق ہو

مثال 4: p معلوم کریں مساوات $x^2 - px + 8 = 0$ کے روٹس میں فرق 2 ہے

حل فرض کریں α اور β مساوات $x^2 - px + 8 = 0$ کے روٹس ہیں

یہاں $a = 1,\ b = -p$ اور $c = 8$

اب $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$ اور $\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-p)}{1} = p$

دی گئی شرط کے مطابق $\alpha - \beta = 2$

دونوں اطراف مربع کرنے سے ہمارے پاس

$$(\alpha-\beta)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \qquad \left[\because (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab\right]$$

$$\Rightarrow \quad p^2 - 4(8) = 4$$

$$\Rightarrow \quad p^2 - 32 = 4$$

$$\Rightarrow \quad p^2 = 36$$

$$\Rightarrow \quad p = \pm 6$$

(d) روٹس دیئے گئے تعلق کے تصدیق کرتے ہو (مثلاً $2\alpha + 5\beta = 7$, جبکہ α اور β دی گئی مساوسات کے روٹس ہیں)

مثال 5: k معلوم کریں اگر α اور β مساوات $x^2 - 5x + k = 0$ کے روٹس میں شرط $2\alpha + 5\beta = 7$ کی تصدیق کریں۔

حل دی گئی مساوات , $x^2 - 5x + k = 0$

یہاں $a = 1,\ b = -5$ ء $c = k$

فرض کریں α اور β دی گئی مساوات کے روٹس ہیں

$\because$ جبکہ $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$ اور $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$$\therefore \quad \alpha+\beta = -\frac{(-5)}{1} = 5$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 5 - \beta \qquad \text{(i)}$$

اور $\alpha\beta = \frac{k}{1} = k$

$\Rightarrow \quad \alpha\beta = k \qquad$ (ii)

دیا گیا ہے

$\because \quad 2\alpha + 5\beta = 7$

$\therefore \quad 2(5-\beta) + 5\beta = 7$ یعنی

$\Rightarrow \quad 10 - 2\beta + 5\beta = 7$

$\Rightarrow \quad 3\beta = -3$

$\Rightarrow \quad \beta = -1$

$\therefore$ مساوات (i) سے ہمیں پاس ہے

$\alpha = 5-(-1) = 5+1 = 6,$

k کی قیمت معلوم کرنے کے لیئے α اور β کے قیمتیں مساوات (2) میں رکھنے سے ہمیں جلد

$k = 6(-1) = -6$

$\Rightarrow \quad k = -6$

(e) روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب دیئے گئے عدد کے برابر ہو

مثال 6: k معلوم کریں اور مساوات $6x^2 - 3kx + 5 = 0$ کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب $\frac{5}{6}$. کے برابر ہے۔

حل فرض کریں α اور β مساوات $6x^2 - 3kx + 5 = 0,$ کے روٹس میں تو

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3k)}{6} = \frac{k}{2} \qquad \text{(i)}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{5}{6} \qquad \text{(ii)}$$ اور

دی گئی شرط کے مطابق کہ روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب $\frac{5}{6}$. کے برابر ہیں

$\alpha + \beta = \alpha\beta = \frac{5}{6}$ یعنی

$\frac{k}{2} = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow \quad k = \frac{5}{3},$

بس, $k = \frac{5}{3}$ پر دی گئی مساوات کے روٹس کا مجموعہ اور روٹس کا حاصل ضرب طور. $\frac{5}{6}$ کے برابر ہے۔

مشق 20.3 EXERCISE

1. حل کئے بغیر مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس کا مجموعہ اور روٹس کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $x^2 - x - 1 = 0$ (ii) $2x^2 - 3x - 4 = 0$

(iii) $x^2 - \frac{3}{4}a^2 = ax$ (iv) $7x^2 - 5kx + 7k = 0$

2. m کی قیمت معلوم کریں اگر

(i) مساوات $x^2 + (3m-7)x + 5m = 0$ کے روٹس کا مجموعہ اس کے روٹس کے حاصل ضرب کا $\frac{3}{2}$ گنا ہے

(ii) مساوات $2x^2 - 3x + 4m = 0$ کے روٹس کا مجموعہ اس کے روٹس کے حاصل ضرب کا 6 گنا ہے۔

3. p کی قیمت معلوم کریں اگر

(i) مساوات $x^2 - px + 6 = 0$ کے روٹس کے مربعوں کا مجموعہ 13 کے برابر ہے۔

(ii) مساوات $x^2 - 2px + (2p-3) = 0$ کے روٹس کے مربعوں کا مجموعہ 6 ہے

4. m کی قیمت معلوم کریں اگر

(i) مساوات $x^2 - 5x + 2m = 0$ کے روٹس میں 1 کا فرق ہے۔

(ii) مساوات $x^2 - 8x + m + 2 = 0$ کے روٹس میں 2 کا فرق ہے۔

5. k کی قیمت معلوم کریں اگر

(i) مساوات $5x^2 - 7x + k - 2 = 0$ کے روٹس تعلق $2\alpha + 5\beta = 1$ کی تصدیق کرتے ہیں۔

(ii) مساوات $3x^2 - 2x + 7k + 2 = 0$ کے روٹس تعلق $7\alpha - 3\beta = 18.$ کی تصدیق کرتے ہیں۔

6. p کی قیمت معلوم کریں اگر مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس کا مجموعہ اور روٹس کا حاصل ضرب برابر ہیں۔

(i) $(2p+3)x^2 + (7p-5)x + (3p-10) = 0$ (ii) $4x^2 - (5p+3)x + 17 - 9p = 0$

20.4 دو درجی مساوات کے روٹس کے سیمیٹرک تفاعل

دو درجی مساوات کے روٹس کے سیمیٹرک تفاعل کی تعریف

فرض کریں α اور β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں α اور β کا تفاعل f سیمیٹرک تفاعل کہا جاتا ہے کہ جب α اور β کو آپس میں تبدیل کیا جائے تو تفاعل تبدیل نہیں ہو ویسا ہی رہتا ہے۔ یعنی $f(\alpha,\beta) = f(\alpha,\beta)$

$\alpha + \beta$ اور (α,β)، α اور β کے پرائمری سیمیٹرک تفاعل کے طور پر جانے جاتے ہیں۔

نوٹ کریں کہ $\alpha - \beta \neq \beta - \alpha$ لہذا $\alpha - \beta$ روٹس کا سیمیٹرک تفاعل نہیں ہے۔

روٹس کے سیمیٹرک کے تفاعل کی قیمت دو درجی مساوات کے عددی سروں کی صورت میں $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ اور $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ اور $\alpha + \beta$ اور $\alpha\beta$ کی جا سکتی ہے

صورت میں بیان کرتے ہوئے سمیٹرک تفاعل کی مثالیں نیچے دی گئی ہیں۔

- $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
- $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=\ (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\ -2(\alpha\beta)^2$

مثال $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta,$ کی قیمت معلوم کریں جب کہ α=2 اور β=3 اور ثابت کریں کہ یہ α اور β کا سمیٹرک تفاعل ہے جبکہ α اور β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں۔

حل فرض کریں $f(\alpha,\beta)=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta,$

دیا گیا ہے $\alpha=2$ اور $\beta=3$

$$\therefore\qquad f(2,3)=2^2+3^2+(2)(3)=4+9+6=19,$$

اب

$$f(\beta,\alpha)=\beta^2+\alpha^2+\beta\alpha=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=f(\alpha,\beta)$$

$$\because\qquad f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$$

$\therefore$ f سمیٹرک تفاعل ہے

دیا گیا اظہاریہ روٹس α اور β کا سیمٹرک تفاعل ہے پس ثابت ہوا

20 4 (ii) سمیٹرک تفاعل کو گرائیفکلی (Graphically) ظاہر کریں۔

20.4.1 میں ہم پہلے ہی دو درجی مساوات کے روٹس کے سمیٹرک تفاعل کی وضاحت کر چکے ہیں۔ جیسے

$\alpha+\beta,\alpha\beta,\alpha^2+\beta^2,\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta,\alpha^3+\beta^3$ وغیرہ

جب ایک سمیٹرک تفاعل کو مستقل کے مساوی ہوتا ہے $c\in R$ ہمیں ایسا سمیٹرک مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اور سمیٹرک مساوات کے روٹس ہوں لکھے جاسکتے ہیں $f(\alpha,\beta)=c.$

ہر مساوات کو گرافیکلی (Graphically) ظاہر کیا جاسکتا ہے باطور تمام نقاط کا سیٹ $G(f)$ کی وضاحت کی گئی ہے۔

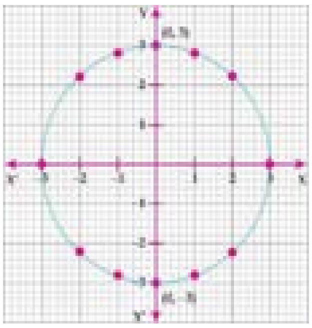
$$G(f)=\{(\alpha,\beta)\mid f(\alpha,\beta)=c\wedge\alpha,\beta\in R\}$$

مثال سمیٹر کمساوات $\alpha^2+\beta^2=9$ گرافیکلی (Graphically) ظاہر کریں اور گراف بنائیں۔

حل دیا گیا ہے کہ

$$\therefore\qquad \alpha^2+\beta^2=9$$

$$\Rightarrow\qquad \beta=\pm\sqrt{9-\alpha^2}$$



گراف بنانے کے لیئے ہم کچھ نقاط لیتے ہیں α کی مختلف قیمتیں رکھنے سے β کے قیمتیں ملتی ہیں۔

α	0	1	2	3	−1	−2	−3
β	±3	±2.828	±2.2360	0	±2.828	±2.2360	0

لہذا سمیٹرک تفاعل $\alpha^2+\beta^2$ دائرے کو ظاہر کرتا ہے جب c=9 کے برابر ہوتا ہے۔

20.4. (iii) دو درجی مساوات کے روٹس کے سمیٹرک تفاعل کو اس کے عددی سروی کی لحاظ سے حل کرنا

فرض کریں کہ α اور β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\alpha+\beta=-\ a \qquad \text{(ii)}$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \qquad \text{(iii)}$$

اوپر مساوات (ii) اور (iii) دو درجی مساوات (i) کے پرائمری سمیٹرک تفاعل کو ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1: اگر α,β مساوات $x^2-px+q=0$ کے روٹس ہیں۔ α اور β کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $\alpha^2+\beta^2$ $\qquad$ (ii) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$

حل: α اور β $\quad x^2-px+q=0$ کے روٹس ہیں

$a=1,\quad b=-p$ اور $c=q$

$$\therefore \qquad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(-p)}{1}=p$$

اور $\qquad \alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{q}{1}=q$ $\qquad$ اور

یہاں

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=(p)^2-2q \qquad (\because \alpha+\beta=p \text{ اور } \alpha\beta=q)$$

$$=p^2-2q$$

(ii)

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{p^2-2q}{q} \qquad (\because \alpha+\beta=p \text{ اور } \alpha\beta=q)$$

EXERCISE 20.4 مشق

1. اگر α,β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں مندرجہ ذیل سمیٹرک تفاعل کو $\alpha+\beta$ اور $\alpha\beta$ کی صورت بیان کریں۔

(i) $(\alpha-\beta)^2$ (ii) $(\alpha+\beta)^3$ (iii) $\alpha^2\beta^{-1}+\beta^2\alpha^{-1}$

(iv) $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$ (v) $\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}$ (vi) $\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\right)^2$

2. اگر α,β مساوات $2x^2-3x+7=0,$ کے روٹس ہیں۔
مندرجہ ذیل سمیٹرک تفاعل کی قیمت معلوم کریں

(i) $\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)^2$ (ii) $\dfrac{\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\beta}{\alpha^2}$ (iii) $\dfrac{1}{a\alpha+1}+\dfrac{1}{a\beta+1}$

3. اگر α,β مساوات $px^2+qx+q=0, p\neq 0,$ کے روٹس ہیں تو $\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ کی قیمت معلوم کریں

4. سمیٹرک تفاعل $\alpha+\beta=8$ کو گرافیکلی (Graphically) ظاہر کریں جب کہ α اور β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں

20.5 دو درجی مساوات کی تشکیل

20.5.(i) کلیہ تشکیل دینا, x^2- (روٹس کا مجموعہ) $x+$ (روٹس کا حاصل ضرب) $=0$ دیئے گئے روٹس سے دو درجی مساوات تشکیل دینا۔

فرض کریں α,β دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کے روٹس ہیں۔

تو $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ اور $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

اب مساوات (i) کو دوبارہ لکھیں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے

بشرطیکہ $a\neq 0$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-(\text{روٹس کا مجموعہ})x+(\text{روٹس کی حاصل ضرب})=0$$

جبکہ $\dfrac{-b}{a}$ اور $\dfrac{c}{a}$ الترتیب روٹس کے مجموعہ اور روٹس کے حاصل ضرب کو ظاہر کرتے ہیں

یعنی اب اس کو واضح طور پر یوں لکھا جاسکتا ہے۔ جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے

$x^2-Sx+P=0$ جبکہ S اور P بالترتیب دی گئی دو درجی مساوات کے روٹ کا مجموعہ اور روٹس کا حاصل ضرب کو ظاہر کرتے ہیں۔

مثال: مساوات تشکیل دیں جس کے روٹس ہیں

(i) $-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{7}$ (ii) $7\pm 2\sqrt{5}$

حل (i) فرض کریں $\alpha = -\dfrac{4}{5}$ اور $\beta = \dfrac{3}{7}$

$\therefore \quad S = \alpha + \beta = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{-28+15}{35} = \dfrac{-13}{35}$

اور $P = \alpha\beta = \left(-\dfrac{4}{5}\right)\left(\dfrac{3}{7}\right) = \dfrac{-12}{35}$

جب روٹس معلوم ہیں تو مساوات ہوگی

$x^2 - Sx + P = 0$

i.e, یعنی $x^2 - \left(\dfrac{-13}{35}\right)x + \left(\dfrac{-12}{35}\right) = 0$

$\Rightarrow \quad 35x^2 + 13x - 12 = 0.$

مطلوبہ مساوات ہے

حل (ii) فرض کریں $\alpha = 7 + 2\sqrt{5}$ اور $\beta = 7 - 2\sqrt{5}$

$\therefore \quad S = \alpha + \beta = 7 + 2\sqrt{5} + 7 - 2\sqrt{5} = 14$

اور $P = \alpha\beta = \left(7 + 2\sqrt{5}\right)\left(7 - 2\sqrt{5}\right) = 49 - 20 = 29$

جب روٹس معلوم ہیں تو مساوات ہوگی

$x^2 - Sx + P = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 14x + 29 = 0,$ مطلوبہ مساوات ہے

20.5.(ii) دو درجی مساوات تشکیل دیں جن کے روٹس کی اقسام یہ ہیں

(a) $2\alpha + 1, 2\beta + 1$ (b) α^2, β^2 (c) $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$

(d) $\dfrac{\alpha}{\beta}, \dfrac{\beta}{\alpha}$ (e) $\alpha + \beta, \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta},$

جبکہ α,β دو درجی مساوات کے روٹس ہیں

مثال: اگر α,β دو درجی مساوات $x^2 - 5x + 6 = 0$ کے روٹس ہیں۔ مساوات تشکیل دیں جس کے روٹس ہیں

(i) $2\alpha + 1, 2\beta + 1$ (ii) α^2, β^2 (iii) $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$

(iv) $\dfrac{\alpha}{\beta}, \dfrac{\beta}{\alpha}$ (v) $\alpha + \beta, \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$

حل (i): چونکہ α,β مساوات $x^2 - 5x + 6 = 0$ کے روٹس ہیں $a = 1, b = -5$ اور $c = 6$

یہاں

$\therefore \quad \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{6}{1} = 6,$ اور $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{(-5)}{1} = 5$

مطلوبہ مساوات کے روٹس $2\alpha + 1$ اور $2\beta + 1$ ہیں

اب ہم روٹس کا مجموعہ اور روٹس کا حاصل ضرب معلوم کرتے ہیں

$S = (2\alpha+1)+(2\beta+1)$
$S = 2(\alpha+\beta)+2$
$S = 2(5)+2$ $\qquad (\because\ \alpha+\beta=5)$
$S = 10+2=12$
$P = (2\alpha+1)(2\beta+1)$ $\qquad$ یہاں
$P = 4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$
$P = 4(6)+2(5)+1$ $\qquad (\because \alpha\beta=6$ ، $\alpha+\beta=5)$
$P = 24+10+1=35$
$x^2+12x+35=0$ مطلوبہ مساوات ہے

حل **(ii):** مطلوبہ مساوات کے روٹس α^2 اور β^2 ہیں۔

$S=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(5)^2-2(6)=25-12=13,(\because \alpha+\beta=5 \text{ and } \alpha\beta=6)$
اور $P=\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(6)^2=36$
$x^2-Sx+P=0$
$\therefore \quad x^2-13x+36=0,$
مطلوبہ مساوات ہے

حل **(iii):** مطلوبہ مساوات کے روٹس $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ ہیں

$S=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{5}{6},$ $\qquad (\because \alpha\beta=6$ اور $\alpha+\beta=5)$
اور $P=\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{6}$
$x^2-Sx+P=0$
$\therefore \quad x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$
لہذا $\Rightarrow \quad 6x^2-5x+1=0,$
مطلوبہ مساوات ہے

حل **(iv):** مطلوبہ مساوات کے روٹس $\frac{\alpha}{\beta}$ اور $\frac{\beta}{\alpha}$ ہیں

$S=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$ $\qquad (\because \alpha\beta=6$ اور $\alpha+\beta=5)$
$=\frac{25-2(6)}{6}=\frac{25-12}{6}=\frac{13}{6},$
اور $P=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{6}{6}=1$
$x^2-Sx+P=0$
$\therefore \quad x^2-\frac{13}{6}x+1=0$
$\Rightarrow \quad 6x^2-13x+6=0,$
مطلوبہ مساوات ہے

حل (v) مطلوبہ مساوات کے روٹس $\alpha+\beta$ اور $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ہیں۔

$$S=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)+\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)$$
$$=5\left(1+\frac{1}{6}\right)=5\left(\frac{7}{6}\right)=\frac{35}{6} \qquad (\because \alpha\beta=6 \text{ اور } \alpha+\beta=5)$$
$$P=(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{25}{6} \qquad (\because \alpha\beta=6 \text{ اور } \alpha+\beta=5)$$
$$x^2-Sx+P=0$$
$$\therefore \quad x^2-\frac{35}{6}x+\frac{25}{6}=0$$
$$\Rightarrow \quad 6x^2-35x+25=0,$$
مطلوبہ مساوات ہے

20.5.(iii) α، β کی قیمت معلوم کریں جبکہ $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ مساوات کے روٹس ہیں

مثال: اگر $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ مساوات $x^2-6x+8=0$ کے روٹس ہیں α اور β کی قیمت معلوم کریں

حل: چونکہ $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ مساوات $x^2-6x+8=0$ کے روٹس ہیں

یہاں $a=1$ ، $b=-6$ اور $c=8$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{b}{a}=-\left(\frac{-6}{1}\right)=6,$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6$$
$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta=6\alpha\beta \qquad \ldots \qquad \text{(i)}$$
اور
$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{c}{a}=\frac{8}{1}=8$$
$$\Rightarrow \quad \alpha\beta=\frac{1}{8} \qquad \text{(ii)}$$
مساوات (i) سے
$$\beta=6\left(\frac{1}{8}\right)-\alpha=\frac{3-4\alpha}{4} \qquad \text{(iii)}$$

مساوات (ii) میں β کی قیمت رکھنے سے

$$\alpha\left(\frac{3-4\alpha}{4}\right)=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8\alpha}{4}(3-4\alpha)-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 2\alpha(3-4\alpha)-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 6\alpha-8\alpha^2-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 8\alpha^2-6\alpha+1=0$$

$$\Rightarrow \quad 8\alpha^2-4\alpha-2\alpha+1=0$$

$$\Rightarrow \quad 4\alpha(2\alpha-1)-1(2\alpha-1)=0$$

$$\Rightarrow \quad (2\alpha-1)(4\alpha-1)=0$$

$2\alpha-1=0$ یا $4\alpha-1=0$

$\Rightarrow \quad \alpha=\frac{1}{2}$ یا $\alpha=\frac{1}{4},$

مساوات (iii) ہمارے پاس

$$\beta=\frac{3-4\left(\frac{1}{2}\right)}{4}=\frac{1}{4} \quad \text{or} \quad \beta=\frac{3-4\left(\frac{1}{4}\right)}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

لہٰذا $\alpha=\frac{1}{2}$ اور $\beta=\frac{1}{4}$ یا $\alpha=\frac{1}{4}$ اور $\beta=\frac{1}{2}$

مشق 20.5

1. مساوات تشکیل دیں جس روٹس ہے

(i) $-2, 3$ (ii) ω, ω^2 (iii) $2+i, 2-i$ (iv) $2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$

2. اگر β اور α مساوات $6x^2-3x+1=0$ کے روٹس ہیں۔مساوات تشکیل دیں جس روٹس ہے

(i) $2\alpha+1, 2\beta+1$ (ii) α^2, β^2 (iii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

(iv) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (v) $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

3. مساوات معلوم کریں جس کے روٹس مساوات $px^2-qx+r=0, p\neq 0$ کے روٹس کے معکوس ہیں

4. مساوات معلوم کریں جس کے روٹس مساوات $x^2-px+q=0$ کے روٹس کے دوگنا ہیں

5. مساوات معلوم کریں جس کے روٹس مساوات $px^2+qx+r=0$ کے روٹس کے 2 زیادہ ہو

6. شرط معلوم کریں کہ مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کا ایک روٹ ہو سکتا ہے

(i) دوسرے کا تین گنا (ii) دوسرے کا بھی معکوس

(iii) دوسرے کا مربع (iv) دوسرے کا ضربی معکوس

20.6 اعلیٰ درجے کی مساوات کو دو درجی شکل تک کم کرنا

20.6.(a) مکعب مساوات کو حل کریں اگر مساوات کا ایک روٹ دیا گیا ہو

فرض کریں $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ مکعب مساوات ہے اور اس روٹ α ہے

فرض کریں کہ $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ کا ایک روٹ α ہے تو:

$$f(x)=0$$

$f(x)=(x-\alpha)\cdot f_1(x)$ جبکہ $f_1(x)$ دو درجی اظہاریہ ہے

مثال: $x^3-6x^2+11x-6=0$ کو حل کریں اگر اس مساوات کا ایک روٹ 1 ہے

حل: $x^3-6x^2+11x-6=0$

پر دیا گیا ہے کہ ایک روٹ 1 ہے

یعنی $x=1$ ضرب دیندہ جز ہے

ترکیبی تقسیم کے طریقے سے

$$\begin{array}{r|rrr|r} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & \downarrow & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$
باقی = 0

نیچے ہمارے پاس دو درجی مساوات ہے

$$x^2-5x+6=0$$
$$\Rightarrow x^2-2x-3x+6=0$$
$$\Rightarrow x(x-2)-3(x-2)=0$$
$$\Rightarrow (x-2)(x-3)=0$$
i.e, $x-2=0$ or $x-3=0$

$\Rightarrow x=2$ or $x=3$

حل سیٹ $=\{1,2,3\}$

20.6.(b) چار درجی (Biquadratic) مساوات حل کرنا اگر مساوات کے دو حقیقی روٹس دیئے گئے ہوں

فرض کریں $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0, a_0\neq 0$ چار درجی مساوات ہے اور α اور β اس کے دو روٹس ہیں

اگر $f(x)=0$ کے دو روٹس α اور β ہیں تو

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\cdot f_1(x)$$

جبکہ $f_1(x)$ دو درجی اظہاریہ ہے

مثال: چار درجی مساوات $x^4-9x^3+19x^2+9x-20=0$ کے بقیہ دو روٹس معلوم کریں اگر اس کے دو روٹس 5 اور 1

حل: دی گئی چار درجی مساوات $x^4-9x^3+19x^2+9x-20=0$ ہے جس کے روٹس 1 اور 5 دیئے گئے ہیں یعنی ضرب دہندہ 5 اور 1 ہیں

طریقہ ترکیبی تقسیم سے ہمیں ملا

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 5 & 1 & -9 & 19 & 9 & -20 \\ & \downarrow & 5 & -20 & -5 & 20 \\ \hline 1 & 1 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ & \downarrow & 1 & -3 & -4 & \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 0 & \end{array}$$
باقی = 0، باقی = 0

اس طرح ہمارے پاس دو درجی مساوات ہے

$$x^2-3x-4=0$$
$$\Rightarrow x^2-4x+x-4=0$$
$$\Rightarrow x(x-4)+1(x-4)=0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x+1)=0$$
یعنی $x-4=0$ یا $x+1=0$

$\Rightarrow x=4 \quad \Rightarrow x=-1$

اس لیئے بقیہ دو روٹس 4 اور -1 ہیں

مشق 20.6

1. مکعب مساوات کے بقایا دو روٹس معلوم کریں جبکہ اس کا ایک روٹ دیا گیا ہے

(i) $2x^3-x^2-2x+1=0$ اور $x=1$

(ii) $x^3-4x^2+x+6=0$ اور $x=3$

(iii) $x^3-28x+48=0$ اور $x=2$

2. چار درجی مساوات کے بقایا دو روٹس معلوم کریں۔ جب کہ اس کے دو روٹس دیئے گئے ہیں

(i) $12x^4-8x^3-7x^2+2x+1=0$ اور $x=1,-\frac{1}{2}$

(ii) $x^4+4x^2-5=0$ ؛ $x=1,-1$

(iii) $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$ اور $x=3,-4$

3. m کی قیمت معلوم کریں اور مساوات $2x^3-3mx^2+9=0$ کے بقایا روٹس معلوم کریں اگر ایک روٹ 3 ہے

4. اگر مساوات $x^3-3ax^2-x+6=0$ کا ایک روٹ 1 ہے تو a کی قیمت معلوم کریں اور اس کے بقایا روٹس بھی معلوم کریں

5. a اور b کی قیمت معلوم کریں اگر مساوات $x^4-ax^2+bx+252=0$ دو روٹس 6 اور -2 ہیں۔ اس کے بقایا دو روٹس بھی معلوم کریں

20.7 ہمزاد مساواتیں (Simultaneous Equations):

دو یا دو سے زیادہ مساوات ایک ساتھ جائیں تو اسے ہمزاد مساواتوں کا نظام کہتے ہیں۔ دو نا معلوم تغیرات کی قیمت معلوم کرنے کے لیئے ہمیں مساواتوں کے ایک جوڑے کی ضرورت ہے

تمام مترتیب جوڑوں (x,y) کا سیٹ جو مساوات کے نظام کی تسلی کرتے ہیں نظام کا حل سیٹ کہلاتے ہیں

20.7.(i)(a) دو متغیرات والي دو مساواتوں کو حل کرنا جب ایک مساوات یک درجی اور دوسری دو درجی ہو

مساوات کے نظام کو حل کرنے کا مکمل طریقہ جب ایک مساوات ایک درجی دوسری دو درجی ہو مثالوں کی حل کرکے بجی دکھایا گیا ہے

مثال 1: $2x+y=10$ اور $4x^2+y^2=68$ مساواتوں کے نظام کو حل کریں

حل:

$$2x+y=10 \qquad \text{(i)}$$
$$4x^2+y^2=68 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (i) سے

$$y=10-2x \qquad \text{(iii)}$$

y کی قیمت کو مساوات (ii) میں رکھنے سے y

$$4x^2+(10-2x)^2=68$$
$$\Rightarrow \quad 4x^2+100-40x+4x^2-68=0$$
$$\Rightarrow \quad 8x^2-40x+32=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x - x + 4 = 0$$

$$(x-4)(x-1) = 0$$

$\Rightarrow \quad x - 4 = 0$ یا $x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 4$ یا $x = 1$

x کی ان قیمتوں کو مساوات (iii) میں رکھنے سے

جب $x = 4$ تو $y = 10 - 2(4) = 2$

جب $x = 1$ تو $y = 10 - 2(1) = 8$

پس حل سیٹ $\{(4,2),(1,8)\}$ ہے

مثال 2: $3x - 2y = 7$ اور $xy = 20$ مساوات کا نظام حل کریں

حل:

$3x - 2y = 7 \qquad$ (i)

اور $xy = 20 \qquad$ (ii)

مساوات (i) سے ہمارے پاس

$x = \dfrac{7 + 2y}{3} \qquad$ (iii)

x کی قیمت کو مساوات (ii) میں رکھنے سے

$$\left(\frac{7+2y}{3}\right)y = 20$$

$$\Rightarrow \quad 7y + 2y^2 = 20 \times 3 = 60$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2 + 7y - 60 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2 - 8y + 15y - 60 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2y(y-4) + 15(y-4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (y-4)(2y+15) = 0$$

یعنی $y - 4 = 0$ یا $2y + 15 = 0$

$\Rightarrow \quad y = -\dfrac{15}{2} \qquad \Rightarrow \quad y \quad 4$

y کی قیمت کو مساوات (iii) رکھنے سے

جب $y = 4$ تو $x = \dfrac{7 + 2(4)}{3} = \dfrac{15}{3} = 5$

جب $y = -\dfrac{15}{2}$ تو $x = \dfrac{7 + 2\left(\dfrac{-15}{2}\right)}{3} = -\dfrac{8}{3}$

پس حل سیٹ $\left\{(5,4),\left(-\dfrac{8}{3}, -\dfrac{15}{2}\right)\right\}$ ہے

20.7.(i) (b) جب دونوں مساواتیں دو درجی ہو (When both the equations are quadratic):

ہم نظام کو حل کرنے کے طریقے وضاحت کرتے ہیں مندرجہ ذیل مثال کے ذریعے جب دونوں مساوات دو درجی ہوں

مثال 3: $x^2+y^2=4$ اور $2x^2-y^2=8$ مساواتوں کے نظام کو حل کریں

حل:

$x^2+y^2=4 \qquad \text{(i)}$

$2x^2-y^2=8 \qquad \text{(ii)}$ اور

y^2 خارج کرنے کے لیئے مساوات (i) اور (ii) کو جمع کرنے سے ہمیں پاس

$\therefore \quad 3x^2=12$

$\Rightarrow \quad x^2=4$

$\Rightarrow \quad x=\pm 2,$

$\therefore$ مساوات (i) میں $x=\pm 2$ رکھنے سے ہمیں ملا

$(2)^2+y^2=4$

$\Rightarrow \quad 4+y^2=4$

$\Rightarrow \quad y^2=4-4=0$

$\Rightarrow \quad y=0$

$(-2)^2+y^2=4$

$\Rightarrow \quad 4+y^2=4$

$\Rightarrow \quad y^2=4-4=0$

$\Rightarrow \quad y=0$

پس حل سیٹ $\{(-2,0),(2,0)\}$ ہے

مثال 4: $x^2+y^2=13$ اور $xy=6$ مساوات کے نظام حل کریں

حل:

$x^2+y^2=13 \quad \ldots \quad \text{(i)}$

$xy=6 \quad \ldots \quad \text{(ii)}$ اور

مساواتوں کے اس اقسام میں ہم مستقل کو خارج کرتے ہیں

مساوات (i) کو 6 سے اور مساوات (ii) کو 13 سے ضرب دینے سے ہمیں ملا

$\therefore \quad 6x^2+6y^2=78 \quad \ldots \quad \text{(iii)}$

$13xy=78 \quad \ldots \quad \text{(iv)}$ اور

مساوات (iii) اور (iv) کو تفریق کرنے سے

$6x\ -13xy+6y\ =0$

$\Rightarrow \quad 6x^2-9xy-4xy+6y^2=0$

$\Rightarrow \quad 3x(2x-3y)-2y(2x-3y)=0$

$2x-3y=0$ یا $3x-2y=0$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{3y}{2}$ یا $x=\dfrac{2y}{3}$

پس ہمارے مندرجہ ذیل دو نظام ہیں

$$\left.\begin{aligned} xy &= 6 \\ x &= \frac{3y}{2} \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

اور

$$\left.\begin{aligned} xy &= 6 \\ x &= \frac{2y}{3} \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

نظام A میں

$$\left(\frac{3y}{2}\right)y = 6, \qquad \left(\because x = \frac{3y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 3y^2 = 2\times 6$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{2\times 6}{3} = 4$$

$$y = \pm 2$$

جب $y = \pm 2$ تو $x = \frac{3}{2}(\pm 2) = \pm 3$

نظام B میں

$$\left(\frac{2y}{3}\right)\cdot y = 6 \qquad \left(\because x = \frac{2y}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2 = 3\times 6$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{3\times 6}{2} = 9$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm 3,$$

جب $y = \pm 3$ تو $x = \frac{2}{3}(\pm 3) = \pm 2$

پس حل سیٹ $\{(3,2),(-3,-2),(2,3),(-2,-3)\}$. ہے

20.7.(ii) دو درجی مساوات سے متعلق روز مرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1: دو متواتر مثبت صحیح اعداد معلوم کریں جن کا حاصل ضرب 72 ہے

حل: فرض کریں x اور $x+1$ متواتر صحیح اعداد ہیں

دی گئی شرط کے مطابق

$$x(x+1) = 72$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + x - 72 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+9)(x-8) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x+9 = 0 \quad \text{یا} \quad x-8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -9 \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

$x = -9$ کا منفی عدد ہونا نظر انداز کر دیں

8 اور 9 مطلوبہ متواتر صحیح اندازہیں

مثال 2: مستطیل پلاٹ کا رقبہ 320 مربع میٹر ہے۔ پلاٹ کی چوڑائی پلاٹ کی لمبائی 4 میٹر کم ہے۔ پلاٹ کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں

حل: فرض کریں پلاٹ ک لمبائی x ہے تو چوڑائی $x-4$ ہے

دیا گیا ہے

پلاٹ کا رقبہ $= 320\ m^2$ مربع میٹر

$$\Rightarrow \quad x(x-4) = 320 \qquad [\text{رقبہ} = \text{لمبائی} \times \text{چوڑائی مربع میٹر}]$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x - 320 = 0$$

$\Rightarrow \quad x^2 - 20x + 16x - 320 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x-20) + 16(x-20) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-20)(x+16) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 20 = 0$ یا $x + 16 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 20 \quad \Rightarrow \quad x = -16$

$x = -16$ کو نظر انداز کریں کیونکہ لمبائی ہمیشہ مثبت ہوتی ہے

پس پلاٹ کی لمبائی 20 میٹر ہے اور پلاٹ کی چوڑائی 16 میٹر

مشق 20.7

مندرجہ ذیل مساواتوں کے نظام کا حل کریں

1. $2x - y = 3$ یا $x^2 + y^2 = 2$
2. $2x + y = 4$ یا $x^2 - 2x + y^2 = 0$
3. $\dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} = 2$ یا $4x + 3y = 25$
4. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ و $x^2 + (y+1)^2 = 10$
5. $x^2 + y^2 = 25$ یا $(4x-3y)(x-y-5) = 0$
6. $x^2 + y^2 = 16$ یا $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$
7. $x^2 + y^2 = 5$ یا $xy = 2$
8. $x^2 + xy = 5$ یا $x^2 - 2xy = 2$
9. $x + \dfrac{4}{y} = 1$ یا $y + \dfrac{4}{x} = 25$
10. 12 کو دو حصوں میں اس طرح تقسیم کریں کہ ان کے مربعوں کا مجموعہ ان کے حاصل ضرب سے 4 زیادہ ہے۔
11. نماز کے ہال کی لمبائی اس کی چوڑائی سے 5 میٹر زیادہ ہے اگر ہال کا رقبہ 36 مربع میٹر ہے تو ہال کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں۔
12. دو مثبت اعداد کے مربعوں کا مجموعہ 100 ہے ایک عدد دوسرے عدد سے 2 زیادہ ہے۔ اعداد معلوم کریں
13. قائمۃ الزاویہ مثلث کے قاعدے کی لمبائی عمود کی لمبائی سے 3cm زیادہ ہے۔ جبکہ مثلث کا وتر 15cm ہے تو قاعدہ اور عمود کی لمبائی معلوم کریں۔
14. ایک متماثل الساقین مثلث کا احاطہ 36 سنٹی میٹر ہے مثلث دو غیر مساوی اضطلاع کا ارتفاع 12 سنٹی میٹر ہے۔ مثلث کی تینوں اطراف کی لمبائی معلوم کریں۔
15. دو اعداد کا فرق 5 ہے اور ان کے مربعوں کے مربعوں کا فرق 275 ہے اعداد معلوم کریں

اعادہ مشق 20

1. کثیر انتخابی سوالات

درست جواب پر دائرہ لگائیں

i. اگر p اور q مساوات $2x^2+5x+3=0$ کے روٹس ہیں تو $p+q =$ ________

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{5}{2}$ (d) $-\frac{5}{2}$

ii. اگر $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ کے روٹس ہیں تو $\alpha+\beta =$ ______

(a) $-\frac{b}{a}$ (b) $\frac{b}{c}$ (c) $-\frac{b}{c}$ (d) $-\frac{c}{b}$.

iii. اگر $(p+1)x^2+(2p+3)x+(3p+4)=0$ کے روٹس کا مجموعہ -1 ہے تو روٹس کا حاصل ضرب ______ ہے

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

iv. $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ کے روٹس کی نوعیت معلوم کی جاتی بذریعہ: ________

(a) روٹس کا مجموعہ (b) روٹس کا حاصل ضرب

(c) فرق کنندہ (d) ان میں کوئی نہیں

v. اگر دو درجی مساوات کا روٹس کا مجموعہ $\frac{b}{a}$ اور روٹس کا حاصل ضرب $\frac{c}{a}$ ہے تو مساوات ہے: ________

(a) $ax^2+bx+c=0$ (b) $ax^2+bx-c=0$

(c) $ax^2-bx+c=0$ (d) $ax^2-bx-c=0$

vi. مطلوبہ مساوات ________ ہے جس کے روٹس معکوس ہیں $ax^2+bx+c=0$ کے روٹس کے

(a) $ax^2+bx+c=0$ (b) $cx^2+bx+a=0$

(c) $cx^2+ax+b=0$ (d) $cx^2-bx-a=0$

vii. اگر $x^2-2x-15=0$ کے روٹس α اور β ہیں تو $\alpha^2+\beta^2$ کی قیمت ________ ہے

(a) 34 (b) -34 (c) 26 (d) -26

viii. اگر دو درجی مساوات کا $\Delta=b^2-4ac$ جس کے حقیقی عددی سر مکمل مربع ہیں تو روٹس ہیں ________

(a) حقیقی اور مساوی (b) حقیقی، ناطق اور غیر مساوی

(c) حقیقی، غیر ناطق اور غیر مساوی (d) غیر حقیقی

ix. اگر دو درجی مساوات کا ایک روٹ $2+\sqrt{3}$ ہے تو دوسرا روٹ ________ ہوگا

(a) 2 (b) $-2+\sqrt{3}$ (c) $2-\sqrt{3}$ (d) $-2-\sqrt{3}$

x. دو درجی مساوات ________ جس کے روٹس کمپلیکس مکعب روٹ ہے

(a) $x^2-x-1=0$ (b) $x^2-x+1=0$

(c) $x^2+x+1=0$ (d) $x^2+x-1=0$

2. مندرجہ ذیل مساوات کے روٹس کی نوعیت پر بحث کریں۔

i) $x^2-7x+12=0$ ii) $x^2-14x+49=0$

iii) $x^2-x+7=0$ iv) $x^2-5=0$

3. k کس قیمت کے لیئے مساوات $x^2+kx+4=0$

i) مساوی روٹس ہیں ii) کمپلیکس روٹس ہیں

iii) حقیقی روٹس ہیں iv) ناطق روٹس ہیں

4. 729 کے مکعب روٹس معلوم کریں

5. مندرجہ ذیل دو درجی مساواتوں کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کریں

i) $x^2-7x+29=0$ ii) $x^2-px+q=0$

iii) $7x-8=5x^2$ iv) $11x=9x^2-28$

6. دو درجی مساوات کے سمیٹرک تفاعل کی تعریف کریں

7. دو درجی مساوات تشکیل دیں جس کے روٹس $1-\sqrt{3}$ اور $1+\sqrt{3}$ ہیں

8. مساوات معلوم کریں جس کے روٹس مساوات $x^2-10x+16=0$ کے روٹس کے معکوس ہیں۔

9. مندرجہ ذیل مساوات کے نظام کو حل کریں۔

i) $x^2+y^2=13$, $x+y=5$ ii) $x^2+y^2=37$, $2xy=12$

خلاصہ

- دو درجی اظہاریے $ax^2+bx+c, a\neq 0$ کا فرق کنندہ $\Delta=b^2-4ac$ ہے
  - i. اگر $\Delta=b^2-4ac>0$ تو روٹس حقیقی اور غیر مساوی ہیں
  - ii. اگر $\Delta=b^2-4ac<0$ تو روٹس غیر حقیقی ہیں (کمپلیکس یا غیر حقیقی)
  - iii. اگر $\Delta=b^2-4ac=0$ تو روٹس ناطق اور مساوی ہیں، پر ایک $-\frac{b}{2a}$ کے برابر ہے
  - iv. اگر a,b,c ناطق ہیں اور $\Delta=b^2-4ac$ مکمل مربع ہے تو روٹس ناطق اور غیر مساوی ہیں ورنہ غیر ناطق
- اکائی مکعب روٹس 1، ω اور ω^2 ہیں
- اکائی مکعب روٹس کی خصوصیات ہیں
  - i. ہر اکائی کا مکعب کمپلیکس روٹ دوسرے کا مربع ہوتا ہے
  - ii. اکائی کے تینوں مکعب روٹس کا مجموعہ صفر ہوتا ہے
  - iii. اکائی کے تینوں مکعب روٹس کا حاصل ضرب 1 ہوتا ہے
  - iv. ہر اکائی کے مکعب کا کمپلیکس روٹ دوسرے کا معکوس ہوتا ہے
- اگر α اور β دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0\ ,a\neq 0$ کے روٹس ہیں تو :

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad \text{اور} \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

- دو درجی مساوات کے روٹس کے سمیٹرک تفاعل ایسے تفاعل ہوتے ہیں جب روٹس آپس میں تبدیل کئے جاتے ہیں تو تفاعل تبدیل نہیں ہوتے ہیں ویسے ہی رہتے ہیں۔ یعنی: $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$

يونٹ نمبر 21

جزوی کسور

PARTIAL FRACTION

طلباء کے آموزشی حاصلات

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- واجب، غیر واجب اور ناطق کسر کی تعریف کر سکیں۔
- ایک الجبری کسر کو جزوی کسوری میں تحلیل کر سکیں جب اس کا مخرج مبنی ہو ایسے
  - یک درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار نہ ہو،
  - یک درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار ہو،
  - دو درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار نہ ہو،
  - دو درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار ہو۔

تعارف: ناطق کسر کو دو یا دو سے زائد کسور کے مجموعہ یا فرق میں توڑا جائے تو اس کسور کو جزوی کسور کہتے ہیں۔ جزوی کسور صرف اس صورت میں ہوتیں ہیں جن کثیر رقمی کے شمار کنندہ کا درجہ لازمی کثیر رقمی کے نسب نما کے درجہ سے کم ہو۔
مثال کے طور پر

(i) $$\frac{2x+3}{(x-1)(x+4)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+4}$$

(ii) $$\frac{-(4x^2+x+11)}{(x^2+1)(x-3)}=\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{5}{x-3}$$

21.1 واجب کسور، غیر واجب کسور ناطق کسر کو بیان کرنا

ناطق کسر Rational Fraction:

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{p}{q}$ شکل ناطق عدد کہلاتا ہے
جبکہ $q\neq 0$ اور $p,q\in Z$
اس طرح دو کثیر رقموں کا خارج قیمت ناطق $Q(x)\neq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ الجبرائی اظہاریہ کہلاتا ہے۔
یہ عام طور پر ناطق کسر کہلاتی ہے۔

مثال:

(i) $\frac{2x^3-5x^2-3x-10}{x^2-1}$ (ii) $\frac{5x+8}{3x^2-2x-1}$

واجب کسور Proper fractions:

ناطق کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ واجب کسر کہلاتی ہے اگر شمار کنندہ $P(x)$ کا درجہ نسب نما $Q(x)$ کے درجے سے کم ہو۔

مثال:

(i) $\frac{9x^2-9x+6}{(x-1)(2x-1)(x+2)}$ (ii) $\frac{6x+27}{3x^3-9x}$

غیر واجب کسور Improper fractions:

ناطق کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ غیر واجب کسر کہلاتی ہے اگر شمار کنندہ $P(x)$ کا درجہ نسب نما $Q(x)$ کے درجے سے بڑا ہے۔

مثال:

(i) $\frac{2x^3-5x^2-3x-10}{x^2-1}$ (ii) $\frac{6x^3-5x^2-7}{3x^2-2x-1}$

(iii) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

مزید کسی بھی غیر واجب کسر کو کثیر رقتی کے مجموعے اور واجب کسر میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

مثلاً
$$\frac{3x^2-2x+1}{x+2}=3x-8+\frac{17}{x+2}.$$

جبکہ $\frac{3x^2-2x+1}{x+2}$ غیر واجب کسر ہے $3x-8$ کثیر رقتی اور $\frac{17}{x+2}$ واجب کسر ہے

غیر واجب کسر کو کثیر رقتی کے مجموعے اور واجب کسر میں تحلیل کرنے کے لیئے شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم دینے کی ضرورت ہوتی ہے۔

21.2 کسر کی جزوی کسور یں تحلیل

ناطق کسیر کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے کے لیئے یہ ضروری ہے کہ ناطق کسر لازمی واجب کسر ہو۔ اگر نہیں ہے تو اُسے بذریعہ تقسیم لازمی واجب کسر میں تحلیل کیا جانا چاہیے

21.2. (i) ایک الجبری کسر کی جزوی کسر میں تحلیل جب کہ اس کا مخرج جز ہو۔

یک درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار نہ ہو **Non- repeated linear factors,**

یک درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار ہو **Repeated linear factors,**

دو درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار نہ ہو **Non- repeated quadratic factors,**

دو درجی اجزائے ضربی پر جن میں تکرار ہو **Repeated quadratic factors.**

پہلی صورت: مخرج میں یک درجی اجزائے ضربی کی تکرار نہ ہو

$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ ناطق کسر ہے جبکہ اس کا نسب نما $Q(x)$ یک درجی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جس میں تکرار نہیں ہے۔ جسے یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_2).....(x-a_n)$$

اب $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ کو یوں تحلیل کیا جاتا ہے جسے نیچے دیا گیا ہے۔

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\frac{A_3}{x-a_3}+...+\frac{A_n}{x-a_n}.$$

یہاں مستقلات $A_1, A_2, A_3,..., A_n$ معلوم کیئے جاتے ہیں مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 1:

$\frac{11-3x}{(x-1)(x+3)}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں۔

حل:

فرض کریں کہ
$$\frac{11-3x}{(x-1)(x+3)}=\frac{A_1}{(x-1)}+\frac{A_2}{(x+3)} \quad \text{(i)}$$

یہاں A_1 اور A_2 غیر معلوم مستقلات ہیں جو معلوم کیئے جاتے ہیں

مساوات (i) سے

$$\frac{11-3x}{(x-1)(x+3)}=\frac{A_1(x+3)+A_2(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

دونوں اطراف $(x-1)(x+3)$ سے ضرب دینے سے

$$11-3x=A_1(x+3)+A_2(x-1) \quad \text{(ii)}$$

مستقلات A_1 اور A_2 معلوم کرنے ہیں۔ A_1 حاصل کرنے کے لیے x کی قیمت کا انتخاب کیا گیا ہے۔

مساوات (ii) کی دونوں اطراف میں x=1 درج کریں

$$11-3(1)=A_1(1+3)+A_2(0)$$

$$\Rightarrow \quad 8=4A_1$$

$$\Rightarrow \quad A_1=2$$

A_2 حاصل کرنے کے لیے مساوات (ii) کی دونوں اطراف میں, $x=-3$ درج کریں

$$11-3(-3)=A_1(0)+A_2(-3-1)$$

$$\Rightarrow \quad 20=-4A_2$$

$$\Rightarrow \quad A_2=-5$$

آخر میں مساوات (ii) میں مستقلات A_1 اور A_2 کی قیمتیں درج کرنے سے

ہم نے حاصل کیا $\dfrac{11-3x}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{5}{x+3}.$

مثال 2: $\dfrac{6x^3+5x^2-7}{2x^2-x-1}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں

حل: دی گئی ناطق کسر غیر واجب کسر ہے لہٰذا شمار کنندہ کو نسب سے تقسیم کرکے واجب کسر میں تبدیل کیا جاتا ہے۔

$$\frac{6x^3+5x^2-7}{2x^2-x-1}=\frac{6x^3+5x^2-7}{(x-1)(2x+1)}=3x+4+\frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)} \quad \text{(i)}$$

اظہاریہ $\dfrac{7x-3}{(x-1)(2x+1)}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے پر غور کریں

فرض کریں $\dfrac{7x-3}{(x-1)(2x+1)}=\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{A_2}{2x+1} \quad \text{(ii)}$

A_1 اور A_2 نامعلوم مستقلات ہیں جن کو معلوم کیا جانا ہے

مساوات (ii) سے

$$\frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)}=\frac{A_1(2x+1)+A_2(x-1)}{(x-1)(2x+1)}$$

دونوں اطراف $(x-1)(2x+1)$ کو سے ضرب دینے سے

$$7x-3 = A_1(2x+1)+A_2(x-1) \qquad \text{(iii)}$$

مستقلات A_1 اور A_2 معلوم کرتے ہیں

A_1 حاصل کرنے کے لیئے x کی قیمت کا انتخاب کیا گیا ہے

مساوات (iii) میں $x=1,$ درج کریں

ہم نے حاصل کیا $7(1)-3 = A_1(2+1)+A_2(0)$

$$4 = 3A_1$$

$$A_1 = \frac{4}{3}$$

A_2 حاصل کرنے کے مساوات (iii) میں، $x=-\frac{1}{2}$ درج کریں

ہم نے حاصل کیا $7\left(-\frac{1}{2}\right)-3 = A_1(0)+A_2\left(-\frac{1}{2}-1\right)$

$$-\frac{13}{2} = -\frac{3}{2}A_2$$

$$A_2 = \frac{13}{3}$$

مساوات (ii) میں مستقلات A_2 اور A_1 کی قیمتیں درج کرنے سے

$$\frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)} = \frac{4}{3(x-1)}+\frac{13}{3(2x+1)}.$$

آخرکار مساوات (i) ہوئی

$$\frac{6x^3+5x^2-7}{2x^2-x-1} = 3x+4+\frac{4}{3(x-1)}+\frac{13}{3(2x+1)}.$$

EXERCISE: 21.1 مشق

مندرجہ ذیل کو جزوی کسور میں تحلیل کریں

1. $\frac{12}{x^2-9}$
2. $\frac{4(x-4)}{x^2-2x-3}$
3. $\frac{x^2-3x+6}{x(x-2)(x-1)}$
4. $\frac{3(2x^2-8x-1)}{(x+4)(x+1)(2x-1)}$
5. $\frac{x^2+9x+8}{x^2+x-6}$
6. $\frac{x^2-x-14}{x^2-2x-3}$
7. $\frac{3x^3-2x^2-16x+20}{(x-2)(x+2)}$

دوسری صورت II: مخرج میں یک درجی اجزائے ضربی تکرار ہو۔

$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ایک ناطق کسر ہے جبکہ اس کا نصب نما $Q(x)$ یک درجی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے۔ جس میں تکرار ہے جسے یوں $Q(x)=(x-a)^n$ لکھ سکتے ہیں۔

اب $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ یوں تحلیل کیا جاتا ہے۔

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^1}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

مستقلات $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ معلوم کیا جاتا ہے مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعے طریقہ کار کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال ۱:

$\dfrac{2x+3}{(x-2)^2}$ کو جزوی کسر میں تحلیل کریں

حل:

$$\frac{2x+3}{(x-2)^2}=\frac{A_1}{(x-2)}+\frac{A_2}{(x-2)^2} \quad \text{(I)}$$

A_1 اور A_2 غیر معلوم مستقلات ہیں جن کو معلوم کیا جاتا ہے

مساوات (i) سے

$$\frac{2x+3}{(x-2)^2}=\frac{A_1(x-2)+A_2}{(x-2)^2}$$

دونوں اطراف کو $(x-2)^2$ ضرب دینے سے

ہم نے حاصل کیا $2x+3=A_1(x-2)+A_2$

$$2x+3=A_1x-2A_1+A_2 \quad \text{(ii)}$$

A_1 اور A_2 مستقلات معلوم کرنے کے لیئے مساوات (ii) میں x ہم قسم قوتوں کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے ہمیں ملا

$$2=A_1$$

$$3=-2A_1+A_2$$
$$3=-2(2)+A_2 \qquad (\therefore A_1=2)$$
$$7=A_2$$

آخر میں A_1 اور A_2 کی قیمتیں مساوات (i) میں رکھنے سے

$$\frac{2x+3}{(x-2)^2}=\frac{2}{(x-2)}+\frac{7}{(x-2)^2}.$$

مثال ۲:
$\dfrac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں

حل: فرض کریں

$$\frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}=\frac{A_1}{(x+3)}+\frac{A_2}{(x-1)}+\frac{A_3}{(x-1)^2} \quad \text{(I)}$$

A_1 ، A_2 اور A_3 غیر معلوم مستقلات میں جنھیں معلوم کیا جاتا ہے

مساوات (I) کی دونوں اطراف کو $(x+3)(x-1)^2$ سے ضرب دینے سے

$$5x^2-2x-19=A_1(x-1)^2+A_2(x+3)(x-1)+A_3(x+3) \quad \text{(ii)}$$

$$5x^2-2x-19=A_1x^2+2A_1x+A_1+A_2x^2+2A_2x-3A_2+A_3x+3A_3$$

$$5x^2-2x-19=(A_1+A_2)x^2+(A_3+2A_2-2A_1)x+(A_1-3A_2+3A_3) \quad \text{(iii)}$$

مستقلات A_1, A_2 اور A_3 حاصل کرنے کے لیئے کی x قیمت کا انتخاب کیا گیا ہے A_1 حاصل کرنے کے لیئے

مساوات (ii) کی دونوں اطراف میں $x=-3,$ درج کریں

$$5(-3)^2-2(-3)-19=A_1(-4)^2+A_2(0)(-4)+A_3(0)$$

$$\Rightarrow \quad 32=16A_1$$

$$\Rightarrow \quad A_1=2$$

مساوات (iii) کی دونوں اطراف کی ہم قسم قوتوں کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے،

$$5=A_1+A_2$$

$$\Rightarrow \quad 5=(2)+A_2 \qquad (A_1=2)$$

$$\Rightarrow \quad A_2=3$$

مساوات (iii) میں x کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے،

$$-2=A_3+2(3)-2(2)$$

$$-2=A_3+2$$

$$A_3=-4$$

آخر کار مستقلات A_1،A_2 اور A_3 کی قیمتیں مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$\frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}=\frac{2}{(x+3)}+\frac{3}{(x-1)}-\frac{4}{(x-1)^2}.$$

EXERCISE: 21.2 مشق

جزوی کسور میں تحلیل کریں

1. $\dfrac{4x-3}{(x+1)^2}$

2. $\dfrac{x^2+7x+3}{x^2(x+3)}$

3. $\dfrac{5x^2-30x+44}{(x-2)^3}$

4. $\dfrac{18+21x-x^2}{(x-5)(x+2)^2}$

5. $\dfrac{x^2-x+3}{(x-1)^3}$

تیسری صورت: مخرج میں دو درجی اجزائے ضربی کی تکرار نہ ہو

$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ایک ناطق کسر ہے جبکہ اس کا مخرج $Q(x)$ دو درجی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جس میں تکرار نہیں ہے۔

اب $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ یوں تحلیل کیا جاتا ہے

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+A_2}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_3x+A_4}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\ldots+\frac{A_{2n-1}x+A_{2n}}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

مستقلات $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n}$ معلوم کیا جاتا ہے

مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 1: $\dfrac{7x^2+5x+13}{(x+1)(x^2+2)}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں

حل:

فرض کریں

$$\frac{7x^2+5x+13}{(x+1)(x^2+2)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2x+A_3}{x^2+2} \qquad \text{(i)}$$

نامعلوم مستقلات A_1، A_2 اور A_3 معلوم کرنے ہیں

مساوات (i) کی دونوں اطراف کو $(x+1)(x^2+2)$ سے ضرب دینے سے

$$7x^2+5x+13=A_1(x^2+2)+(A_2x+A_3)(x+1) \qquad \text{(ii)}$$

$$7x^2+5x+13=A_1x^2+2A_1+A_2x^2+A_2x+A_3x+A_3$$

$$7x^2+5x+13=(A_1+A_2)x^2+(A_2+A_3)x+(2A_1+A_3) \qquad \text{(iii)}$$

مستقلات A_1، A_2 اور A_3 معلوم کرنے میں A_1 حاصل کرنے کے لیئے مساوات (ii) میں $x=-1,$ درج کریں

$$7(-1)^2+5(-1)+13=A_1((-1)^2+2)+(A_2(-1)+A_3)(-1+1)$$

$$\Rightarrow \quad 15=3A_1$$

$$\Rightarrow \quad A_1=5$$

مساوات (iii) کی دونوں اطراف کی ہم قسم قوتوں کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

$$7=(A_1+A_2) \quad \text{ء} \quad 5=(A_2+A_3)$$

$$7=(5+A_2) \qquad \Rightarrow \quad 5=(2+A_3)$$

$$2=A_2 \qquad \Rightarrow \quad 3=A$$

آخر میں مستقلات A_1، A_2 اور A_3 کی قیمتیں درج کرنے سے ہمیں ملا

$$\frac{7x^2+5x+13}{(x+1)(x^2+2)}=\frac{5}{(x+1)}+\frac{2x+3}{(x^2+2)}.$$

مثال 2: $\dfrac{2x+7}{(x^2+3)(x^2+6)}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں

حل:

فرض کریں

$$\frac{2x+7}{(x^2+3)(x^2+6)}=\frac{A_1x+A_2}{x^2+3}+\frac{A_3x+A_4}{x^2+6} \qquad \text{(i)}$$

یہاں غیر معلوم مستقلات A_1، A_2، A_3 اور A_4 معلوم کرتے ہیں

مساوات (i) دونوں اطراف $(x^2+3)(x^2+6)$ کو سے ضرب دینے سے

$$\Rightarrow 2x+7=(x^2+6)(A_1x+A_2)+(x^2+3)(A_3x+A_4)$$

$$\Rightarrow 2x+7=(A_1+A_3)x^3+(A_2+A_4)x^2+(6A_1+3A_3)x+(6A_2+3A_4) \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (ii) کی دونوں اطراف کی ہم قسم قوتوں کے عددی سروں کو موازنہ کرنے سے ہمیں ملا

$$A_1+A_3=0 \qquad \text{(iii)}$$
$$A_2+A_4=0 \qquad \text{(iv)}$$
$$6A_1+3A_3=2 \qquad \text{(v)}$$
$$6A_2+3A_4=7 \qquad \text{(vi)}$$

مساوات (i) اور مساوات (iv) ساتھ ساتھ حل کرنے سے ہمیں ملا. $A_1=\frac{2}{3}$, اور $A_3=-\frac{2}{3}$

اس ہی طرح. $A_2=\frac{7}{3}$ $\quad A_4=-\frac{7}{3}$

آخر میں مستقلات A_1, A_2, A_3 اور A_4 کی قیمتیں مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$\frac{2x+7}{(x^2+3)(x^2+6)}=\frac{\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}}{x^2+3}+\frac{-\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}}{x^2+6}=\frac{2x+7}{3(x^2+3)}+\frac{2x\ \ 7}{3(x^2+6)}.$$

مشق EXERCISE: 21.3

جزوی کسور میں تحلیل کریں

1. $\dfrac{x^2-x-13}{(x^2+7)(x-2)}$
2. $\dfrac{6x-5}{(x^2+10)(x+1)}$
3. $\dfrac{15+5x+5x^2-4x^3}{x^2(x^2+5)}$
4. $\dfrac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+3)}$
5. $\dfrac{x^2-x+2}{(x+1)(x^2+3)}$

چوتھی صورت: مخرج میں دو درجی اجزائے ضربی کی تکرار ہو۔

فرض کریں $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ایک ناطق کسر ہے اس کا مخرج $Q(x)$ ناقابل تخفیف دو درجی اجزائے ضربی ہے جن میں تکرار ہے۔ مختصر کرنے کی غرض سے اسے لیا گیا ہے۔ $Q(x)=(ax^2+bx+c)^n$

اب $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ یوں تحلیل کیا جاتا ہے

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+A_2}{ax^2+bx+c}+\frac{A_3x+A_4}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_{2n-1}x+A_{2n}}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

یہاں مستقلات $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ معلوم کئے جاتے ہیں

مندرجہ ذیل مثالوں سے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 1:

$\dfrac{5x^2+2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں

حل: فرض کریں

$$\frac{5x^2+2}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{A_1x+A_2}{x^2+x+1}+\frac{A_3x+A_4}{\left(x^2+x+1\right)^2} \qquad \text{(i)}$$

یہاں A_1, A_2, A_3 اور A_4 غیر معلوم مستقلات اور معلوم کرنے ہیں

مساوات (i) کی دونوں اطراف کو $\left(x^2+x+1\right)^2$ سے ضرب دینے سے

$$5x^2+2=\left(x^2+x+1\right)\left(A_1x+A_2\right)+A_3x+A_4$$

$$5x^2+2=x^3A_1+x^2A_1+x^2A_2+xA_1+xA_2+xA_3+A_2+A_4$$

$$0.x^3+5x^2+0.x+2=x^3A_1+x^2\left(A_1+A_2\right)+x\left(A_1+A_2+A_3\right)+\left(A_2+A_4\right) \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (ii) کی دونوں اطراف کی ہم قسم قوتوں کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے

$$A_1=0 \qquad \text{(iii)}$$
$$A_1+A_2=5 \qquad \text{(iv)}$$
$$A_1+A_2+A_3=0 \qquad \text{(v)}$$
$$A_2+A_4=2 \qquad \text{(vi)}$$

مساوات (iv) میں $A_1=0$, درج کرنے سے ہمیں $A_2=5.$ ملا

اس طرح مساوات (v) میں A_1 اور A_2 کی قیمتیں درج کرنے سے ہمیں ملا

$$0+5+A_3=0$$
$$\Rightarrow \qquad A_3=-5$$

دوبارہ، مساوات (vi) میں A_2 کی قیمت درج کرنے سے

$$5+A_4=2$$
$$\Rightarrow \qquad A_4=-3$$

آخر میں مساوات (i), میں مستقلات A_1, A_2, A_3 اور A_4 قیمتیں مساوات (i) میں درج کرنے سے ہمیں ملا

$$\frac{5x^2+2}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{0.x+5}{x^2+x+1}+\frac{-5x-3}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

مثال 2:

$\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)^2}$ کو جزوی کسر میں تحلیل کریں

حل:

فرض کریں

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2x+A_3}{\left(x^2+1\right)}+\frac{A_4x+A_5}{\left(x^2+1\right)^2} \qquad (i)$$

یہاں A_1, A_2, A_3, A_4 اور A_5 نامعلوم مستقلات معلوم کئے جانے ہیں

مساوات (i) کی دونوں اطراف کو $x\left(x^2+1\right)^2$ سے ضرب دینے سے

$$x^4+x^3+x^2+x+1=A_1\left(x^2+1\right)^2+x\left(A_2x+A_3\right)\left(x^2+1\right)+x\left(A_4x+A_5\right)$$

$$x^4+x^3+x^2+x+1=A_1x^4+2A_1x^2+A_1+A_2x^4+A_2x^2+A_3x^3+A_3x+A_4x^2+A_5x$$

$$x^4+x^3+x^2+x+1=\left(A_1+A_2\right)x^4+A_3x^3+\left(2A_1+A_2+A_4\right)x^2+\left(A_3+A_5\right)x+A_1 \qquad \text{(ii)}$$

مستقلات A_1, A_2, A_3, A_4 اور A_5 معلوم کرنے کے لیے ہم مساوات (i) کی ہم قسم قوتوں کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے ہمیں ملا

$$\begin{aligned}
1 &= A_1+A_2 && \text{(iii)}\\
1 &= A_3 && \text{(iv)}\\
1 &= 2A_1+A_2+A_4 && \text{(v)}\\
1 &= A_3+A_5 && \text{(vi)}\\
1 &= A_1 && \text{(vii)}
\end{aligned}$$

مساوات (iii) میں A_1 کی قیمت درج کرنے سے

$$\begin{aligned}
& 1=A_1+A_2\\
\Rightarrow\quad & 1=\left(1+A_2\right)\\
\Rightarrow\quad & 0=A_2
\end{aligned}$$

مساوات (vi) میں A_3 کی قیمت درج کرنے سے

$$\begin{aligned}
1 &= 1+A_5\\
0 &= A_5
\end{aligned}$$

مساوات (v) میں A_1 اور A_2 کی قیمت درج کرنے سے

$$\begin{aligned}
1 &= 2(1)+(0)+A_4\\
-1 &= A_4
\end{aligned}$$

آخر میں مساوات (i) میں A_1, A_2, A_3, A_4 اور A_5 قیمتیں درج کرنے سے ہمیں ملا

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{\left(x^2+1\right)}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

EXERCISE: 21.4 مشق

مندرجہ ذیل جزوی کسور میں تحلیل کریں

1. $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2(1-x)}$ 2. $\dfrac{x^2+x+2}{x^2(x^2+3)^2}$ 3. $\dfrac{x^2}{(1+x)(1+x^2)^2}$

4. $\dfrac{7}{(x+1)(2+x^2)^2}$ 5. $\dfrac{49}{(x-2)(3+x^2)^2}$

REVIEW EXERCISE 21 اعادہ مشق

1. درست جواب پر نشان لگائیں

i. غیر واجب کسر کو واجب میں تبدیل کیا جا سکتا ہے بذریعہ ________

(a) جمع (b) ضرب

(c) تفریق (d) تقسیم

ii. $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ کی جزوی کسر ________ ہو سکتی ہے

(a) $\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x+b}+\dfrac{C}{x+c}$ (b) $\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}$

(c) $\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x+c}$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

iii. $\dfrac{x-3}{x^3+3x}$ کا جزوی کسر ________ ہے

(a) $\dfrac{-1}{x}-\dfrac{x-1}{x^2+3}$ (b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+1}{x^2+3}$

(c) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x+1}{x^2+3}$ (d) $\dfrac{-1}{x}+\dfrac{x+1}{x^2+3}$

iv. $\dfrac{x^3+1}{(x-1)(x+2)}$ ایک ________ ہے

(a) واجب کسر (b) غیر واجب کسر

(c) اکائی (d) مستقل رقم

v. کسر $\dfrac{2x+5}{x^2+5x+6}$ ________ جانی جاتی ہے۔

(a) واجب (b) غیر واجب (c) دونوں واجب اور غیر واجب (d) ان میں سے کوئی نہیں

2. واجب غیر واجب اور ناطق کسور کی تعریف بیان کریں

3. مندرجہ ذیل دی گئی کسور کو جزوی کسور میں تحلیل کریں

(i) $\dfrac{5x+8}{(x-1)(x+2)}$ (ii) $\dfrac{9x^2+5x+7}{x(x+2)(x-5)}$

(iii) $\dfrac{x^2+2x+3}{(x^2+1)(x-2)}$ (iv) $\dfrac{x^3+8x^2+9}{(x^2+x+1)(x+1)}$

(v) $\dfrac{x+5}{(x^2+1)^2(x-3)}$ (vi) $\dfrac{7x+3}{(x-1)^2(x+2)}$

بنیادی شماریات

BASIC STATISTICS

یونٹ 22

طلباء کے سیکھنے کے نتائج

اس یونٹ کو مکمل کرنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- تعددی تقسیم (Frequency distribution) کے بارے میں جانیں اور یہ بھی سیکھیں کہ:
  - ایک گروہی تعدد جدول (Group Frequency Table) کی تشکیل کرنا
  - مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشے (Histogram) کی تشکیل کرنا
  - غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشے کی تشکیل کرنا
  - تعددی کثیر الاضلاع (Frequency Polygon) کی تشکیل کرنا۔
- مجموعی تعددی تقسیم (Cumulative frequency distribution) کے بارے میں جانیں اور یہ بھی سیکھیں کہ:
  - مجموعی تعددی جدول بنانا
  - مجموعی تعددی کثیر الاضلاع بنانا
- مرکزی رجحان کے پیمانوں (Measures of Central Tendency) کے بارے میں جانیں اور یہ سیکھیں کہ:
  - حساب کرنا (گروہی (Grouped) اور غیر گروہی (Ungrouped) مواد (Data) کے لیئے):
  - حسابی اوسط بذریعہ تعریف اور فرضی اوسط سے انحراف (Deviation) کا استعمال کرتے ہوئے۔
  - وسطانیہ (Median)، عادہ (Mode)، ہندسی اوسط (Geometric mean) اور ہم آہنگ اوسط (Harmonic mean)
- حسابی اوسط کی خصوصیات کی شناخت کرنا۔
- وزنی اوسط (Weighted mean) اور متحرک اوسط (Moving mean) کا حساب کرنا۔
- وسطانیہ، چوتھائی (Quartile)، عادہ کا تخمینہ گراف سے لگانا
- انتشاری پیمانوں (Measure of dispersion) کے بارے میں جانیں اور یہ سیکھیں کہ:
  - وسعت (Range) کی وضاحت، شناخت اور پیمائش کرنا، تغیر (Variable)، اوسط انحراف (Mean deviation) اور معیاری انحراف (Standard deviation) کا حساب لگانا۔

تعارف:

شماریات ریاضی کی ایک اہم شاخ ہے جو بامعنیٰ بصیرت اور نمونے حاصل کرنے کے مواد (Data) کی جمع، تنظیم، نمائندگی، تشریح اور تجزیہ سے متعلق ہے جو دانشمندانہ فیصلے لینے اور مؤثر حکمتِ عملی بنانے میں مدد کرتی ہے۔ ہم درجہ بندی کے بنیادی تصورات، تصوری نمائندگی اور سادہ مواد کے مرکزی رجحان کے کچھ پیمانوں کو پہلے ہی جانتے ہیں۔ یہاں ہم ان کو مزید تفصیل سے دریافت کرتے ہیں اور تصورات کو متحرک اوسط اور انتشاری پیمانوں کی طرف بڑھاتے ہیں۔

مواد کسی بھی شماریاتی تحقیقات کی بنیاد ہے اور سوالات پوچھ کر، گنتی اور پیمائش کرکے، رپورٹس، خبروں، مضامین کا حوالہ دے کر دلچسپی کے متغیرات (Variables) پر مواد جمع کیا جاتا ہے۔ مواد کی بالکل بنیادی شکل خام مواد ہے، جو غیر درجہ بند / غیر گروہی ہے اور اس سے کوئی واضح نتیجہ اخذ کرنا مشکل ہے۔ اس طرح کا مواد سروے، انٹرویوز کے سوالنامے کا استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ جسے مواد کے بنیادی ذرائع بھی کیا جاتا ہے۔ خام / غیر گروہی مواد کی درجہ بندی اور ترتیب کے بعد ہم گروہی / درجہ بند مواد کے ذریعے مفید معلومات حاصل کرسکتے ہیں۔ اخبارات، رپورٹس اور مضامین کو ثانوی ذرائع کے طور پر لیا جاتا ہے۔ کیونکہ یہ درجہ بند مواد کی طرف لے جاتے ہیں۔

مواد کو دو اقسام میں تقسیم کیا گیا ہے: خاصیتی (قطعی) یا مقداری (عددی) جنس، بلڈ گروپ، ابرو کا رنگ، درجات، رول نمبر کا مواد خاصیتی مواد ہے۔۔ جبکہ اونچائی، وزن، تنخواہ، حل کی pH اقدار، کمپنی کا سالانہ منافع، کسی مضمون میں طلباء کے نمبر وغیرہ کا مواد مقداری مواد ہے۔

خاصیتی مواد میں مشاہدات کسی عددی اہمیت کے بغیر خالصتاً صفات ہیں، لیکن ان میں درجہ بندی / ترتیب ہو بھی سکتی ہے یا نہیں بھی۔ خاصیتی مواد جس میں آرڈرنگ نہیں ہوتی وہ نومینل (Nominal) ہیں، باقی تمام آرڈینل (Ordinal) ہیں، جنس، خون کا گروپ، آنکھوں کا رنگ، مذہب نومینل مواد ہیں۔ مثال کے طور پر ہم مشاہدات کی بنا پر مرد / عورت کی درجہ بندی نہیں کرسکتے کہ کون زیادہ یا کم ہے۔ طلباء کے گریڈز (A، B، C، فیل) کا مواد، خوراک کا معیار (بہترین، اچھا، منصفانہ، برا، بدترین) کی درجہ بندی کی جاسکتی ہے، اور آرڈینل مواد کی طرف جایا جاسکتا ہے۔

مقداری اعداد و شمار میں مشاہدات عددی اہمیت اور ترتیب کے ساتھ اعداد ہوتے ہیں۔ اعداد صرف عددی یا اعشاریہ مشکل میں بھی ہوسکتے ہیں۔ اگر مقداری مواد میں مشاہدات صرف عددی ہیں تو مواد غیر مسلسل (Discrete) ہے۔ ورنہ مسلسل (Continuous) ہے۔ تنخواہ کا مواد (روپوں میں)، اسکول میں فی کلاس طالباء کی تعداد، 4 سکے بیک وقت پھینکتے ہوئے سروں کی تعداد غیر مسلسل مواد ہے۔ اونچائیوں، وزنوں pH کی قدروں کی پیمائش کا مواد مسلسل مواد ہے۔

مواد کی اقسام کے درمیان فرق کرنا انتہائی ضروری ہے تاکہ مواد اعداد و شمار کے مزید تجزیہ کے لیے شماریاتی ٹیسٹ یا کسی اشارے کی پیمائش کرنے کے لیے بہترین طریقے سے استعمال کیا جاسکے۔

22.1 تعددی تقسیم (Frequency distribution):

زیادہ تعداد میں مشاہدات کی ساتھ غیر گروہی مواد سے بامعنی معلومات نکالنے کے لیے ہم مواد کو چھوٹی جماعتوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ جماعتوں کو ایک ہی جگہ پر تمام ملتے جلتے مشاہدات کو شامل کرنے کے لیے بنایا گیا ہے۔ غیر مسلسل جماعتیں ایک عدد / صفت پر

مشتمل ہوتی ہیں جبکہ مسلسل جماعتوں میں تعداد کی ایک حد ہوتی ہے۔ کسی خاص جماعت میں گرنے والے مشاہدات کی تعداد کو اس کا تعدد (Frequency) کہا جاتا ہے۔

تعددی تقسیم گروہی مواد کی ٹیبلر تفصیل ہے، جس میں جماعتیں اور ان کا نسبتاً تعدد (Relative frequency) شامل ہوتے ہیں۔
تعددی تقسیم میں ترتیب دیا گیا مواد غیر گروہی / خام مواد کے مقابلے بنیادی تجزیہ کے لیے واضح سمجھ فراہم کرتا ہے۔
کسی بھی جماعت کی نسبتاً اور فیصد تعدد (percentage frequency)
بالترتیب $\left(\frac{f}{n}\right)$ اور $\left(\frac{f}{n}\times 100\right)$ ہیں، یہاں پر مشاہدات کی کل تعداد ہے۔ تمام نسبتاً تعدد کا مجموعہ 1 ہے، اور فیصد تعدد 100 ہے۔

(i) 22.1 گروہی تعدد جدول (Grouped Frequency Table) تشکیل کرنا:

گروپی تعدد جدول یا تعددی تقسیم بنانے کا طریقہ کار اس بات پر منحصر کرتا ہے کہ ہم گروپوں / جماعتیں کیسے بناتے ہیں ہم تعمیر کے درج ذیل دو طریقوں پر بات کرتے ہیں۔

(a) غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ تعدد جدول:

غیر مسلسل جماعتیں ایسی جماعتوں حوالہ دیتی ہیں جن میں صرف ایک نمبر / خصوصیت شامل ہوتی ہے۔ ہم غیر مسلسل جماعتیں صرف اس وقت استعمال کرتے ہیں جب اعداد و شمار میں کم مشاہدات زیادہ بار دہرائیں۔ غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ تعدد جدول کو غیر مسلسل تعدد جدول بھی کہا جاتا ہے۔ اگر ضرورت ہو تو آخر میں نسبتاً اور فیصد تعدد کو بھی جدول میں شامل کیا جاتا ہے۔
دیئے ہوئے ڈیٹا سیٹ کی مدد سے ہم تین کالموں پر مشتمل غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ تعدد جدول بنانے کے لیے درج ذیل مراحل پر عمل کرتے ہیں۔

1- غیر مسلسل مشاہدات کو جماعتوں کی بنا پر شناخت کریں اور اگر مواد نومینل ہے تو اسے پہلے کالم میں کسی بھی ترتیب سے لکھیں۔ آرڈینل اور مقداری مواد کے لیے، جماعتوں کو صعودی (Ascending) ترتیب میں لکھیں۔
2- دوسرے کالم میں مواد کو جماعتوں میں تقسیم کرنے کے لیے ٹیلی کے نشانات کا استعمال کریں۔
3- تیسرے کالم میں ہر جماعت کا تعدد لکھنے کے لیے ٹیلی کے نشانات کا شمار کریں۔

مثال 1: ایک کلاس کے 30 طلباء کے خون کے گروپس کی تعدد جدول بنائیں۔

A+ O- B+ A+ A- AB+ B- O- O + A- A+ AB- A+ O+ B+
B+ O+ B+O- AB+O- A+ AB+ A+ O+ B- O+ A- AB- O+

حل:

یہاں n=30 اور مواد نومینل ہے۔ آٹھ مسلسل بلڈ گروپ یہ ہیں: A+, AB+, O+, B-, AB- اور O- جو کہ پہلے کالم میں لکھے گئے ہیں۔ اعداد و شمار کی تقسیم کے لیے دوسرے کالم میں ٹیلی کے نشانات درج ہیں اور ان کو استعمال کرتے ہوئے تیسرے کالم میں طلباء کی تعداد کو لکھ کر ہم مطلوبہ گروہی تعدد جدول کی تشکیل کرتے ہیں۔

گروپی تعدد جدول

جماعتیں/گروہ "بلڈ گروپس"	ٹیلی کے نشانات	تعدد "طلباء کی تعداد"
A+	卌 I	6
B+	卌	5
AB+	III	3
O+	卌 II	7
A–	III	3
B–	I	1
AB–	II	2
O–	III	3
کل	---	$n = 30$

مثال 2: ایک شاپنگ مال میں 40 تصادفی طور پر منتخب صارفین سے جب یہ پوچھا گیا کہ "آپ خدمات سے کتنا مطمئن ہیں؟" تو ان کے جوابات درج ذیل ہیں۔ ان کے جوابات کا گروپی تعدد جدول بنائیں۔ نسبتاً اور فیصد تعدد بھی معلوم کریں۔

<table>
<tr><td>نہیں بہت</td><td>بہت</td><td>بالکل بھی نہیں</td><td>کسی حد تک</td><td>بہت</td><td>نہیں بہت</td><td>نہیں بہت</td><td>بہت</td></tr>
<tr><td>کسی حد تک</td><td>بہت</td><td>نہیں بہت</td><td>بہت</td><td>بہت</td><td>بہت</td><td>یقین نہیں</td><td>بہت</td></tr>
<tr><td>کسی حد تک</td><td>نہیں بہت</td><td>بہت</td><td>بہت</td><td>بہت</td><td>بالکل بھی نہیں</td><td>بہت</td><td>یقین نہیں</td></tr>
<tr><td>بہت</td><td>بہت</td><td>بہت</td><td>یقین نہیں</td><td>نہیں بہت</td><td>نہیں بہت</td><td>یقین نہیں</td><td>بالکل بھی نہیں</td></tr>
<tr><td>کسی حد تک</td><td>بہت</td><td>یقین نہیں</td><td>نہیں بہت</td><td>کسی حد تک</td><td>بہت</td><td>کسی حد تک</td><td>بہت</td></tr>
</table>

حل: یہاں n=40 اور مواد آرڈینل ہے۔ صعوی ترتیب میں اطمینان کے پانچ الگ درجے (سب سے کم سے بلند ترین) جماعتیں ہیں۔ ٹیلی کے نشانات اور تعدد کے ساتھ ہم گروہی تعدد جدول حاصل کرتے ہیں۔ نسبتاً اور فیصد تعدد کو بھی چوتھے اور پانچویں کالم میں شمار کیا گیا ہے۔

<table>
<tr><th>جماعتیں / گروپس
اطمینان کے درجے</th><th>ٹیلی کے نشانات</th><th>تعداد (f)</th><th>نسبتاً تعداد
$\left(\frac{f}{n}\right)$</th><th>% فیصد تعداد
$\left(\frac{f}{n}\times 100\right)$</th></tr>
<tr><td>بالکل بھی نہیں</td><td>|||</td><td>3</td><td>$\frac{3}{40}=0.075$</td><td>$\frac{3}{40}\times 100=7.5$</td></tr>
<tr><td>نہیں بہت</td><td>$\cancel{||||}$ |||</td><td>8</td><td>0.2</td><td>20</td></tr>
<tr><td>یقین نہیں</td><td>$\cancel{||||}$</td><td>5</td><td>0.125</td><td>12.5</td></tr>
<tr><td>کسی حد تک</td><td>$\cancel{||||}$ |</td><td>6</td><td>0.15</td><td>15</td></tr>
<tr><td>بہت</td><td>$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ |||</td><td>18</td><td>0.45</td><td>45</td></tr>
<tr><td>کل</td><td>---</td><td>$n=40$</td><td>1</td><td>100</td></tr>
</table>

نوٹ:

(a) مثال 2 کے گروپی تعدد جدول سے ہم بآسانی یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ صارفین کی زیادہ تعداد "بہت مطمئن" تھی اور کم تعداد "بالکل بھی مطمئن" نہیں تھی۔

(b) 40 میں سے 18 کے بجائے یہ کہنا زیادہ مناسب اور قابل فہم ہے کہ 45 % صارفین بہت مطمئن تھے۔

مثال 3: ایک شہر کے 45 خاندانوں کے جوابات جب ان سے ان کے استعمال کردہ موبائلوں کی تعداد کے بارے میں پوچھا گیا تو ان کے جوابات درج ذیل ہیں۔ جوابات کی ایک غیر مسلسل تعدد جدول بنائیں۔ جوابات کی نسبتاً اور فیصد تعدد بھی معلوم کریں۔

3 1 3 2 2 2 2 1 2 1 2 2 3 3 3 3 4 1 3 0 2 4 3

3 3 2 3 2 2 5 1 6 1 6 2 1 5 3 2 4 2 4 7 4 2

حل: یہاں n=45 اور مواد مقداری اور خصوصاً غیر مسلسل ہے۔ مواد میں اعداد و شمار کی صعودی ترتیب کے الگ الگ نمبر یہ ہیں۔
7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 جو کم ہیں اور بار بار دہرائے گئے ہیں۔ پہلے کالم میں یہ 8 جماعتیں ہیں۔

دوسرے کالم میں گن کر ٹیلی کے نشانات لگائیں۔ تیسرے کالم میں تعدد کا شمار کریں تاکہ 45 خاندانوں کے موبائلوں کا جدول غیر مسلسل تعدد جدول حاصل کر سکیں۔

غیر مسلسل تعدد جدول

جماعتیں/گروہ موبائلوں کی تعداد	ٹیلی کے نشانات	تعدد خاندانوں کی تعداد
0	|	1
1	卌 ||	7
2	卌 卌 卌	15
3	卌 卌 ||	12
4	卌	5
5	||	2
6	||	2
7	|	1
کل	---	$n = 45$

مثال4: کولڈ رنک کی مقدار کو ایک کمپنی کی 20 تصادفی طور پر منتخب کردہ 1.5L بوتلوں میں ماپا گیا جیسا کہ ذیل میں دیا گیا ہے۔ کولڈ رنک کی پیمائش شدہ مقدار کا ایک غیر مسلسل تعدد جدول بنائیں۔ نسبتا اور فیصد تعدد بھی معلوم کریں۔

1.48 1.51 1.50 1.49 1.49 1.49 1.51 1.48 1.49 1.52
1 51 1 49 1 51 1 50 1 50 1 50 1 51 1 49 1 49 1 50

حل: مواد مقداری ہیں اور خصوصاً مسلسل الگ الگ نمبر یہ ہیں 1.48, 1.49, 1.50, 1.51, 1.52(صعوی ترتیب میں) پانچ جماعتیں ہیں۔ ٹیلی کے نشانات اور تعدد کے ساتھ ہمیں غیر مسلسل تعدد جدول حاصل ہوتا ہے۔ نسبتا اور فیصد تعدد کو بھی چوتھے اور پانچویں کالم میں شمار کیا گیا ہے۔

جماعتوں کی حد "کولڈ رنگ کی مقدار"	ٹیلی کے نشانات	تعدد "بوتلوں کی تعداد"	نسبتا تعدد $\left(\frac{f}{n}\right)$	% فیصد تعدد $\left(\frac{f}{n}\times 100\right)$
1.48	||	2	$\frac{2}{20} = 0.1$	$\frac{2}{20}\times 100 = 10$
1.49	卌 ||	7	0.35	35
1.50	卌	5	0.25	25
1.51	卌	5	0.25	25
1.52	|	1	0.05	5
کل	---	$n = 20$	1	100

(b) مسلسل جماعتوں کے ساتھ تعدد جدول:

جب مواد مقداری (غیر مسلسل یا مسلسل) ہو اور مشاہدات کو کم تکرار اور زیادہ تغیرات کے ساتھ تعداد کی حد میں تقسیم کرنا ہو تو پھر ہم مسلسل جماعتیں استعمال کرتے ہیں۔ یہ جماعتیں واحد عدد نہیں ہیں بلکہ اعداد کی ایک رینج جن میں سے ہر ایک چند اعداد پر مشتمل ہوتی ہے جو اس جماعت کی حد میں آتے ہیں۔ ایک مسلسل تعدد جدول مسلسل جماعتوں اور ان کے نسبتا تعدد پر مشتمل ہوتا ہے۔
ہم نے پہلے ہی پچھلی کلاس میں غیر مسلسل مواد کے لیے تعددی تقسیم کا مطالعہ کیا ہے۔ یہاں ہم کسی بھی اعشاری نمبر کے ساتھ غیر

مسلسل اور مسلسل مواد کے لیے بنیادی تصورات کو عام اور استعمال کریں گے۔ ہم پہلے کچھ اہم اصطلاحات کو یاد کرتے ہیں اور ان کی وضاحت کرتے ہیں جو طریقہ کار میں فعال طور پر استعمال ہوتی ہیں۔

وسعت (Range): دیئے گئے مواد میں سب سے زیادہ اور سب سے کم مشاہدے کے درمیان فرق کو وسعت کہتے ہیں۔

وسعت = {سب سے زیادہ مشاہدہ} - {سب سے کم مشاہدہ} ...(1)

جماعتی حدود (Class Limits): یہ وہ اعداد ہیں جو کسی جماعت کی شناخت کے لیے استعمال ہوتے ہیں ہر جماعت کا سب سے چھوٹا عدد اس کی زیریں جماعتی حد (Lower Class Limit(LCL)) کہلاتا ہے اور سب سے بڑا عدد اس جماعت کا بلائی جماعتی حد (Upper class limit(UCL)) کہلاتا ہے۔ LCL سے UCL تک کے مشاہدات ایک خاص جماعت میں آتے ہیں۔

جماعتی وقفہ / چوڑائی (Class Internal/width): اس کی تعریف جماعت کے سائز / لمبائی کے طور پر کی جاتی ہے، اور کسی بھی دو لگاتار LCLs یا UCLs کے درمیان فرق تلاش کر کے اس کو معلوم کیا جاتا ہے ہم عام طور پر جماعت کی مستقل چوڑائی / وقفے کے لیے 'h' استعمال کرتے ہیں اور تمام جماعتوں کے لیے h اس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔

$$h=\frac{1}{10^m}\left\lceil\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{K}}\times 10^m\right\rceil \quad (2)\ldots$$

یہاں پر K جماعتوں کی تعداد ہے، R وسعت ہے اور m مشاہدات میں زیادہ سے زیادہ اعشاریہ مقامات کی تعداد ہے۔
اگر مواد غیر مسلسل ہے، تو m=0 اگر مواد ایک اعشاریہ تک کی قدروں کے ساتھ مسلسل ہے، تو m=1 وغیرہ ⌈ ⌉ یہ حتمی عددی قدر حاصل کرنے کے لیے زیادہ سے زیادہ حد کا تخمینہ ظاہر کرتا ہے۔ ایک عدد کی حد وہی عدد ہے، جبکہ اعشاریہ عدد کی حد اس سے فوراً بڑا عدد کے۔
مثال کے طور پر: $\lceil 4\rceil=4$, $\lceil 1.6\rceil=2$, $\lceil 1.9\rceil=2$, $\lceil 7.5\rceil=8$

جماعتوں کی تعداد (K):

جماعتوں کی تعداد کو K سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ مشاہدات کی تعداد اور وسعت کے لحاظ سے 5 سے 15 تک ہوتی ہے۔ اسے احتیاط سے منتخب کرنا چاہیئے، اگر نہیں دیا گیا ہو، K کی بہت زیادہ قدر کے نتیجے میں ناقص گروہ بندی اور معلومات کا نقصان ہوتا ہے اسٹرجس (1926) نے مشاہدات (n) کی تعداد کا استعمال کرتے ہوئے جماعتوں کی مطلوبہ تعداد K کا حساب لگانے کے لیے اصول تجویز کیا۔ اسٹرجس اصول کی تعریف اس طرح کی گئی ہے۔

$$\mathrm{K}=\lceil 1+3.322\log(\mathrm{n})\rceil \quad (3)\ldots$$

یہاں پر، Log(n) بیس 10 کے ساتھ n کا لاگرتھم ہے اور یہاں پر ⌈ ⌉ زیادہ سے زیادہ حد کا تخمینہ ہے۔ یہ واضع رہے کہ اسٹرس اصول $15\le n\le 200$ کے لیئے زیادہ موثر ہے۔ مثال کے طور پر، اگر n=25
جماعتیں $K=\lceil 1+3.322\log(25)\rceil=\lceil 5.6439\rceil=6$

جماعتوں کے درمیان فاصلہ (d):

جماعتوں کے درمیان فاصلہ (d) ایک جماعت کے LCL اور اگلی جماعت کے VCL کے درمیان مستقل فرق کو کہتے ہیں، اگر m جماعتوں کے درمیان زیادہ سے زیادہ اعشاریہ ہندسوں کی تعداد ہے، تو:

$$d=\frac{1}{10^m},\ m=0,1,2,\ldots \quad (4)\ldots$$

غیر مسلسل مواد کے لیئے m=o اور d=1، اگر مواد اعشاریہ کے بعد ایک ہندسہ تک دیا جائے تو m=1، اور d=0.1 دو اعشاریہ تک کے مواد کے لیے $m=2$ $d=0.01$

مسلسل تعدد جدول بنانے کا طریقہ کار:

مقداری مواد کے مسلسل تعدد جدول بنانے کا طریقہ کار یہ ہے:

1- مشاہدات کی تعداد (n) نوٹ کریں اور مواد کی قسم کو شناخت کریں: غیر مسلسل یا مسلسل اس کے علاوہ مواد میں اعشاری مقامات کی زیادہ سے زیادہ تعداد (m) کو نوٹ کریں۔

2- مساوات (1) کا استعمال کرتے ہوئے وسعت کا حساب لگائیں۔ اسٹرجس کے اصول کا استعمال کرتے ہوئے کلاسز کے تعداد (K) مساوات (3) کے ذریعے معلوم کریں اگر نہیں دی گئی۔

3- مساوات (2) کا استعمال کرتے ہوئے جماعتی وقفہ (h) اور مساوات (4) کا استعمال کرتے ہوئے جماعت کے درمیان کا وقفہ (d) کا حساب لگائیں۔ انتہائی حالات میں، ہمیں "h+d" کو جماعت کی چوڑائی کے طور پر لینا پڑے گا یا ایک اور جماعت کا اضافہ کرنا پڑے گا۔

4- اس بات کو یقینی بنانے کے لیے جماعتی حدود کا تعین کریں کہ تمام مشاہدات K جماعتوں میں شامل ہیں۔ ہم LCL شروع کرنے کے طور پر سب سے کم مشاہدے کا بھی استعمال کر سکتے ہیں۔ شروعاتی UCL یہ ہے: UCL = LCL + h-d باقی جماعتوں کے LCLs اور UCLs لگاتار پہلی جماعت کے LCL اور UCL میں L کا اضافہ کرتے ہوئے شمار کریں۔

5- مسلسل تعدد جدول کے پہلے کالم میں جماعت کی حدود کو بطور جماعت لکھیں۔

6- دوسرے کالم میں مواد کو جماعتوں میں تقسیم کرنے کے لیے ٹیلی کے نشانات / فہرست اندراجات کا استعمال کریں۔ ٹیلی کے نشانات کو ترجیح دی جاتی ہے۔

7- تیسرے کالم میں تمام جماعتوں کا تعداد لکھنے کے لیے ٹیلی کے نشانات یا اندراجات شمار کریں۔

مثال 1:

ایک دکان میں بجلی کی کھپت (KWH میں) مسلسل 60 دنوں تک نوٹ کی گئی جیسا کہ ذیل میں بتایا گیا ہے، ٹیلی کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے تعددی تقسیم بنائیں۔

106	107	76	82	109	107	115	93	187	95	139	119	115	128	115
123	125	111	92	86	70	126	$\boxed{68}$	130	129	194	82	90	158	118
123	146	80	136	137	110	141	152	104	111	140	184	$\boxed{204}$	178	75
113	162	131	99	185	181	84	486	100	98	148	90	110	107	78

حل: یہاں n=60 اور مواد غیر مسلسل ہے۔ $R = 204 - 68 = 136$, $m = 0$ اسٹرجس اصول استعمال کرتے ہوئے جماعتوں کی تعداد معلوم کرتے ہیں۔

$$K = \lceil 1 + 3.322 \log(60) \rceil = \lceil 6.9070 \rceil = 7.$$

$$h = \left\lceil \frac{136}{7} \right\rceil = \lceil 19.4285 \rceil = 20, \quad \text{اور} \quad d = 1.$$

ابتدائی LCL = 68 اور ابتدائی UCL = 68+20−1 = 87 ان میں h=20 کو شامل کرنے سے ہمیں دیگر تمام حدود مل جاتی ہیں۔ پہلے کالم میں جماعتی حدیں، دوسرے میں ٹیلی کے نشانات اور تیسرے میں تعدد لکھنے سے ہمیں مطلوبہ تعدد جدول ملتا ہے۔

تعدد جدول

جماعتی حدود	ٹیلی کے نشانات	تعداد
68 – 87	𝍸 𝍸	10
88 – 107	𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷	13
108 – 127	𝍸 𝍸 𝍸	15
128 – 147	𝍸 𝍸	10
148 – 167	𝍷𝍷𝍷𝍷	4
168 – 187	𝍸 𝍷	6
188 – 207	𝍷𝍷	2
کل	---	$n = 60$

مثال 2: تار کی ریل کے قطر (ملی میٹر میں) 24 مقامات پر درست سے قریب ترین 0.01mm ملی میٹر پر ماپا جاتا ہے:

2.10, 2.29, 2.32, 2.21, 2.14, 2.22, 2.28, 2.18, 2.17, 2.20, 2.23, 2.13, 2.26, 2.10, 2.21, 2.17, 2.28, 2.15, 2.34, 2.27, 2.11, 2.23, 2.25, 2.16.

تعددی تقسیم کی تعمیر کریں

حل: n=24 ہے اور مواد اعشاریہ کے دو ہندسوں تک مسلسل ہے۔ اس لیے $m = 2$ اور

$$K = [1 + 3.322\log(24)] = 6 \quad \text{اور} \quad R = 2.34 - 2.10 = 0.24$$

$$d = \frac{1}{100} = 0.01, \quad h = \frac{1}{100}\left[\frac{R}{K} \times 100\right] = 0.04$$

ابتدائی LCL=2.10 اور h=0.04, 6 جماعتیں یہ ہیں:

2.10- 2.13, 2.14- 2.17, 2.18-2.21, 2.22-2.25, 2.26-2.29, 2.30-2.33

لیکن 2.34 کو کسی بھی جماعت میں شامل نہیں کیا جا سکتا۔ اس انتہائی صورت میں ہم جماعت کی چوڑائی h+d=0.05 استعمال کرتے ہیں۔ مطلوبہ 6 جماعتیں یہ ہیں: 2.10- 2.14, 2.15-2.19, 2. 2o-2.24, 2.25-2.29, 2.30-2.34,2.35-2.39

اور قطر کی مطلوبہ تعددی تقسیم یہ ہے:

تعدد جدول

جماعتی حدود	2.10 – 2.14	2.15 – 2.19	2.20 – 2.24	2.25 – 2.29	2.30 – 2.34	2.35 – 2.39	کل
ٹیلی کے نشانات	|||	~~||||~~	~~||||~~ |	~~||||~~ |	|||		---
تعدد	3	5	6	6	3	0	$n = 24$

نوٹ: مثال 2 میں ہم 2.34 کو شامل کرنے کے لیئے صرف ایک اور جماعت کو بھی شامل کر سکتے ہیں۔

جماعتی حدود	2.10 – 2.13	2.14 – 2.17	2.18 – 2.21	2.22 – 2.25	2.26 – 2.29	2.30 -2.33	2.34 – 2.37
ٹیلی کے نشانات	||||	~~||||~~	||||	||||	~~||||~~	|	|
تعدد	4	5	4	4	5	1	1

مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی تعدد جدول میں کچھ اور اہم اصطلاحات یہ ہیں:

حقیقی جماعتی حدود (Class Boundaries): وہ اعداد جو جماعت کو ملحقہ جماعتوں سے الگ کرتے ہیں انہیں حقیقی جماعتی حدود ہیں، ایک جماعت کے لیے اس کی زیریں حقیقی جماعتی حد (Lower Class boundary (LCB)) اور اس جماعت کی بالائی جماعتی حد (Upper Class boundary (UCB)) بالترتیب اس جماعت کے LCL اور UCL سے حاصل کی جاتی ہیں جیسا کہ:

ایک جماعت کے لیے $LCB = LCL - \frac{d}{2}$ اور $UCB = UCL + \frac{d}{2}$ یہاں پر، d جماعتوں کے درمیان فاصلہ ہے۔

جماعتی نشان / وسطی نقاط (Class Marks/Mid Points):

جماعتی نشان / وسطی نقاط، جو کہ x کے طور پر ظاہر کئے جاتے ہیں، دراصل زیریں جماعتی حد (LCL) اور بالائی جماعتی حد جو (UCL) یا زیریں حقیقی جماعتی حد (LCB) اور بالائی حقیقی جماعتی حد (UCB) کی اوسط ہے۔

ایک جماعت کے لیے $x = \frac{LCL+UCL}{2}$ یا $x = \frac{LCB+UCB}{2}$

مجموعی تعدد (Cumulative Frequency):

Cumulative لفظ کا مطلب ہے کچھ بڑھنے کے بعد لگاتار اضافہ ہونا اگر ہم ایک کے بعد ایک جماعت کے تعدادات جوڑتے چلے جائیں، ہر بار کل میں اگلی جماعت کا تعدد شامل کریں تو ہمیں مجموعی تعدد مل جاتا ہے۔ کسی خاص جماعت کے لیے، مجموعی تعدد اس جماعت تک کی تمام تعددات کا مجموعہ ہے۔

مثال 3: نیچے دی گئی تعدد جدول کے لیئے حقیقی جماعتی حدود، جماعتی نشان اور مجموعی تعدد معلوم کریں۔

جماعتی حدود	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.8	8.9-9.1
تعدد	3	5	9	14	11	6	2

حل: یہاں پر، n=50 اور d=0.1 ہے۔ حقیقی جماعتی حدود، جماعتی نشان اور مجموعی تعدد مندرجہ ذیل جدول میں شمار کیئے گئے ہیں۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی نشان	تعدادات	مجموعی تعدادات
7.1-7.3	7.05-7.35	7.2	3	3
7.4-7.6	7.35-7.65	7.5	5	3+5=8
7.7-7.9	7.65-7.95	7.8	9	17
8.0-8.2	7.95-8.25	8.1	14	31
8.3-8.5	8.25-8.55	8.4	11	42
8.6-8.8	8.55-8.85	8.7	6	48
8.9-9.1	8.85-9.15	9.0	2	n = 50
کل	----	----	**n = 50**	----

نوٹ:

1- ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ایک جماعت کا UCB اور اگلی جماعت کا LCB ایک جیسا ہے۔
2- ابتدائی LCB میں لگاتار h کا اضافہ کرنے سے ہمیں باقی تمام حقیقی جماعتی حدود حاصل ہو جائیں گی۔
3- ہم ابتدائی جماعتی نشان میں h کا اضافہ کر کے باقی تمام جماعتی نشانات حاصل کر سکتے ہیں۔
4- آخری جماعت کی مجموعی تعدد مشاہدات کی کل تعداد ہے۔

مشق 22.1

1- درج ذیل میں مواد کی قسم (غیر مسلسل / مسلسل / نومینل / آرڈینل) اور مشاہدات کی کل تعداد معلوم کریں:

a. 30 دنوں کے لیے ایک شاپنگ مال میں روزانہ آنے والوں کی تعداد۔

b. وقت (فی دن منٹوں میں) ایک شخص نے ایک مہینے تک جم میں گزارا۔

c. 45 کار بیٹریوں کی زندگی (سالوں میں)
d. 2 ماہ کے لیے بجلی کی کھپت (کلوواٹ فی دن میں)

e. ایک کلاس میں 55 طلباء کا وزن (کلوگرام میں)
f. 20 افراد کے ابرو کے رنگ

g. ایک کلاس میں 70 طلباء کے حاصل کردہ گریڈز
h. 10 افراد کے COVID تشخیصی ٹیسٹ کا نتیجہ (مثبت / منفی)

i. ایک اسکول کے 30 اساتذہ کی ازدواجی حیثیت
j. آپ کی کلاس کے طلباء کے ڈومیسائیل کا ضلع

2- اسکول سے ملکی دورے پر جانے والے 20 طلباء کے تعلیمی سطح (مطالعہ کی موجودہ کلاس) کا گروہی تعدد جدول بنائیں تعلیمی سطحیں یہ ہیں:

X, IX, VI, VIII, X, X, VIII, VII, IV, V, VI, IX, VI, VIII, VII, VIII, X, IX, IX, IX

3- لینگویج کورس میں شرکت کے لیے 20 طلباء کی طرف سے استعمال کیئے جانے والے نقل و حمل کا طریقہ ذیل میں دیا گیا ہے۔ فیصد تعدد کے ساتھ گروہی تعدد جدول بنائیں۔

بس	پیدل چلنا	پیدل چلنا	بائیک	پیدل چلنا	کار	بس	بائیک	پیدل چلنا	پیدل چلنا
بس	بس	کار	کار	بس	پیدل چلنا	پیدل چلنا	کار	بس	کار

4- 40خاندانوں کے جوابات کی درجہ بندی ایک گروہی تعددی تقسیم میں کریں کہ وہ کتنی کثرت سے چھٹیاں شہر سے باہر گزارتے ہیں۔ متعلقہ تعدد بھی معلوم کریں۔

اکثر	ہمیشہ	بہت کم	کبھی نہیں	کبھی کبھی	اکثر	بہت کم	کبھی نہیں
کبھی کبھی	کبھی نہیں	بہت کم	کبھی کبھی	ہمیشہ	کبھی کبھی	کبھی کبھی	کبھی کبھی
کبھی نہیں	اکثر	اکثر	کبھی کبھی	ہمیشہ	ہمیشہ	کبھی کبھی	کبھی کبھی
اکثر	اکثر	ہمیشہ	بہت کم	ہمیشہ	کبھی کبھی	بہت کم	اکثر
ہمیشہ	اکثر	کبھی نہیں	کبھی نہیں	کبھی کبھی	ہمیشہ	کبھی نہیں	ہمیشہ

5- مختلف اسکولوں کے پریفیکٹس کی ٹوپی کا تعدد جدول منظم کریں۔

ہرا	بھورا	بھورا	کالا	نیلا	ہرا	بھورا	کالا	نیلا	کالا
لال	کالا	ہرا	لال	نیلا	لال	کالا	لال	ہرا	نیلا

6- ایک کلاس ٹیسٹ میں سے 25 طلباء کے 5 میں حاصل کردہ نمبر یہ تھے: 4.0, 0.5, 4.5, 1.0, 3.5, 3.5, 5.0, 0.5, 4.0,
2.5, 1.0, 2.0, 4.0, 3.5, 0.0, 3.0, 5.0, 1.0, 2.0, 2.0, 4.5, 2.5, 3.0, 3.5, 1.5
غیر مسلسل جماعتوں اور متعلقہ تعدد کے ساتھ تعدد جدول بنائیں۔

7- ٹیسٹ سے ایک دن پہلی کس ویب سائیٹ سے ٹیچر کے لیکچرز کو فی گھنٹہ کتنی بار ڈائون لوڈ کیا تھا اس کے نتائج یہ تھے:
1, 1, 2, 1, 3, 3, 4, 1, 4, 1, 2, 3, 3, 2, 4, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 0, 0, 1
مواد کی ایک غیر مسلسل تعدد جدول میں درجہ بندی کریں۔

8- 18 دنوں کے لیئے کلاس میں غیر حاضرین کی تعداد کی مسلسل جماعتوں کے ساتھ تعددی تقسیم بنائیں۔
4, 3, 0, 1, 2, 5, 6, 8, 10, 7, 11, 15, 13, 14, 3, 4, 12, 12

9- 40 کالج طلباء کے قریب ترین پائونڈ میں ریکارڈ وزن کی مسلسل تعددی تقسیم بنائیں۔ 138, 148, 146, 146, 119, 164, 152,
173, 158, 154, 150, 144, 142, 140, 165, 132,150, 147, 147, 153, 144, 156, 135, 126, 140, 125, 168,
157, 138, 135, 149, 136, 135, 142, 161, 145,176, 163, 145, 128
حقیقی جماعتی حدود جماعتی نشان اور مجموعی تعدد بھی معلوم کریں:

10- ایک جیسی قدر کے 48 ریزسٹرس کے بیچ میں مزاحمت قدر کی اوہم(OHM) میں یہ ہیں
21.0, 22.4, 22.8, 21.5, 22.6, 21.1, 21.6, 22.3, 22.9, 20.5, 21.8, 22.2, 21.0, 21.7, 22.5, 20.7, 23.2,
22.9, 21.7, 21.4, 22.1, 22.2, 22.3, 21.3, 22.1, 21.8, 22.0, 22.7, 21.7, 21.9, 21.1, 22.6, 21.4, 22.4,
22.3, 20.9, 22.8, 21.2, 22.7,21.6, 22.2, 21.6, 21.3, 22.1, 21.5, 22.0, 23.4, 21.2.
مسلسل تعدد جدول بنائیں۔ اس کے علاوہ، مجموعی اور فیصد تعدد بھی معلوم کریں۔

11- دھات کے 50 بلاکس کا ماس (کلوگرام میں) قریب ترین 0.1 کلوگرام تک جمع کیا گیا جو جہ ذیل میں درج ہیں-ماس کی تعددی تقسیم بنائیں اور متعلقہ اور فیصد شمار کریں۔

8.0	8.3	7.7	8.1	7.4	8.6	7.1	8.4	7.4	8.2	8.4	8.8	7.9	8.1	8.2	7.5	8.3
8.8	8.0	7.7	8.3	8.2	7.9	8.5	7.9	8.0	8.4	7.2	8.7	8.0	9.1	8.5	7.6	8.2
7.8	7.8	8.7	8.5	8.4	8.5	8.1	7.8	8.2	7.7	7.5	8.5	8.1	7.3	9.0	8.6	

22.1(ii) مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشہ (Histogram) بنانا:

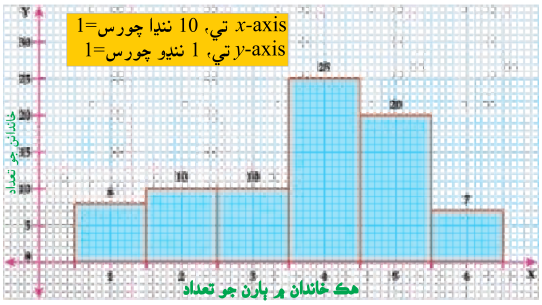
کالمی نقشے کو غیر مسلسل اور مسلسل جماعتوں اور متعلقہ تصورات کے ساتھ تعدد جدولوں کا استعمال کرتے ہوئے مقداری اعداد و شمار کی گرافیکل نمائندگی کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ ایک کالمی نقشہ ملحقہ مستطیلوں کا استعمال کرتے ہوئے بنایا جاتا ہے جس میں

مستطیلوں کی بنیادیں نمبروں کی تقسیم کے ذریعے نشان زد ہوتی ہیں اور مستطیلوں کی اونچائی جماعتی تعدد کے متناسب ہوتی ہیں۔
مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشے میں، مستطیل کا علاقہ اور اونچائی دونوں تعدد کے متناسب ہوتے ہیں۔
غیر مسلسل تعدد جدولوں کے مطابق کالمی نقشے میں مستطیل کی بنیادیں اعداد و شمار میں الگ الگ نمبروں کی نمائندگی کرتی ہیں اور اونچائیوں کو عام طور پر جماعتوں کے تعدد کے طور پر لیا جاتا ہے۔ مستطیلوں کی چوڑائی ایک مقررہ وقفے کے ساتھ لی جاتی ہے۔
مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ مسلسل تعدد جدولوں کے مطابق کالمی نقشے میں مستطیل کی بنیادیں جماعتی حدود کی نمائندگی کرتی ہیں اور اونچائیوں کو عام طور پر جماعتوں کے تعدد کے طور پر لیا جاتا ہے۔ مستطیلوں کی چوڑائی جماعتی وقفے کے برابر لی جاتی ہے۔
کالمی نقشہ کھینچتے وقت محوروں کو واضح طور پر لیبل کیا جانا چاہیئے اور پیمانے کی وضاحت کی جانی چاہیئے۔ x محور کا O سے شروع ہونا ضروری نہیں ہے۔ Y محور کو O سے شروع ہونا چاہیئے تعدد کو مستطیلوں کے اوپر بھی نشان زد کیا جانا چاہیئے۔ کالمی نقشے کھینچنے کے طریقہ کار کی وضاحت درج ذیل مثالوں میں کی گئی ہے

مثال 1: 80 خاندانوں کے درج ذیل مواد کا استعمال کرتے ہوئے گائوں میں فی خاندان بچوں کی تعداد کے لیے کالمی نقشہ بنائیں۔

ایک خاندان میں بچوں کی تعداد	1	2	3	4	5	6
خاندانوں کی تعداد	8	10	10	25	20	7

حل: یہاں مواد ایک غیر مسلسل تعداد جدول کی نمائندگی کرتا ہے۔ x محور پر الگ الگ اعداد 1, 2, 3, 4, 5, 6 سب ایک مقررہ وقفے کے ساتھ مختلف جماعتوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ پھر Y محور پر "O" سے شروع ہونے والی تعدادات کو 25 تک کی تمام تعدادات کو شامل کرنے کے لیے موزوں پیمانے کے ساتھ لکھیں۔ الگ الگ اعداد پر مستطیل کھینچتے ہوئے مساوی چوڑائی اور تعدادات کے برابر اونچائی ہے ہمیں درج ذیل کالمی نقشہ ملتا ہے۔ محوروں کا لیبل لگا ہوا ہے اور پیمانے کی وضاحت کی گئی ہے۔

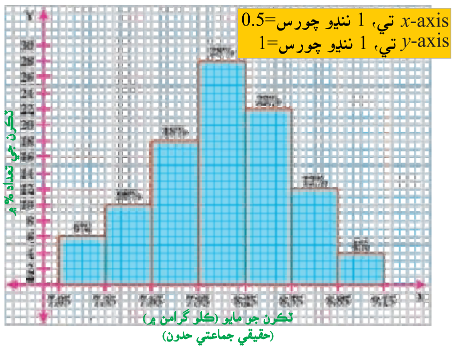


مثال 2: درج ذیل تقسیم کے لیے فیصد تعدد کا کالمی نقشہ بنائیں

بلاکس کا ماس (کلو گرام میں)	7.1 - 7.3	7.4 - 76	7.7 - 7.9	8.0 - 8.2	8.3 - 8.5	8.6 - 8.8	8.9 - 9.1
بلاکس کی تعداد	3	5	9	14	11	6	2

حل: دیئے گئے مسلسل تعدد جدول میں اعشاریہ کے بعد ایک ہندسے تک مسلسل مواد ہے، لہٰذا $m = 1, n = 50$ اور $d = 0.1$ جماعتی حدود یہ ہیں: 8.55 - 8.85، 8.85 - 9.15، 7.05 - 7.35، 7.35 - 7.65، 7.65 - 7.95، 7.95 - 8.25، 8.25 - 8.55،

ان کو x محور پر لکھنا ہے۔ اسی طرح متعلقہ فیصد تعددات 4, 12, 22. 28, 18, 10, 6 کو Y محور پر متعلقہ پیمانوں کے ساتھ لکھیں۔ بائونڈری کی بنیاد ہر ملحقہ مستطیلیں کھینچتے ہوئے، چوڑائی h=0.3 اور اونچائی فیصد تعدد کے برابر کرنے سے ہمیں مطلوبہ فیصد تعدد ملتا ہے۔



(iii) 22.1 غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشہ بنانا:

غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشے کی صورت میں ملحقہ مستطیل اس لیے بنایا گیا ہے کہ صرف ان کے علاقے (اونچائی نہیں) تعداد کے متناسب ہوں۔ ایسا کرنے کے لیے ہم علاقوں اور تعدد کو یقینی بنانے کے لیے مستطیلوں کی ترتیب شدہ اونچائیوں کی وضاحت کرتے ہیں۔ اگر f^* کسی جماعت کا تعداد اور h^* اس کی چوڑائی ہو تو پھر:

(1) $\frac{f^*}{h^*}$ = مستطیل کی ترتیب شدہ اونچائی

(2) $h^* \times \frac{f^*}{h^*} = f^*$ = تاکہ، مستطیل کا رقبہ–چوڑائی–اونچائی–

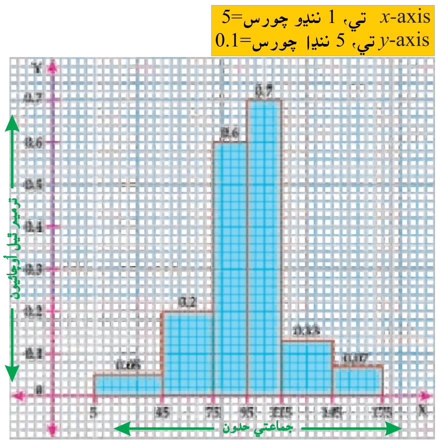
(1) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ترتیب شدہ اونچائیاں f کے متناسب نہیں ہیں، لیکن (2) میں رقبہ اس ضرورت کو پورا کرتا ہی، کالمی نقشے کو غیر مساوی جماعتی، وقفور کے ساتھ بنانے کے مراحل پہلے کی طرح ہی ہیں، لیکن ہمیں Y محور پر ترتیب شدہ اونچائیاں لکھنی چاہیئے۔

مثال: غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ درج ذیل مواد کے لیے کالمی نقشہ بنائیں:

جماعتی حدود	10 - 40	50 - 70	80 - 90	100 - 110	120 - 140	150 - 170
تعدادت	2	6	12	14	4	2

حل: ہم مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ دیا گیا مواد غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ تعدد جدول دکھاتا ہے، ہم سب سے پہلے جماعتی حدود اور ترتیب شدہ اونچائیوں کا شمار کرتے ہیں۔ یہاں d = 10 ہے۔

مستطیلوں کی ترتیب شدہ اونچائی (f^* / h^*)	تعدادت (f^*)	جماعتی وقفے (h^*)	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی حدود
$\frac{2}{40} = 0.05$	2	40	5-45	10 – 40
$\frac{6}{30} = 0.2$	6	30	45-75	50 – 70
0.6	12	20	75-95	80 – 90
0.7	14	20	95-115	100 – 110
≈ 0.13	4	30	115-145	120-140
≈ 0.07	2	30	145-175	150-170



X محور پر جماعتی حدود اور y محور پر ترتیب شدہ اونچائیوں کو لکھتے ہوئے ہم تمام جماعتوں کے لیے مستطیل کھینچتے ہیں جن کی چوڑائی غیر مساوی جماعتی وقفوں کے برابر ہوتی ہے اور اونچائی مندرجہ بالا جدول میں شمار کردہ ترتیب شدہ اونچائی کے برابر ہوتی ہے۔ اس طرح ہمیں غیر مساوی وقفوں کے ساتھ مطلوبہ کالمی نقشہ ملتا ہے۔

ہر تصدیق کرسکتے ہیں کہ یہاں مستطیل کے علاقے متناسب ہیں اور خاص طور پر تعدادات کے برابر ہیں۔

مستطیل کا رقبہ-1 $= 40 \times 0.05 = 2$

مستطیل کا رقبہ-2 $= 30 \times 0.2 = 6$

مستطیل کا رقبہ-3 $= 20 \times 0.6 = 12$ اور اسی طرح

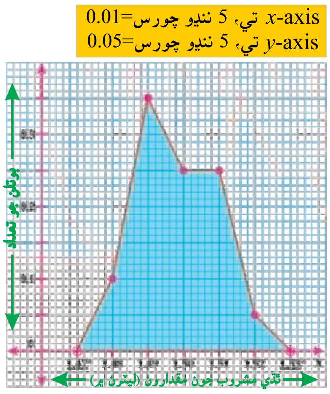
22.1(iv) تعددی کثیر الاضلاع (Frequency Polygon) بنانا:

تعدادی کثیر الاضلاع تعددی تقسیم میں گروہی مقداری مواد کی گرافیکل نمائندگی کا ایک اور طریقہ ہے۔ ہم اکثر اخبارات میں (خاص طور پر کاروباری حصے میں)، موسم کی پیش گوئی کی خبروں میں، اور کرکٹ میچ کے اعداد و شمار میں ایسے گراف دیکھتے ہیں کثیر الاضلاع لفظ سے مراد پلین (Plane) میں بند ایسی شکل ہے جو کم از کم تین قطعات کو جوڑ کر بنتی ہے مثال کے طور پر، مثلث، مربع، پینٹاگون، وغیرہ یہاں ہم یہ سیکھیں گے کہ یہ ہندسی تصور تعددی تقسیم سے کیسے متعلق ہے۔ تعددی کثیر الاضلاع کا استعمال جدید شماریاتی تجزیہ میں تقسیم کی شکل کے شناخت کے لیے لیا جاتا ہے۔

تعددی کثیر الاضلاع بنانے کے لیے نکات (x,y) کو پلاٹ کیا جاتا ہے، جہاں x کورڈینیٹ (abscissas) جماعتی نشان ہوتے ہیں اور Y کورڈینیٹ (ordinates) جماعتی تعدد ہوتے ہیں دوم ہم دو ڈمی (dumny) جماعتوں کا اضافہ کرتے ہیں، ایک شروع میں اور ایک آخر میں O تعدد کے ساتھ اور x محور پر ان کے لیے متعلقہ نکات کو نشان زد کرتے ہیں آخر میں ہم مطلوبہ بند شکل حاصل کرنے کے لیے گراف پر بکھرے ہوئے نکات کو جوڑتے ہیں، جس سے ہمیں تعددی کثیر الاضلاع ملتا ہے، جس کی بنیاد x محور پر ہوتی ہے اور چوٹیاں تعدد ظاہر کرتی ہے وضاحت کے لیے، بھرے ہوئے نمبر (•) اصلی جماعتوں کے نکات اور خالی نمبر (o) ڈمی جماعتوں کے نکات کو ظاہر کرتے ہیں۔ محوروں پر لیبل لگانا لازمی ہے اور مناسب پیمانے کی وضاحت کریں۔

مثال 1: درج ذیل مواد کے لیئے ایک نسبتاً تعددی کثیر الاضلاع کھینچیں۔

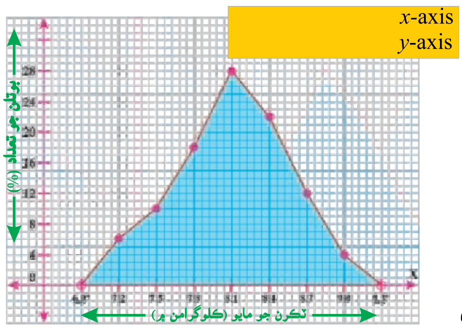
کولڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1



حل: دیا گیا مواد غیر مسلسل تعدد جدول ظاہر کرتا ہے۔ الگ الگ عدد: 1.52, 1.51, 1.50, 1.49, 1.48 جماعتی نشان (x) ہیں اور 1, 5, 5, 7, 2 تعدد (y) ہیں سب سے پہلے ہم نسبتاً تعدد کا شمار کرتے ہیں، جو یہ ہیں 0.25, 0.25, 0.35, 0.1 اور 0.05 دو ڈمی جماعتوں کے ساتھ پلاٹ لیے گئے نکات یہ ہیں (1.47*, 0)، (1.48,0.1)، (1.49, 0.35)، (1.50, 0.25)، (1.51,0.25)، (1.52,0.05) اور (1.53*0) قطعات کے ذریعے نکات کو جوڑتے ہوئے ہیں نسبتاً تعددی کثیر الاضلاع ملتا ہے۔

مثال 2: درج ذیل تقسیم کے لیئے فیصد تعددی کثیر الاضلاع کھینچیں۔

بلاک کا ماس (کلوگرام میں)	7.1 - 7.3	7.4 - 7.6	7.7 - 7.9	8.0 - 8.2	8.3 – 8.5	8.6 – 8.8	8.9 – 9.1
بلاک کی تعداد	3	5	9	14	11	6	2



حل: مواد مساوی جماعتی وقفہ h=0.3 کے ساتھ مسلسل تعددی تقسیم ظاہر کرتا ہے، پلاٹ کے نکات (x,y) ہیں، جہاں x جماعتی نشانات کو ظاہر کرتا ہے 7.2, 7.5, 7.8, 8.1, 8.4, 8.7, 9.0 اور y فیصد تعدد ہے 18, 4، 10, 6 12, 22,28

دو ڈمی جماعتی نشانات کو شامل کریں اور مطلوبہ فیصد تعددی کثیر الاضلاع ان کے ذریعے پلاٹ کیا جائے:

(6.9*, 0)، (7.2, 6)، (7.5, 10)، (7.8, 18)، (8.1, 28)، (8.4, 22)، (8.7,12)، (9.0,4) اور (9.3*, 0) مناسب پیمانوں کو مد نظر رکھا جائے۔

22.2 مجموعی تعددی تقسیم:

مجموعی تعددی تقسیم ایک جدول ہے جس میں مجموعی تعدد کی جماعتوں کی شمار کی گئی تعدد کی گنتی کی جاتی ہے۔ ہم تعدد کا شمار پہلے ہی جانتے ہیں۔ وہ مجموعی تعدد جو UCB سے کم مشاہدات کی تعداد کو جمع کرنے سے حاصل ہوا سے مجموعی تعددات سے (LESS THAN COMUTATIVEFREQUENCY) کہا جاتا ہے، یہ 0 سے شروع ہوتی ہیں اور مشاہدات کی کل تعداد (n) پر ختم ہوتی ہے۔ ہمیں لازمی جماعتوں میں ایک ڈمی UCB شامل کرنی ہے، 0 مجموعی تعدد کے ساتھ مجموعی تعددات سے زیادہ (Greater than commutative frequency) حساب لگانے کے لیئے ہم LCB سے زیادہ جماعتوں والے مشاہدات کو جمع کرتے ہیں یہ n سے شروع ہوتی ہیں اور 0 پر ختم ہوتی ہیں۔ لیکن عام طور پر ہم "مجموعی تعددات سے کم" کو استعمال کرتے ہیں۔ آنے والی بحث میں، آسانی کے لیئے ہم "مجموعی تعدد" کے بجائے "مجموعی تعددات سے کم" کو استعمال کریں گے۔

(i) 22.2 ایک مجموعی تعدد جدول بنائیں:

گروہی مقداری مواد کے مجموعی تعدد جدول بنانے کی مراحل یہ ہیں:

1- بالائی جماعتی حدود اور مجموعی تعددات حاصل کریں۔

2- 0 مجموعی تعدد کے ساتھ شروع میں ایک ڈمی بالائی جماعتی حدود شامل کریں۔

3- متعلقہ مجموعی تعدد کے ساتھ تمام UCBs کو ظاہر کرنے کے لیئے ایک جدول بنائیں۔

مثال 1: درج ذیل مواد کا استعمال کرتے ہوئے ایک مجموعی تعدد جدول بنائیں:

طلباء کے مارکس	1	2	3	4	5
طلباء کی تعداد	2	5	4	3	1

حل: دیئے گئے مواد سے غیر مسلسل تعددی تقسیم ظاہر ہوتی ہے یہاں $d=1$ اور $n=15$ ہے۔ CBs حاصل کرنے کے لیے جماعتی حدود میں $\frac{d}{2}$ کا اضافہ کریں اور پھر ہم مجموعی تعددات حاصل کرتے ہیں: U مجموعی تعددات "0" کے ساتھ 0.5 کے برابر شروع میں ایک ڈمی UCB شامل کرنا لازمی ہے۔ مطلوبہ مجموعی تعدد جدول یہ ہے۔

مجموعی تعددات	تعددات	UCBs	جماعتیں
2	2	1.5	1
7	5	2.5	2
11	4	3.5	3
14	3	4.5	4
15 = n	1	5.5	5

طلباء کے مارکس (UCB) سے کم	0.5*	1.5	2.5	3.5	4.5	4.5
طلباء کی تعداد (مجموعی تعدات)	0	2	7	11	14	15

مثال 2: بجلی کی گھپت کے مواد کے لیئے مجموعی تعدد جدول بنائیں:

بجلی کی کھپت (kw14)	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: دیا گیا مواد ایک مسلسل تعددی تقسیم کو ظاہر کرتا ہے۔ یہاں $d=1$ اور $n=60$ ہیں۔ UCBs یہ ہیں:
87.5, 107.5, 127.5, 147.5, 147.5, 187.5 اور 207.5 ایک ڈمی UCB *67.5 کا اضافہ شروع میں کر کے ہمیں مندرجہ ذیل مجموعی تعدد جدول حاصل ہوتا ہے۔

بجلی کی کھپت (KwH) سے کم	67.5*	87.5	107.5	127.5	147.5	167.5	187.5	207.5
دنوں کی تعداد	0	10	23	38	48	52	58	60

22.2 (ii) مجموعی تعددی کثیر الاضلاع بنائیں:

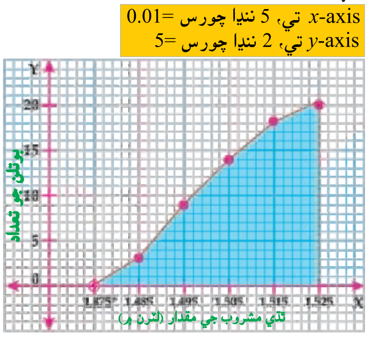
مجموعی تعددی تقسیم کو گرافی طور پر ایک مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کے ذریعے دکھایا جاتا ہے۔ جسے اوگیو (Ogive) بھی کہتے ہیں۔ ہم مجموعی تعدد جدول (x:UCBs اور y مجموعی تعددات) کے نکات (x, y) کی منصوبہ بندی شروع کرتے ہیں، پھر ان کو قطعات کے ذریعے جوڑتے ہیں۔ آخر میں، ہم بند شکل حاصل کرنے کے لیے x محور پر چوٹی کے نقطے سے ایک عمود کھینچتے ہیں، جو کہ مطلوبہ Ogive یا مجموعی تعددی کثیر الاضلاع ہے۔

مثال 1: درج ذیل مواد کے لیئے ایک اوگیو (مجموعی تعددی کثیر الاضلاع) بنائیں

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: یہاں n=20 اور d=0.01 ہے۔ UCBs اور مجموعی تعددات کو شمار کرتے ہوئے ہم مجموعی تعدد جدول حاصل کرتے ہوئے ہم مجموعی تعدد جدول حاصل کرتے ہیں، جہاں 1.475 ایک ڈمی شروع ہونے والا UCB ہے۔

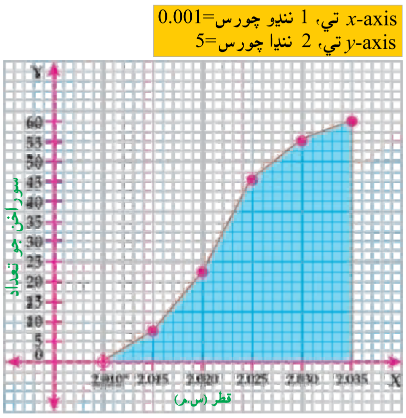
کولڈ ڈرنک مقدار (لیٹر میں)	1.475*	1.485	1.495	1.505	1.515	1.525
بوتلوں کی تعداد	0	2	9	14	19	20



اب ہم نکات (1.4 75*, 0)، (1.485, 2)، (1.495,9)، (1.505, 14)، (1.515, 19) اور (1.525, 20) کو گراف پر پلاٹ کرتے ہیں، ان کو قطعات کے ذریعے جوڑتے ہیں اور آخر میں مطلوبہ مجموعی تعددی کثیر الاضلاع یا اوگیو حاصل کرنے کے لیے x محور کی طرف آخری نقطے سے ایک عمود بناتے ہیں۔ محوروں کو واضح پیمانوں کی مدد سے لیبل کیا گیا ہے۔

مثال 2: انن میں بور ہونے والے 60 سوراخوں کے قطر (سنٹی میٹر میں) کاسٹنگ جیسے ایک خاص مطالعے میں ماپے گئے ہیں۔ مندرجہ ذیل تقسیم کے لیئے مجموعی تعددی کثیر الاضلاع بنائیں۔

قطر (cm)	2.011 – 2.014	2.016 – 2.019	2.021 - 2.024	2.026 – 2.029	2.031 – 2.034
سوراخوں کی تعداد	7	16	23	9	5



حل: دیئے گئے مسلسل تعدد جدول میں n=60 اور d=0. 002 ہے۔ UCBs اور مجموعی تعددات کا استعمال کرتے ہوئے ہم ان نکات کے ساتھ مجموعی تعدد جدول حاصل کرتے ہیں:

(2.030,55)،(2.025,46)،(2.020,23)،(2.010,7)، (2.010*) اور (2.035,60)

یہ نکات مطلوبہ اوگیو یا مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کی طرف لے جاتے ہیں۔

مشق 22.2

1- مندرجہ ذیل مواد کے لیئے فیصد کالمی نقشہ، تعددی کثیر الاضلاع مجموعی تعدد جدول اور اوگیو بنائیں۔

طلباء کے مارکس	1	2	3	4	5
طلباء کی تعداد	2	5	4	3	1

2- مندرجہ ذیل مواد کے لیئے ایک غیر مساوی جماعتی وقفوں کے ساتھ کالمی نقشہ بنائیں۔

جماعتی حدود	0-39	40-49	50-79	80-99
تعدادت	6	8	12	4

3- مندرجہ ذیل جدول کے لیئے کالمی نقشہ، تعددی کثیر الاضلاع مجموعی تعدد جدول اور اوگیو بنائیں۔

ایک ہفتے میں کمائی گئی رقم	20-40	50-70	80-90	100-110	120-140	150-170
لوگوں کی تعداد	2	6	12	14	4	2

4- مندرجہ ذیل مواد کے لیے کالمی نقشہ، نسبتاً تعددی کثیر الاضلاع اور اوگیو تشکیل کریں۔

جماعتی حدود	10.5-10.9	11.0-11.4	11.5-11.9	12.0-12.9	130-13.4
تعدادت	2	7	10	12	8

22.3 مرکزی رجحان کے پیمانے:

اعداد و شمار میں تمام مشاہدات کا کسی مرکزی نقطے کے گرد جمع ہونے کی صلاحیت کو مرکزی رجحان کہا جاتا ہے۔ مواد کے مرکزی نقطے کو مرکزی رجحان کی پیمائش یا محض اوسط کہا جاتا ہے مرکزی رجحان کا پیمانہ ایک واحد مرکزی نقطے کے ذریعے پورے مواد کی نمائندگی کرتا ہے اور پورے مواد کی ایک جامع شناخت ہے۔

ہم عام طور پر اعداد اور اقسام کی اوسط کے بارے میں اکثر بات کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر درج ذیل جملوں پر غور کریں:

1- "کلاس میں طلباء کی اکثریت نے گریڈ B حاصل کیا۔" یہاں گریڈ B ایک اوسط ہے۔

2- "علی رزانہ جم میں 45 منٹ گزارتا ہے۔" یہاں علی جم میں روزانہ 45 منٹ اوسط وقت گزارتا ہے۔ ظاہر ہے، اس نے 45 منٹ سے زیادہ یا کم گزارے ہوں گے۔

3- "T20 میں بلے باز کا اوسط سکور" جو کہ اس کے تمام T20 اسکورز پر مبنی ہوتا ہے۔ اوسط سکور تمام انفرادی اسکور کو عام کرتا ہے۔

22.3 (i) مرکزی رجحان کے پیمانوں کا حساب لگانا:

ہم عام طور پر مشاہدات کو جمع کرکے اور پھر مشاہدات کی کل تعداد سے تقسیم کرکے مواد کے مرکزی رجحان کی اوسط کا حساب لگاتے ہیں، جو خاص طور پر حسابی اوسط کہلاتا ہے۔ اوسط کا حساب لگانے کے اور بھی کئی طریقے ہیں ہم یہاں درج ذیل پانچ اقسام پر غور کرتے ہیں۔

1- حسابی اوسط (Arithmetic mean)   2- وسطانیہ (Median)   3- عادہ (Mode)

4- ہندسی اوسط (Geometric mean)   5- ہم آہنگ اوسط (Harmonic mean)

یہ اوسط ایک دوسرے کے ساتھ موازنہ کرتے وقت کچھ فوائد اور نقصانات رکھتے ہیں نیز، اوسط کا بہترین استعمال مواد کی نوعیت پر منحصر ہے۔

22.3(i) (a) حسابی اوسط بذریعہ تعریف اور انحراف (Deviation) کا استعمال کرتے ہوئے فرضی اوسط سے۔

حسابی اوسط تمام مشاہدات کے درمیان مساوات کے اصول پر مبنی ہے۔ ہم تمام n مشاہدات کو ان کے مجموعے سے ملاتے ہیں اور پھر رقم کو n برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

اگر $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ n اعداد ہیں، تو ان کا حسابی اوسط ($\bar{x}$ کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے) یہ ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \quad (1) \quad \text{یا} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

جہاں "Σ" ایک بڑا یونانی حرف ہے جو مجموعے کے لیئے استعمال ہوتا ہے۔

نوٹ:

1- حسابی اوسط مواد کی حد کے اندر ایک منفرد عدد ہے۔

2- اگر مواد مقداری ہیں تو ہم براہ راست حسابی اوسط نکالتے ہیں جبکہ اگر مواد نومینل یا آرڈینل ہو تو ہم بالترتیب عددی کوڈ یا رینک تفویض کر سکتے ہیں۔

3- حسابی اوسط نومینل مواد کے لیئے مناسب نہیں ہے۔

حسابی اوسط بذریعہ تعریف / براہ راست طریقے سے:

حسابی اوسط کو براہ راست طریقے / ذریعہ تعریف مشاہدات کے مقام یا پیمانے جو تبدیل کیئے بغیر دیئے گئے مواد سے براہ راست حاصل کرتے ہیں۔ براہ راست طریقے / تعریف کے مطابق ہم درج ذیل کلیات (formulas) کا استعمال کرتے ہیں:

(غیر گروہی مواد) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{\sum x}{n}$ (گروہی مواد) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{\sum xf}{\sum f}$

یہاں x_i غیر گروہی مواد میں انفرادی مشاہدات اور گروہی مواد میں جماعتی نشان کو ظاہر کرتا ہے اور f_i متعلقہ جماعتی تعدادات ہیں۔ اختصار کے لیئے ہم کلیوں میں سبسکرپٹس کو چھوڑ سکتے ہیں۔

مثال 1: بذریعہ تعریف درج ذیل ڈیٹا سیٹس کا حسابی اوسط معلوم کریں:

(i) 2, 3, 7, 5, 5, 13, 1, 7, 4, 8, 3, 4, 3 (ii). 7, 5, 74, 10 (iii). 18.92, 27.9, 34.7, 39.68

حل: (i) بذریعہ تعریف یا براہ راست طریقے سے ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2+3+7+5+5+13+1+7+4+8+3+4+3}{13} = \frac{65}{13} = 5.$$

(ii) بذریعہ تعریف، ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{7+5+74+10}{4} = \frac{96}{4} = 24.$$

(iii) $$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{18.92+27.9+34.7+39.68}{4} = \frac{121.2}{4} = 30.3.$$

نوٹ: حسابی اوسط انتہائی قدروں (Outliers) سے متاثر ہوتا ہے۔

مثال 1 کے (ii) میں $\bar{x} = 24$ تمام مشاہدات سے بہت دور ہے: 7, 5, 74 اور 10 میں 74 انتہائی قدر کی وجہ سے۔

مثال 2: گروپ میں تعلیم حاصل کرنے والے پانچ طلباء کے درجات (Grades) یہ تھے: +A, B, C, B+, A کا حسابی اوسط کا استعمال کرتے ہوئے اوسط درجہ معلوم کریں۔

حل: مواد آرڈینل ہیں اور اعداد کے حساب سے درجہ بندی کی جا سکتی ہے۔ ہم درجات کی نمائندگی کرتے ہیں۔ +A، A، +B، B، +C، C بذریعہ لیبل بالترتیب: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ہیں۔

پھر: $\bar{x} = \dfrac{\sum x}{n} = \dfrac{6+1+4+3+5}{5} = \dfrac{19}{5} = 3.8 \approx 4.$ لہٰذا اوسط درجہ +B ہے۔

مثال 3: درج ذیل مواد میں تعریف کے لحاظ سے کولڈ ڈرنک کی مقدار کی حسابی اوسط معلوم کریں۔

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

x	f	xf
1.48	2	$1.48\times 2 = 2.96$
1.49	7	10.43
1.50	5	7.5
1.51	5	7.55
1.52	1	1.52
	$\sum f = 20$	$\sum xf = 29.96$

حل: مواد کی غیر مسلسل جماعتوں میں گروہ بندی کی گئی ہے۔ جماعتی نشان (x) یہ ہیں: 1.52, 1.51, 1.50, 1.49, 1.48 حسابات جدول میں دکھائے گئے ہیں:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{29.96}{20} = 1.498 \text{ لیٹر}$$

حسابی اوسط کا استعمال کرتے ہوئے کولڈرنک کی اوسط مقدار 1.498 لیٹر ہے۔

مثال 4: بذریعہ تعریف صارفین کے اطمینان کا حسابی اوسط معلوم کریں

اطمینان کی سطح	بالکل بھی نہیں	بہت نہیں	یقین نہیں	کسی حد تک	بہت
صارفین کی تعداد	3	8	5	6	18

حل: ہم آرڈیل متغیر کی صفات کی نمائندگی کرتے ہیں:

"بالکل بھی نہیں، بہت نہیں، یقینی نہیں، کسی حد تک، بہت" درجات کے لحاظ سے، بالترتیب: 1, 2, 3, 4, 5 بذریعہ تعریف، ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{(1)(3)+(2)(8)+(3)(5)+(4)(6)+(5)(18)}{3+8+5+6+18} = \frac{148}{40} = 3.7 \approx 4.$$

لہٰذا اوسط اطمینان کی سطح "4" درجہ ہے جو کہ "کسی حد تک" کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 5: 60 دنوں کے لیئے دکان کی بجلی کی کھپت (KWH) میں درج ذیل ہے۔ حسابی اوسط معلوم کریں:

بجلی کی کھپت	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: مواد مسلسل تعدد جدول کو ظاہر کرتا ہے۔ ہمیں جماعتی نشان اور مطلوبہ رقم محلقہ جدول میں ملتی ہے۔ بذریعہ تعریف یا براہ راست طریقے سے:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{7270}{60} = 121.166.$$

دکان کی بجلی کی اوسط کھپت 121.166 ہے۔

جماعتی حدود	جماعتی نشانی (x)	تعددات (f)	xf
68-87	77.5	10	775
88-107	97.5	13	1267.5
108-127	117.5	15	1762.5
128-147	137.5	10	1375
148-167	157.5	4	630
168-187	177.5	6	1065
188-207	197.5	2	395
کل تعداد	---	$\sum f = 60$	7270

نوٹ: غیر گروپی مواد کا حسابی اوسط اور اس کی غیر مسلسل تعدد جدول ہمیشہ ایک جیسے ہوتے ہیں۔ لیکن مسلسل تعددی تقسیم سے مواد کا حسابی اوسط متعلقہ غیر گروہی مواد کے وسط کے برابر (لیکن اس کے قریب) نہیں ہے۔

انحراف / بالواسطہ طریقوں کا استعمال کرتے ہوئے حسابی اوسط:

اگر: x مشاہدات کو ظاہر کرتا ہے اور A ہے فرضی / عارضی اوسط (اندر یا باہر کوئی بھی عدد مواد کی حد میں) تو پھر A کا انحراف یہ ہے

$$D_i = x_i - A$$

انحراف پر مبنی دو بالواسطہ طریقے ہیں: مختصر طریقہ (Shortcut method) اور کوڈنگ طریقہ (Coding method) انہیں حسابی اوسط کو شمار کرنے کے لیئے استعمال کیا جاتا ہے جب کیا جاتا ہے جب اعلٰی اقدار کی ساتھ بڑے مواد سے نمٹا جاتا ہے۔

مختصر طریقہ:

مختصر طریقہ استعمال کرتے ہوئے حسابی اوسط اس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\bar{x} = A + \frac{\sum D}{n}$$ (غیر گروہی مواد کے لیے)

اور

$$\bar{x} = A + \frac{\sum Df}{\sum f}$$ (گروہی مواد کے لیے)

غیر گروہی مواد کے لیے x_i مشاہدات ہیں اور گروہی مواد کے لیے x جماعتی نشانات ہیں۔ یہ بہتر ہے کہ گروہی مواد کے لیے A مطابق x_i کو سب سے تعدد والا لیا جائے۔

کوڈنگ طریقہ:

$$\bar{x} = A + h\frac{\sum u}{\sum n}$$ (غیر گروہی مواد کے لیے)

اور

$$\bar{x} = A + h\frac{\sum uf}{\sum f}$$ (گروہی مواد کے لیے)

جہاں $u_i = \frac{x_i - A}{h}$ یا، $u = \frac{x - A}{h}$ کو کوڈ شدہ متغیر کہا جاتا ہے۔ غیر گروپی مواد کے لیئے، x مشاہدات ہیں اور گروپی مواد کے لیئے x جماعتی نشانات ہیں۔

مثال 1: امتحان میں گروپ میں پڑھنے والے چھ طلباء کے کل نمبر یہ ہیں: 580, 710, 685, 640, 610 بالواسطہ طریقوں کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کا حسابی اوسط معلوم کریں۔

$h = 20.$ اور $A = 680$ (ii). $h = 10$ اور $A = 650$ (i).

حل: مختصر طریقہ یہ بتاتا ہے: $\bar{x} = A + \frac{\sum D}{n}$

کوڈنگ کا طریقہ یہ بتاتا ہے $x = A + h\frac{\sum u}{n},$

جہاں $u_i = \frac{x_i - A}{h}$

دونوں حصوں کے لیئے الگ الگ جدولوں میں مطلوبہ حسابات دکھائے گئے ہیں:

$h = 10.$ اور $A = 650$ (i).

x	$D = x - 650$	$u = \frac{x-650}{10}$
610	-40	-4
640	-10	-1
685	35	3.5
680	30	3
710	60	6
580	-70	-7
	$\sum D = 5$	$\sum u = 0.5$

مختصر طریقے سے ہمارے پاس ہے۔

$$\bar{x} = 650 + \frac{5}{6} = 650.833.$$

کوڈنگ طریقے سے ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = 650 + 10 \times \frac{0.5}{6} = 650 + \frac{5}{6} = 650.833.$$

دونوں حصوں کے لیئے الگ الگ جدولوں میں مطلوبہ حسابات دکھائے گئے ہیں:

(ii). $A = 680$ ؛ $h = 20$.

x	$D = x - 680$	$u = \dfrac{x-680}{20}$
610	-70	-3.5
640	-40	2
685	5	0.25
680	0	0
710	30	1.5
580	-100	-5
	$\sum D = -175$	$\sum u = -8.75$

مختصر طریقے سے ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = 680 + \left(\frac{-175}{6}\right) = 680 - 29.1666$$

$$\bar{x} = 650.833.$$

کوڈنگ طریقے سے ہمارے پاس ہے:

$$\bar{x} = 680 + 20\left(\frac{-8.75}{6}\right)$$

$$\bar{x} = 680 - 29.1666 = 650.833.$$

اوسط مارکس A اور h کے انتخاب سے قطع نظر 650.833 یا 651 ہیں۔

مثال 2: مختصر اور کوڈنگ طریقے سے کولڈ ڈرنک کی اوسط مقدار معلوم کریں:

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: یہاں ہم A=1.49 اور h=0.01 استعمال کریں گے۔ حسابات جدول میں درج ہیں۔

x	f	$D = x - 1.49$	$u = \dfrac{x-1.49}{0.01}$	Df	uf
1.48	2	-0.01	-1	-0.02	-2
1.49	7	0	0	0	0
1.50	5	0.01	1	0.05	5
1.51	5	0.02	2	0.1	10
1.52	1	0.03	3	0.03	3
	$\sum f = 20$			$\sum Df = 0.16$	$\sum uf = 16$

مختصر طریقے سے: $\bar{x} = A + \dfrac{\sum Df}{\sum f} = 1.49 + \dfrac{0.16}{20} = 1.498.$

کوڈنگ طریقے سے: $\bar{x} = A + h \times \dfrac{\sum uf}{\sum f} = 1.49 + 0.01\left(\dfrac{16}{20}\right) = 1.498.$

ہم یہ نوٹ کر سکتے ہیں کہ دونوں بالواسطہ طریقوں اور بذریعہ تعریف سے نتائج ایک جیسے آرہے ہیں۔

مثال 3: 50 دھاتی بلاکس کا اوسط ماس معلوم کرنے کے لیئے مختصر اور کوڈنگ طریقوں کا استعمال کریں:

بلاکس کا مارکس (کلوگرام میں)	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.8	8.9-9.1
بلاکس کی تعداد	3	5	9	14	11	6	2

حل: یہاں A=8.1 اور h=0.1 ہے۔ حسابات مندرجہ بالا جدول میں درج ہیں:

جماعتی حدود	جماعتی نشان (x)	f	$D = x - 8.1$	$u = \dfrac{x-8.1}{0.1}$	Df	uf
7.1-7.3	7.2	3	-0.9	-9	-2.7	-27
7.4-7.6	7.5	5	-0.6	-6	-3	-30
7.7-7.9	7.8	9	-0.3	-3	-2.7	-27
8.0-8.2	8.1	14	0	0	0	0
8.3-8.5	8.4	11	0.3	3	3.3	33
8.6-8.8	8.7	6	0.6	6	3.6	36
8.9-9.1	9.0	2	0.9	9	1.8	18
		$\sum f = 50$			$\sum Df = 0.3$	$\sum uf = 3$

مختصر طریقے سے: $\bar{x} = A+\frac{\sum Df}{\sum f} = 8.1+\frac{0.3}{50} = 8.106$.

کوڈنگ طریقے سے: $\bar{x} = A+h\times\frac{\sum uf}{\sum f} = 8.1+0.1\times\left(\frac{3}{50}\right) = 8.106$.

لہٰذا، اوسط ماس 8.106 کلوگرام ہے۔

(b) 22.3(i) وسطانیہ، عادہ، ہندسی اوسط اور ہم آہنگ اوسط

حسابی اوسط (مساوات کی بنیاد پر) کے علاوہ مواد کے مرکزی رجحان کی پیمائش کرنے کے کچھ اور بھی طریقے ہیں۔ مثال کے طور پر، ہمارے انتخابی نظام میں، ہر کسی کو ووٹ دینے کا حق ہے، لیکن منتخب نمائندے کا انتخاب بالآخر اکثریت کی بنیاد پر کیا جاتا ہے، جیسا کہ بڑے پیمانے پر کہا جاتا ہے کہ "اکثریت ہی اختیار ہے۔" ایسا معاملہ عادہ کو ظاہر کرتا ہے۔ سب سے زیادہ کثرت سے آنے والا مشاہدہ اسی طرح وسطانیہ درجہ بندی والے ڈیٹا سیٹ کے درمیانی حصے پر توجہ مرکوز کرتا ہے۔ ہندسی اور ہم آہنگ اوسط ذرائع فطرت میں ریاضیاتی ہیں جیسے کہ حسابی اوسط جو کہ وسطانیہ اور عادہ کے برعکس ہے جو کہ فطرت میں وضاحتی ہیں۔

وسطانیہ:

ترتیب شدہ مواد میں وسطانیہ وہ قدر ہے جو اسے دو برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ وسطانیہ کو معلوم کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ پورے مواد کا مرکزی نقطہ صعودی یا نزولی ترتیب میں درمیانی پوزیشن پر ہے۔

نوٹ:

- مواد میں، وسطانیہ ہمیشہ منفرد ہوتا ہے۔
- ہم مقداری مواد کے وسطانیہ کا حساب لگا سکتے ہیں۔
- خاصیتی مواد کے لیئے، صرف آرڈینل مواد کا وسطانیہ معلوم کرنا معنیٰ خیز ہے۔
- وسطانیہ تمام مشاہدات پر یکساں طور پر انحصار نہیں کرتا۔
- وسطانیہ مواد میں انتہائی قدروں سے متاثر نہیں ہوتا ہے۔

ترتیب شدہ غیر گروپی مواد کے لیئے، وسطانیہ (m) n مشاہدات میں سب سے درمیانی اعداد و شمار کا حصہ ہے اور مندرجہ ذیل دو صورتوں کے ذریعے بیان کیا سکتا ہے:

m= مشاہدات کی $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ویں رقم (1)

یہاں n طاق ہے۔

m= مشاہدات کی $\left[\left(\frac{n}{2}\right)+\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]$ ویں رقم (2) یہاں n جفت ہے۔

غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیئے، مجموعی تعدد کی مدد سے، ہم (1) اور (2) کا استعمال کرتے ہوئے درمیانی مشاہدے کا انتخاب کرتے ہیں۔

مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیئے، وسطانیہ اس جماعت میں ہے جس میں $\left(\frac{n}{2}\right)$ واں مشاہدہ ہے۔ جسے ہم وسطی جماعت (m-class) بھی کہتے ہیں۔ اس کا کلیہ یہ ہے:

$$m = L+\frac{h}{f}\left(\frac{n}{2}-c\right) \qquad (3)$$

جہاں L سے مراد LCB ہے وسطی جماعت کا، h وسطی جماعت کی چوڑائی ہے، f تعدد ہے وسطی جماعت کا اور c مجموعی تعدد ہے وسطی جماعت سے بالکل پہلے والی جماعت کا۔

مثال 1: درج ذیل میں وسطانیہ معلوم کریں:

(i) 2, 3, 7, 5, 5, 13, 1, 7, 4, 8, 3, 4, 3 (ii) 7, 5, 74, 10 (iii) 18.92, 27. 9, 37.4, 39. 68

حل: (i) مواد کو صعودی میں لکھیں: 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 13

یہاں $n = 13$ (طاق) اس لیے $m = \left(\frac{13+1}{2}\right)$ واں مشاہدہ = ساتواں مشاہدہ = 4

(i) مواد کو صعودی ترتیب میں لکھیں: 5, 7 10 74 یہاں n=4 (جفت)

$m = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{2}\right)\right.$ واں + $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ واں مشاہدہ $\left.\right] = \frac{1}{2}[$ دوسرا + تیسرا مشاہدہ $] = \frac{1}{2}[7+10] = 8.5$

(iii) یہاں پر $(n = 4)$ (جفت)۔ مواد پہلے ہی درجہ بندی میں ہے۔

$m = \frac{1}{2}[$ دوسرا + تیسرا مشاہدہ $] = \frac{1}{2}[27.9+37.4] = 32.65.$

مثال 2: طلباء کے درج ذیل دو گروہوں کے وسطانیہ درجے (Grades) کی شناخت کریں۔

(i) A+, B+, C, B, A (ii) C+, A, B, B, B +, C, B+, A, A +, C

حل: (i) درجہ بندی کے ساتھ مواد یہ ہیں: C, B, B+, A, A+ یہاں n=5 (طاق) پھر

$m = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ واں = $\left(\frac{5+1}{2}\right)$ واں = تیسرا مشاہدہ = B + جو کہ وسطانیہ درجہ ہے۔

(i) مواد کو صعودی ترتیب میں لکھیں: C, C, C+, B, B, B+, B+, A, A, A+ یہاں n=10 درمیانی دو مشاہدات $\left(\frac{n}{2}\right)$ واں اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ واں ہیں جو کہ 5 واں اور 6 واں مشاہدات ہیں۔ جو کہ B اور B+ درجات ہیں۔

لہٰذا، ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ وسطانیہ درجہ B اور B+ درجات کے درمیان یکساں طور پر تقسیم ہے۔

مثال 3: 40 صارفین کے درج ذیل مواد میں وسطانیہ اطمینان کی سطح کیا ہے؟

اطمینان کی سطح	بالکل بھی نہیں	بہت نہیں	یقینی نہیں	کسی حد تک	بہت
صارفین کی تعداد	3	8	5	6	18

حل: یہاں n=40 (جفت) لہٰذا، دو درمیانی مشاہدات ہیں: 20 اور 21 یہ دونوں گروہ "کسی حد تک" میں موجود ہیں، لہٰذا، وسطانیہ اطمینان کی سطح "کسی حد تک مطمئین" ہے۔

مثال 4: درج ذیل مواد میں کولڈ ڈرنک کی وسطانیہ مقدار معلوم کریں۔

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: یہاں $n = \sum f = 20$ (جفت)

اس لیے $m = \frac{1}{2}[$ دسواں + گیارہواں مشاہدہ $]$

مجموعی تعداد تلاش کرتے ہوئے، ہم دیکھتے ہیں کہ 10 واں اور 11 واں مشاہدات مجموعی تعداد 14 کے ساتھ گروہ میں موجود ہیں۔

x	f	مجموعی تعدادات
1.48	2	2
1.49	7	9
1.50	5	14
1.51	5	19
1.52	1	20
	$\sum f = 20$	

$m = \frac{1}{2}[1.50+1.50] = \frac{1}{2}(3) = 1.50$ لیٹرز

مثال 5: مواد کا استعمال کرتے ہوئے 60 دنوں کے لیئے دکان کی وسطانیہ بجلی کی کھپت معلوم کریں:

بجلی کی کھپت	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: یہاں n=60 اور h=20 ہے، مواد ایک مسلسل تعدد جدول ہے۔ لہٰذا ہمیں حقیقی جماعتی حدود اور مجموعی تعددات کی گنتی کرنے کی ضرورت ہے جیسا کہ نیچے دیئے گئے جدول میں کیا گیا ہے۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	f	مجموعی تعددات
68-87	67.5-87.5	10	10
88-107	87.5-107.5	13	23
108-127	107.5-127.5	15	38 (m-class)
128-147	127.5-147.5	10	48
148-167	147.5-167.5	4	52
168-187	167.5-187.5	6	58
188-207	187.5-207.5	2	60
		$n = 60$	

وسطانیہ جماعت (m-جماعت) وہ ہے جو $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں مشاہدہ پر مشتمل ہے جو کہ یہاں 30 واں مشاہدہ ہے تو m-جماعت ایک ہے جس کی مجموعی تعدد 38 ہے۔ m-جماعت 108 - 127 ہے۔ (جیسا کہ جدول میں نمایاں کیا گیا ہے۔)

کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے:

$$m = \text{L} + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right) = 107.5 + \frac{20}{15}\left(\frac{60}{2} - 23\right)$$

$$\Rightarrow \quad m = 107.5 + \frac{20}{15}(30-23) = 107.5 + \frac{20}{15} \times 7 = 107.5 + 9.333 = 116.833 \text{ kWh.}$$

یہاں، L=m جماعت کا LCB = 107.5، h=m جماعت کا جماعتی وقفہ، f=m-جماعت کا تعدد = 15 اور
c= وسطانیہ جماعت سے پہلی والی جماعت کا مجموعی تعدد =23

چوتھائیاں (Quartiles):

چوتھائی کی وضاحت کرنے کے لیئے ترتیب شدہ مواد کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ مواد کی حد میں تین چوتھائیاں ہیں جو مواد کو 4 برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہیں۔

پہلی چوتھائی (یا نچلی) ترتیب شدہ مواد کو 25% تا 75 % تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔

غیر گروہی مواد کے لیے:

(1) $Q_1 = \left(\frac{n+3}{4}\right)$ واں مشاہدہ، اگر $\frac{n}{4}$ صحیح عدد (Integer) نہ ہو تو بصورت دیگر

(2) $Q_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{4}\right)\text{مشاہدہ} + \left(\frac{n}{4}+1\right)\text{واں مشاہدہ}\right]$ ، اگر Q_1 صحیح عدد ہو۔

غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیے ہم (1) اور (2) کو بھی استعمال کرتے ہیں۔ مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیئے ہم استعمال کرتے ہیں:

$$Q_1 = L + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{4} - c\right)$$

ہی

یہاں L، سے مراد LCB ہے، h چوڑائی ہے، Q_1 f جماعت کا تعدد ہے اور C Q_1- جماعت سے پہلے والی جماعت کا مجموعی تعدد ہے۔ Q_1- جماعت وہ جماعت ہے جو $\left(\frac{n}{4}\right)^{th}$ ویں مشاہدہ پر مشتمل ہے۔

دوسری (یا درمیانی) چوتھائی Q_2 ترتیب شدہ مواد کو 50% تا 50% کے تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔ یہ مواد کے وسطانیہ کے برابر ہے۔

تیسری (یا اوپری) چوتھائی Q_3 ترتیب شدہ مواد کو 75 % تا 25 % تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔

غیر گروہی مواد کے لیے:

(4) $Q_3 = \left(\frac{3n+1}{4}\right)$ واں مشاہدہ، اگر $\frac{30}{4}$ صحیح عدد نہ ہو

بصورت دیگر

(5) $Q_3 = \left[\left(\frac{3n}{4}\right)\text{مشاہدہ} + \left(\frac{3n}{4}+1\right)\text{واں}\right] \frac{1}{2} = Q_3$ مشاہدہ، اگر $\frac{3n}{4}$ صحیح عدد ہو۔

غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیئے، مساوات (4) اور (5) کو مجموعی تعدادات کے ساتھ استعمال کیا جاتا ہے۔

مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروپی مواد کے لیے (6) $Q_3 = L + \frac{h}{f}\left(\frac{3n}{4} - c\right)$

جہاں L, LCB ہے، h چوڑائی ہے، Q_3 f جماعت کا تعدد ہے جو کہ $\left(\frac{3n}{4}\right)$ ویں مشاہدہ پر مشتمل ہوتا ہے اور C Q_3 جماعت سے پہلے والی جماعت کا مجموعی تعدد ہے۔

مثال 1: دیئے گئے ڈیٹا سیٹس میں نچلی اور اوپری چوتھائیاں معلوم کریں۔

(i) 1000, 1200, 1600, 1500, 1200   (ii) 32, 36, 36, 37, 39, 41, 45, 46

حل: (i) ترتیب شدہ ڈیٹا سیٹ یہ ہے: 1600 ,1500 ,1200 ,1200 ,1000 یہاں n = 5 Q_1 کے لیے:

$\frac{n}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$ صحیح عدد نہیں ہے۔

اس لیے Q_1 $\left(\frac{n+3}{4}\right)$ واں = 2 واں مشاہدہ = 1200

Q_3 کے لیے $\frac{3n}{4} = \frac{3\times 5}{4} = 3.75$ صحیح عدد نہیں ہے۔

اس لیے $Q_3 = \left(\frac{3n+1}{4}\right)$ ویں = 4 ویں مشاہدہ = 1500

(ii)مواد پہلے ہی ترتیب شدہ شکل میں ہے اور یہاں $n = 8$ Q_1 کے لیے $\frac{b}{4} = \frac{8}{4} = 2$ صحیح عدد ہے

اس لیئے $Q_1 = [2$ واں $+ 3$ واں $\frac{1}{2}]$ مشاہدہ $= \frac{1}{2}[36 + 36] = 36$

Q_3 کے لیے $\frac{3n}{4} = \frac{3 \times 8}{4} = 6$ صحیح عدد)

اس لیے $Q_3 = [6$واں $+ 7$ واں $\frac{1}{2}]$ مشاہدہ $= \frac{1}{2}[41 + 45] = 43$

مثال2:

80خاندانوں میں بچوں کی تعداد کی نچلی اور اوپری چوتھائیاں معلوم کریں۔

بچوں کی تعداد	1	2	3	4	5	6
خاندانوں کی تعداد	8	10	10	25	20	7

حل:

مواد کو غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے۔ یہاں n=80 مندرجہ ذیل جدول کا استعمال کرتے ہوئے مجموعی تعدادات کو اس معلوم کرتے ہیں۔

x	f	مجموعی تعداد
1	8	8
2	10	18
3	10	28 جماعت $- Q_1$
4	25	53
5	20	73 جماعت $- Q_3$
6	7	80

Q_1 کے لیئے: $\frac{n}{4} = \frac{80}{4} = 20$ (صحیح عدد)

اس لیئے Q_1 20 ویں اور 21 ویں مشاہدات کا اوسط ہے۔

یہ دونوں مجموعی تعداد 28 کی جماعت میں آتے ہیں $Q_1 = \frac{1}{2}(3+3) = 3.$

Q_3 کے لیے: $\frac{3n}{4} = \frac{3 \times 80}{4} = 60$

60واں اور 61واں مشاہدات مجموعی تعداد 73 کی جماعت میں ہیں اس لیئے $Q_3 = \frac{1}{2}(5+5) = 5.$

مثال3:

ذیل میں دیئے گئے 100 طلباء کے وزن (کلوگرام میں) ہیں۔ ان وزنوں کی چوتھائیاں معلوم کریں۔

وزن (کلوگرام میں)	70-74	75-79	80-84	85-84	90-94
طلباء کی تعداد	10	24	46	12	8

حل: یہاں n=100, h=5 اور مواد کو مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے۔ سب سے پہلے ہم جماعتی حدود اور مجموعی تعدادات کا شمار کریں گے۔

حسابات کا خلاصہ درج ذیل جدول میں کیا گیا ہے۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	f	مجموعی تعدادات
70-74	69.5-74.5	10	10
75-79	74.5-79.5	24	34 (جماعت-Q_1)
80-84	79.5-84.5	46	80 (جماعت-Q_3 اور m)
85-89	84.5-89.5	12	92
90-94	89.5-94.5	8	100

Q_1 کے لیے $25 = \frac{100}{4} = \frac{n}{4}$ واں مشاہدہ مجموعی تعداد 34 والی جماعت میں آتا ہے۔

اس لیے: Q_1-جماعت 75-79 ہے۔

اس جماعت میں Q_1: کلوگرام $Q_1 = L + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{4} - c\right) = 74.5 + \frac{5}{24}(25-10) = 77.625$

$Q_2 = m$ کے لیے $\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$

50 واں مشاہدہ مجموعی تعداد 80 والی جماعت میں آتا ہے۔ اس لیے: m جماعت 80-84 ہے۔

کلوگرام $m = L + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right) = 79.5 + \frac{5}{46}(50-34) = 81.239$ Q_3 اس لیے: $\frac{3n}{4} = \frac{3\times100}{4} = 75$

75 واں مشاہدہ مجموعی تعداد 80 والی جماعت میں آتا ہے۔

اس لیے: Q_3- جماعت وہی ہے جو کہ m-جماعت ہے، جو 80-84 ہے۔ اس جماعت میں:

کلوگرام $Q_3 = L + \frac{h}{f}\left(\frac{3n}{4} - c\right) = 79.5 + \frac{5}{46}(75-34) = 83.956$

نوٹ:

چوتھائیاں فطرت میں درجے کے حساب سے اہمیت رکھتی ہیں جبکہ مشاہدات کی تعداد ایک ہی رہتی ہے ان کے درجے تبدیل نہیں ہوتے، مثال کے طور پر ترتیب شدہ مواد کے لیے n = 10

Q_1 تیسرا مشاہدہ $Q_2 = m = \frac{1}{2}$ [پانچواں + چھٹا مشاہدہ]

اور Q_3 آٹھواں مشاہدہ

10 مشاہدات کے ساتھ کوئی ترتیب شدہ ڈیٹا سیٹ ان درجوں کی پیروی کرے گا، جیسا کہ

a. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 $\quad Q_1 = 5,\ m = 10,\ Q_3 = 15$

b. 10, 12, 12, 13, 17, 20, 20, 20, 21, 25 $\quad Q_1 = 12,\ m = 13.5,\ Q_3 = 20.$

c. 1, 1, 1, 3, 12, 12, 13, 17, 19, 30 $\quad Q_1 = 1,\ m = 12,\ Q_3 = 17.$

عادہ (Mode): مواد میں سب سے زیادہ آنے والے مشاہدے کو عادہ کہا جاتا ہے۔ عادہ "اکثریت ہی اختیار ہے۔" اصول پر انحصار کرتا ہے۔ عادہ کو مقداری اور خاصیتی مواد دونوں کے لیے شمار کیا جا سکتا ہے۔ بغیر عادہ والے مواد کو غیر موڈل (Non-modal) کہتے ہیں، ایک عادہ والے کو یونی موڈل (Uni modal) کہتے ہیں، اور دو یا زیادہ عادہ والے کو ملٹی موڈل (multi model) کہتے ہیں۔

غیر گروہی مواد کے لیے، مشاہدات جو دوسروں کے مقابلے میں کثرت سے ہوتے ہیں، اگر کوئی ہیں تو انہیں عادہ کے طور پر کہا جاتا ہے۔

غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مواد کے لیے، عادہ سب سے زیادہ تعداد کے ساتھ مشاہدہ (جماعت) ہے، اگر دو یا دو سے زیادہ جماعتوں میں سب سے زیادہ تعداد برابر (tie) ہے، تو مواد ملٹی موڈل ہے اور اسی اعلیٰ ترین تعدد والے تمام مشاہدات عادہ ہیں۔

مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہی مدد کے لیے، سب سے زیادہ تعدد والی جماعت کو عادہ جماعت کہا جاتا ہے، اور عادہ عادہ جماعت میں ہوتا ہے، عادہ جماعت (M-class) میں عادہ (M) کو معلوم کرنے کا کلیہ یہ ہے:

$$\text{عادہ} \quad M = L + \frac{(f_m - f_{m-1}) \times h}{2f_m - f_{m-1} - f_{m+1}}$$

جہاں L. LCB ہے، h چوڑائی ہے اور f_m M- جماعت کا تعدد ہے f_{m-1} اور f_{m+1} بالترتیب M جماعت سے بالکل پہلے اور بعد کی جماعتوں کے تعدد ہیں۔

مثال 1: درج ذیل ڈیٹا سیٹس میں عادہ معلوم کریں:

(i). 75, 76, 80, 80, 82, 82, 82, 85

(ii). 13, 14, 15, 11, 16, 10, 19, 20, 18, 17

(iii). 1.49, 1.50, 1.51, 1.50, 1.48, 1.51

(iv). 1, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 6, 1, 10

(v). C+, A, B, B, B+, C, B, A, A+, C (درجات)

(vi). اچھا، ناقص، پھیکا، اچھا، منصفانہ، منصفانہ (درجہ بندی)

حل:

(i) عادہ = 82 کیونکہ یہ مواد میں 3 بار آیا ہے جو کہ کسی بھی دوسرے مشاہدے سے زیادہ ہے۔

(ii) مواد کا کوئی عادہ نہیں ہے، یہ غیر عادہ مواد ہے۔

(iii) دو عادہ ہیں: 1.50 اور 1.51 کیونکہ یہ یکساں طور پر دوسروں سے زیادہ آ رہے ہیں۔

(iv) مواد ٹرائی موڈل ہے۔ تین عادہ یہ ہیں: 2، 5 اور 9

(v) درجہ B سب سے زیادہ دہرایا گیا ہے لٰہذا عادہ درجہ B ہے۔

(vi) مواد کے دو عادہ ہیں: "اچھا" اور منصفانہ کیونکہ یہ یکساں طور پر سب سے زیادہ دہرائے گئے ہیں۔

مثال 2: 45 خاندانوں کے مواد سے ایک خاندان کے پاس موجود موبائلز کی عادہ تعداد معلوم کریں۔

موبائلوں کی تعداد	0	1	2	3	4	5	6	7
خاندانوں کی تعداد	1	7	15	12	5	2	2	2

حل: مواد کو غیر مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے، یہاں 15 سب سے زیادہ تعدد ہے اور اس کا تعلق 2 جماعت سے ہے۔ لٰہذا فی خاندان موبائلز کی عادہ تعداد 2 ہے۔

مثال 3: ذیل میں دیئے گئے 30 طلباء کے خون کے گروپوں میں سے عادہ بلڈ گروپ معلوم کریں۔

بلڈ گروپ	A+	B+	AB+	O+	A−	B−	AB−	O−
طلباء کی تعداد	6	5	3	7	3	1	2	3

حل: عادہ بلڈ گروپ O+ ہے کیونکہ یہ سب سے زیادہ تعداد "7" سے وابستہ ہے۔

مثال4: مندرجہ ذیل مواد 40 صارفین کی اطمینان کی سطح کے عادہ کا حساب لگائیں۔

اطمینان کی سطح	بہت	کسی حد تک	یقینی نہیں	بہت نہیں	بالکل نہیں
صارفین کی تعداد	18	6	5	8	3

حل: عادہ اطمینان کی سطح "بہت مطمئن" ہے کیونکہ یہ سب سے کثرت سے آئی ہے۔

مثال5: مواد کا استعمال کرتے ہوئے 60 دنوں کے ایک دکان کی عادہ بجلی کی کھپت KWH میں معلوم کریں۔

بجلی کی کھپت	188-207	168-187	148-167	128-147	108-127	88-107	68-87
دنوں کی تعداد	2	6	4	10	15	13	10

حل: مواد کو مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے، سب سے زیادہ تعدد 45 ہے عادہ-جماعت 127-108 ہے۔ حقیقی جماعتی حدود کو مندرجہ ذیل جدول میں شمار کیا گیا ہے۔

تعدد	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی حدود
10	67.5-87.5	68-87
13	87.5-107.5	88-107
15	107.5-127.5	108-107
10	127.5-147.5	128-147
4	147.5-167.5	148-167
6	167.5-187.5	168-187
2	187.5-207.5	188-207

$$h = 20, L=107.5, f_M = 15, f_{M-1} = 13, f_{M+1} = 10$$

$$\text{عادہ} = M = L + \frac{(f_M - f_{M-1}) \times h}{2f_M - f_{M-1} - f_{M+1}}$$

$$M = 107.5 + \frac{(15-13)\times 20}{2(15)-13-10} = 107.5 + \frac{2\times 20}{30-23}$$

$$M = 107.5 + 5.71428 = 113.21428\text{kWh}.$$

نوٹ: مثال 5 میں مسلسل تعددی تقسیم یونی موڈل ہے کیونکہ صرف ایک جماعت کی سب سے زیادہ تعدد ہے۔ درج ذیل مسلسل تعددی تقسیم ہے جو کہ ریل کے قطر کی نمائندگی کرتی ہے۔ 24 مقامات پر ناپا گیا قطر بائی ماڈل ہے۔

قطر (ملی میٹر میں)	2.34-2.37	2.30-2.33	2.26-2.29	2.22-2.25	2.18-2.21	2.14-2.17	2.10-2.13
مقامات کی تعداد	1	1	5	4	4	5	4

دو عادہ جماعتیں یہ ہیں "2.14-2.17" اور "2.26-2.29" سب سے زیادہ تعدد "5" کے ساتھ۔ ہر جماعت میں کلیہ استعمال کرتے ہوئے ہم 2.175 ملی میٹر اور 2.263 ملی میٹر کے متعلقہ قطر حاصل کرسکتے ہیں۔

ہندسی اوسط (Geometric Mean):

ہندسی اوسط میں تمام نمبروں کو یکساں اہمیت دی جاتی ہے ہم نمبروں کو ضرب دے کر ملاتے ہیں اور پھر اس ضرب کا اثر ختم کرنے کے لیے اس ضرب کا nواں جزر نکالتے ہیں۔ اگر اعداد و شمار (تمام مثبت) ہیں تو صرف مقداری اعداد و شمار کی ہندسی اوسط (G.M) کی گنتی کرنا معنیٰ خیز ہے۔ اگر x_1، x_2، x_3، ... x_n یہ n اعداد (تمام مثبت) ہیں تو۔

$$\text{G.M.} = (x_1.x_2...x_3)^{\overline{n}} = \left[\prod(x)\right]^{\overline{n}} \qquad (1)$$

یہاں II ضرب کے لیے بڑا یونانی حرف پائی (Pi) ہے۔ G.M اگر موجود ہے تو منفرد ہوگی۔

غیر گروہی مواد کے لیے، کلیہ (1) کو G.M تلاش کرنے کا بنیادی کلیہ کہا جاتا ہے۔ لیکن جب مشاہدات وسعت کے لحاظ سے بڑے ہوتے ہیں، تو ہم (1) کے دونوں طرف لوگارتھم لے کر اور خواص کا استعمال کرتے ہوئے حاصل کردہ لوگارتھمک کلیہ استعمال کرتے ہیں، جو کہ یہ ہے:

$$\text{G.M} = \text{antilog}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\log x_i}{n}\right] = \text{antilog}\left[\frac{\sum \log x}{n}\right] \qquad (2)$$

کلیہ (2) میں G.M اعداد و شمار کے لوگارتھمز کے حسابی وسط کا اینٹی لوگارتھم ہے۔ گروہی مواد کے لیے بنیادی کلیہ یہ ہے۔

$$\text{G.M.} = \left[(x_1)^{f_1} \times (x_2)^{f_2} \times \ldots \times (x_n)^{f_n}\right]^{\frac{1}{\Sigma f}} = \left[\prod (x)^{f}\right]^{\frac{1}{\Sigma f}} \quad (3)$$

اور لوگارتھمک کلیہ یہ ہے۔

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{\sum \text{f. } \log x}{\sum \text{f}}\right] \quad (4)$$

(3) اور (4) میں f_1، f_2، ...، f_n جماعتی تعدادات ہیں اور $x_1, x_2, \ldots, x_n$ جماعتی نشانات ہیں اور سب مثبت ہیں۔
ان میں سے کوئی بھی تعداد صفر نہیں ہونا چاہیئے (4) میں۔

مثال 1: G.M معلوم کریں بنیادی اور لوگارتھمک کلیہ استعمال کرتے ہوئے کون سا بہتر ہے اور کیوں؟

(i). 2, 4, 2, 16 (ii). 1.48, 1.52, 1.47, 1.50 (iii). 1000, 1200, 1600, 1500, 1200

حل: (i) بنیادی کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$\text{G.M.} = (2\times 4\times 2\times 16)^{\frac{1}{4}} = (256)^{\frac{1}{4}} = 4.$$

لوگارتھمک کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{\log(2)+\log(4)+\log(2)+\log(16)}{4}\right]$$

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{0.3010+0.6021+0.3010+1.2041}{4}\right] = \text{antilog }(0.60205)=3.9999 \approx 4.$$

مشاہدات وسعت میں چھوٹے ہیں، اس لیے بنیادی کلیہ بہتر ہے۔

(ii) بنیادی کلیہ استعمال کرتے ہوئے۔

$$\text{G.M.} = (1.48\times 1.52\times 1.47\times 1.50)^{\frac{1}{4}} = (4-9604)^{\frac{1}{4}} = 1.4924$$

لوگارتھمک کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{\log(1.48)+\log(1.52)+\log(1.47)+\log(1.5)}{4}\right]$$

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{\log(1.48)+\log(1.52)+\log(1.47)+\log(1.5)}{4}\right]$$

$$\text{G.M.} = \text{antilog}\left[\frac{0.1703+0.1818+0.1673+0.1761}{4}\right] = \text{antilog }(0.173875)=1.4924.$$

ایک بار پھر، بنیادی کلیہ مناسب ہے کیونکہ مشاہدات وسعت میں چھوٹے ہیں۔

(iii) بنیادی کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$\text{G.M.}=(1000\times 1200\times 1600\times 1500\times 1200)^{\frac{1}{5}} = (3456000000000000)^{\frac{1}{5}} = 1281.48 \approx 1281.5$$

لوگارتھمک کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$\text{G.M.}=\text{antilog}\left[\frac{\log(1000)+\log(1200)+\log(1600)+\log(1500)+\log(1200)}{5}\right]$$

$$\text{G.M.}=\text{antilog}\left[\frac{3+3.0792+3.2041+3.1761+3.0792}{5}\right] = \text{antilog}(3.10772)=1281.504 \approx 1281.5$$

لوگارتھمک کلیہ بہتر ہے کیونکہ لوگارتھمز استعمال کرنے سے زیادہ وسعت کو چھوٹی وسعت میں تبدیل کر دیا

مثال 2: درج ذیل اعداد و شمار میں ہندسی اوسط کا استعمال کرتے ہوئے کولڈ ڈرنک کی اوسط مقدار معلوم کریں۔

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: دیئے گئے مواد کو غیر مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے۔ بنیادی اور لوگارتھمک کلیہ کے مطلوبہ حسابات کو مندرجہ ذیل جدول میں دکھایا گیا ہے

جماعتیں (x)	f	$(x)^f$	log(x)	$f \times \log(x)$
1.48	2	2.1904	0.1703	0.3406
1.49	7	16.3044	0.1732	1.2124
1.50	5	7.5938	0.1761	0.8805
1.51	5	7.8503	0.1790	0.8950
1.52	1	1.52	0.1818	0.1818
---	$\sum f = 20$	$\prod x^f = 3236.0651$	---	$\sum f \log(x) = 3.5103$

بنیادی کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$G.M. = \left[\prod (x)^f\right]^{\frac{1}{\sum f}} = (3236.0651)^{\frac{1}{20}} = 1.49796 \approx 1.498$$ لیٹرز

لوگارتھمک کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{\sum f \log x}{\sum f}\right] = \text{antilog}\left[\frac{3.5103}{20}\right]$$

کولڈ ڈرنک کی مقدار کی ہندسی اوسط 1.498 لیٹرز ہے۔

مثال 3: لوگارتھمک طریقہ کرتے ہوئے بجلی کی کھپت کے اعداد و شمار کا ہندسی اوسط معلوم کریں:

بجلی کی کھپت (KWH)	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: کلیے میں مطلوبہ حسابات درج ذیل جدول میں کیئے گئے ہیں۔

جماعتی عدد	f	جماعتی نشانات (x)	Log (x)	$f \times \log(x)$
68-87	10	77.5	1.8893	18.8930
88-107	13	97.5	1.9890	25.8570
108-127	15	117.5	2.0700	31.0500
128-147	10	137.5	2.1383	21.3830
148-167	4	157.5	2.1973	8.7892
168-187	6	177.5	2.2492	13.4952
188-207	2	197.5	2.2956	4.5912
	$\sum f = 60$			$\sum f \log x = 124.0586$

اس لیے

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{\sum f \log x}{\sum f}\right] = \text{antilog}\left[\frac{124.0586}{60}\right] = \text{antilog}\,(2.0676) = 116.8422 \text{ kWh.}$$

مثال 4: G M کا استعمال کرتے ہوئے تار کے پچھلے حصے کا اوسط قطر معلوم کریں دونوں طریقے استعمال کریں

قطر (ملی میٹر)	2.10-2.13	2.14-2.17	2.18-2.21	2.22-2.25	2.26-2.29	2.30-2.33	2.34-2.37
مقامات کی تعداد	4	5	4	4	5	1	1

حل: مواد کو مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے۔ مطلوبہ حسابات جدول میں درج ہیں۔

جماعتی حدود	جماعتی نشانات (x)	f	x^f	$\log(x)$	$f \times \log x$
2.10-2.13	2.115	4	20.0097	0.3253	1.3012
2.14-2.17	2.155	5	46.4768	0.3334	1.6670
2.18-2.21	2.195	4	23.2134	0.3414	1.3656
2.22-2.25	2.235	4	24.9523	0.3493	1.3972
2.26-2.29	2.275	5	60.9406	0.3570	1.7850
2.30-2.33	2.315	1	2.315	0.3646	0.3646
2.34-2.37	2.355	1	2.355	0.3720	0.3720
		$\sum f = 24$	$\prod x^f = 178967745.4$	---	$\sum f \log x = 8.2526$

بنیادی کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$G.M = \left[\prod x^f\right]^{\frac{1}{\sum f}} = (178967745.4)^{\frac{1}{24}} = 2.2073 \text{ mm}$$

لوگارتھمک کلیہ استعمال کرتے ہوئے: $G.M. = \text{antilog}\left[\dfrac{\sum f \log x}{\sum f}\right] = \text{antilog}\left[\dfrac{8.2526}{24}\right] = 2.2074 \text{ mm}$

ہم آہنگ اوسط (Harmonic Mean):

ہم آہنگ اوسط (H.M) اعداد و شمار کے معکوس کے حسابی اوسط کا معکوس ہے۔ ہم تمام غیر صفر نمبروں کو ان کے معکوس جمع کرکے ملاتے ہیں اور پھر ان کو n برابر حصوں میں تقسیم کرکے اختلاف کے اثر کو ختم کر دیتے ہیں۔ آخر میں H.M نتیجے کا معکوس ہے۔

H.M کو عام طور پر مقداری مواد کے لیے شمار کیا جاتا ہے، اور یہ ہمیشہ منفرد ہوتا ہے۔

اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ غیر صفر اعداد ہیں تو: غیر گروہی مواد کے لیے H.M معکوس کا "معکوس کا حسابی اوسط"

$$\text{H.M.} = \left[\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}\right] = \left[\frac{\sum\left(\frac{1}{x}\right)}{n}\right] \text{ کا معکوس } = \frac{n}{\sum\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad (1)$$

غیر گروہی مواد کے لیے، اگر x غیر صفر جماعتی نشانات ہیں تو پھر:

$$\text{H.M.} = \frac{\sum f}{\sum\left(\frac{f}{x}\right)} \qquad (2)$$

مثال 1: ہر 10 کلومیٹر کے فاصلے کے لیے پایا جانے والی گاڑی کی رفتار کا ہم آہنگ اوسط معلوم کریں۔ رفتاریں یہ ہیں: 15 کلومیٹر فی گھنٹہ 30 کلومیٹر فی گھنٹہ، 22 کلومیٹر فی گھنٹہ، 30 کلومیٹر فی گھنٹہ اور 45 کلومیٹر فی گھنٹہ۔

حل:

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\sum\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{5}{\frac{1}{15}+\frac{1}{30}+\frac{1}{22}+\frac{1}{30}+\frac{1}{45}} = \frac{5}{0.0667+0.0333+0.0454+0.0333+0.0222}$$

$$\text{H.M.} = \frac{5}{0.2009} = 24.8880.$$

اس لیے، H.M کا استعمال کرتے ہوئے گاڑی کی اوسط رفتار 12 .4719 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔

مثال 2: کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں) 20 بوتلوں کے لیے دی جاتی ہے۔ H.M مقدار معلوم کریں۔

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: دیئے گئے مواد کو غیر مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے۔

اس لیے:

$$\text{H.M.}=\frac{\sum f}{\sum\left(\frac{f}{x}\right)}=\frac{2+7+5+5+1}{\frac{2}{1.48}+\frac{7}{1.49}+\frac{5}{1.50}+\frac{5}{1.51}+\frac{1}{1.52}}$$

$$\text{H.M.}=\frac{20}{1.3513+4.6980+3.3333+3.3112+0.6579}=\frac{20}{13.3517}=1.4979\ l$$ لیٹر

مثال 3: دھاتوں کے 50 بلاکس کی کمیت (کلوگرام میں) کا H.M معلوم کریں۔

کمیت (کلوگرام)	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.0	8.9-9.1
بلاکس کی تعداد	3	5	9	14	11	6	2

حل: مواد کو مسلسل جماعتوں میں گروہ بند کیا گیا ہے۔

اس لیے:

$$\text{H.M}=\frac{\sum f}{\sum\left(\frac{f}{x}\right)}$$

جماعتی حدود	جماعتی نشانات (x)	f	$\frac{f}{x}$
7.1-7.3	7.2	3	0.4167
7.4-7.6	7.5	5	0.6667
7.7-7.9	7.8	9	1.1538
8.0-8.2	8.1	14	1.7284
8.3-8.5	8.4	11	1.3095
8.6-8.8	8.7	6	0.6896
8.9-9.1	9.0	2	0.2222
کل	---	50	6.1869

$$\text{H.M}=\frac{50}{6.1869}=8.0816\ \text{Kg.}$$

درج ذیل جدول میں مطلوبہ رقوم کا حساب کرتے ہوئے، ہمارے پاس ہے:

مشق 22.3

1- درج ذیل میں H.M, GM, AM وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں (جہاں بھی ممکن ہو):

a. 3.2, 6, 10, 12, 12, -20, 25, 28, 30.8
b. 14, 12, 18, 19, 0, -19, -18, -12, -14
c. 6.5, 11, 12.3, 9, 8.1, 16, 18, 20.5, 25
d. 51, 55, 52, 54, 58, 60, 61, 62, 52, 57, 52, 64
e. A+, O-, AB+, O+, AB+, AB-, B+, AB+, O+, A- (بلڈ گروپس)
f. شمال، جنوب، مشرق، مغرب (سمتیں)
g. B+, فیل, B+, A+, A-, C+, B+, A-, B-, فیل, A-, B+, C- (گریڈز)

2- دس کارکنوں کی روزانہ کی کمائی روپے میں یہ ہے: 188, 170, 172, 125, 115, 195, 181, 190, 195,

A.M (تعریف اور انحراف کے لحاظ سے A=50 اور h=10)، G.M کے ساتھ)،

G.M (بذریعہ تعریف اور لوگارتھمک طریقے سے)، H.M وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

3-60 لوگوں سے لیے گئے مواد کے لیے کتوں سے اوسط رویہ، A.M وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

رویہ	کتوں کو پیار کرتے ہیں	کتوں کو پسند کرتے ہیں	کوئی رائے نہیں	کتوں کو ناپسند کرتے ہیں	کتوں سے نفرت کرتے ہیں
لوگوں کی تعداد	20	15	4	13	9

4- دیا گیا مواد ایک شہر میں لوگوں کے مرنے کی وجوہات ظاہر کرتا ہے۔ لوگوں کے مرنے کی وجہ کا عادہ معلوم کریں:

مرنے کی وجوہات	ٹی بی	ذیابیطس	ملیریا	ہیضہ	کووڈ	سرطان	بی پی	دل کا دورہ
لوگوں کی تعداد	10	6	2	2	15	10	2	5

5- 50٪ رعایت پر اسٹور میں فروخت ہونے والے جوتوں کے سائز درج ہیں A.M، G.M، H.M، Q_1، Q_3 اور وسطانیہ معلوم کریں۔
اور اس دن فروخت ہونے والے جوتوں کے سائز کا عادہ معلوم کریں۔

جوتوں کا سائز	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5
فروخت شدہ جوڑوں کی تعداد	2	5	15	30	60	40	23	11	4	1

6- ایک فیکٹری میں ہزار ملازمین کو یومیہ اجرت (100 روپے ہیں) دی جاتی ہے AM, GM, HM وسطانیہ، چوتھائیاں اور اجرت کا عادہ معلوم کریں۔

یومیہ اجرت (100 روپے میں)	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
ملازمین کی تعداد	3	13	43	102	175	220	204	139	69	25	6	1

7- پچھلے 50 دنوں کے لیے کمپنی کے ذریعے کمائے گئے منافع کا خلاصہ ذیل میں دیا گیا ہے۔ A.M منافع معلوم کریں بذریعہ مختصر اور کوڈنگ طریقے سے۔
(a) $A = 9000$، $h = 2000$ (b) $A = 11000$، $h = 2000$

منافع (روپے)	4000-6000	6000-8000	8000-10000	10000-12000	12000-14000
دنوں کی تعداد	5	7	11	21	6

8- کسی مضمون (50 میں سے) طلباء کے حاصل کردہ نمبر مندرجہ ذیل گروپی جدول میں دیئے گئے ہیں۔ A.M, G.M (براہ راست اور لوگارتھمک طریقوں کا استعمال کرتے ہوئے)، H.M وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

مارکس	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
طلباء کی تعداد	9	18	35	17	5

9- مندرجہ ذیل مواد الات کی تعداد دکھاتا ہے جس کے نتیجے میں مناسب ریجز میں مشاہدہ شدہ قدریں ملتی ہیں AM, GM, HM وسطانیہ
چوتھائیاں اور عادہ معلوم کریں۔

جماعتی حدود	10.5-10.9	11.0-11.4	11.5-11.9	12.0-12.4	12.5-12.9
تعدادات	2	7	10	12	8

22.3(ii) حسابی اوسط کی خصوصیات کو پہچانیں:

یہاں ہم A.M کی کچھ خصوصیات پر مثالوں کے ساتھ بحث کرتے ہیں۔

1- A.M کے بارے میں غیر گروہی مواد میں مشاہدات کے تمام انحرافات کا مجموعہ صفر ہے۔ 2-A.M ایک مستقل ڈیٹا سیٹ کا وہ خود مستقل ہے۔

3- اگر ایک سیٹ X کا AM $\bar{x}$ ہے پھر $Y = aX + b$ کا $\bar{y} = a\bar{x} + b$ ہے، یہاں a اور b حقیقی اعداد ہیں۔

4- اگر $AM = GM = HM$ تو مواد میں تمام مشاہدات یکساں یا مستقل ہیں۔

5- غیر مستقل مواد کے لیے، $AM > GM > HM_2$ 6- غیر مستقل مواد کے لیے $(AM)(HM) \approx (G.M.)^2$

7- اگر AM = وسطانیہ، تو پھر مواد متشاکل (Symmetric) ہیں، ورنہ غیر متشاکل (Asymmetric) ہیں۔

8- یونی-موڈل متشاکل مواد میں A.M = وسطانیہ = عادہ 9- مستقل مواد کے لیے $AM = GM = HM$ = وسطانیہ = عادہ

مثال 1: درج ذیل ڈیٹا سیٹس کا حسابی اوسط معلوم کریں۔

(i). $X = \{19, 19, 19, 19, 19\}$ (ii). $Y = \{3, 4, 6, 1, 6\}$ جہاں، $Z = 3Y + 7$

حل: (i) $X=\{19,19,19,19,19\}$ تمام اقدار کے ساتھ 19 کے برابر ہے، اس لیے $\bar{x}=19$

(ii) پہلے ہم معلوم کرتے ہیں $\bar{y}=\dfrac{3+4+6+1+6}{5}=\dfrac{20}{5}=4$

اب جیسا کہ $Z = 3Y + 7$ اس لیے $\bar{z}=3\bar{y}+7=3(4)+7=19.$

ہم یہ تصدیق کر سکتے ہیں کہ جب $Z = 3Y + 7=\{16,19,25,10,25\}$ پھر $\bar{z}=19$ صحیح ہے۔

مثال 2: یہ دکھائیں کہ اس $\{3,4,6,1,6\}$ میں تمام انحرافات کا مجموعہ اس کے A.M کے بارے میں صفر ہے۔

ثبوت:

فرض کیا کہ $X=\{3,4,6,1,6\}$ سب سے پہلے $\bar{x}$ معلوم کرتے ہیں، جو کہ یہ ہے $\bar{x}=\dfrac{\sum x}{n}=\dfrac{20}{5}=4$

اب $\bar{x}$ کے بارے میں انحرافات یہ ہیں: $(3\text{-}4),(4\text{-}4),(6\text{-}4),(1\text{-}4)$ یا صرف $-1, 0, 2, -3$ اور 2 اب ہم $\bar{x}$ کے بارے میں تمام انحرافات کا مشاہدہ کرتے ہیں: $\sum(X-\bar{x})=0$ $\sum(X-\bar{x})=(-1)+(0)+(2)+(-3)+(2)=0. \Rightarrow$ دکھا دیا گیا ہے۔

مثال 3: تصدیق کریں کہ $\{19,19,19,19,19\}$ کے لیے A.M. = G.M. = H.M.= وسطانیہ=عادہ

حل: دیئے گئے مستقل ڈیٹا سیٹ کے لیے تمام اوسط معلوم کریں یہاں $n=5$ (طاق)

(i) $A.M.=\dfrac{19+19+19+19+19}{5}=19$ تمام اقدار کے ساتھ 19 کے برابر ہے اس لیے $\bar{x}=19$

(ii) پہلے ہم معلوم کرتے ہیں $G.M.=(19\times19\times19\times19\times19)^{1/5}=19^{5\times\frac{1}{5}}=19.$

(iii) $H.M.=\dfrac{5}{\frac{1}{19}+\frac{1}{19}+\frac{1}{19}+\frac{1}{19}+\frac{1}{19}}=\dfrac{5}{\frac{5}{19}}=19.$

(iv) وسطانیہ.. $=\left(\dfrac{5+1}{2}\right)$ واں مشاہدہ=تیسرا مشاہدہ= 19

(v) عادہ= 19 (سب سے کثرت سے آنے والا مشاہدہ)

مساوات (I) سے (V) تک: ہمارے پاس ہے: AM = GM = HM = وسطانیہ=عادہ لہٰذا تصدیق ہوئی۔

مثال 4: A.M اور وسطانیہ کا استعمال کرتے ہوئے یہ دیکھیں کہ اگر مندرجہ ذیل مواد متشاکل / غیر متشاکل ہیں۔

(i). 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10 (ii). 4, 8, 13, 14, 19, 20, 23

حل:

(i)

$$A.M.=\frac{4+5+6+6+6+7+7+7+7+7+7+8+8+8+9+10}{16}=\frac{112}{16}=7$$

$$\text{وسطانیہ}=\frac{1}{2}\left[\text{آٹھواں}+\text{نواں}\right]\text{ مشاہدہ }=\frac{1}{2}[7+7]=7$$

جیسا کہ AM= وسطانیہ، اس لیے مواد متشاکل ہیں۔

(ii)

$$A.M = \frac{4+8+13+14+19+20+23}{7} = 14.42$$

وسطانیہ $\left[\frac{7+1}{2}\right]$ واں مشاہدہ=چوتھا مشاہدہ = 14

جیسا کہ A.M ≠ وسطانیہ، اس لیے مواد غیر تشاکل ہیں۔

مثال 5: {4,5,6,6,6,7,7,8} کے لیے تصدیق کریں:

(i) $A.M. > G.M. > H.M$

(ii) $(G.M)^2 \approx (A.M)(H.M)$

حل:

$$A.M. = \frac{4+5+6+6+6+7+7+8}{8} = 6.125,$$

$$G.M. = (4\times5\times6\times6\times6\times7\times7\times8)^{1/8} = 6.006$$

$$H.M. = \frac{8}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}} = 5.879.$$

جیسا کہ $6.125 > 6.006 > 5.879$ اس لیے $A.M. > G.M. > H.M.$ پس (I) کی تصدیق ہوئی۔

جیسا کہ $(G.M.)^2 = 36.072$ اور $(A.M.)(H.M.) = 36.008$: اس لیے $(G.M.)^2 \approx (A.M.)(H.M.)$.

پس (ii) کی تصدیق ہوئی۔

(iii) 2.23 وزنی اوسط اور متحرک اوسط کا حساب لگائیں:

(a) وزنی اوسط:

جب اعداد و شمار میں کچھ مشاہدات دوسروں کے مقابلے میں زیادہ اہم ہوتے ہیں، تو ہم اوسط کو معلوم کرنے کے لیے سب کو برابر وزن (نسبتاً اہمیت) نہیں دے سکتے۔ وہ اوسط جو مشاہدات کی نسبتی اہمیت / وزن کی استعمال کرتے ہوئے معلوم کی جائے اسے وزنی اوسط کہا جاتا ہے۔ اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مواد میں مشاہدات سے متعلقہ اعداد ہیں اور $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ان کے متعلقہ وزن ہیں، تو پھر ان کے وزنی A.M. G.M اور H.M یہ ہیں۔

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum w_i} = \frac{\sum wx}{\sum w},$$

$$G_w = \text{antilog}\left[\frac{\sum w \log x}{\sum w}\right]$$

$$H_w = \frac{\sum w}{\sum\left(\frac{w}{x}\right)}$$

مثال: سوشل سائنسز کے ڈپلومہ کورس میں طالب علم کے نمبر ہر ایک مضمون کے لیے دیئے جاتے ہیں جو متعلقہ وزن کے ساتھ پڑھائے جاتے ہیں۔

وزنی اوسط معلوم کریں۔

مضمون	انگریزی	فرانسیسی	تاریخ	سائنس	ریاضی
نمبرز	73	82	60	62	57
اوزان	4	3	2	1	1

حل: کلیات یہ ہیں:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum xw}{\sum w} \text{ اور } G_w = \text{antilog}\left[\frac{1}{\sum w}\left(\sum w \log x\right)\right], \quad H_w = \frac{\sum w}{\sum\left(\frac{w}{x}\right)}$$

مطلوبہ حساب ہم مندرجہ ذیل جدول میں کرتے ہیں:

x	w	$x.w$	$\frac{w}{x}$	log x	w. log x
73	4	292	0.0548	1.8633	7.4532
82	3	246	0.0366	1.9138	5.7414
60	2	120	0.0333	1.7782	3.5564
62	1	62	0.0161	1.7924	1.7924
57	1	57	0.0175	1.7559	1.7559
جمع	11	777	0.1538	---	20.2993

$$\bar{x}_w = \frac{777}{11} = 70.6$$ نمبر

$$G_w = \text{anti log}\left[\frac{1}{11} \times 20.2993\right]$$

$$G_w = \text{antilog}(1.8454) = 70.04$$ نمبر

$$H_w = \frac{11}{0.1583} = 69.5$$ نمبر

نوٹ:

مثال 1: میں، غیر وزنی اوسط یہ ہیں: , $\bar{x} = 66.8$ G.M.=66.17 اور H˙M˙¯65.58 جو کہ وزنی ااوسط سے کم ہیں وزنی اوسط نمبر اہم کورسز کو زیادہ حصہ دیے کر طالب علم کی اوسط کارکردگی کو بہترین انداز میں بیان کرتے ہیں۔

(B) متحرک اوسط:

جب ہم وقت کے مقررہ وقفوں (دنوں / مہینوں / سالوں وغیرہ میں) پر دلچسپی کے متغیر کے اوسط رویے کی جانچ کرنا چاہتے ہیں تو یہ ضروری ہے کہ اوسط میں تبدیلی کو ٹریک کیا جائے جیسا کہ وقت مخصوص ادوار کے لیے آگے بڑھتا ہے۔ اس صورت میں وقت کے مخصوص / دیار / وقفوں کی اوسط وقت کے بڑھنے کے ساتھ ساتھ تبدیل ہوتی رہی ہے اور اسے متحرک اوسط کہا جاتا ہے۔

ایک طاق مدتی حرکت پذیری اوسط کی صورت میں، ہم متحرک اوسط کو صرف مخصوص مدت کے درمیانی سیلز (CELLS) پر رکھتے ہیں اور باقی سیلز خالی رکھتے ہیں۔ حرکت پذیری اوسط کی جگہ کا تعین پہلے سے موجود سیلز پر کیا جانا چاہیے۔

ایک جفت مدتی حرکت پذیری اوسط کی صورت میں، ہم درمیانی دو سیلز کا اوسط رکھتے ہیں۔ اس طرح پلیسمنٹ پہلے سے موجود سیلز پر کی جا سکتی ہے۔

مندرجہ ذیل مثالوں کا استعمال کرتے ہوئے عمل کو واضح کیا گیا ہے۔

مثال 1: مواد پچھلے سال کے لیے روپے / ماہ میں ایک شے کی ماہانہ قیمت کا خلاصہ کرتا ہے۔

ڈسمبر	نومبر	آکتوبر	ستمبر	آگست	جولائی	جون	مئی	اپریل	مارچ	فروری	جنوری	ماہ
330	289	307	220	200	150	139	108	102	91	87	180	قیمت (روپے/ماہ)

حساب لگائیں (I) 3 ماہ (II) 5 ماہ (III) 4 ماہ کی متحرک اوسط

حل: (i) پہلے ہم مسلسل 3 مہینوں پر غور کر کے 3 مہینوں کی متحرک اوسط کا حساب لگاتے ہیں: جنوری سے مارچ، فروری سے اپریل، مارچ سے مئی اور اسی طرح آخری 3 ماہ کی مدت: آکتوبر سے دسمبر تک۔ یہ 3 ماہ کی مدت کے درمیان مہینے میں رکھے جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر، جنوری تا مارچ کی متحرک اوسط فروری کے برابر رکھی گئی ہے۔

3- ماہ کی متحرک اوسط ملحقہ جدول میں خلاصہ کی گئیں ہیں۔

ماہ	قیمت	3 ماہ کی متحرک اوسط
جنوری	180	------------
فروری	87	(180+87+91)/3=119.33
مارچ	91	93.33
اپریل	102	100.33
مئی	108	166.33
جون	139	132.33
جولائی	150	163
آگسٹ	200	190
ستمبر	220	242.33
اکتوبر	307	272
نومبر	289	308.66
دسمبر	330	------------

ماہ	قیمت	5ماہ کی متحرک اوسط
جنوری	180	------------
فروری	87	------------
مارچ	91	(180+87+91+102+108)/5=113.6
اپریل	102	105.4
مئی	108	118
جون	139	139.8
جولائی	150	163.4
آگسٹ	200	203.2
ستمبر	220	233.2
اکتوبر	307	269.2
نومبر	289	------------
دسمبر	330	------------

(ii) 5 مہینوں کی متحرک اوسط کے لیے، ہم جنوری سے مئی، فروری سے جون، ...، اور آگست سے دسمبر تک ہر بار لگاتار 5 مہینوں پر غور کرتے ہیں متحرک اوسط کو ملحقہ جدول میں دکھایا گیا ہے۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس طرح کے کل 18 مکانات ہو سکتے ہیں پہلے اور آخری دو سیلز خالی چھوڑ دیئے گئے ہیں۔
5ماہ کی متحرک اوسط درمیانی مہینوں میں رکھی گئی ہے۔

(iii) 4ماہ کی متحرک اوسط کے لیے، ہم جنوری سے اپریل، فروری سے مئی ، ستمبر سے دسمبر تک ہر بار مسلسل 4 مہینوں کے گروہوں پر غور کرتے ہیں۔
ابتدائی طور پر اوسطوں کو 4 مہینوں کے درمیان میں رکھا جاتا ہے، پھر دو 4ماہ کی اوسطوں کے ہر جوڑے کا مزید اوسط کیا جاتا ہے تاکہ مطلوبہ 4ماہ کی درمیانی متحرک اوسط حاصل کی جا سکے۔
نتائج کا خلاصہ درج ذیل جدول میں کیا گیا ہے۔ ہمیں جفت مدت گروہ کے لیے ہمیشہ دو کام شامل کرنے ہونگے۔

ماہ	قیمت	4ماہ کی متحرک اوسط(ابتدائی)	4ماہ کی متحرک اوسط(درمیانی)
جنوری	180		------------
فروری	87		------------
		115	
مارچ	91		106
		97	
اپریل	102		103.5
		110	
مئی	108		117.375
		124.75	
جون	139		137
		149.25	
جولائی	150		163.25
		177.25	
اگست	200		198.25
		219.25	
ستمبر	220		236.625
		254	
اکتوبر	307		270.25
		286.5	
نومبر	289		------------
دسمبر	330		------------

نوٹ:

سال کے 12 مہینوں کے لیے اوسط قیمت (حسابی اوسط) 58. 183 روپے فی مہینہ کے برابر ہے۔ ہم دیکھ سکتے کہ قیمتیں مستقل نہیں ہیں اور 3، 5، 4 مہینوں کی متحرک اوسط سال بھر کے متعلقہ ادوار میں تغیرات کا بہتر خلاصہ کرتی ہے۔

(iv) 22.3 وسطانیہ، چوتھائی اور عادہ کا تخمینہ گراف سے لگائیں:

گراف کے لحاظ سے وسطانیہ اور چوتھائیاں کا پتہ لگانے اور اندازہ لگانی کے لیے، ہم مواد کا اوگیو (مجموعی تعددی کثیر الاضلاع) استعمال کرتے ہیں۔ اوگیو میں وسطانیہ، نچلی چوتھائی (Q_1) اور اوپری چوتھائی ($Q3$) صرف اوگیو پر نکات کے X– کو آرڈینیٹس ہیں جن کے y– کو آرڈینیٹس (مجموعی تعددات) بالترتیب $\frac{n}{2}$ ، $\frac{n}{4}$ اور $\frac{3n}{4}$ ہیں۔

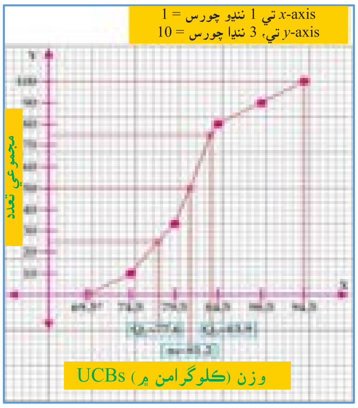
گراف کے لحاظ سے، عادہ (اگر یہ موجود ہے) کو تلاش کرنے اور اندازہ لگانے کے لیے ہم مواد کا کالمی نقشہ استعمال کرتے ہیں۔ عادہ جماعت وہ ہے جس لیے مستطیل کی اونچائی سب سے زیادہ ہے، اور اس کلاس، میں عادہ دو قطعات کے ملانے والے نقطے کا X کوارڈ ینیٹ ہے۔ پہلی قطع مستطیل کی بائین چوٹیوں کو جوڑ کر تیار کیا جاتا ہے جو کہ عادہ جماعت اور اس کے بعد کی جماعت سے مطابقت رکھتا ہے۔ دوسری قطع مستطیل کی دائیں چوٹیوں کو جوڑ کر تیار کیا جاتا ہے جو عادہ جماعت اور اس سے پہلے والی جماعت سے مطابقت رکھتا ہے۔ نقطۂ تقطیع سے X محور تک عمود اسے عادہ کے مقام پر ملاتا ہے یہ طریقہ کار مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہ بند مواد کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

مثال 1: گراف کے لحاظ سے وسطانیہ، چوتھائیاں اور عادہ وزن (کلو گرام میں) تلاش کریں اور تخمینہ لگائیں۔

اوزان (کلو گرام میں)	70-74	75-79	80-84	85-89	90-94
طلباء کی تعداد	10	24	46	12	8

حل: ہمارے پاس n=100 اور دیئے گئے مواد کو مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے سب سے پہلے، محلقہ جدول میں جماعتی حدود اور مجموعی تعددات کا حساب لگانا ہے تاکہ ان کی مدد سے ہم اوگیو اور کالمی نقشہ کھینچ سکیں۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	f	مجموعی تعددات
70-74	69.5-74.5	10	10
75-79	74.5-79.5	24	34
80-84	79.5-84.5	46	80
85-89	84.5-89.5	12	92
90-94	89.5-94.5	8	100



وسطانیہ اور چوتھائیوں کے لیے y– محور سے ہم شناخت کرتے ہیں، $\frac{n}{2} = 50$، $\frac{n}{4} = 25$ اور $\frac{3n}{4} = 75$ گراف بنانا ہے۔

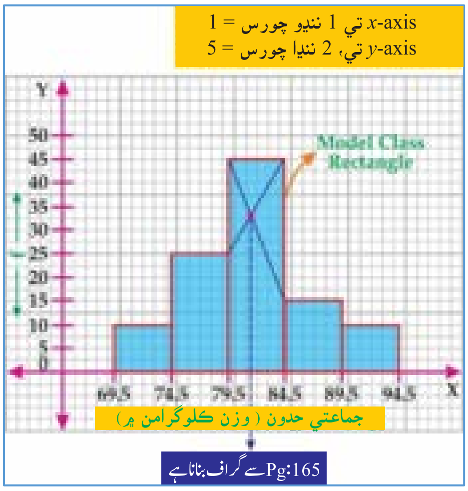
اس کے بعد ان کے ذریعے اوگیو کی طرف عمود کھینچیں اور پھر اوگیو سے X محور تک وسطانیہ، Q_1 اور Q_3 کی طرف بالترتیب لے جانے میں رہنمائی کرتا ہے۔ ہم اقدار کو اس طرح لکھتے ہیں:

وسطانیہ ≈ 81.2,

$Q_1 \approx 77.6$, اور

$Q_3 \approx 83.9$.

عادہ کے لیے، ہم پہلے کالمی نقشہ کھینچتے ہیں، جیسا کہ یہاں دکھایا گیا ہے۔ عادہ جماعت سب سے اونچائی والے مستطیل سے مساوی ہے، جیسا کہ گراف میں نمایاں کیا گیا ہے۔
عادہ جماعت اور اس کے بعد جماعت کے مستطیلوں کی بائین چوٹیوں کو اور عادہ جماعت اور اس سے پہلے والی جماعتوں کے مستطیلوں کی دائیں چوٹیوں کو دو قطعات کی مدد سے جوڑیں اب نقطۂ تقطیع سے X محور تک ایک عمود بنائیں جو کہ X محور پر 81.4 پر آکر ملتی ہے جہاں ہمیں عادہ ملتا ہے۔ عادہ وزن تقریبًا 81.4 کلو گرام ہے۔



مشق 22.4

1- اگر، $W = \{148, 145, 160, 157, 156, 160, 160, 165\}$ اور $X = \{-2, -2, -2, -2\}$ پھر:

(a) یہ دکھائیں کہ W کے تمام انحرافات کا مجموعہ اس کے A.M کے بارے میں صفر ہے۔

(b) یہ دکھائیں کہ X کے لیے: AM =G.M =H.M= وسطانیہ = عادہ

(c) A.M کا حساب لگائیں $y = 3x$ کے لیے (d) A.M کا حساب لگائیں $Z= 3W-11$ کے لیے: (e) یہ دکھائیں کہ W کے لیے:

عادہ > وسطانیہ > A.M. > G.M. > H.M.

2- چیک کریں کہ اگر $X = \{7,9,3,3,3,4,1,3,2,2\}$ اور $Y = \{2,1,4,4,4,6,6,5,7,1\}$ تشاکل ہیں؟

3- ایک خاندان کو درکار ماہانہ اشیاء کا مطلوبہ وزن (کلو گرام) اور قیمت (روپے / کلو گرام) دی گئی ہے۔ AM G.M H.M کا استعمال کرتے ہوئے وزنی اوسط قیمتیں معلوم کریں۔

اشیاء	A	B	C	D	E
قیمت(روپے / کلو گرام)	300	200	600	250	650
مطلوبہ وزن(کلو گرام)	25	5	4	8	3

5- کووڈ 19 کی وجہ سے صوبے میں چوٹی کے ہفتے کے لیے نگرانی کی گئی اموات کی تعداد کے درج ذیل مواد سے 2، 3 اور 4 دن کی متحرک اوسط کا حساب لگائیں۔

دن	پیر	منگل	بدھ	جمعرات	جمعہ	ہفتہ	اتوار
اموات کی تعداد	102	130	158	188	196	129	310

6- 11 سال کی فروخت کے لیے 4 اور 5 سال کی اوسط فروخت (ملین روپے میں) کا حساب لگائیں۔

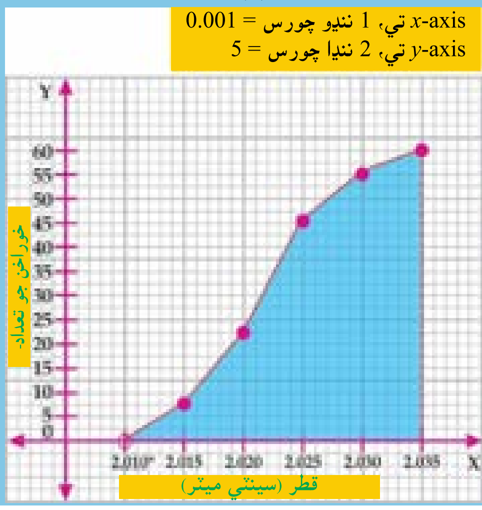
سال	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
فروخت	102	130	158	188	196	259	310	188	196	259	310

7- مواد میں وسطانیہ، چوتھائیاں اور عادہ کو گراف کی مدد سے تلاش کریں اور تخمینہ لگائیں۔

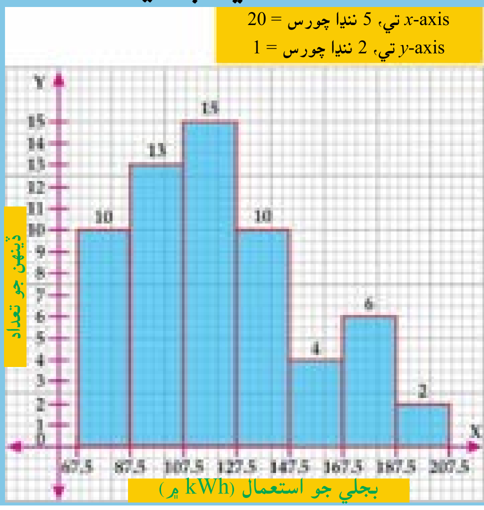
اوور ٹائم (گھنٹہ فی ہفتہ)	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59
دنوں کی تعداد	5	4	7	11	12	8	1

8- درج ذیل میں دکھائے گئے پیمانوں کی تلاش کریں اور تخمینہ لگائیں:

(a) عادہ



(b) وسطانیہ اور چوتھائیاں۔



22.4 انتشاری پیمانے:

مرکزی رجحان کے پیمانے مواد کے تغیرات اور مستقل مزاجی پر توجہ مرکوز کیئے بغیر صرف مواد کے اوسط یا مرکزی رویے پر توجہ مرکوز کرتے ہیں۔ جب مشاہدات اوسط سے بہت دور ہوتے ہیں، تو صرف مرکزی رجحان کے پیمانے ہی مواد کے رویے اور خصوصیات کی مکمل تفہیم کے لیے کافی نہیں ہوتے۔ مثال کے طور پر نیچے دی گئی جدول پانچ مضامین میں دو طلباء کے نمبرز دکھاتی ہے۔

مضامین	I	II	III	IV	V
طالب علم A کے نمبر	90	30	85	50	25
طالب علم B کے نمبر	63	50	60	55	52

اگر ہم A.M کا استعمال کرتے ہوئے ہر طالب علم کے حاصل کردہ اوسط نمبر معلوم کرتے ہیں، تو ہم دیکھتے ہیں کہ دونوں طلباء کے A.M نمبر 56 ہیں، لیکن کیا دونوں طلباء کی کارکردگی کا موازنہ کرنا کافی ہے؟ جواب ہے نہیں۔ طالب علم A کے نمبروں میں اوسط کے بارے میں زیادہ اتار چڑھاؤ ہوتا ہے، جبکہ طالب علم B کے نمبر اوسط کے قریب ہیں۔ طالب علم B کی کارکردگی طالب علم A کے مقابلے میں زیادہ مستحکم / مستقل / قابل اعتماد ہے جس کی وجہ سے اوسط کے بارے میں اتار چڑھاؤ / تغیرات / بکھرنے / انتشار ہم ذیل میں سیکھے گئے تمام اقسام کا استعمال کرتے ہوئے طلباء کے اوسط نمبروں کا بھی مشاہدہ کرسکتے ہیں:

اوسط	A.M	وسطانیہ	عادہ	G.M	H.M
طالب علم A کے نمبر	56	کوئی نہیں	تقریباً	49	43 تقریباً
طالب علم B کے نمبر	56	کوئی نہیں	تقریباً	56	56 تقریباً

نمبروں میں فرق کی وجہ سے، طالب علم A کے اوسط بھی ایک دوسرے سے بہت مختلف ہیں۔ طالب علم B کے نمروں کی اوسط ایک دوسرے کے قریب ہے۔

مستحکم اور مستقل کارکردگی کی وجہ سے ہم طالب علم A کے مقابلے میں آئندہ مضمون میں طالب علم B کے نمبروں کی پیشن گوئی کرنے کے لیے بہتر پوزیشن میں ہیں۔

مواد میں تغیر کا علم فیصلہ سازی اور پیش گوئی میں بہت اہمیت رکھتا ہے۔ لہٰذا، مواد کی بہتر تفہیم کے لیے ڈگری کا حساب لگانا ضروری ہے۔ انتشار کے پیمانے اس بات کے اشارے ہیں کہ مواد مرکزی نقطہ یا اوسط کے بارے میں کس حد تک پھیلا ہوا / بکھرا ہوا ہے۔

انتشاری پیمانے مواد میں اوسط تغیر کی نشاندہی کرتے ہیں یہ زیادہ تر استحکام / مستقل مزاجی / بھروسے کے نقطہ نظر سے دو یا زیادہ ڈیٹا سیٹس کا موازنہ کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ مواد میں تغیر / پھیلاؤ زیادہ ہے تو، استحکام / مستقل مزاجی / بھروسہ کم ہے۔ جب ہم صرف ایک ڈیٹا سیٹ میں تغیر / منتشر ہونے میں دلچسپی رکھتے ہیں تو ہم مواد کی اکائیوں میں انتشار کے پیمانوں کی گنتی کرتے ہیں، اور اس کو مطلق انتشار کے پیمانے کہتے ہیں۔ ایک ہی نوعیت / اکائیوں، مشاہدات کی تعداد اور مساوی / قریبی اوسط کے ساتھ دو یا زیادہ ڈیٹا سیٹس کے تغیرات کا بھی مطلق انتشار کے پیمانوں کا استعمال کرتے ہیں، جو مواد کی اکائیوں میں نہیں ہوتے بلکہ متعلقہ تغیر ظاہر کرتے ہیں۔

(i) 22.4 وسعت (Range) کی وضاحت، شناخت اور پیمائش کریں، تغیر، اوسط انحراف اور معیاری انحراف کا حساب لگائیں:

ہم یہاں انتشار کے کچھ اہم اقدامات پر بات کرتے ہیں۔

(a) **وسعت:** مواد کی وسعت سے مراد انتہائی مشاہدات کے درمیان کا فرق ہے۔

غیر گروہی مواد کے لیے، وسعت (R) سب سے بڑے مشاہدہ (XL) اور سب سے چھوٹا مشاہدہ (Xs) کے درمیاں فرق ہے جو کہ،

(1) $R = x_L - x_S$

گروہی مواد کے لیے، R فرق ہے آخری گروہ کے UCB یعنی (UCB_F) اور ابتدائی گروہ کے LCB (UCB_I) کے درمیان کا جو کہ، (2) $R = UCB_F - LCB_I$

کلیات (1) اور (2) سے ہم مطلق وسعت کا حساب لگاتے ہیں۔ متعلقہ وسعت کے لیے ہم موازنے کے لیے بالترتیب ہم مساوات (1) اور (2) کو $x_l + x_s$ اور $UCB_F + LCB_I$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

نوٹ:

- وسعت انتہائی قدروں کے ساتھ مواد کے تغیرات کی صحیح طریقے سے پیمائش نہیں کرتی ہے۔
- وسعت تعددات اور دیگر پیرامیٹر کا استعمال کیئے بغیر صرف مواد میں انتہاوں کا استعمال کرتی ہے۔

مثال 1: ڈیٹا سیٹس کی وسعت معلوم کریں:

$X = \{3, 8, 10, 7, 5, 14, 2, 12, 8\}$, $W = \{27.90, 34.70, 54.40, 18.92, 47.60, 39.68\}$

$Z = \{1, 3, 2, 4, 3, 2, 43\}$. اور $Y = \{8, 8, 8, 8, 8\}$

نتائج کی وضاحت بھی کریں۔

حل:

ہم جانتے ہیں کہ غیر گروہی مواد کے لیے $R = x_L - x_S$ اس لیے۔

$$R_W = 54.40 - 18.92 = 35.48 \text{،} R_X = 14 - 2 = 12 \text{،} R_Y = 8 - 8 = 0 \text{ اور } R_Z = 43 - 1 = 42.$$

ہم ڈیٹا سیٹ W کے لیے وسعت کی تشریح کر سکتے ہیں کہ: "ڈیٹا سیٹ W میں تمام مشاہدات انتہائی قدروں 18.92 اور 54.40 کے درمیان 35.48 کے فاصلے پھر ہیں۔" ڈیٹا سیٹ W اور X میں مشاہدات انتہائی قدروں کے ارد گرد اچھی طرح پھیلے ہوئے ہیں، لہٰذا وسعت معنی خیر طور تغیر کی نمائندگی کرتی ہے۔ سیٹ Y کی وسعت صفر ہے کیونکہ تمام مشاہدات ایک جیسے ہیں اور کوئی تغیر نہیں ہے۔ سیٹ Z میں مشاہدات کی اکثریت 1 اور 4 کے آس پاس ہے، لیکن انتہائی قدر 43 کی وجہ سے وسعت 42 کے برابر گمراہ کن ہے۔

مثال2: وسعت کا استعمال کرتے ہوئے ذیل میں دیئے گئے پانچ مضامین میں دو طلباء کے نمبروں کے فرق کا موازنہ کریں، اور نتائج کی تشریح کریں، کون سا طالب علم زیادہ مسلسل کارکردگی دکھاتا ہے؟

طالب علم A کے نمبر	90	90	85	50	25
طالب علم B کے نمبر	63	50	60	55	52

حل: دونوں طلباء کا مواد غیر گروہی ہے۔ نمبروں کی مطلق وسعت یہ ہیں $R_A = 90 - 25 = 65$ نمبرز اور $R_B = 63 - 50 = 13$ نمبرز
لہٰذا، یہاں $x_L + x_S$ دونوں طلباء کے لیے ایک جیسا ہے، اس لیے متعلقہ وسعت یہاں مفید نہیں ہے۔ طالب علم A کی کارکردگی مطلق وسعت کی بنیاد پر طالب علم B کے مقابلے میں زیادہ تغیرات دکھاتی ہے لہٰذا، طالب علم B طالب علم A سے زیادہ مستقل کارکردگی کا مظاہرہ کرتا ہے۔

مثال3: وسعت کا استعمال کرتے ہوئے دو مختلف کمپنیوں کے ذریعے تیار کردہ پانچ ایک جیسے ریٹنگ والی بیٹریوں کی قیمت اور زندگی کے تغیرات کا موازنہ کریں۔

قیمت (ہزار روپوں میں)	8	13	18	23	30
زندگی (سالوں میں)	1.3	1.5	1.8	2.5	3.5

حل:

بیٹریوں کی قیمت (P) اور زندگی (L) کا مواد غیر گروہی ہے، اور فطرت اور اکائیوں میں مختلف ہے $x_L + x_S$ بھی دونوں ڈیٹا سیٹس کے لیے مختلف ہیں۔ لہٰذا ہم تغیرات کا موازنہ کرنے کے لئے متعلقہ وسعت کا استعمال کرتے ہیں۔

$$R_P \text{ متعلقہ } = \frac{P_L - P_S}{P_L + P_S} = \frac{30 - 8}{30 + 8} = \frac{22}{38} = 0.5789$$

$$R_L \text{ متعلقہ } = \frac{L_L - L_S}{L_L + L_S} = \frac{3.5 - 1.3}{3.5 + 1.3} = \frac{2.2}{4.8} = 0.4583.$$

بیٹریوں کی زندگی میں متعلقہ تغیرات کا موازنہ پانچ مختلف کمپنیوں کی جانب سے تیار کردہ بیٹریوں کی قیمتوں میں نسبتاً زیادہ فرق ہے۔

مثال4: کراچی اور مورو میں کچھ تصادفی طور پر منتخب خاندانوں کے گروہ بند مواد کا استعمال کرتے ہوئے ایک خاندان کے پاس موجود موبائلز کی تعداد کا موازنہ کریں۔ کیا یہ موازنہ وسعت کی بنیاد پر کرنا کافی ہے؟

موبائلوں کی تعداد	0	1	2	3	4	5	6	7
خاندانوں کی تعداد (کراچی)	1	7	15	12	5	2	2	1
خاندانوں کی تعداد (مورو)	4	13	8	5	2	1	0	1

حل: مواد کو غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ جماعتی وقفہ $d = 1$ کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے تو وسعت یہ ہے:

$$R = UCB_F - LCB_I = (7 + 0.5) - (0 - 0.5)$$

$R = 0.5 + 7.5 = 8$ موبائل۔

کراچی اور مورو میں ایک خاندان کے پاس موبائلوں کی تعداد ایک جیسے ہے، یعنی 8 موبائل۔ لیکن، وسعت شہروں میں خاندانوں کی تعدد (تعدد) پر غور نہیں کرتی ہے۔ کراچی اور مورو میں ایک اوسط خاندان کے پاس موجود موبائلوں کی تعدد میں فرق یقیناً مختلف ہے، لیکن وسعت سے اس کی عکاسی نہیں کی جاسکتی۔

مثال 5: مواد کا استعمال کرتے ہوئے دکان کی بجلی کی کھپت (KWH میں) کی وسعت معلوم کریں:

بجلی کی کھپت	18-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: مواد کو مسلسل جماعتوں کے ساتھ درمیانی وقفہ d=1 کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے۔ اس لیے،

$$R = UCB_F - LCB_I = \left[207+\frac{1}{2}\right]-\left[68-\frac{1}{2}\right] = 207.5-67.5 = 140\,\text{kWh}.$$

یہاں R جماعتوں کی تعدادات کو استعمال نہیں کرتا ہے، تو گمراہ کن ہو سکتا ہے۔

(b) تغیر اوسط انحراف اور معیاری انحراف:

پھیلاؤ کی مقدار کو بہتر طریقے سے شمار کرنے کے لیے، ہم تمام مشاہدات کا استعمال کرتے ہیں بجائے صرف انتہائی والوں کے اور ساتھ میں ان کے تعدد بھی تغیر اوسط انحراف اور معیاری انحراف کے تصورات میں اوسط (عام طور پر A.M) کے بارے میں مشاہدہ x کا انحراف ہے، جسکو اس طرح بیان کیا گیا ہے: اوسط کے بارے میں انحراف $D_i = x_i - \bar{x}$ - (1)

انحراف منفی، مثبت اور صفر ہوسکتے ہیں، لیکن تمام انحرافات کا حساب لگانے کے لیے، صرف ان کو جمع کرنا مفید نہیں ہوگا کیونکہ نتیجہ ہمیشہ صفر ہی رہے گا۔ اس پر قابو پانے کے لیے ہمیں منفی انحراف سے بچنا چاہیئے اور یہ دو طریقوں سے کیا جاتا ہے۔ ہم مربعی انحراف یا مطلق انحراف کا استعمال کرسکتے ہیں، جس کی تعریف اس طرح کی گئی ہے۔

اوسط کے بارے میں مربعی انحراف (2) $= D_i^2 = (x_i-\bar{x})^2$ اوسط کے بارے میں مطلق انحراف (3) $= |D_i| = |x_i - \bar{x}|$

حقیقی نمبر کی مطلق قدر ہمیشہ غیر منفی ہوتی ہے مثال کے طور پر $|3| = 3$، $|-22| = 22$، $|0| = 0$، $|1.5| = 1.5$ یہ دو طریقے ہمیں انتشاری پیمانوں کی وضاحت کرنے کے زیادہ قریب لے جاتے ہیں۔

تغیر (V یا S^2) انکے A.M کے بارے میں مشاہدات کے مربع انحراف کا اوسط ہے۔ اوسط (یا مطلق) انحراف (M.D) انکے A.M کے بارے میں مشاہدات کے مطلق انحراف کا اوسط ہے۔ کیونکہ انتشار عام طور پر مواد کی اصل اکائیوں میں معنیٰ خیز ہوتا ہے اور تغیر اسکے مربع اکائیوں میں معلوم کرتا ہے لہٰذا ہم معیاری انحراف کی وضاحت کے لیے اسکا مربع جزر معلوم کرتے ہیں۔ معیاری انحراف (S.D یا S) تغیر کا مثبت مربع جزر ہے۔ مشاہدات کے ساتھ غیر گروہی مواد کے لیے $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ تو $\text{A.M.} = \bar{x}$

$$Var = s^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n} \quad (4) \qquad M.D. = \frac{\sum |x-\bar{x}|}{n} \quad (5)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \quad \text{یہاں} \quad S.D. = s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}} \quad (6)$$

گروہی مواد کے لیے، اگر x_i جماعتی نشانات ہیں اور f_i جماعتی تعدادات ہیں، تو پھر:

$$Var = s^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{\sum f} \quad (7)$$

$$M.D. = \frac{\sum |x-\bar{x}| f}{\sum f} \quad (8)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} \quad \text{یہاں} \quad S.D. = s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{\sum f}} \quad (9)$$

کلیوں (4) سے (9) میں ہم مطلق پیمانوں کا حساب لگاتے ہیں، موازنے کے لیے اعداد و شمار کی اکائیوں کو $\bar{x}$ سے تقسیم کر کے متعلقہ پیمانوں کی گنتی کی جاتی ہے۔

مثال 1: طالب علموں A اور B کے نمبروں کا تغیر، اوسط انحراف اور معیاری انحراف معلوم کریں۔ کونسا طالب علم زیادہ مسلسل کارکردگی دکھاتا ہے؟

طالب علم A کے نمبر	90	30	85	50	25
طالب علم B کے نمبر	63	50	50	55	52

حل:

دونوں طلباء کے نمبر غیر گروہی مواد کو ظاہر کرتے ہیں۔ سب سے پہلے، ہم اوسط نمبروں کو معلوم کرتے ہیں۔
طالب علم A(x) اور طالب علم B (y) کے لیے، ہمارے پاس ہے:

$$\bar{y}=\frac{\sum y}{n}=\frac{280}{5}=56 \quad \text{اور} \quad \bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{280}{5}=56$$

جیسا کہ اوسط ایک جیسی ہیں، اس لیے ہم مطلق تغیر کے کلیوں میں تغیر، اوسط انحراف اور معیاری انحراف کا استعمال کرتے ہیں۔
حسابات درج ذیل جدولوں میں دکھائے گئے ہیں

x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$
90	34	1156	34
30	-26	676	26
85	29	841	29
50	-6	36	6
25	-31	961	31
جمع = 280	0	3670	126

$$Var_A=\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}=\frac{3670}{5}=734.$$

$$(M.D.)_A=\frac{\sum\lvert x-\bar{x}\rvert}{n}=\frac{126}{5}=25.2.$$

$$(S.D.)\ =\sqrt{734}=27.0924.$$

y	$y-\bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$	$\lvert y-\bar{y}\rvert$
63	7	49	7
50	-6	36	6
60	4	16	4
55	-1	1	1
52	-4	16	4
جمع = 280	0	118	22

$$Var_B=\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n}=\frac{118}{5}=23.6.$$

$$(M.D.)_B=\frac{\sum\lvert y-\bar{y}\rvert}{n}=\frac{22}{5}=4.4.$$

$$(S.D.)_B=\sqrt{23.6}=4.8578.$$

ہم مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ طالب علم A کے نمبروں میں فرق تمام کلیوں کے لحاظ سے طالب علم B کے نمبروں سے بہت زیادہ ہے، لہٰذا طالب علم B کی کارکردگی زیادہ مستقل ہے۔

مثال 2: مختلف کمپنیوں کے ذریعے تیار کردہ پانچ ایک جیسی ریٹنگ والی بیٹریوں کی قیمت اور زندگی کے معیاری انحراف کا استعمال کرتے ہوئے تغیر کا موازنہ کریں نتائج کی تشریح بھی کریں۔

قیمت (ہزار روپوں میں)	8	13	18	23	30
زندگی (سالوں میں)	1.3	1.5	1.8	2.5	3.5

حل: قیمت کا مواد (P) اور زندگی (L) غیر گروہی ہیں اور نوعیت اور اکائیوں میں مختلف ہیں۔ سب سے پہلے ہم اوسط معلوم کرتے ہیں۔

$$\bar{x}_P = \frac{\sum x_P}{n} = \frac{92}{5} = 18.4 \text{ ہزار روپے}$$

اور

$$\bar{x}_L = \frac{\sum x_L}{n} = \frac{10.6}{5} = 2.12 \text{ سال}$$

جیسا کہ اوسط مختلف ہیں، ہم موازنے کے لیے متعلقہ معیاری انحراف کا استعمال کرتے ہیں۔ P اور L کے لیے حسابات درج ذیل جدولوں میں دکھائے گئے ہیں۔

قیمت (P)	$x_P - \bar{x}_P$	$(x_P - \bar{x}_P)^2$
8	-10.4	108.16
13	-5.4	29.16
18	-0.4	0.16
23	4.6`	21.16
30	11.6	134.56
جمع = 92	0	293.2

$$s_P = \sqrt{\frac{\sum (x_P - \bar{x}_P)^2}{n}} = \sqrt{\frac{293.2}{5}} = 7.658 \text{ ہزار روپے}$$

$$\text{متعلقہ } s_P = \frac{s_P}{\bar{x}_P} = \frac{7.658}{18.4} = 0.416.$$

زندگی (L)	$x_L - \bar{x}_L$	$(x_L - \bar{x}_L)^2$
1.3	-0.82	1.69
1.5	-0.62	2.25
1.8	-0.32	3.24
2.5	0.38	6.25
3.5	1.38	12.25
جمع = 10.6	0	25.68

$$s_L = \sqrt{\frac{\sum (x_L - \bar{x}_L)^2}{n}} = \sqrt{\frac{25.68}{5}} = 2.266 \text{ سال}$$

$$\text{متعلقہ } s_L = \frac{s_L}{\bar{x}_L} = \frac{2.266}{2.12} = 1.069.$$

بیٹریوں کی زندگی میں متعلقہ معیاری انحراف قیمت سے زیادہ ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ بیٹریوں کی قیمت کا مواد بیٹریوں کی زندگی کے مواد سے زیادہ متواثر ہے۔ ہم نوٹ کرسکتے ہیں کہ اگر متعلقہ کلیوں کا استعمال نہیں کیا جاتا تو نتیجہ مختلف اور غلط ہوتا۔

مثال 3: کولڈ ڈرنک کی مقدار کا تغیر، اوسط انحراف اور معیاری انحراف معلوم کریں۔

کولڈ ڈرنک کی مقدار (لیٹر میں)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلوں کی تعداد	2	7	5	5	1

حل: مواد کو غیر مسلسل جماعتوں کے ساتھ گروہ بند کیا گیا ہے۔ حسابات درج ذیل جدول میں دیئے گئے ہیں:

مقدار (x)	بوتلوں کی تعداد (f)	xf	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$(x-\bar{x})^2 f$	$\lvert x-x\rvert f$
1.48	2	2.96	−0.018	0.0003240	0.018	0.000648	0.036
1.49	7	10.43	−0.008	0.0000640	0.008	0.000448	0.056
1.50	5	7.5	0.002	0.0000040	0.002	0.00002	0.01
1.51	5	7.55	0.012	0.0001440	0.012	0.00072	0.06
1.52	1	1.52	0.022	0.0004840	0.022	0.000484	0.022
جمع	20	29.96	–	–	–	0.00232	0.184

$$\text{(لیٹر)}^2 0.000116 = \frac{0.00232}{20} = \frac{\sum (x-x)^2 f}{\sum f} = s^2 = Var \qquad \text{لیٹر } 1.498 = \frac{29.96}{20} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \bar{x}$$

$$0.0092 = \frac{0.184}{20} = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f} = M.D. \qquad \text{لیٹر } 0.01078 = \sqrt{0.000116} = S = S..D.$$

مثال 4: بجلی کی کھپت کے مواد کا اوسط انحراف اور معیاری انحراف معلوم کریں:

بجلی کی کھپت (KWH) میں	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
دنوں کی تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: حسابات کا خلاصہ درج ذیل جدول میں کیا گیا ہے۔ جہاں x جماعتی نشانات کو ظاہر کرتا ہے۔

جماعتی حدود	جماعتی نشانات (x)	f	xf	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$(x-\bar{x})^2 f$	$\lvert x-\bar{x}\rvert f$
68-87	77.5	10	775	-44.167	1950.724	44.167	19507.24	441.67
88-107	47.5	13	1267.5	-24.167	584.0439	24.167	7592.571	314.171
108-127	117.5	15	1762.5	-4.167	17.36381	4.167	260.4583	62.505
128-147	137.5	10	1375	15.833	250.6839	15.833	2506.839	158.33
148-167	157.5	4	630	35.833	128.004	35.833	5136.016	143.332
168-187	177.5	6	1065	55.833	3317.324	55.833	18703.94	334.998
188-207	197.5	2	393	75.833	5750.644	75.833	11501.29	160.6.672
جمع	-	60	7270	-	-	-	65208.35	

سب سے پہلے ہمیں اوسط کھپت کی ضرورت ہے، جو کہ:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{7270}{60} = 121.667\text{kWh.}$$

اب مطلوبہ رقوم کا استعمال کرتے ہوئے۔ اوسط اور معیاری انحراف یہ ہیں:

$$\text{M.D.} = \frac{\sum \lvert x-\bar{x}\rvert f}{\sum f} = \frac{1606.672}{60} = 26.778\text{kWh.}$$

$$S.D. = s = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{\sum f}}\sqrt{\frac{65208.35}{60}} = 32.967\text{kWh.}$$

مثال 5: کراچی اور مورو میں کچھ تصادفی طور پر منتخب خاندانوں سے، جب ان کے پاس موجود موبائلوں کی تعداد کے بارے میں پوچھا گیا، تو اس کے نتیجے میں بالترتیب 412 .1 اور 408 .3 معیاری انحراف کے ساتھ اوسطاً 773 .5 اور 133 .6 موبائل فی خاندان نکلے۔ موازنہ کریں کہ کون سا شہر فی خاندان موبائل کی زیادہ مستقل استعمال کو ظاہر کرتا ہے؟

حل: کراچی (K) اور مورو (M) کے لیے اوسط موبائل فی خاندان مختلف ہیں جیسا کہ : $\bar{x} = 5.773$ موبائل فی خاندان اور $x_M = 6.133$ موبائل فی خاندان معیاری انحرافات درج ذیل ہیں:

$S_K = 1.42$ موبائل فی خاندان اور $S_M = 3.408$ موبائل فی خاندان جیسا کہ اوسطاً موبائل فی خاندان دونوں شہروں کے لیے مختلف ہیں، ہم متعلقہ پیمانے استعمال کرتے ہیں:

متعلقہ $s_K = \frac{s_K}{\bar{x}_K} = \frac{1.412}{5.733} = 0.246$ اور متعلقہ $S_M = \frac{S_M}{\bar{x}_M} = \frac{3.408}{6.133} = 0.555$ اور

دونوں شہروں کی متعلقہ معیاری تغیرات کا مشاہدہ کرتے ہوئے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ کراچی میں ایک خاندان کے پاس موبائلوں کی تعداد میں نسبتاً فرق مورو کے مقابلے میں کم ہے، لہٰذا، موبائل فی خاندان کا اوسط استعمال کراچی کے لیے مورو کے مقابلے میں زیادہ ہے اور زیادہ مستقل ہے۔

مشق 22.5

1- گذشتہ سات دنوں سے جماعت میں غیر حاضرین کی تعداد کی وسعت، تغیر، اوسط انحراف اور معیاری انحراف معلوم کریں: 3,5,3,2,4,1,8

2- 16 اننگز میں دو بلے بازوں کے اسکور کی وسعت، اوسط انحراف، تغیر اور معیاری انحراف معلوم کریں۔ کون سا کھلاڑی زیادہ مستقل مزاج ہے؟

بلے باز-A	12	15	0	185	7	19
بلے باز-B	47	12	76	48	4	51

3- چھ خاندانوں کی آمدنی اور اخراجات کی وسعت اور معیاری انحراف کا استعمال کرتے ہوئے تغیر کا موازنہ کریں۔ نتائج کی تشریح بھی کریں۔

آمدنی (ہزار روپوں میں)	10	20	30	40	50	60
اخراجات (ہزار روپوں میں)	7	21	23	34	36	53

4- ایک فٹ بال سزن میں ٹیم A اور B کی طرف سے کیے گئے گول دیئے گئے ہیں۔ متعلقہ معیاری انحراف اور اوسط انحراف کا استعمال کرتے ہوئے یہ معلوم کریں کہ کونسی ٹیم زیادہ مستقل کارکردگی کا مظاہرہ کرتی ہے۔

حاصل کیے گئے گول	0	1	2	3	4
A کے کھیلے گئے کھیلوں کی تعداد	27	9	8	5	4
B کے کھیلے گئے کھیلوں کی تعداد	17	9	6	5	3

5- دھات کے 50 بلاکس کی کیت کی وسعت، تغیر معیاری انحراف اور اوسط انحراف معلوم کریں۔

بلاکس کی کیت (کلوگرام میں)	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.8	8.9-9.1
بلاکس کی تعداد	3	5	9	14	11	6	2

جائزہ مشق 22

1- صحیح جواب پر نشان لگائیں۔

(i) مواد کی _______ مشاہدات پر حسابی اوسط کا استعمال مبنی ہے۔
(الف) درمیانی (ب) انتہائی (ج) تمام (د) کوئی نہیں

(ii) غیر گروہی مواد کو _______ معلوم کرنے سے پہلے ترتیب لازمی دیا جانا چاہیے۔
(الف) A.M. (ب) عادہ (ج) وسطانیہ (د) وسعت

(iii) ایک مسلسل تعدد جدول میں جماعتوں کی تعداد 5 اور _______ کے درمیان ہوتی ہے۔
(الف) 10 (ب) 15 (ج) 20 (د) 25

(iv) گروہی مواد کا عادہ گرافی طور پر حاصل کرنے کے لیے _______ کا استعمال کیا جاتا ہے۔
(الف) کالمی نقشہ (ب) کثیر الاضلاع (ج) اوگیو (د) کالمی شکل

(v) اگر مواد میں انتہائی قدریں ہیں تو، _______ گمراہ کن ہے۔
(الف) A.M. (ب) وسعت (ج) وسطانیہ (د) عادہ

(vi) {0, 90, K, 10, 100} کا A.M. 40 ہے تو پھر K = _______۔
(الف) 0 (ب) 90 (ج) 10 (د) 100

(vii) وسطانیہ اور چوتھائیاں فطرت میں _______ ہیں۔
(الف) ریاضی کے طور پر (ب) پوزیشنل (ج) منطقی (د) ان میں سے کوئی بھی نہیں

(viii) اوپری چوتھائی مواد کو _______ تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔
(الف) 50% - 50% (ب) 25% - 25% (ج) 75% - 25% (د) 40% - 60%

(ix) اگر مواد میں ایک عدد 0 کے برابر ہے، تو پھر _______ معلوم نہیں کیا جا سکتا۔
(الف) A.M. (ب) G.M. (ج) H.M. (د) وسطانیہ

(x) اگر مواد میں تمام اعداد برابر ہوں، تو پھر
(الف) H.M. = G.M. = A.M. (ب) وسعت = 0 (ج) S.D. = 0 (د) یہ تمام

خلاصہ

- مقداری مواد سے مراد اعداد ہیں، اور مزید غیر مسلسل (صرف اعداد) اور مسلسل مواد (کوئی حقیقی اعداد) میں تقسیم کیے جاتے ہیں۔
- خاصیتی مواد سے مراد متغیر کی صفات ہیں، اور اسے مزید نومینل (بغیر ترتیب کے) آرڈینل (ترتیب کے ساتھ) مواد میں تقسیم کیا جاتا ہے۔
- بامعنی معلومات حاصل کرنے کے لیے، مواد کو تعددی تقسیم میں گروہ بند کیا جاتا ہے۔
- تعددی تقسیم جماعتوں اور مطالقہ تعددات کی فہرست دیتی ہیں۔
- ایک نقطے کے ذریعے بیان کردہ جماعتیں غیر مسلسل ہیں، جبکہ اعداد کی ایک حد سے بیان کردہ جماعتیں مسلسل ہیں۔
- ٹیلی یا فہرست کے اندراج کے طریقہ کار کا استعمال کرتے ہوئے مشاہدات کو جماعتوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔
- جماعتوں کی تعداد حاصل کرنے کے لیے اسٹر جس (1926) اصول کا استعمال کیا جاسکتا ہے۔
- وسعت مواد میں سب سے زیادہ اور سب سے کم مشاہدات کے درمیان کا فرق ہے۔
- مشاہدات کے تعداد جو جماعت میں آسکتی ہے وہ جماعتی وقفہ یا چوڑائی ہے۔
- جماعتی حدود جماعت کے ابتدائی اور اختتامی نکات ہیں۔
- حقیقی جماعتی حدود کسی بھی دو لگاتار جماعتوں کی حدوں کی اوسط سے حاصل کی جاتی ہیں۔
- جماعتوں کے درمیان وقفہ کسی بھی دو ملحقہ جماعتوں کے درمیان فاصلہ ہے۔
- متعلقہ اور فیصد تعدد بالترتیب 0 سے 1 اور 0 سے 100 تک ہوتے ہیں۔
- کالمی نقشہ ملحقہ مستطیلوں کا ایک گراف ہے جس کی بنیادیں جماعتی حدود ہیں اور اونچائیاں جماعتی تعددات کے متناسب ہیں۔
- تعددی کثیر الاضلاع نکات کو قطعات کے ساتھ جوڑنے سے بنتا ہے۔ جن کی x- کو آرڈینیٹ جماعتی نشانات، ہوتے ہیں اور y- کو آرڈینیٹ تعددات ہوتے ہیں۔
- اوگیو یا مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کو آرڈینیٹ (جماعتی حدود، مجموعی تعدد) کے ساتھ نکات کو جوڑ کر حاصل کیا جاتا ہے۔
- مرکزی رجحان کے پیمانے مواد کی ایک مرکزی نقطے کے بارے میں جھرمٹ کرنے کی صلاحیت ہے۔
- A.M.، G.M. اور H.M. تمام مشاہدات کے درمیان مساوات پر مبنی ہیں۔
- وسطانیہ درجہ بند والے ڈیٹا سیٹ کا سب سے درمیانی حصہ ہے۔
- عادہ اکثریت کے اصول پر مبنی ہے، اور سب سے زیادہ بار آنے والا مشاہدہ ہے۔
- $A.M. \leq G.M. \leq H.M.$
- اگر A.M. = وسطانیہ، تو مواد متشاکل ہے ورنہ غیر متشاکل۔
- عادہ کو کالمی نقشے کا استعمال کرتے ہوئے گرافی طور پر واقع اور تخمینہ لگایا جاسکتا ہے۔
- وسطانیہ اور چوتھائیاں کو اوگیو کا استعمال کرتے ہوئے گرافی طور پر واقع اور اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔
- انتشاری پیمانے مواد میں تغیر / بکھرنے کی مقدر سے مطابق ہے۔
- مواد میں تغیر / انتشار جتنا زیادہ ہو گا، استحکام / مستقل مزاجی اتنی ہی کم ہو گی۔
- وسعت دو انتہائی مشاہدات کے فرق سے مواد میں تغیر کو ناپتی ہے۔
- غیر گروہی مواد میں اوسط کے بارے میں تمام انحرافات کا مجموعہ صفر ہے۔
- تغیر A.M. ہے مواد کے مربع انحرافات کے A.M. کا۔
- اوسط / مطلق انحراف A.M. ہے مواد کے مربع انحرافات کے A.M. ہے۔

یونٹ نمبر 23

فیثا غورث
PYTHAGORAS THEOREM

طلباء کے آزموزشی حاصلات

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ، اس قابل ہو جائینگے کہ:

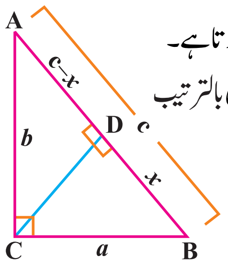
- مندرجہ ذیل اثباتی مسائل اور ان کے نتائج صریح کو سمجھ اور متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے لیئے استعمال کر سکیں۔
  - قائمہ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی کا مربع باقی دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔
  - اگر کسی مثلث میں کسی ایک ضلع کی لمبائی کا مربع باقی دو اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہو تو مثلث، قائم الزاویہ مثلث ہو گی۔

تعارف (Introduction):

فیثا غورث (Pythagoras) ایک یونانی فلسفی اور ریاضی دان ہے جو 570 قبل مسیح میں پیدا ہوا اُس نے قائمۃ الزاویہ مثلث کے اضلاع کے درمیان بہت اہم تعلق کو دریافت کیا۔ یوکلیڈن جیومیٹری میں قائمۃ ازاویہ مثلث کی تین اضلاع کے درمیان مسئلہ فیثا غورث ایک بنیادی تعلق ہے۔ اُس نے اس تعلق کو مسئلہ کی صورت میں مرتب کیا جو مسئلہ فیثاغورث کہلاتا ہے جو اس کے نام پر پڑھ گیا۔ یہ مسئلہ کئی طریقوں سے ثابت کیا جاسکتا ہے یہاں ہم اِسے متشابہ مثلثوں کے تصور کے ذریعے ثابت کریں گے ہم اسے روزمرہ زندگی میں مسائل کو حل کرنے میں بھی استعمال کرینگے۔

23.1.1 فیثا غورث مسئلہ (Pythagoras Theorem):

مسئلہ 23.1



قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی کا مربع دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

معلوم: ΔABC ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے، C پر قائمۃ زاویہ ہے اضلاع $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ اور $\overline{BC}$ کی پیمائش بالترتیب a ، b اور c ہیں۔

مطلوب: $c^2 = a^2 + b^2$

عمل: راس c سے b لمبائی کا ایک ارتفاع ضلع $\overline{AB}$ پر کھینچیں۔ $\overline{BD} = x$

ثبوت:

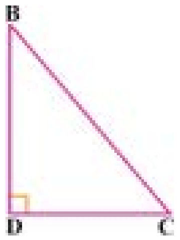
بیانات	دلائل
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta CBD$ میں	
$\angle ACB \cong \angle CDB$	$\angle CDB$ قائمۃ الزاویہ ہے (عمل)
$\angle B \cong \angle B$	مشترکہ زاویہ
اور $\angle BAC \cong \angle BCD$	$\angle B$ کا کمپلیمنٹ
$\therefore$ $\Delta ACB \quad \Delta CBD$	مثلثوں کی رو سے
پس $\frac{c}{a} = \frac{a}{x}$	متشابہ مثلثوں کے قناظرہ اضلاع
$cx = a^2$ ...(i)	
دوبارہ $\Delta ACB \leftrightarrow \Delta ADC$ میں	
$\angle ACB \cong \angle ADC$	$\angle ADC$ قائمۃ زاویہ ہے (عمل)
$\angle A \cong \angle A$	مشترکہ زاویہ
اور $\angle CBA \cong \angle DCA$	$\angle A$ کا کمپلیمنٹ
$\therefore$ $\Delta ACB \quad \Delta ADC$	
پس $\frac{c}{b} = \frac{b}{c-x}$	$\angle A$ متشابہ مثلثوں کی قناظرہ اضلاع
$c(c-x) = b^2$	
یا $c^2 - cx = b^2$ ...(ii)	
مساوات (i) اور (ii) کو جمع کرنے سے ہمیں حاصل ہوا	
$cx + c^2 - cx = a^2 + b^2$	
$c^2 = a^2 + b^2$	

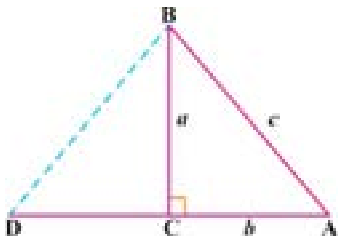
Q.E.D

نتیجہ صریح: قائمہ الزاویہ مثلث ABC میں نقطہ B پر قائمہ زاویہ ہے

i. $\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(mAC\right)^2 - \left(mAB\right)^2$

ii. $\left(m\overline{AB}\right)^2 = \left(mAC\right)^2 - \left(mBC\right)^2$





مسئلہ 23.2

(مسئلہ فیثاغورث کا عکس)

اگر مثلث میں کسی ایک ضلع کی لمبائی کا مربع باقی دو اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہو تو مثلث، قائمہ الزاویہ مثلث ہو گی۔

معلوم: ΔABC میں ، $m\overline{BC} = a$ ، $m\overline{AC} = b$ اور $m\overline{AB} = c$

نیز $a^2 + b^2 = c^2$

مطلوب: ΔABC قائمہ الزاویہ مثلث ہے

عمل: $\overline{BC}$ پر عمود $\overline{CD}$ کھینچیں کہ $\overline{CD} \cong \overline{CA}$

B کو D سے ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
ΔDCB	عمل
$\therefore \quad \left(m\overline{BD}\right)^2 = a^2 + \left(m\overline{DC}\right)^2$	مسئلہ فیثاغورث
$\Rightarrow \quad \left(m\overline{BD}\right)^2 = a^2 + b^2$	
لیکن $a^2 + b^2 = c^2$	معلوم
$\therefore \quad \left(m\overline{BD}\right)^2 = c^2$	برابری کی خاصیت متعدیت
$\therefore \quad m\overline{BD} = c$	دونوں طرف جزر کرنے پر
اب	
میں $\Delta DCB \leftrightarrow \Delta ACB$	
$\overline{CD} \cong \overline{CA}$	عمل
$\overline{BC} \cong \overline{BC}$	مشترکہ
$\overline{BD} \cong \overline{AB}$	ہر ضلع C کے برابر ہے (اوپر ثابت ہو چکا)
$\therefore \quad \Delta DCB \cong \Delta ACB$	ض-ض-ض = ض.ض.ض
$m\angle DCB = m\angle ACB$	عمل متماثل مثلثون متناظرہ زاویے
لیکن $m\angle DCB = 90^\circ$	برابری کی خاصیت متحدیت
$\therefore \quad m\angle ACB = 90^\circ$	$\therefore \quad m\angle ACB = 90^\circ$
پس ABC قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔	

Q.E.D

نتیجہ صریح:

فرض کریں a، b اور c ایک مثلث کے اضلاع ہیں جیسا کہ ضلع c سب سے لمبا ضلع تو

i. اگر $a^2 + b^2 = c^2$ کو مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہے

ii. اگر $a^2 + b^2 > c^2$ مثلث حادہ الزاویہ مثلث ہے

iii. اگر $a^2 + b^2 < c^2$ تو مثلث منفرجہ زاویہ مثلث ہے

مثال 1: مثلث کے اضلاع کی لمبائی دی گئی ہیں۔ فیصلہ کریں کون سی قائمۃ ازاویہ مثلث کو ظاہر کرتیں ہیں۔

i. $a = 5\text{cm}$ ، $b = 12\text{cm}$ اور $c = 13\text{cm}$

ii. $a = 6\text{cm}$ ، $b = 7\text{cm}$ اور $c = 8\text{cm}$

iii. $a = 9\text{cm}$ ، $b = 12\text{cm}$ اور $c = 15\text{cm}$

حل:

i. چونکہ $(13)^2 = (5)^2 + (12)^2$

یا $169 = 25 + 144$

$169 = 169$

مسئلہ فیثاغورث کے عکس کی روسے a، b اور c قائمتہ الزاویہ مثلث کے اضلاع ہیں۔

ii. چونکہ $(8)^2 \neq (6)^2 + (7)^2$

یعنی $64 \neq 36 + 49$

یا $64 \neq 85$

مسئلہ فیثاغورث کی روسے عکس کی روسے a، b اور c قائمتہ الزاویہ مثلث کے اضلاع نہیں ہیں۔

iii. چونکہ $(15)^2 = (12)^2 + (9)^2$

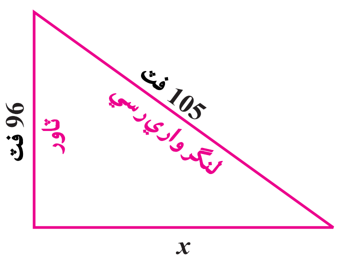
$225 = 144 + 81$

$225 = 225$

مسئلہ فیثاغورث کے a، b اور c قائمتہ الزاویہ مثلث کے اضلاع ہیں۔

مثال 2: ایک کھمبے کو سہارے کے لیئے رسی لگانی ہے۔ کھمبے کی اونچائی 96 فٹ ہے اور رسی 105 فٹ ہے تو اُسے کھمبے سے کتنا دور لگایا جا سکتا ہے۔

حل: فرض کریں رسی کھمبے سے 2 فٹ کے فاصلے پر لگائی جاتی ہے۔



مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$(105)^2 = (96)^2 + (x)^2$$

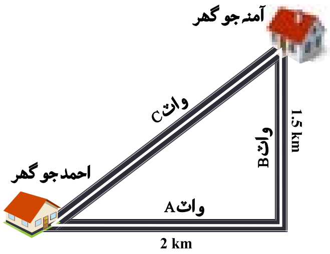
$$\Rightarrow \quad 11025 = 9216 + x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 1809$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{1809} = 42.53 \text{ فٹ}$$

پس مطلوبہ فاصلہ 42.53 فٹ (تقریباً) ہے۔

مثال 3: دو گلیاں ہے جن میں سے ایک کا انتخاب کر کے آمنہ کے گھر سے احمد کے گھر تک جانے کے لیئے انتخاب کیا جاسکتا ہے۔ایک راستہ C ہے اور دوسرا راستے میں راستہ A، 2 کلومیٹر اور پھر راستہ B جو 1.5 کو میٹر ہے طے کرنا ہے۔ بتائیں کہ راستہ C جو کہ تصویر میں دکھایا ہے۔ کتنا چھوٹا ہے۔



حل: فرض کریں راستہ C کی لمبائی ہے۔

فیثاغورث کی مدد سے

$$x^2=(2)^2+(1.5)^2$$

$$\Rightarrow \quad x=\sqrt{(2)^2+(1.5)^2}=\sqrt{6.25}=2.5\text{km}$$

متبادل راستہ کے ذریعے اُسے فاصلہ طے کرنا پڑھتا ہے۔ 2+1.5=3.5 کلومیٹر

ان دونوں راستوں کے درمیان فرق ہے۔ 3.5-2.5=1 کلومیٹر

مشق 23

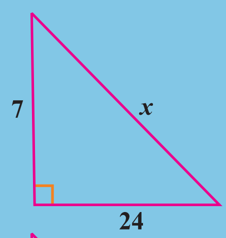
1. مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں مندرجہ ذیل ہیں۔ تصدیق کریں کہ مثلث قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

i. $a=16 \quad b=30 \quad c=34$ ii. $a=6 \quad b=8 \quad c=10$

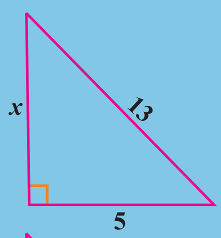
iii. $a=15 \quad b=20 \quad c=25$ iv. $a=13 \quad b=\sqrt{56} \quad c=15$

2. مندرجہ ذیل اشکال میں ہر ایک میں غیر معلوم کی قیمت معلوم کریں۔

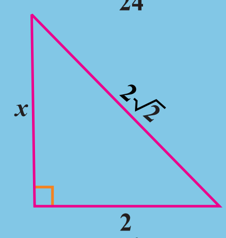
i.



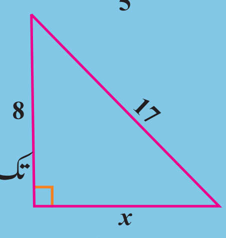
ii.



iii.



iv.



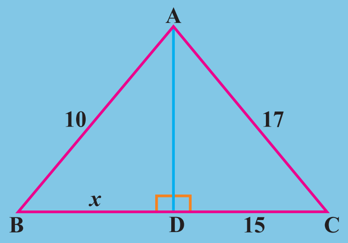
میں
,13
تک کا عموری فاصلہ معلوم کریں

3. مثلث کے تین اضلاع کی پیائش 9.5 سینٹی میٹر، 7.5 سینٹی میٹر اور x سینٹی میٹر ہے۔ x کی کس قیمت کی لیئے اضلاع قائمہ الزاویہ مثلث کو ظاہر کرتے ہیں۔

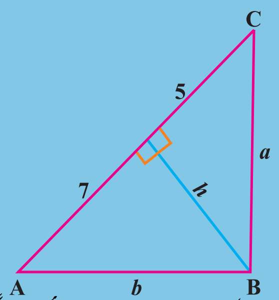
4. ABC ایک متماثل الساقین مثلث ہے جس میں $m\overline{AB}=m\overline{AC}=$ 13 سینٹی میٹر اور $m\overline{BC}=10\text{cm}$ A سے BC، تک کا عموری فاصلہ معلوم کریں۔

5. سیڑھی کا پایہ ایک دیوار سے 6 فٹ کے فاصلے پر ہے اگر سیڑھی کا سرا دیوار پر 8 فٹ کی بلندی پر ہے تو سیڑھی کی لمبائی معلوم کریں۔

6. سامنے دی گئی شکل میں x کی قیمت معلوم کریں۔



7. مثلث ΔABC میں زاویہ $\angle ADB$ قائمہ زاویہ ہے جیسا کہ سامنے شکل میں دکھایا گیا ہے۔ a، b اور c کی لمبائی معلوم کریں اگر یونٹ $m\overline{CD} = 5$ اور $m\overline{AD} = 7$ یونٹ ۔



8. مستطیل سوئمنگ پول کی اضلاع کی لمبائیاں 50 میٹر اور 30 میٹر ہیں تو مخالف کونوں کے درمیان لمبائی کیا ہو گی؟

9. مساوی اور اضلاع مثلث کی ہر ضلع کی لمبائی 8 یونٹ ہے۔ کسی بھی ایک ارتفاع کی لمبائی معلوم کریں

10. مثلث کے اضلاع کی لمبائی $x, x+4$ اور 20 اگر لمبے ضلع کی لمبائی 20 ہے۔ x کی کون کون سی قیمتیں قائمہ الزاویہ مثلث بنائیں گی

11. ایک مینڈک 18 میٹر مشرق کی طرف جاتا ہے اور پھر 24 کلو میٹر شمال کی طرف جاتا ہے موجودہ جگہ سے نقطہ آغاز کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں

12. مستطیل ABCD میں، $m\overline{BC} + m\overline{CD} = 17cm$ اور $m\overline{BD} + m\overline{AC} = 26cm$ مستطیل کی چوڑائی اور لمبائی معلوم کریں۔

اعادہ مشق 23

(1) درست جواب پر دائرہ لگائیں

(i) مستطیل کے وتر کی پیائش 6.5 سینٹی میٹر ہے۔ اگر چوڑائی 2.5 سینٹی میٹر ہے تو اس کی لمبائی

(a) 9 سینٹی میٹر (b) 4 سینٹی میٹر (b) 6 سینٹی میٹر (d) 3 سینٹی میٹر

(ii) مندرجہ ذیل میں کون سے قائمہ الزاویہ مثلث کے اضلاع ہیں

(a) 3،4،5 (b) 2،3،4 (c) 5،6،7 (d) 4،5،6

(iii) قائمہ الزاویہ مثلث میں بڑے سے بڑا زاویہ ہوتا ہے۔

(a) 100° (b) 90° (c) 80° (d) 110°

(iv) قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر مخالف ضلع ہوتا ہے۔

(a) حادہ زاویہ (b) قائمہ زاویہ (b) منفرجہ زاویہ (d) کوئی نہیں

(v) اگر a، b، c قائمۃ الزاویہ مثلث کے اضلاع ہیں c بڑے سے بڑا ضلع ہے تو۔

(a) $c^2 = a^2 + b^2$ (b) $b^2 = c^2 + a^2$

(c) $a^2 = b^2 + c^2$ (d) $c^2 = a^2 - b^2$

(vi) اگر قائمۃ الزاویہ مثلث کے دو اضلاع 5 سینٹی میٹر اور 12 سینٹی میٹر ہیں تو وتر ہو گا۔

(a) 16 (b) 15

(c) 14 (d) 13

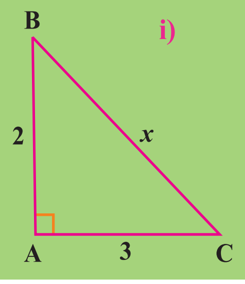
(vii) اگر ایک متماثل الساقین قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر $3\sqrt{2}$cm سینٹی میٹر ہے تو ہر ایک ضلع کی لمبائی ہے

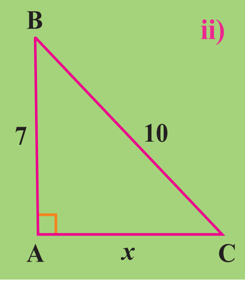
(a) 2 سینٹی میٹر (b) 5 سینٹی میٹر (c) 3 سینٹی میٹر (d) 1 سینٹی میٹر

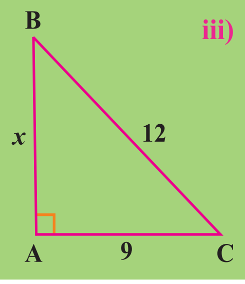
2- مسئلہ فیثاغورث کی وضاحت کریں

3- 25 میٹر لمبی سیڑی دیوار سے لگی ہوئی ہے۔ سیڑی کا پایہ دیوار کی بنیاد سے 7 میٹر دور ہے۔ سیڑی دیوار پر کتنی اونچائی تک پہنچے گی۔

4- مندرجہ ذیل اشکال میں ہر غیر معلوم کی قیمتیں معلوم کریں







خلاصہ

- قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی کا مربع باقی دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔
- اگر کسی مثلث میں کسی ایک ضلع کی لمبائی کا مربع باقی دو اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کی مجموعے کے برابر ہو تو مثلث قائمۃ الزاویہ ہو گی۔

24 یونٹ

نسبت اور تناسب
RATIO AND PROPORTION

طلباء کی آزموشی حاصلات

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

مندرجہ ذیل اثباتی مسائل اور ان کے نتائج صریح کو سمجھ اور متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے لیئے استعمال کر سکیں۔

- ❖ اگر کوئی خط مستقیم مثلث کی کسی ضلع کے متوازی کھنچا جائے تو باقی وہ دونوں ضلعوں کو ایک ہی نسبت میں قطع کرے گا۔
- ❖ اگر ایک قطع خط کسی مثلث کے دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں قطع کرے تو وہ تیسرے ضلع کے متوازی ہو گا۔
- ❖ مثلث کے اندرونی زاویے کا ناصف مقابل کے ضلع کو اسی نسبت میں قطع کرتا ہے۔ جو مثلث کی ان دونوں اضلاع کی مقداروں میں ہوتی ہے۔ جو اس زاویہ کی دونوں شعاعوں پر واقع ہوتے ہیں۔
- ❖ اگر دو مثلث متشابہ ہیں تو ان کے متناظرہ اضلاع کی پیائش متناسب ہوتی ہے۔

24.1 نسبت اور تناسب Ratio and proportion

اس یونٹ میں ہم تشابہ مثلث کے ساتھ مثلث کے اضلاع کی نسبت اور تناسب سے متعلق مسئلے پڑھیں گے لہذا سب سے پہلے ہم نسبت، تناسب اور تشابہ کے تصورات دہرائیں گے۔

نسبت (Ratio):

دو ایک جیسی اور ایک جیسے یونٹ والی مقداروں کا موازنہ نسبت ہے a اور b کی نسبت کو یوں $a:b$ یا $\frac{a}{b}$ لکھتے ہیں۔

a مقدم (Antecedent) اور b موخر (Consequent) کہلاتی ہے

مثال کے طور پر

نسبت 25 لٹر اور 5 لٹر $25:5$ یا 5:1 ہے۔

تناسب (Proportion):

دو نسبتوں کی برابری تناسب کہلاتی ہے۔

اگر دو نسبتیں $a:b$ اور $c:d$ برابر ہیں تو ہم یوں لکھتے ہیں:

$a:b=c:d$ یا $a:b::c:d$

اور اِسے تناسب کہتے ہیں

تناسب a:b=c:d میں a اور d طرفین (Extremis) کہلاتے ہیں جب کہ b اور c وسطین (Means) کہلاتے ہیں

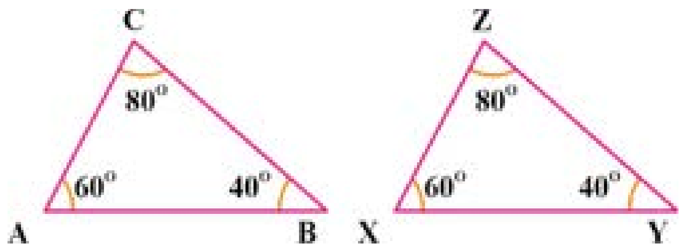
تناسب میں وسطین کا حاصل ضرب ہمیشہ طرفین کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔

تشابہ مثلث (Similar Triangles):

دو مثلث ABC اور PQR تشابہ مثلث کہلاتے ہیں اگر ان کے متناظرہ زاویے مماثل ہوں۔

علامتی طور پر ہم یوں کہتے ہیں $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

دی گئی شکل میں $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$



تشابہ مثلثوں کے لیئے مندرجہ ذیل مسئلہ اہم ہیں

اگر دو مثلث تشابہ ہیں تو ان کی متناظرہ اضلاع متناسب ہوتے ہیں

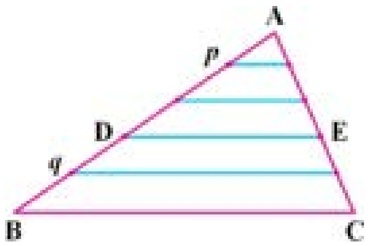
ہم اس مسئلہ کو آخر میں ثابت کرینگے۔

مسئلہ 24.1

اگر کوئی خط مستقیم مثلث کے کسی ضلع کے متوازی کھینچا جائے تو وہ باقی دونوں ضلعوں کو ایک ہی نسبت میں قطع کرے گا۔

معلوم: ΔABC میں $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ اور $\overline{DE}$ باقی اضلاع $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کو بالترتیب نقاط D اور E پر قطع کرتا ہے۔

مطلوب: $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$



عمل: لمبائی کے اس طرح کے یونٹ کا انتخاب کریں جیسا کہ یونٹ $m\overline{BD} = q$ یونٹ $m\overline{AD} = p$ جب کہ p اور q قدرتی اعداد ہیں۔ $\overline{AD}$ کو p متماثل قطعات $\overline{BD}$ کو q متماثل قطعات میں تقسیم کریں۔

لہٰذا $\dfrac{p}{q} = \dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}}$ نقاط تقسیم سے $\overline{BC}$ کے متوازی خطوط کھینچیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
متوازی خطوط کی مدد سے $\overline{AD}$ کو p متماثل قطعات میں تقسیم کیا گیا ہے۔	عمل
متوازی خطوط کی مدد سے $\overline{AE}$ کو بھی p متماثل قطعات میں تقسیم کیا گیا ہے۔	ہر خط قطع پر متوازی خط برابر تعداد میں متماثل قطعات بناتی ہیں۔
اس ہی طرح $\overline{EC}$ بھی q متماثل قطعات میں تقسیم کیا گیا ہے۔	متوازی خطوط کی مدد سے $\overline{BD}$ کو q متماثل قطعات میں تقسیم کیا گیا ہے۔
اب $\dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}} = \dfrac{p}{q}$	$\overline{AE}$ اور $\overline{EC}$ کو بالترتیب p اور q متماثل قطعات میں تقسیم کیا گیا ہے (اوپر ثابت شدہ ہے)
پس $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \dfrac{p}{q}$	عمل
لہٰذا $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$	برابری کی خاصیت متعدیت

Q.E.D

نتیجہ صریح 1:

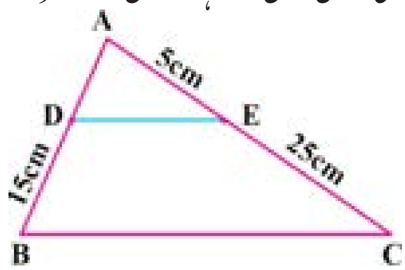
اوپر دیئے گئے مسئلہ کی شکل سے اِسے ثابت کیا جاسکتا ہے۔ $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DB}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{EC}}$

نتیجہ صریح 1:

اوپر دیے گئے مسئلہ کی شکل سے اِسے ثابت کیا جاسکتا ہے۔ $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{AB}}=\dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}}$.

نتیجہ صریح 2:

اگر ایک خط متماثل الساقین مثلث کے قاعدے کے متوازی ہے اور باقی دو متماثل اضلاع کو قطع کرتا ہے تو اضلاع کے متناظرہ قطعات متماثل ہوں گے۔



مثال:

ΔABC متعلقہ شکل میں $\overline{DE}\parallel\overline{BC}$

$m\overline{AD}$ معلوم کریں اگر $m\overline{AE}=5\text{cm}$ ، $m\overline{BD}=15\text{cm}$

اور $m\overline{CE}=25\text{cm}$.

حل:

$\because \quad \overline{DE}\parallel\overline{BC}$

$\therefore \quad \dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{BD}}=\dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$

یعنی کہ $\dfrac{m\overline{AD}}{15}=\dfrac{5}{25}$

$\Rightarrow \quad m\overline{AD}=\dfrac{15\times 5}{25}$

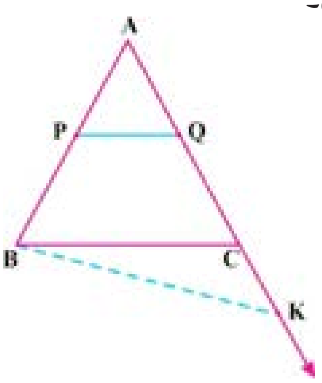
$\Rightarrow \quad m\overline{AD}=3\text{cm}$

مسئلہ: 24.2

اگر ایک قطع خط کسی مثلث کے دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں قطع کرے تو وہ تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔

ملاحظہ: ΔABC میں $\overline{AB}$ کو اور $\overline{AC}$ اور $\overline{PQ}$ باترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتے ہیں۔

اس طرح کہ $\dfrac{m\overline{AP}}{m\overline{PB}}=\dfrac{m\overline{AQ}}{m\overline{QC}}$



مطلوب: $\overline{PQ}\parallel\overline{BC}$

عمل: اگر $\overline{PQ}$، $\overline{BC}$ کا متوازی نہیں ہے $\overline{BK}$، نقطہ C کے علاوہ نقطہ K پر $\overline{AC}$ سے مل رہا ہے

اس طرح کہ $\overline{PQ}\parallel\overline{BK}$

ثبوت:

بیانات	دلائل
ΔABK میں	
$\overline{PQ} \parallel \overline{BK}$	عمل
$\dfrac{m\overline{AP}}{m\overline{PB}} = \dfrac{m\overline{AQ}}{m\overline{QK}}$	مثلث کے ایک ضلع کے متوازی خط دوسرے اضلاع کو متناسب میں قطع کرتا ہے۔
مگر $\dfrac{m\overline{AP}}{m\overline{PB}} = \dfrac{m\overline{AQ}}{m\overline{QC}}$	معلوم
اس لیے $\dfrac{m\overline{AQ}}{m\overline{QK}} = \dfrac{m\overline{AQ}}{m\overline{QC}}$	برابری کی خاصیت متعدیت
$\Rightarrow \quad m\overline{QK} = m\overline{QC}$	اگر مقدم اور موخر برابر ہیں تو نسبت میں بھی برابر ہیں
یعنی $\overline{QK} \cong \overline{QC}$	تماثل قطعات کی رو سے
یہ ضرب تب ممکن ہے جب فقط K نقطہ C پر منطبق ہو۔	Q دونوں میں مشترک نقطہ ہے
پس $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$	ہمارا مفروضہ غلط ہے

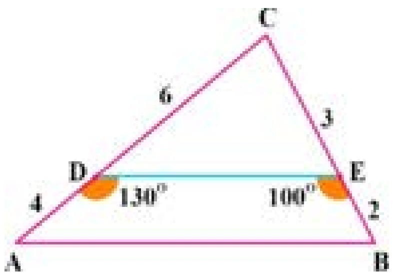
Q.E.D

نتیجہ صریح:

مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے قطعہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

مثال: متعلقہ شکل میں $\overline{DE}$ مثلث ΔABC کی دو اضلاع $\overline{AC}$ اور $\overline{BC}$ بالترتیب نقاط D اور E پر قطع کرتے ہیں۔ قاعدے کے زاوے A اور B معلوم کریں۔ اگر $m\angle ADE = 130°$ اور $m\angle BED = 100°$ جب کہ اضلاع کی لمبائی دی گئی ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

حل:



$\angle ADE$ اور $\angle CDE$ سپلیمنٹری ہیں

$m\angle CDE = 50° \quad (\because m\angle ADE = 130°)$

اسی طرح

$m\angle DEC = 80°$

$\because \quad \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6}$ یعنی کہ $\overline{DE}$ دو اضلاع $\overline{AC}$ اور $\overline{BC}$ کو قطع کرتا ہے

$\therefore \quad \overline{DE} \parallel \overline{AB}$

لہٰذا $m\angle A = m\angle CDE$ کیونکہ متوازی خطوط کے متناظرہ زاویے برابر ہیں

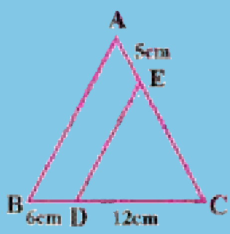
یعنی کہ

$$m\angle A = 50^\circ$$

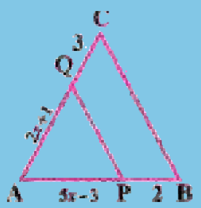
اسی ہی طرح

$$m\angle B = m\angle DEC = 80^\circ$$

مشق 24.1



1. ΔABC میں $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$، $m\overline{CE}$ معلوم کریں۔ اگر $m\overline{DC} = 12cm$، $m\overline{BD} = 6cm$ اور $m\overline{AE} = 5cm$



2. ΔABC میں $\overline{BC} \parallel \overline{PQ}$، تو x معلوم کریں
$m\overline{AP} = 5x - 3$ ، $m\overline{PB} = 2$ ، $m\overline{AQ} = 2x + 1$ اور
$m\overline{QC} = 3$

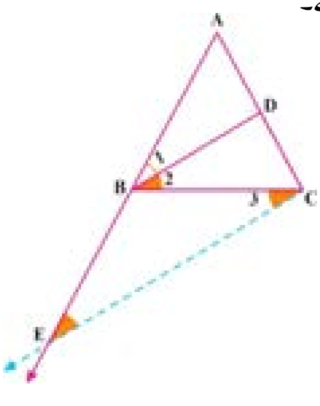
3. ثابت کریں کہ ذوزنقہ کے متوازی اضلاع پر متوازی خط کھینچا جائے وہ غیر متوازی اضلاع کو متناسب میں تقسیم کرتا ہے۔

4. ثابت کریں کہ مثلث کے وسطی نقاط سے ایک قطعہ خط کھینچا جائے اور وہ دوسرے ضلع کے متوازی تیسرے ضلع کو نعف کرتا ہے۔

5. ثابت کریں کہ خط جو ذوزنقہ کے غیر متوازی اضلاع کو متناسب ہیں قطع کرتا ہو۔ تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔

مسئلہ 24.3

مثلث کے اندرونی زاویے کا ناصف مقابل کے ضلع کو اسی نسبت میں قطع کرتا ہے۔



معلوم:

ΔABC مثلث $\angle ABC$ کا ناصف $\overline{BD}$

یعنی کہ

$$<1 \cong <2$$

مطلوب:

$$\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DC}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}}$$

عمل:

$\overline{BD}$ کے متوازی $\overrightarrow{CE}$ کھینچیں $\overrightarrow{AB}$ جو نقطہ E پر $\overline{AB}$ سے ملتی ہے۔

ثبوت:

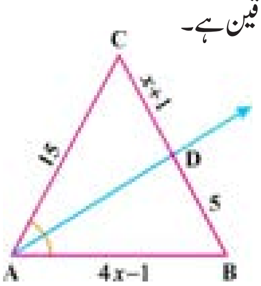
دلائل	بیانات
عمل	$\because \quad \overline{EC} \parallel \overline{BD}$
متوازی خطوط کی متناظرہ زاویے	$\therefore \quad m\angle E = m\angle 1 \ldots (i)$
	مگر
متوازی خطوط کے متبادلہ زاویے	$m\angle 2 = m\angle 3$
معلوم	$m\angle 1 = m\angle 2$
خاصیت متعدیت	لہٰذا $m\angle 1 = m\angle 3$
مساوات (i) کے استعمال سے	$m\angle E = m\angle 3$
مثلثوں کے تماثل زاویوں کے مخالف اضلاع تماثل ہیں	ΔBCE میں
	$\overline{BC} \cong \overline{BE}$
	ΔACE میں
عمل	$\because \quad \overline{BD} \parallel \overline{EC}$
مثلث کے ایک ضلع کا متوازی خط دوسرے اضلاع کو متناسب قطع کرتا ہے	$\therefore \quad \dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DC}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{BE}}$
	یا
$\overline{BC} \cong \overline{BE}$ (اوپر ثابت شدہ)	$\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DC}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}}$

Q.E.D

نتیجہ صریح: اگر مثلث کے زاویے کا اندرونی ناصف مخالف ضلع کو نصف کرتا ہے تو مثلث، متماثل الساقین ہے۔

مثال:

متصلہ شکل میں ΔABC کے زاویے $\angle A$ کا ناصف $\overrightarrow{AD}$ ہے۔ x معلوم کریں اگر $m\overline{AC} = 15\text{ cm}$، $m\overline{AB} = 4x-1\text{ cm}$، $m\overline{CD} = x+1\text{ cm}$ اور $m\overline{BD} = 5\text{cm}$ مثلث کی قسم بھی واضح کریں جب کہ $x \in N$



حل:

$\because$ $\overrightarrow{AD}$ زاویہ $\angle A$ کا ناصف ہے

$$\therefore \quad \frac{m\overline{CD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}}$$

یعنی کہ

$$\frac{x+1}{5} = \frac{15}{4x-1}$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - x + 4x - 1 = 75$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 + 3x - 76 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 + 19x - 16x - 76 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(4x+19) - 4(4x+19) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-4)(4x+19) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x - 4 = 0 \quad \text{یا} \quad 4x + 19 = 0$$

$\Rightarrow \quad x = 4$ | $\Rightarrow \quad x = \frac{-19}{4}$

$\because \quad \frac{-19}{4} \notin N$

$\therefore$ ہم $\frac{-19}{4}$ کو نظر انداز کرتے ہیں

پس $x = 4$

اب $m\overline{AB} = 4x - 1$

$= 4 \times 4 - 1$

$= 15$

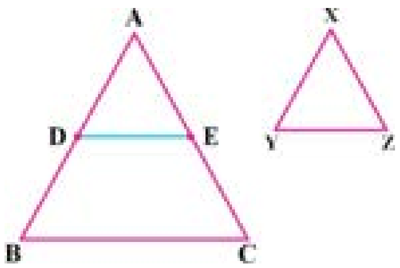
$\because \quad m\overline{AB} = m\overline{AC} = 15 \text{ cm}$

اور $m\overline{BC} = x + 1 + 5 = 10 \text{ cm}$

$\therefore \quad \Delta ABC$ متماثل الساقین مثلث ہے

مسئلہ 24.4

اگر دو مثلث متشابہ ہیں ان کے متناظرہ اضلاع کی پیمائش متناسب ہوتی ہے۔



معلوم: ΔABC اور ΔXYZ متشابہ مثلث ہیں

یعنی کہ $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta XYZ$ میں

$\angle A \cong \angle X$

$\angle B \cong \angle Y$

اور $\angle C \cong \angle Z$

مطلوب:

$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{XY}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{YZ}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{XZ}}$$

عمل: $\overline{AB}$ سے $\overline{AD} \cong \overline{XY}$ قطع کریں اور $\overline{AC}$ پر $\overline{AE} \cong \overline{XZ}$ قطع کریں۔ $\overline{DE}$ کھینچیں

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta ADE \leftrightarrow \Delta XYZ$ میں	
$\overline{AD} \cong \overline{XY}$	عمل
$\angle A \cong \angle X$	معلوم
$\overline{AE} \cong \overline{XZ}$	عمل
$\Delta ADE \cong \Delta XYZ$	اصول موضوعہ ض۔ز۔ض
$\angle ADE \cong \angle Y$	متماثل مثلثوں کے تناظرہ زاویے
لیکن $\angle B \cong \angle Y$	معلوم
لہذا $\angle ADE \cong \angle B$	خاصیت متعدیت
پس	

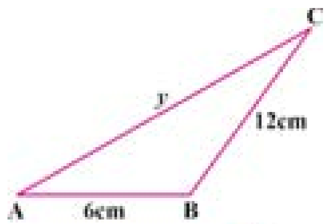
متناظرہ زاویے $\angle ADE$ اور $\angle B$ متماثل ہیں	$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
مسئلہ 1 کی رو سے (نتیجہ صریح)	$\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AD}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AE}}$
$m\overline{AD} = m\overline{XY}$ اور $m\overline{AE} = m\overline{XZ}$	یا $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{XY}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{XZ}}$ ...(i)
اوپر دیئے گئے عمل کی رو سے	اس ہی طرح $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{XY}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{YZ}}$ ...(ii)
مساوات (i) اور مساوات (ii) سے	لہذا $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{XY}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{YZ}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{XZ}}$

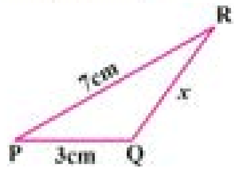
Q.E.D

نتیجہ صریح:

مثلثوں میں مطابقت۔ اگر مثلث کے دو زاویے متماثل میں متناظرہ دو زاویوں کے دوسرے مثلث کے تو ان کی متناظرہ اضلاع متناسب ہیں۔

مثال 1:





دی گئی شکل میں، ΔABC اور ΔPQR متشابہ ہیں

x اور y کی قیمتیں معلوم کریں۔ اگر $m\overline{AB} = 6cm$ ، $m\overline{BC} = 12cm$ ،
$m\,\overline{PQ} = 3cm$ اور $m\overline{PR} = 7cm$

حل:

ΔABC اور ΔPQR متشابہ ہیں

$\therefore$ ان کی متناظرہ اضلاع برابر ہیں

یعنی کہ
$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{QR}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{PR}}$$

(بذریعہ دی ہوئی پیمائش)
$$\Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{12}{x} = \frac{y}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{12}{x} \quad \text{اور} \quad \frac{6}{3} = \frac{y}{7}$$

یا $2 = \dfrac{12}{x}$ یا $2 = \dfrac{y}{7}$

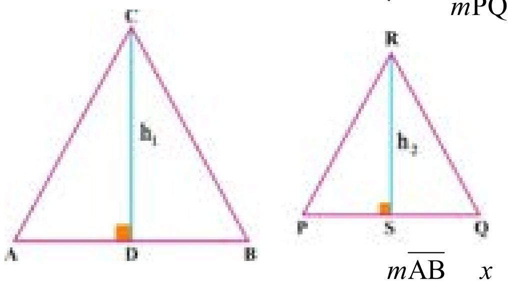
یا $2x = 12$ یا $14 = y$

$\Rightarrow x = 6$ cm یا $y = 14$ cm

لہذا x اور y کی قیمتیں بالترتیب 6cm اور 14cm میٹر ہیں

مثال 2:

دی گئی شکل میں، ΔABC اور ΔPQR متشابہ ہیں اور $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{x}{y}$ جب کہ h_1 اور h_2 دی گئی مثلثوں کے ارتفاع ہیں۔



ثابت کریں کہ:

$$\frac{\Delta ABC \text{ کا رقبہ}}{\Delta PQR \text{ کا رقبہ}} = \frac{x^2}{y^2}$$

ثبوت:

ہمارے پاس $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{x}{y}$

$\because$ ΔABC اور ΔPQR متشابہ ہیں

$\therefore$ $\frac{m\overline{AC}}{m\overline{PR}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{QR}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{x}{y}$ ... (i)

$\Delta ADC \leftrightarrow \Delta PSR$ میں

$m\angle A = m\angle P$ (دیا ہوا)

$\because$ $m\angle D = m\angle S = 90^\circ$ اور

$\therefore$ $\Delta ADC \sim \Delta PSR$

پس

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{PR}} = \frac{x}{y}$ (بذریعہ مساوات (i))

اب

$$\frac{\Delta ABC \text{ کا رقبہ}}{\Delta PQR \text{ کا رقبہ}} = \frac{x^2}{y^2} = \frac{\frac{1}{2}\left(m\overline{AB}\right)h_1}{\frac{1}{2}\left(m\overline{PQ}\right)h_2}$$

$$= \frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} \times \frac{h_1}{h_2}$$

$$= \frac{x}{y} \times \frac{x}{y} \qquad \left(\because \frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{x}{y} \text{ and } \frac{h_1}{h_2} = \frac{x}{y}\right)$$

$$= \frac{x^2}{y^2}$$

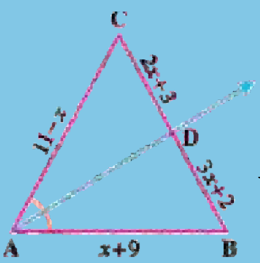
پس ثابت ہوا

دوسری مثال سے ہم نتیجہ عکس کرتے ہیں کہ

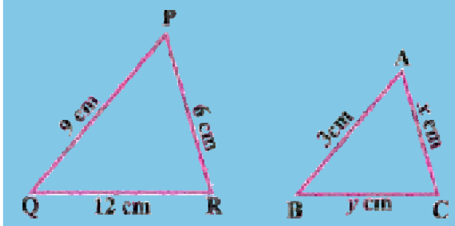
> دو متشابہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت کسی بھی دو متناظرہ اضلاع کی نسبتوں کے مربع کے برابر ہوتی ہے

مشق 24.2

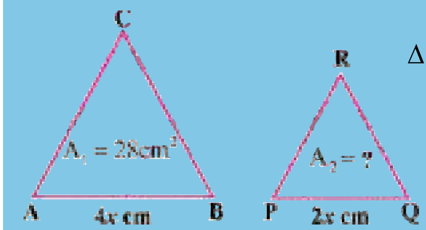
1. متعلقہ شکل میں، ΔABC مثلث $\angle A$ کے زاویے کا ناصف $\overrightarrow{AD}$ ہے x کی قیمت معلوم کریں۔ اگر $m\overline{AB}=x+9$ ، $m\overline{AC}=11-x$ ، $m\overline{CD}=2x+3$ اور $m\overline{BD}=3x+2$ مثلث کی قسم کی وضاحت بھی کریں۔



2. متعلقہ شکل میں ΔABC اور ΔPQR تشابہ ہیں x اور y کی قیمتیں معلوم کریں اگر اضلاع کی لمبائیاں شکل دی دی گئی ہیں۔



3. فرض، A_1 اور A_2 بالترتیب دو متشابہ مثلث ΔABC اور ΔPQR کے رقبے ہیں جیسا کہ اشکال میں دکھایا گیا ہے۔ A_2 معلوم کریں اگر $A_1=28\text{cm}^2$ ، $m\overline{AB}=4x\text{ cm}$ اور $m\overline{PQ}=2x\text{ cm}$



4. دو متشابہ مثلثوں کے متناظرہ اضلاع کی نسبت $2:x-5$ اور ان کے رقبوں کی نسبت $1:9$ ہے۔ x کی قیمت معلوم کریں۔

5. ثابت کریں دو قائمۃ الزاویہ مثلث کے اضلاع متناسب ہیں۔ اگر ایک مثلث کا حادہ زاویہ دوسرے مثلث کا حادہ زاویہ متماثل ہیں۔

6. قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ سے وتر کی طرف کھینچا جانے والا عمود مثلث کو دو مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ثابت کریں کہ ان میں سے ہر ایک مثلث اصل سے متماثل ہے

جائزہ 24

1. درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں

i. متناسب میں، وسطین کا حاصل ضرب برابر ہے۔ طرفین کے ________

(a) مجموعہ (b) فرق (c) خارج قسمت (d) حاصل ضرب

ii. ______ مثلث ہمیشہ متشابہ ہوتے ہیں۔

(a) قائمۃ الزاویہ (b) مختلف الاضلاع (c) حادۃ الزاویہ (d) مساوی الاضلاع

iii. مثلثوں کے تشابہ کی علامت ______ ہے۔

(a) $=$ (b) $\cong$ (c) $\sim$ (d) $\leftrightarrow$

iv. اگر ایک خط مثلث کے قاعدے کے متوازی ہے اور ایک ضلع کو 2:1 میں تقسیم کرتا ہے تو وہ دوسرے ضلع کو ______ میں تقسیم کرتا ہے۔

(a) 3:2 (b) 2:3 (c) 2:6 (d) 5:3

v. اگر خط مثلث کے دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں قطع کرتا ہے تو یہ دوسرے ضلع کے ________ ہو گا۔

(a) متوازی (b) غیر متوازی (c) منطبق (d) ان میں سے تمام

vi. ΔABC میں، $\angle A$ کا ناصف $\overline{BC}$ کو نسبت _____ میں تقسیم کرتا ہے۔ اگر $m\overline{AB} = 6cm$ اور $m\overline{AC} = 8cm$

(a) 5:8 (b) 3:4 (c) 1:1 (d) 5:7

vii. مساوی الاضلاع مثلث کے زاویہ کا ناصف ضلع کو _______ میں تقسیم کرتا ہے۔

(a) 2:3 (b) 3:2 (c) 1:1 (d) 5:2

viii. دو متشابہ مثلثوں کے متناظرہ اضلاع _______ ہوتے ہیں۔

(a) مساوی (b) غیر مساوی (c) متناسب (d) ان میں سے کوئی نہیں

ix اگر دو متشابہ مثلثوں کے متناظرہ اضلاع کی نسبت 5:7 ہے تو ان کے رقبوں کی نسبت _____ ہے۔

(a) 5:7 (b) 7:5 (c) 25:7 (d) 25:49

x. اگر دو متشابہ مثلثوں کا رقبہ 36:12 نسبت میں ہے تو ان کے متناظرہ اضلاع کی نسبت __________ ہو گی۔

(a) 6:10 (b) 6:11 (c) 11:6 (d) 10:6

xi. اگر دو متشابہ مثلثوں کے متناظرہ اضلاع کی نسبت 2:n ہے اور رقبہ 4:9 ہے تو $x =$ ________.

(a) 3 (b) -3 (c) a اور b دونوں (d) ان میں سے کوئی نہیں

xii. دو مساوی مثلث __________ بھی ہوتے ہیں۔

(a) متماثل (b) متشابہ (c) متناسب (d) مساوی

خلاصہ

- نسبت دو ایک جیسی مقداروں کا موازنہ
- نسبت a:b میں a مقدم اور b موخر کہلاتا ہے
- تناسب دو نسبتوں کی برابری ہے۔
- تناسب میں، وسطین کا حاصل ضرب برابر ہوتا ہے طرفین کے حاصل ضرب کے
- دو مثلث متشابہ ہیں اگر وہ مساوی الزاویہ ہیں
- اگر دو مثلث متشابہ ہیں تو ان متناظرہ اضلاع متناسب ہوتے ہیں
- ایک خط مثلث کے ایک ضلع کے متوازی ہے اور دوسرے دو اضلاع کو متناسب میں قطع کرتا ہے۔
- اگر ایک قطعہ خط مثلث کے دو اضلاع کو ایک جیسی نسبت میں قطع کرتا ہے تو یہ تیسرے ضلع کے متوازی ہو گا۔

یونٹ 25

دائرے کے وتر
CHORD OF A CIRCLE

طلباء کے آموزشی حاصلات

اس کی یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- مندرجہ ذیل اثباتی مسائل اور ان کے نتائج صریح کو سمجھ اور متعلقہ سوالات کو حل کرنے لیئے ان کو استعمال کر سکیں۔
  - تین غیر ہم خط نقاط سے ایک اور حرف ایک دائرہ گذر سکتا ہے
  - دائرے کے مرکز سے کسی وترا (جو قطر نہ ہو) کی تنفیف کرنے والا قطعہ خط، وتر پر عمور ہوتا ہے۔
  - دائرے کے مرکز سے کس وتر پر عمود اس کی تنصیف کرتا ہے۔
  - اگر دائرے کے دو وتر متماثل ہوں تو وہ مرکز سے ہم فاصلہ ہونگے۔
  - اگر دائرے کے دو وتر مرکز سے اہم فاصلہ ہوں تو وہ متماثل ہوتے ہیں۔

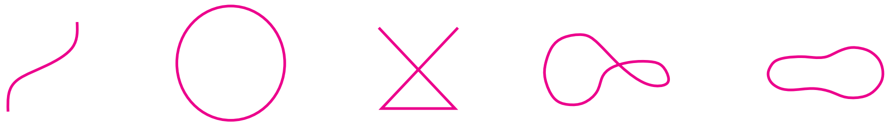
تعارف (Introduction):

پچھلی جماعت اور یونٹوں میں ہم نے جیومیٹری کا تفصیلی مطالعہ کیا جس میں مثلث اور چوکور شامل ہیں جو تمام قطعہ خطوں سے بنتے ہیں۔ قطعہ خطوں میں خم نہیں ہوتا یہاں ہم ثبوت کے ساتھ اثباتی مسائل اور دائروں سے متعلقہ مسائل پر توجہ دینگے۔

دائرے ہماری دنیا میں موجود امتکال کو سمجھنے میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ دائروں کے بغیر ہم ایک گاڑی کی خم دار روڈ پر حرکت سیاروں کی مدار میں گردش، ایٹم میں الیکٹرانوں کی حرکت Cyclones بناوٹ وغیرہ جیسی چیزوں کو سمجھنے سے قاصر ہونگے دائرنے کس جدید اشکال جیسے بیضوی، کرہ، سلنڈر اور مخروط کو سمجھنے میں بنیادی کردار ادا کرتے ہیں جو کہ ہماری دنیا کی اشیاء کے خدوخال سے تعلق رکھتی ہیں جیسے کہ تنے، درخت، پانی کے قطرے تار پائپ غبارے، پہیوں، بال بیرنگ وغیرہ۔

ایک حرکت پذیر نقطے کے اختیار کئے جانے والے راستے کو منحنی خط کہتے ایک کھلے ہوئے منحنی خط کے مختلف ابتدائی اور اختتامی نقاط ہوتے ہیں ایک بند منحنی خط کا نقطے آغاز اور اختتامی نقطہ ایک ہوتا ہے یا جس کا کو بھی ابتدائی اور اختتامی نقاط نہیں ہوتے ہیں۔

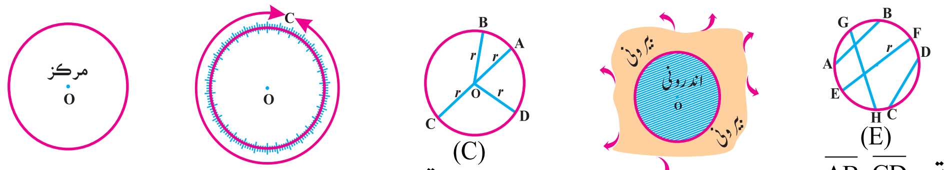
ایک منحنی خط جو اپنے آپ کو کراس نہ کریں ایک سادہ منحنی خط کہلاتا ہے ورنہ غیر سادہ منحنی خط کہلاتا ہے ایک منحنی خط جو سادہ ہونے کے ساتھ ساتھ بند بھی ہو تو وہ سادہ بند منحنی خط کہلائے گا۔ مثال کے طور پر شکل (i) میں دی گئیں منحنی خطوں حوالہ دیں۔



(A) سادہ، کھلا | (B) سادہ، بند | (C) غیر سادہ کھلا | (D) غیر سادہ بند | (E) سادہ بند

شکل (i): سادہ کھلا، سادہ بند، غیر سادہ کھلا، غیر سادہ بند، سادہ بند

ایک دائرہ سادہ بند منحنی خط ہوتا ہے۔ جس کے تمام نقاط ایک مقررہ نقطہ جو اُس کا مرکز کہلاتا ہے اُسے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔ دائرے کے حدود کی لمبائی محیط کہلاتی ہے ایک قطعہ خط جو دائرے کے مرکز کو محیط کسی بھی نقطے سے ملائے اُس ادا سی قطعہ کہتے ہیں اور اس کی لمبائی کو دائرے کو رداس کہتے ہیں دائرے کے اندر واقع نقاط اس کا اندرونہ اور باہر واقع نقاط بیرونہ بناتے ہیں ایک قطعہ خط جو دائرے کے کسی بھی دو نقاط ملاتا ہے وہ دائرہ کا وتر کہلاتا ہے یا مرکزی وتر کہلاتا ہے اور اُس کی لمبائی دائرے میں موجود تمام وتروں کی لمبائی سے زیادہ ہوتی ہے۔ ان اصلاحات کی وضاحت شکل (ii) میں کی گئی ہے۔



(A) دائرے کا مرکز O ($\odot O$)

(B) O کا محیط C "C"

(C) رداس r رداسی قطعہ $\overline{OD}$, $\overline{OC}$, $\overline{OB}$, $\overline{OA}$

(D) O کا اندرونی اور بیرونی ($\equiv$)

(E) وتر $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطر $\overline{GH}$, $\overline{EF}$ $\overline{EF}\left(m\overline{EF} = 2r\right)$

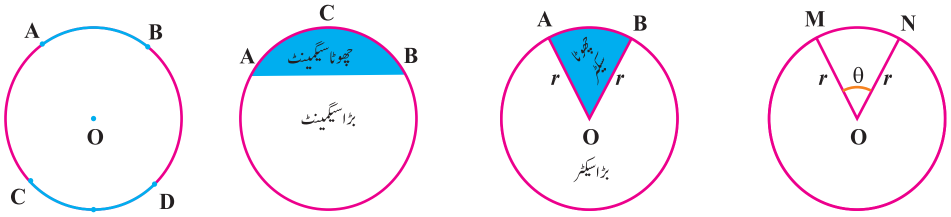
شکل (ii)

اگر r دائرے کارداس ہے تو اُس کا قطر محیط اور دائروی رقبہ برابر ہونگے $2r$ اور $\pi 2r$ یہاں πr^2 جیسا π (یونانی حرف) ایک غیر ناطق عدد ہے دائرے کے محیط سے اُس کے قطر کی نسبت ہے۔ یہ تقریبن $22/7$ ہے لیکن بالکل برابر نہیں ہے۔ حقیقت میں $\pi = 3.141592.653...$ ہم دیکھتے ہیں کہ $22/7=3.141592.653...$ جو کہ پہلے دو اعشاریہ تک ملتے ہیں۔

محیط کا حصہ دائرے کی قوس (Arc) کہلاتا ہے۔ ایک وتر دائرے کے اندرونہ کو دو حصوں یا قطعات میں تقسیم کرتا ہے۔ قطر دائرے کو دو برابر قطعات میں تقسیم کرتا ہے۔ قطعات گھیرے ہوئے ہوتے ہیں۔

قوس ان کے متعلق وتروں کے ایک مخصوص وتر کے لیے جو وہ قطعہ جو دائرے کا اندرونہ کا زیادہ گھیرتی ہو قطعہ کبیرہ اور جو کم گھیرتی ہو قطعہ صغیرہ کہلاتی ہے اور متناظرہ قوسین، قوس کبیرہ اور قوس صغیرہ کہلاتی ہے۔ دائرہ کے اندرونہ کا وہ حصہ جو دو راسی قطعات اور ایک قوس سے گھیرا ہوتا ہے وہ دائرے کا قطاع (Sector) کہلاتا ہے۔ منتخب کئے گئے رداسی قطعات اور قوس سے قطاع کبیرہ اور قطاع صغیرہ کا تعین ہوتا ہے۔

مرکزی زاویہ دائرے مرکز پر قوس مقابل زاویہ ہوتا ہے (مرکزی زاویے کا راس) شکل (iii) ان تصورات کی وضاحت کرتی ہے



(A) قوس AB، CED

(B) صغیرہ قوس ACB کبیرہ قوس ADB (چھوٹے اور بڑے قطعات)

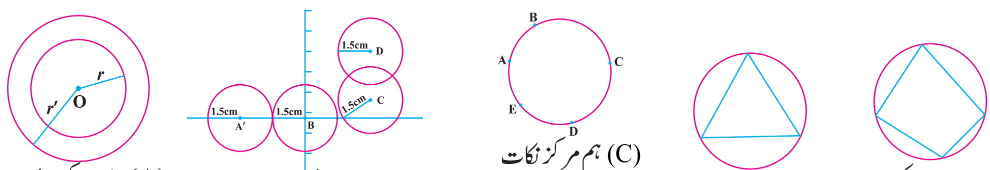
(C) سیکٹر قوس AB اور OA، OB سے بنے

(D) مرکزی زاویہ $\angle MON = \theta$ راس O اور بازو OM، ON

شکل (iii)

(مرکزی زاویے راس) دائرے کے مقام اور سائز کا بالترتیب اُس مرکز اور رداس تعین کرتے ہیں۔

دو دائرے متماثل ہوتے ہیں اگر ان کے رداس برابر ہوں تو دو دائرے جن کا مرکز ایک ہو ن وہ ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں اگر نقاط ایک خط پر واقع ہوں تو وہ ہم خط کہلاتے ہیں ورنہ غیر ہم خط ہونگے۔ دائرے پر واقع نقاط ہم دائرے کہلاتے ہیں ایک دائرہ جو مثلث کے راسوں سے گذرتا ہے محاصرہ دائرہ کہلاتا ہے ایک دائرہ جو چوکور کے راسوں سے کھینچا جائے وہ دائروی چوکور ہوتا ہے۔



(A) ہم مرکز دائرے

(B) متماثل دائرے

(C) ہم مرکز نکات

(D) محاصر دائرہ

(E) دائروی چوکور

شکل (iv)

25.1 دائرے کے وتر (Chords of a Circle):

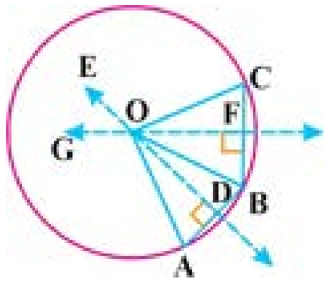
مسئلہ 25.1: تین غیر ہم خط نقاط سے ایک اور صرف ایک دائرہ گذر سکتا ہے۔

معلوم:

تین غیر ہم خط نقاط A، B اور C ہیں۔

مطلوب:

صرف ایک اور صرف دائرہ A،B اور C میں گذر سکتا ہے



عمل:

قطعہ خط $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کھینچیں $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ بالترتیب عمودی ناصف $\overleftrightarrow{ED}$ اور $\overleftrightarrow{GF}$ کھینچیں $\overleftrightarrow{ED}$ اور $\overleftrightarrow{GF}$ نقطہ O پر قطعہ کرتے ہیں۔

$\overline{OA}$، $\overline{OB}$ اور $\overline{OC}$ کھینچیں

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\overleftrightarrow{ED}$ پر تمام نقاط A اور B سے ہم فاصلہ ہیں	$\overleftrightarrow{ED}$، $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے اور O، $\overleftrightarrow{ED}$ پر نقطہ ہے
لہٰذا $m\overline{OA} = m\overline{OB}$ پر (i)...	$\overleftrightarrow{GF}$، $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف ہے اور نقطہ O سے گذرتا ہے۔
$\overleftrightarrow{GF}$ تمام نقاط B اور C سے ہم فاصلہ ہیں	$\overleftrightarrow{ED}$ اور $\overleftrightarrow{GF}$ غیر متوازی خطوط ہیں مساوات
لہٰذا $m\overline{OB} = m\overline{OC}$ (ii)...	(i) اور (ii) سے
$\overleftrightarrow{ED}$ اور $\overleftrightarrow{GF}$ کا O واحد قطع ہے (iii)...	خاصت متعدیت
نقطہ O نقاط A،B اور C سے ہم فاصلہ ہیں	$\overline{OA}, \overline{OB}$ اور $\overline{OC}$ اداس قطعات اور مساوات
(iv)... $m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = r$	(iii) ہے
دائرے کا مرکز صرف O پر ہے اور رداس r گذرتا ہے۔	معلوم
(v)... A،B اور C گذرتا ہے۔	مساوات (iii)، (iv)، (v) اور (vi) سے

Q.E.D

نتیجہ صریح: دائرے پر کوئی تین مختلف نقاط غیر ہم خط ہوتے ہیں۔

نوٹ 1 مسئلہ: 25.1 دائرے کی وہ واحد انفرادیت کو ظاہر کرتا ہے کہ دائرہ کسی بھی تین غیر ہم خط نقاط سے کھینچا جا سکتا ہے۔

نوٹ 2: دائرے پر تین سے زیادہ کوئی بھی نقاط کی تعداد غیر ہم خط کہلاتی ہے۔

مثال 1:

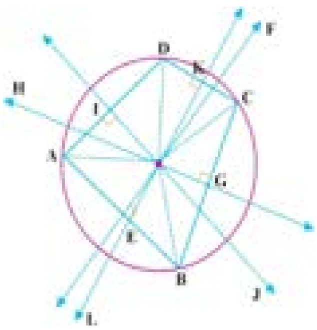
ثابت کریں کہ ایک اور صرف ایک دائرہ مثلث کے تین راسوں میں گذر سکتا ہے۔

معلوم:

ΔABC کے راس B,A اور C ہیں۔

مطلوب:

ایک اور صرف ایک دائرے ΔABC مثلث کے راسوں سے گذر سکتا ہے۔



عمل:

ΔABC کے اضلاع $\overline{AB}, \overline{BC}$ اور $\overline{AC}$ کے عمودی ناصف بالترتیب

$\overline{AB}, \overline{BC}$ اور $\overline{AC}$ کھینچیں جو نقاط O پر قطع کرتے ہیں

$\overline{OA}, \overline{OB}$ اور $\overline{OC}$ کھینچیں۔

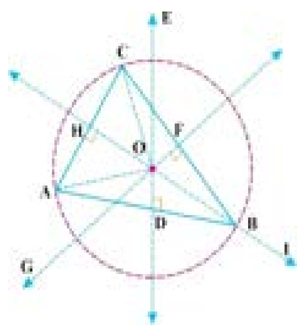
ثبوت

بیانات	دلائل
$\overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{FG}$ اور $\overleftrightarrow{HI}$ کا O واحد نقطہ تقاطع ہے	$\overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{FG}$ اور $\overleftrightarrow{HI}$ غیر متوازی خطوط ہیں اور O ان تمام پر واقع ہے
نقطہ O، ΔABC کا محاصر مرکز ہے	مثلث کی تعریف کی روسے
نقطہ O، ΔABC کے راسوں سے ہم فاصلہ ہے یعنی $m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = r$	محاصر مرکز کی تعریف کی روسے
دائرہ جس کا مرکز O ہے اور رداس r ΔABC کے راسوں سے گذرتا ہے۔	$\overline{OA}, \overline{OB}$ اور $\overline{OC}$ رداسی قطعات ہیں

Q.E.D

مثال 2:

ثابت کریں کہ ایک اور صرف ایک دائرہ چوکور کے راسوں سے گذر سکتا ہے۔



معلوم: ایک چوکور AB CD

مطلوب:

ایک اور صرف ایک دائرہ چوکور گذرتا ہے

عمل:

$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CO}$ اور $\overline{AD}$ پر عمودی ناصف $\overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{GH}, \overleftrightarrow{IJ}$ اور $\overleftrightarrow{KL}$ کھینچیں۔

یہ تمام نقطہ O پر ملتے ہیں۔ $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ اور $\overline{OD}$ بنائیں۔

ثبوت

بیانات	دلائل
$\overleftrightarrow{EF}$ پر تمام نقاء A اور B سے ہم فاصلہ ہیں۔ $\therefore$ $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ (i)	$\overleftrightarrow{EF}$, $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے O, $\overleftrightarrow{EF}$ پر واقع ہے
اس طرح، $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ (ii) $\overline{OC} \cong \overline{OD}$ (iii) $\overline{OD} \cong \overline{OA}$ (iv)	$\overleftrightarrow{GH}$ اور $\overline{BC}$ کے لئے اس طرح کے دلائل استعمال کرتے ہوئے $\overleftrightarrow{IJ}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$، $\overleftrightarrow{KL}$ اور $\overline{AD}$ جیسا اوپر دیا گیا ہے۔
$\overleftrightarrow{GH}$, $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{IJ}$ اور $\overleftrightarrow{KL}$ کا واحد نقطہ تقاطع O ہے	O تمام خطوط پر واقع ہے
چوکور کے راسوں A، B، C اور D سے O ہم فاصلہ ہے	مساوات (i) سے (iv)
$m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = m\overline{OD} = r$	
دائرہ جس کا مرکز O اور رداس r ہے وہ واحد دائرہ ہے جو چوکور A، B، C اور D کے راسوں سے گذرتا ہے	$\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ اور $\overline{OD}$ رداسی قطعات بتاتے ہیں

Q.E.D

مشق 25.1

1- کیا ایک دائرہ تین غیر ہم خط نقاط گذر سکتا ہے؟ دلائل سے وضاحت کریں۔

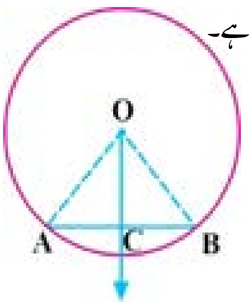
2- کیا آپ کی چار غیر ہم خط لفاظ سے ایک دائرہ کھینچ سکتے ہیں؟

3- ثابت کریں کہ ایک اور صرف ایک دائرہ چوکور کے راسوں سے گذر سکتا ہے۔

4- ثابت کریں کہ ایک اور صرف ایک دائرہ منظم مخمس کے راسوں سے گذر سکتا ہے۔

5- تین گاؤں اس طرح واقع ہیں کہ A کے مشرق میں 6 کلومیٹر کے فاصلے پر B واقع ہے اور B کے شمال میں 8 کلومیٹر کے فاصلے پر C واقع ہے۔ اسکیل کمپس، ڈیوائیڈر کی مدد سے بنانے کے مسجد بعدمقام کا تعین کریں تاکہ ہر گاؤں سے ان کو الگ سی فاصلہ طے کرنا پڑے ہر دیہاتی کو کتنا فاصلہ طے کرنا ہوگا۔

مسئلہ 25.2 دائرے کے مرکز سے کس وتر (جو قطر نہ ہو) کی تنصیف کرنے والا قطعہ خط، وتر پر عمود ہوتا ہے۔



معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے اور وتر $\overline{AB}$ ہے جو O سے نہیں گذرتا ہے۔

یعنی قطر نہیں ہے قطعہ خط $\overline{OC}$ نقطہ پر $\overline{AB}$ کی تصنیف کرتا ہے۔

یعنی $m\overline{AC} = m\overline{BC}$

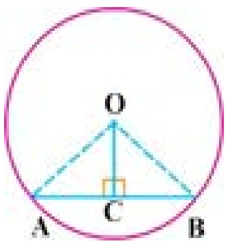
مطلوب: $\overline{OC} \perp \overline{AB}$

عمل: $\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ کھینچیں۔

بیانات	دلائل
$\Delta OCA \leftrightarrow \Delta OCB$ میں	
$m\overline{OA} = m\overline{OB}$	ایک ہی دائرے کے رداس
$m\overline{AC} = m\overline{BC}$	معلوم
$m\overline{OC} = m\overline{OC}$	مشترک
$\Delta OCA \cong \Delta OCB$	ض-ض-ض ≅ ض.ض.ض
یا $m\angle OCA = m\angle OCB$ (i)	متماثل مثلثوں کے تناظرہ زاویے
$m\angle OCA + m\angle OCB = 180°$ (ii)	سپلیمینٹری زاویوں کا موضوعہ
$m\angle OCA = 90° = m\angle OCB$	مساوات (i) اور (ii) سے
اسی طرح $OC \perp AB$	عمود کی تعریف کی روسے

Q.E.D

مسئلہ 25.3: دائرے کے مرکز سے وتر پر عمود اس کی تنصیف کرتا ہے۔



معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے اور اس کا وتر $\overline{AB}$ ہے O سے عمود $\overline{OC}$، $\overline{AB}$ سے C پر ملاتا ہے لہٰذا $\angle OCA$ اور $\angle OCB$ قائمہ زاویے ہیں۔

مطلوب: $\overline{OC}$، C پر $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے۔

عمل: $\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ کھینچیں

ثبوت

بیانات	دلائل
$\Delta AOC \leftrightarrow \Delta BOC$ میں	
$m\angle OCA = 90° = m\angle OCB$	معلوم
$\overline{OA} \cong \overline{OB}$	ایک ہی دائرے کے رداس قطعات
$\overline{OC} \cong \overline{OC}$	مشترک ضلع
لہٰذا $\Delta AOC \cong \Delta BOC$	و-ض ≅ ت-ض
$\therefore$ $\overline{AC} \cong \overline{BC}$	متماثل مثلثوں کے تناظرہ اضلاع
$\therefore$ $\overline{OC}$ وتر $\overline{AB}$ تنصیف کرتا ہے	C، $\overline{AB}$ کا وسطی نقاط ہے

Q. E. D

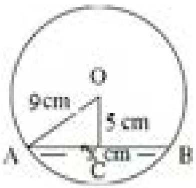
نتیجہ صریح 1: کسی دائرے کے وتر کا عمودی ناصف دائرے کے مرکز سے گذرتا ہے۔

نتیجہ صریح 2: وتر کے وسطی نقطے اور دائرے کے مرکز درمیان کم ترین فاصلہ ہوتا ہے۔

نوٹ: مسئلہ 25.2 اور 25.3 دائرے کے وتر اور قطر خط جو اسے دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے اور مرکز سے گذرتا ہے کے درمیان تعلق کو نمایاں کرتیں ہیں۔

مثال ۱:
وتر کی لمبائی معلوم کریں جس کا دائرے کے مرکز سے عمودی فاصلہ 5 سنٹی میٹر ہے۔ دائرے کا رداس 9 سینٹر میٹر ہے۔

حل:



غور کریں دائرے کا مرکز O اور اس کا وتر $\overline{AB}$ ہے

مرکز O سے عمود وتر AB پر نقطہ C پر ملاتا ہے۔ جیسا کہ متعلقہ شکل میں دکھایا گیا۔

مثلث ΔOCA پر مسئلہ فیثا غورث کی مدد سے۔

$$\left(m\overline{OA}\right)^2=\left(m\overline{OC}\right)^2+\left(m\overline{AC}\right)^2 \quad (\text{یا}) \quad 9^2=5^2+\left(m\overline{AC}\right)^2$$

$$\therefore\ m\overline{AC}=\sqrt{81-25}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}\text{ cm.}$$

آخر کار

$$\text{وتر کی لمبائی} = \overline{AB}=2\left(m\overline{AC}\right) \quad (\text{جیسا کہ } \overline{OC}\text{ ، }\overline{AB} \text{ کو نصف کرتا ہے۔})$$

$$=2\left(2\sqrt{14}\right)=4\sqrt{14}=14.967 \quad \text{سینٹی میٹر}$$

مثال ۲:
اگر ایک دائرے میں وتر کی لمبائی 8 سنٹی میٹر ہے اور دائرے کے مرکز سے وتر کا عمودی فاصلہ 3 سنٹی میٹر ہے۔ دائرے کا رداس کیا ہو گا؟

حل: غور کریں دائرے کا مرکز O اور اس کا وتر $\overline{AB}$ ہے

مرکز O سے وتر AB پر عمود جس کی لمبائی 8 سنٹی میٹر ہے نقطہ C پر ملتا ہے جیسا کہ متصلہ شکل میں دکھایا گیا ہے

مسئلہ فیثا غورث کی مدد سے

$$\left(m\overline{OA}\right)^2=\left(m\overline{OC}\right)^2+\left(m\overline{AC}\right)^2$$

$$\text{یا} \quad x^2=3^2+4^2 \quad (\overline{AB}, \text{OC کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں})$$

$$\therefore\ x^2=25 \ \Rightarrow x=5, \ (\text{منفی علامت کو نظر انداز کرنے سے})$$

$$\text{پس} \qquad \text{رداس} = m\overline{OA}=x=5 \ \text{سنٹی میٹر}$$

مشق 25.2

1- ثابت کریں کہ دائرے کے قطر ایک دوسرے پر تنصیف کرتے ہیں۔

2- ثابت کریں دائرے کے مرکز اور وز کا وسطی نقطے کا متقابلہ زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

3- اگر وتر کی لمبائی 8 سنٹی میٹر اور اس کا مرکز سے عمودی فاصلہ 3 سنٹی میٹر ہے تو محیط اور دائرہ کا رقبہ معلوم کریں۔

4- وتر کی لمبائی معلوم کریں جس دائرے کے مرکز سے عموری فاصلہ K ہے اور رداس r جبکہ

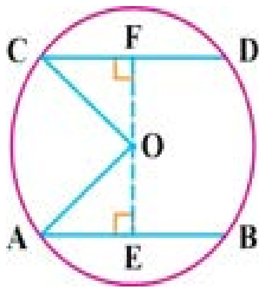
(a) K=4 سنٹی میٹر، r=9 سنٹی میٹر

(b) K=3 سنٹی میٹر، r=6 سنٹی میٹر

5- دائرے کا رداس کیا ہو گا جس میں وتر کی لمبائی 10 سنٹی میٹر اور مرکز سے فاصلہ 3 سنٹی میٹر ہے۔

مسئلہ 25.4:

اگر دائرے کے دو وتر متماثل ہوں تو وہ مرکز سے ہم فاصلہ ہونگے۔



معلوم:

ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے۔اس کے دو متماثل وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ ہیں

جبکہ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ اور $\overline{OF} \perp \overline{CD}$.

مطلوب:

$\overline{OE} \cong \overline{OF}$

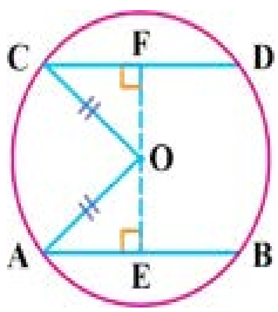
عمل:

$\overline{OA}$ اور $\overline{OC}$ کھینچیں

ثبوت:

بیانات	دلائل
(i) $m\overline{AE} = \frac{1}{2} m\overline{AB}$	عمود $\overline{OE}$ وتر $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے
(ii) $m\overline{CF} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$	عمود $\overline{OF}$ وتر $\overline{CD}$ کی تنصیف کرتا ہے
(iii) $m\overline{AB} = m\overline{CD}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (معلوم)
$\therefore \overline{AE} \cong \overline{CF}$	مساوات (i)،(ii) اور (iii) سے
قائمۃ الزاویہ مثلث میں $\Delta AEO \leftrightarrow \Delta CFO$ میں	
$\overline{OA} \cong \overline{OC}$	ایک ہی دائرے کے رداس قطعات
$\overline{AE} \cong \overline{CF}$	اوپر ثابت ہوا ہے
$\therefore \Delta AEO \cong \Delta CFO$	و-ض ≅ و-ض
$\Rightarrow \overline{OE} \cong \overline{OF}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع

Q.E.D



نتیجہ صریح:

دائرے کے دو متماثل وتر مرکز پر مساوی زاویے بناتے ہیں۔

نوٹ 1:

مسئلہ 25.4 دو متماثل وتر اور ان کے مرکز سے فاصلہ کے درمیان تعلق کی وضاحت کرتی ہے۔

نوٹ 2:

اگر دو وتر متماثل نہیں ہیں تو یہ مرکز ہم فاصلہ نہیں ہوتے۔

مسئلہ 25.5: دائرے کے اگر دو وتر مرکز سے ہم فاصلہ ہوں تو وہ متماثل ہوتے ہیں

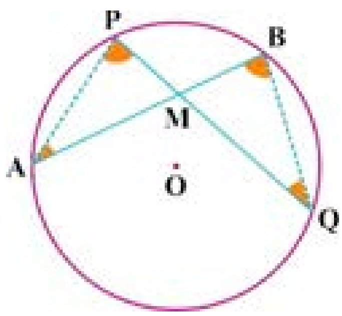
معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے۔ دائرے دو وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CO}$ ہیں جو کہ O سے ہم فاصلہ ہیں یعنی $\overline{OE} \cong \overline{OF}$ اس کا مطلب یہ بھی ہے کی $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ اور $\overline{OF} \perp \overline{CD}$

مطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

عمل: $\overline{OA}$ اور $\overline{OC}$ کھینچیں

بیانات	دلائل
قائمۃ الزاویہ مثلث میں	
$\Delta AEO \leftrightarrow \Delta CFO$ میں	
$\overline{OA} \cong \overline{OC}$	ایک ہی دائرے رداس قطعات
$\because$ $\overline{OE} \cong \overline{OF}$	(معلوم)
$\therefore$ $\Delta AEO \cong \Delta CFO$	و-ض $\cong$ و-ض
(i) $m\overline{AE} = m\overline{CF}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اصلاع
(ii) $m\overline{AE} = \frac{1}{2} m\overline{AB}$	عمور $\overline{OE}$ وتر $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے
(iii) $m\overline{CF} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$	عمور $\overline{OF}$ وتر $\overline{CO}$ کی تنصیف کرتا ہے
$\because$ $\frac{1}{2} m\overline{AB} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$	مساوات (i)، (ii) اور (iii) سے
$\therefore$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	

Q.E.D



نتیجہ صریح: اگر دو وتر مرکز کے۔ مقابل دو مساوی زاوے بنائے تو وہ متماثل ہوتے ہیں۔

نوٹ 1: مسئلہ 25.4 کا عکس 25.5 ہے

نوٹ 2: اگر دو وتر مرکز سے ہم فاصلہ نہیں ہیں تو وہ متماثل نہیں ہونگے۔

مثال 1: ثابت کریں کہ اگر ایک دائرے کے دو وتر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو ان کے قطعات کی لمبائیوں کی حاصل ضرب برابر ہوگی۔

معلوم: ایک دائرے کے وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{PQ}$ جس کا مرکز O ایک دوسرے کو M پر قطع کرتے ہیں

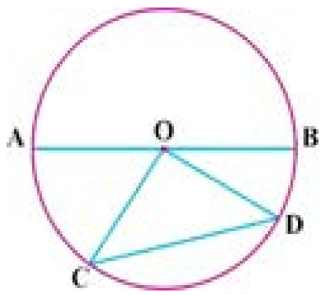
مطلوب: $(m\overline{AM}) \times (m\overline{MB}) = (m\overline{PM}) \times (m\overline{QM})$

عمل: $\overline{PA}$ اور $\overline{BQ}$ کھینچیں

ثبوت:

بیانات		دلائل
(i)	$\angle PAM \cong \angle BQM$	ایک ہی قوس PB کے زاویے
(ii)	$\angle APM \cong \angle QBM$	ایک ہی قوس AQ کے زاویے
	$\Delta APM \sim \Delta QBM$	مساوات (i) اور (ii) سے
(iii)	$\dfrac{m\overline{AM}}{m\overline{QM}} = \dfrac{m\overline{PM}}{m\overline{BM}}$	متشابہ مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
	$\left(m\overline{AM}\right)\times\left(m\overline{BM}\right)=\left(m\overline{PM}\right)\times\left(m\overline{QM}\right)$	مساوات (iii) میں ضرب چلیپائی

Q.E.D



مثال 2: ثابت کریں دائرے میں سب سے بڑا وتر قطر ہوتا ہے۔

معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے اور اس کا قطر $\overline{AB}$ ہے۔ $\overline{AB}$ کے علاوہ دائرے میں ایک دوسرا وتر $\overline{CD}$ ہے

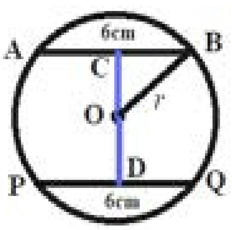
مطلوب: $m\overline{AB} > m\overline{CD}$

عمل: ΔOCD مثلث کو مکمل کرنے کے لیئے $\overline{OC}$ اور $\overline{OD}$ کھنچیں

ثبوت:

بیانات		دلائل
	ΔOCD, میں	
(i)	$m\overline{OC}+m\overline{OD} > m\overline{CD}$	مثلث کے دو اضلاع کا مجموعہ تیرے ضلع سے بڑا
(ii)	$m\overline{OC}+m\overline{OD} = m\overline{AB}$	$\overline{OC}$ اور $\overline{OD}$ رداس قطعات ہیں اور قطر کی تعریف کی روے
(iii)	$m\overline{AB} > m\overline{CD}$	مساوت (i) اور (ii) سے
(iv)	وتر AB کی لمبائی جو کہ قطر بھی ہے۔ دائرے کے کسی بھی دوسرے وتر CD سے بڑا ہے۔	مساوات (iii) اور وتر کے علاوہ کسی بھی وتر CD کے لیے

Q. E. D



مثال 3: ایک دائرے کے دو متماثل وتروں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں ہر وتر کی لمبائی 6 سنٹی میٹر ہے۔ دائرہ محیط 10π سنٹی میٹر ہے۔

حل: دائرے کے دو متماثل وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{PQ}$ جن لمبائیاں 6 سنٹی میٹر ہیں دائرے کا مرکز O اور رداس r جیسا کہ فیصلہ مشکل دکھایا گیا ہے

ہمیں $m\overline{CD}$ کی ضرورت ہے۔

دائرے کارداس: $m\overline{OB} = r = \frac{C}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5$ سنٹی میٹر

ΔOCB میں مسئلہ فیثاغورث کے استعمال سے

$$\left(m\overline{OB}\right)^2 = \left(m\overline{OC}\right)^2 + \left(m\overline{CB}\right)^2$$

$$5^2 = \left(m\overline{OC}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}m\overline{AB}\right)^2$$ (مرکز O سے عمود $\overline{OC}$ وتر $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے۔)

$5^2 = \left(m\overline{OC}\right)^2 + 3^2 \quad \Rightarrow m\overline{OC} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$ سنٹی میٹر

کیونکہ دو متماثل وتر دائرے کے مرکز سے ہم فاصلہ ہیں لہٰذا

$$m\overline{OD} = m\overline{OC} = 4$$

آخرکار: $m\overline{CD} = m\overline{OC} + m\overline{OD} = 4 + 4 = 8\text{cm}$

مشق 25.3

1- ثابت کریں کہ دو متماثل دائروں کے دو متماثل وتر مرکز سے ہم فاصلہ ہوتے ہیں

2- ثابت کریں کہ متماثل دائروں کے دو وتر مرکز سے مساوی فاصلے پر ہوں تو متماثل ہوتے ہیں۔

3- دائرے میں دو متماثل وتروں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔ وتر کی لمبائی α اور دائرے کا رداس r ہے۔
α اور r کی قیمتیں مندرجہ ذیل میں دی گئی ہیں۔

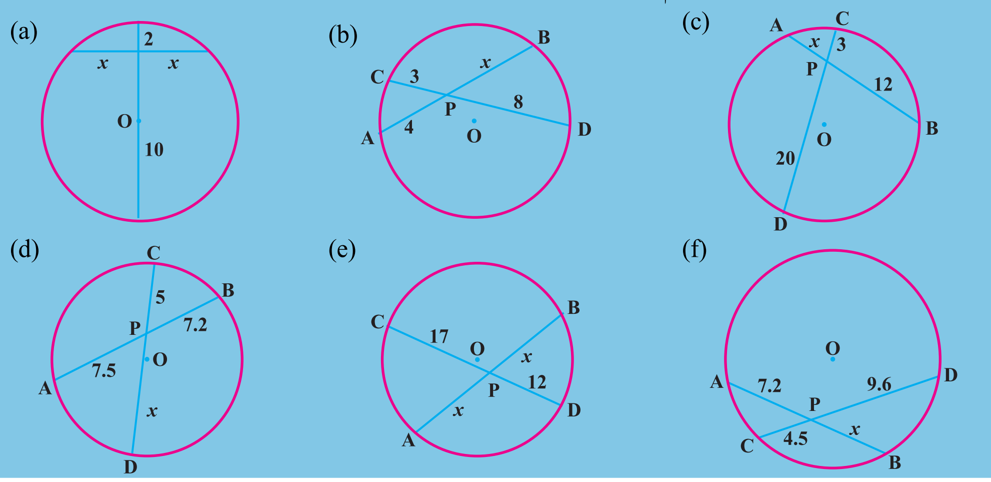
(a). $\alpha = 7\text{cm}$ and $r = 6$ سنٹی میٹر (b). $\alpha = 5\text{cm}$ and $r = 4$ سنٹی میٹر

(c). $\alpha = 2\text{cm}$ and $r = 4$ سنٹی میٹر (d). $\alpha = 4\text{cm}$ and $r = 9$ سنٹی میٹر

4- ایک دائرے میں دو متماثل وتروں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔
وتروں کی لمبائیاں α اور β ہیں اور دائرے کا رداس r ہے۔ α ، β اور r کی قیمتیں مندرجہ ذیل میں دی گئی ہیں

a. $\alpha = 6$ سنٹی میٹر , $\beta = 8$ سنٹی میٹر , $r = 5$ سنٹی میٹر b. $\alpha = 3$ سنٹی میٹر , $\beta = 6$ سنٹی میٹر , $r = 14$ سنٹی میٹر

5- اگر ایک دائرے میں وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CO}$ نقطہ P پر قطع کرتے ہیں دائرے کا مرکز O ہے۔
مندرجہ ذیل میں x کی قیمت معلوم کریں۔



اعادہ مشق 25

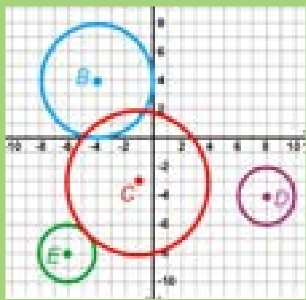
درست جواب پر ☑ کا نشان لگائیں

(i) تمام دائرے ہمیشہ............... ہوتے ہیں۔

(a) مفشابہ (b) متماثل

(c) مماس (d) ان میں کوئی نہیں

(ii) مندرجہ ذیل شکل میں دائرے جن کے مرکز D اور E .... ہیں۔



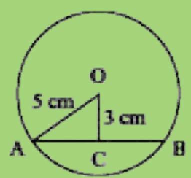
(a) متماثل

(b) مفشابہ

(c) (a) اور (b) دونوں

(d) ان میں کوئی نہیں

(iii) دی گئی تصویر میں، وتر $\overline{AB}$ کی لمبائی................. ہے۔



(a) 4 سنٹی میٹر (b) 6 سنٹی میٹر (c) 8 سنٹی میٹر (d) 15 سنٹی میٹر

(iv) تین.............. نقاط میں سے ایک اور حرف ایک دائرہ گذر سکتا ہے۔

(a) ہم خط (b) غیر سم خط (c) غیر مشترک (d) ان میں کوئی نہیں

(v) یہاں کا مفروضہ: اگر دائرے کے دو وتر متماثل ہوں تو وہ مرکز سے ہم فاصلے ہوتے ہیں۔

(a) دائرے کے دو وتر مرکز سے ہم فاصلہ ہیں

(b) دائرے کے دو وتر متماثل ہیں۔

(c) ایک دائرے کے دو وتر ہیں۔

(d) دائرے کا مرکز وتروں سے ہم فاصلہ ہیں۔

(vi) بیان کا مفروضہ "تین غیر ہم نقاط سے ایک اور صرف ایک دائرے گذر سکتا ہے۔"

(a) تینوں نقاط غیر ہم خط ہیں۔

(b) ایک اور حرف ایک دائرہ تین نقط سے گذرتا ہے

(c) تین نقاط سے دو دائرے گذرتے ہیں

(vii) دائرے کا وہ حصہ جو ایک وتر اور قوس سے گھیرا ہوتا ہے دائرے کا قطعہ کہلاتا ہے ان کو مزید کبیرہ اور صغیرہ قطعہ میں تقسیم کرتے ہیں۔

(a) تمام دائرے آپس میں متشابے ہوتے ہیں۔

(b) دو دائرے متماثل ہوں تو اگر ان کے رداس مساوی ہو۔

(c) دائرے جن کا مرکز ایک ہی ہو ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں۔

(d) تین غیر ہم نقاط سے ایک اور صرف ایک دائرہ گذر سکتاہے۔

(viii) ایک خط جو دائرے کے مرکز سے کھینچا جائے اور وتر کی تنصیف کرے (جو قطر نہ ہو) وہ وتر پر عمود ہوتا ہے۔

(a) دائرے کے مرکز سے وتر پر عمود اس کی تنصیف کرتا ہے۔

(b) اگر دائرے کو وہ وتر متماثل ہوں تو وہ مرکز سے ہم فاصلہ ہونگے۔

(c) دائرے کے وتر جو مرکز سے ہم فاصلہ ہوں متماثل ہوتے ہیں۔

(d) تینوں نقاط ہم خط ہیں۔

(ix) دائرہ.............. منحنی خط کی ایک مثال ہے۔

(a) سادہ اور بند (b) سادہ اور کھلی (c) غیر سادہ اور بند (d) غیر سادہ اور کھلی

خلاصہ

☆ دائرہ ایک سادہ بند منحنی خط ہے۔

☆ دائرے کے تمام نقاط ایک مقررہ نقطے کے ہم فاصلہ ہوتے ہیں۔ مقررہ نقطہ مرکز ہے اور مستقل فاصلہ دائرے کا رداس ہوتا ہے۔

☆ دائرے میں رداس قطعہ دائرے کی مرکز سے دائرے کے کسی بھی نقطے تک قطعہ خط ہوتا ہے۔

☆ وتر ایک خط ہے جو دائرے کی دو نقاط کو ملاتا ہے۔ وتر جو دائرے کے مرکز سے گذرتا ہے قطر کہلاتا ہے یا دائرے کا مرکزی وتر۔

☆ رداس r کے دائرے کے لیئے اس کا قطر محیط اور دائروی رقبہ بالترتیب $2r$، $2\pi r$ اور πr^2 ہوتا ہے۔

☆ دائرے کے محیط کا حصہ قوی کہلاتا ہے ان کو مزید قوس صغیرہ اور قوس کبیرہ میں درجہ بندی کئی گئی ہے۔

☆ قطاع دائرے کا وہ صلہ جو کس قومی اور دو رداسوں سے گھرا ہوتا ہے ان کی مزید دو درجے کبیرہ اور صغیرہ قطاع کرسکتے ہیں۔

یونٹ 26

دائرے کے مماس

TANGENTS OF A CIRCLE

طلباء کے آموزشی حاصلات (SLOs)

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- مندرجہ ذیل اثباتی مسائل اور ان کے نتائج صریح کو سمجھ اور متعلقہ سوالات حل کرنے کے لیئے ان کو استعمال کر سکیں۔
  - اگر کسی دائرے کے رداسی قطعہ کے بیرونی سرے پر عمود کھینچا جائے تو وہ اس نقطے پر دائرے کا مماس ہو گا۔
  - ایک دائرے پر مماس اور رداسی قطعہ جو نقط تماس کو مرکز سے ملائے ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔
  - دائرے کے باہر ایک نقطے سے کھینچے جانے والے دو مماس لمبائی میں مساوی ہوتے ہیں۔
  - اگر دائرے بیرونی یا اندرونی طور پر ایک دوسرے چھویں تو ان کے مراکز درمیانی فاصلہ بالترتیب ان کے رداسوں کے مجموعے یا فرق کے برابر ہوتا ہے۔

تعارف (Introduction)

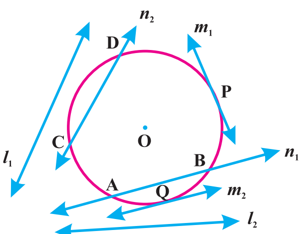
دائرے کے مماس سے تعلق مسئلے اور ثبوت پر یہاں بحث کی گئی ہے۔ مماس کا تصور ریاضی کی شاخ کیلکولس (Calculus) میں ڈبریوبٹو کی وضاحت کرنے کے لیئے بھی اہم ہے۔ ایک قطعہ خط دائرے کو قاطع کر اور نہیں بھی کر سکتا ہے۔

اگر ایک خط دائرے کو صرف ایک نقطے پر چھوتی ہے تو یہ دائرے کا مماس (Tangent) ہوتا ہے دائرے کو مماس کے درمیان نقطہ مشترکہ یا نقطہ مماس (Point of tangency or point of contract) ہوتا ہے ایک خط جو دائرے کے دو نقاط کو قطع کرے دائرے کا قاطع ہوتا ہے۔ قاطع اور دائرے کے درمیان دو نقاط تماس ہوتے ہیں۔

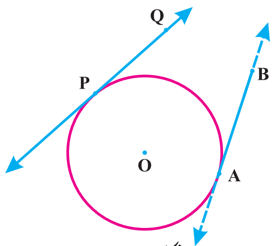
شکل (I) میں خط l_1 اور l_2 دائرے کو نہیں چھوتے ہیں۔ خط m_1 اور m_2 بالترتیب P اور Q پر مماس ہیں۔

خط n_1 اور n_2 بالترتیب نقاط A، B، C اور D پر دائرے قاطع ہیں۔

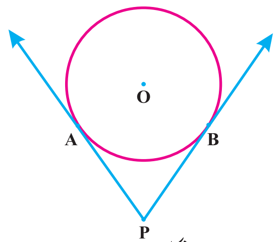
ایک قطعہ خط نقطہ مماس سے مماس کے کسی دوسرے نقطے تک قطعہ مماس ہوتا ہے شکل (ii) میں $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{AB}$ دائرے کے مماس ہیں۔ جبکہ $\overline{PQ}$ اور $\overline{AB}$ مماسی قطعات ہیں۔ $m\overline{AB}$ قطع مماس $\overline{AB}$ کی لمبائی ہے۔ دائرے سے باہر واقع نقطہ P سے دو مماس اور کھینچے جاسکتے ہیں۔ جیسا کہ شکل (ii) $\overrightarrow{PA}$ اور $\overrightarrow{PB}$ کھینچے جاسکتے ہیں جیسا کہ شکل (iii) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (i)

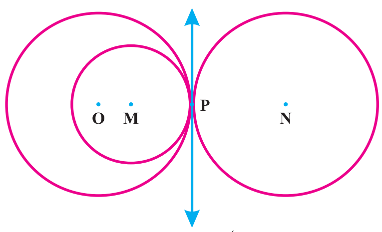


شکل (ii)

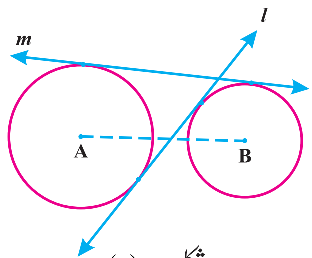


شکل (iii)

دو دائرے ایک دوسرے کو مشترکہ نقطہ مماس پر چھوتے ہیں نقطہ P دائروں کا مشترکہ نقطہ مماس ہے شکل (iv) میں دائروں کے مرکز O، M اور N ہیں۔ دائرے جن کے مرکز O اور M ایک دوسرے کو اندرونی طور پر چھوتے ہیں۔ جبکہ دائرے جن کے مرکز O اور N ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں۔ دو دائرے ایک دوسرے کو نہیں چھوتے ہوں ان کے مشترک مماس ہوسکتے ہیں لیکن نقاط تماس مختلف ہونگے دو ایک دوسرے کو چھونے والے دائروں کا مشترک مماس ایک اندرونی (یا معکوس) مشترک مماس ہے اگر وہ دائروں کے مراکز کو ملانے والے قطعہ کو قطع کرتا ہو دوسری صورت میں وہ بیرونی (راست) مشترک مماس کہلائے گا۔ شکل (v) میں، خط m ایک بیرونی (راست) مشترک مماس ہے جبکہ خط l ایک اندرونی (یا معکوس) مشترک مماس ہے۔



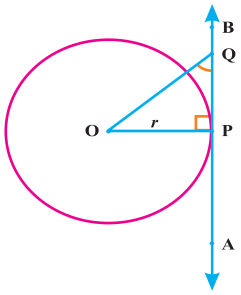
شکل (iv)



شکل (v)

26.1 دائرے کی مماس

مسئلہ 26.1 اگر کسی دائرے کے رداسی قطعہ کے بیرونی سرے پر عمود کھینچا جائے تو وہ اس نقطے پر دائرے کا مماس ہوگا۔



معلوم: ایک دائرے جس کا مرکز O اور رداس r ہے۔ رداسی قطع $\overline{OP}$ پر عمود $\overleftrightarrow{AB}$ کھینچا گیا ہے
یعنی $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OP}$ اُس کے بیرونی نقط P پر ۔

مطلوب : $\overleftrightarrow{AB}$ دیئے گئے دائرے کے صرف نقط P پر مماس

حل: $\overline{OQ}$ کھینچے جبکہ Q پر P کے علاوہ کوئی بیرونی نقطہ ہے۔

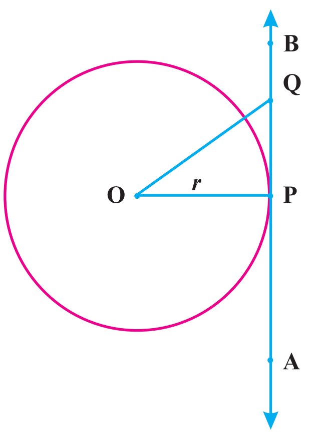
ثبوت:

بیانات	دلائل
قائمہ الزاویہ مثلث ΔOPQ $m\angle OPQ = 90^\circ$	نقطہ P پر $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OP}$ (معلوم)
لیکن $m\angle OQP < 90^\circ$	مثلث میں سوائے قائمہ زاوے دوسرے زاوے حادہ ہیں
$m\overline{OQ} > m\overline{OP}$ پس Q دائرے کے باہر واقع ہے	بڑے زاویئے کا مخالف زاویہ بڑا ہوتا $m\overline{OQ} > r$
$\overleftrightarrow{AB}$ پر تمام نقاط سوائے P کے دائرے کے باہر واقع ہیں۔	Q نقطہ P کے علاوہ کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ (عمل)
دائرے پر نقطہ مماس $\overleftrightarrow{AB}$ پر P ہے لہذا $\overleftrightarrow{AB}$ نقطہ P پر دائرے کا مماس ہے۔	مماس کے تعریف کے رو سے

Q.E.D.

مسئلہ 26.2

ایک دائرے پر مماس اور رداسی قطعہ جو نقطہ مماس کو مرکز سے ملائے ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں



معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O رداس r اور رداسی قطعہ $\overline{OP}$ نقطہ P پر ایک مماس ہے۔

مطلوب: $\overline{OP} \perp \overleftrightarrow{AB}$

حل: $\overline{OQ}$ کھینچے، جبکہ Q نقطہ P کے علاوہ دوسرا نقطہ ہے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
Q دائرے کے باہر واقع ہے	Q نقطہ P کے علاوہ $\overleftrightarrow{AB}$ پر دوسرا نقطہ ہے۔
$m\overline{OQ} > m\overline{OP} = r$ ... (i)	$\overline{OP}$ رداسی قطعہ ہے۔
P کے علاوہ $\overleftrightarrow{AB}$ پر تمام نقاط کا مرکز سے فاصلہ r سے زیادہ ہے لہٰذا P کے علاوہ دائرے سے باہر واقع ہیں۔	$m\overline{OP} = r$ اور P کے علاوہ $\overleftrightarrow{AB}$ پر Q کوئی دوسرا نقطہ ہے (عمل)۔
$\overleftrightarrow{AB}$ پر کسی نقطے اور O چھوٹا قطع خط $\overline{OP}$ ہے	(I) سے P کے علاوہ $\overleftrightarrow{AB}$ پر کوئی نقطہ پر کوئی نقطہ Q۔
لہٰذا $m\angle OPQ = 90^\circ$ $\overline{OP} \perp \overleftrightarrow{AB}$	دوسرے تمام حادہ زاویہ ہیں۔

Q.E.D.

نوٹ 1 : مسئلہ 26.1 اور 26.2 دائرے کے مماس اور متناظرہ نقطِ مماس پر رداسی قطع کے تعلق کو نمایاں کرتا ہے۔

نوٹ 2 : مسئلہ 26.1 ، مسئلہ 26.2 کا عکس ہے اور الٹ

نتیجہ صریح 1: دائرے کے مماس پر نقطِ مماس پر جو خط عمود اکھینچا جائے دائرے کے مرکز سے گزرتا ہے۔

نتیجہ صریح 2 : دائرے کے مرکز نقطِ مماس اور مماس پر کسی دوسرے نقط سے ملنے والا مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہے

نتیجہ صریح 3 : دائرے پر دیئے گئے کسی بھی ایک نقطے سے ایک اور صرف ایک مماس کھینچا جا سکتا ہے۔

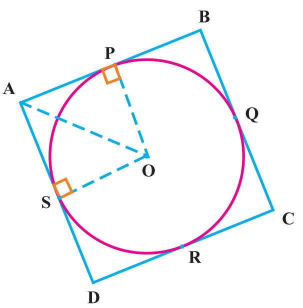
مثال 1 : ثابت کریں دائرے کا محاصر متوازی الاصلاع ایک معین ہے

معلوم : ABCD $\|^m$ دائرے کا محاصر ہے۔ اس طرح $m\overline{AB} = m\overline{CD}$ اور $m\overline{AD} = m\overline{BC}$

مطلوب: $ABCD$ $\|^m$ ایک معین ہے یعنی $m\overline{AB} = m\overline{BC} = m\overline{CD} = m\overline{AD}$

عمل: $\overline{AB}$،$\overline{BC}$،$\overline{CD}$ اور $\overline{AD}$ بالترتیب P Q R اور S پر مماس ہیں.

$\overline{OS}$،$\overline{OA}$ اور $\overline{OP}$ کھینچیں۔

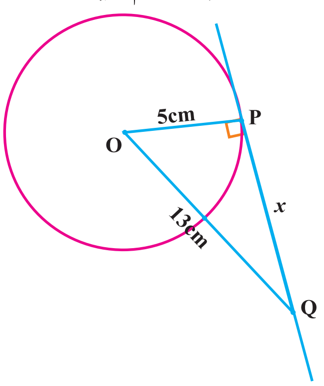


ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta OSA \leftrightarrow OPA$ میں	
$\overline{OS} \cong \overline{OP}$	ایک دائرے کے رداسی قطعات
$m\angle OSA = 90^\circ = m\angle OPA$	رداسی قطعہ پر مماس عمود
$\overline{OA} \cong \overline{OA}$	شلث کا مشترکہ ضلع
$\Rightarrow \quad \Delta OSA \cong \Delta OPA$	و–ض ≅ و–ض
اور $m\overline{AS} = m\overline{AP} \quad \cdots (i)$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
اس ہی طرح $\Delta OPB \cong \Delta OQB$	اس ہی عمل سے
$m\overline{BQ} = m\overline{BP} \quad \cdots (ii)$	متماثل مثلثوں کے تناظرہ اضلاع اس ہی عمل سے
$\Delta OQC \cong \Delta ORC$	
$m\overline{QC} = m\overline{RC} \quad \cdots (iii)$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
$\Delta ORD \cong \Delta OSD$	اس ہی عمل سی
$m\overline{DS} = m\overline{DR} \quad \cdots (iv)$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
اب $m\overline{AS} + m\overline{BQ} + m\overline{QC} + m\overline{DS}$ $= m\overline{AP} + m\overline{BP} + m\overline{RC} + m\overline{DR}$	(I) سے (iv) جمع کرنے سے
یا $\left(m\overline{AS} + m\overline{DS}\right) + \left(m\overline{BQ} + m\overline{QC}\right)$ $= \left(m\overline{AP} + m\overline{BP}\right) + \left(m\overline{RC} + m\overline{DR}\right)$	دوبارہ ترتیب دینا
یا $m\overline{AD} + m\overline{BC} = m\overline{AB} + m\overline{CD} \quad (v)$	شکل سے
$2m\overline{BC} = 2m\overline{AB} \Rightarrow m\overline{AB} = m\overline{BC} \quad (vi)$	متوازی الاضلاع کی رو سے (معلوم)
$m\overline{AB} = m\overline{BC} = m\overline{CD} = m\overline{AD}$	(vi) سے اور معلوم
لہذا ABCD $\parallel^m$ ایک معین ہے	

Q.E.D.

مثال 2: 5 سنٹی میٹر رداسی کے دائرے کے مرکز سے 13 سنٹی میٹر دور نقطے سے دائرے کے مماس کی لمبائی معلوم کریں



حل: فرض کریں دائرے کا مرکز O ہے نقط مماس P ہے۔ فرض کریں مرکز سے 13 سنٹی میٹر کے فاصلہ پر مماس کا نقط O ہے۔ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

شکل سے ہمیں ملا

$m\overline{OP} = r = 5cm$ ، $m\overline{OQ} = 13cm$ ، $m\overline{PQ} = x = ?$

مسئلہ فیثا غورث کے استعمال سے

$$\left(m\overline{OQ}\right)^2 = \left(m\overline{OP}\right)^2 + \left(m\overline{PQ}\right)^2$$

$$(13)^2 = (5)^2 + (x)^2$$

$$169 = 25 + x^2$$

یا

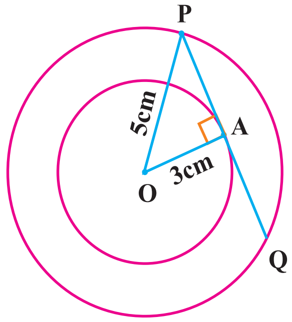
$$x^2 = 169 - 25 = 144$$

$$m\overline{PQ} = x = \sqrt{144} = 12cm.$$

مثال 3: دو ہم مرکز کے رداس بالترتیب 5 سنٹی میٹر اور 3 سنٹی میٹر ہیں۔ بڑے دائرے پر نقطے سے چھوٹے دائرے تک مماس کی لمبائی معلوم کریں۔ بڑے دائرے وتر کی لمبائی بھی معلوم کریں جو چھوٹے دائرے سے چھوتا ہے۔

حل: دو ہم مرکز دیئے گئے رداس کے دائرے جن کا مشترک مرکز O ہے شکل میں دکھائے گئے ہیں $m\overline{OA} = 3\text{cm}$ اور $m\overline{OP} = 5\text{cm}$

ہمیں سب سے پہلے $m\overline{AP}$ اور $m\overline{AQ}$ معلوم کرنا ہے۔ یعنی چھوٹے دائرے نقطہ P سے اور بڑے دائرے نقطہ Q تک قطع مماس کی لمبائی مسئلہ فیثا غورث کی مدد سے ہمارے پاس ہے۔



$$\left(m\overline{OP}\right)^2 = \left(m\overline{OA}\right)^2 + \left(m\overline{AP}\right)^2$$

$$25 = 9 + \left(m\overline{AP}\right)^2$$

یا $\Rightarrow \quad \left(m\overline{AP}\right)^2 = 16$

یا $m\overline{AP} = 4\text{cm}$

لیکن رداس قطعہ $\overline{OA}$ وتر $\overline{PQ}$ کی تنصیف کرتا ہے

تو $m\overline{AP} = m\overline{AQ}$

$\Rightarrow \quad m\overline{AQ} = 4cm$

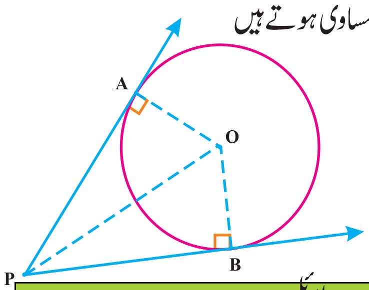
آخر کار بڑے دائرے $\overline{PQ}$ کے وتر کی لمبائی چاہیے جو چھوٹے دائرے کو چھوتا ہے۔ جو یہ ہے

$$m\overline{PQ} = m\overline{AP} + m\overline{AQ} = 8cm$$

مشق 26.1

1. ثابت کریں کہ دائرے کا محاصر مثلث مساوی الاضلاع مثلث ہوتا ہے۔
2. ثابت کریں کہ دائرے کا محاصر مستطیل ضرور مربع ہوتا ہے۔
3. دو ہم مرکز دائرے رداس بالترتیب 10 سنٹی میٹر اور 5 سنٹی میٹر ہیں۔ قطعہ مماس کی لمبائی معلوم کریں جو چھوٹے دائرے سے بیرونی دائرے کے ایک نقطے کو چھوتا ہے۔ بیرونی دائرے کے وتر کی لمبائی بھی معلوم کریں جو اندرونی دائرے کو چھوتا ہے۔
4. قطعہ مماس کی لمبائی، 5 سنٹی میٹر کے فاصلہ پر ایک نقطے سے 4 سنٹی میٹر ہے دائرے کا قطر، محیط اور رقبہ معلوم کریں۔
5. 7 سنٹی میٹر رداس کے دائرے کے قطعہ مماس کی لمبائی معلوم کریں جس کا دائرے کے مرکز سے ایک نقطہ تک فاصلہ 25 سنٹی میٹر ہے۔
6. 3 سنٹی میٹر رداس کے دائرے کے مرکز سے کتنی دور 10 سنٹی میٹر لمبائی کا قطعہ مماس کھینچا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 26.3: دائرے کے باہر ایک نقطے سے کھینچے جانے والے دو مماس لمبائی میں مساوی ہوتے ہیں



معلوم: دائرے کے باہر ایک نقطہ P سے دائرے کے نقاط A اور B
پر دو مماس $\overrightarrow{PA}$ اور $\overrightarrow{PB}$ ہیں۔

مطلوب: $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

عمل: $\overline{OA}$، $\overline{OB}$ اور $\overline{OP}$ کھینچیے

ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\angle OAP = 90^\circ$ اور $\overline{OA} \perp \overrightarrow{PA}$	مماس، رداسی قطعہ پر عمود ہے۔
اس طرح $m\angle OBP = 90^\circ$ ، $\overline{OB} \perp \overrightarrow{PB}$	مماس، رداسی قطعہ پر عمود ہے
قائمۃ الزاویہ مثلث میں $\Delta OAP \leftrightarrow \Delta OBP$	
$\overline{OP} \cong \overline{OP}$	مشترک ضلع
$\overline{OA} \cong \overline{OB}$	ایک ہی دائرے کے رداسی قطعات
$\therefore \quad \Delta OAP \cong \Delta OBP$	و-ض $\cong$ و-ض
$\therefore \quad \overline{PA} \cong \overline{PB}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع

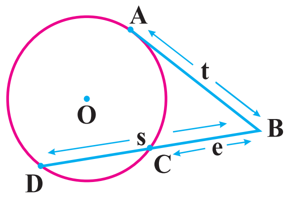
Q.E.D.

نوٹ 1: مسئلہ 26.3 ظاہر کرتا ہے کہ دائرے کے باہر کسی نقطے پر ایک دوسرے کو قطع کرنے والے دو مماس لمبائی میں مساوی ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح 1: بیرونی نقطہ سے ایک دائرے پر کھینچے جانے والے دو مماس مرکز پر متماثل زاویے بناتے ہیں

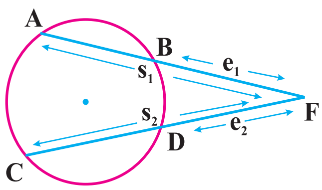
نتیجہ صریح 2: دائرے کے دو متوازی مماس کی بھی ایک بیرونی نقطہ پر ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے ہیں۔

نوٹ 2: اگر دائرے کا مماس اور قاطع باہر قطع کرتے ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے تو قطعہ مماس کی لمبائی
لمبائی کا مربع برابر ہوتا ہے قاطع کی لمبائی اور بیرونی حصے کی حاصل ضرب کے
یعنی



$$\left(m\overline{AB}\right)^2 = \left(m\overline{DB}\right) \cdot \left(m\overline{BC}\right) \quad \text{یا} \quad t^2 = s \cdot e$$

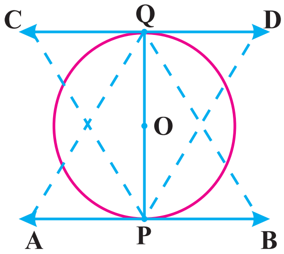
نوٹ 3: اگر دو قاطع دائرے کے باہر قطع کرتے ہیں جیسا کہ متعلقہ شکل میں دکھایا ہے تو



$$\left(m\overline{AF}\right) \times \left(m\overline{BF}\right) = \left(m\overline{CF}\right) \times \left(m\overline{DF}\right) \quad \text{یا} \quad s_1 e_1 = s_2 e_2$$

مثال 1:

ثابت کریں کہ دائرے کے قطر کے سروں پر مماس کھینچے جائیں تو متوازی ہوتے ہیں۔



معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے۔ قطر کے سروں P اور Q پر بالترتیب $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ مماس ہیں

مطلوب: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

عمل: $\overline{CP}$، $\overline{DP}$، $\overline{AQ}$ اور $\overline{BQ}$ کھینچیں

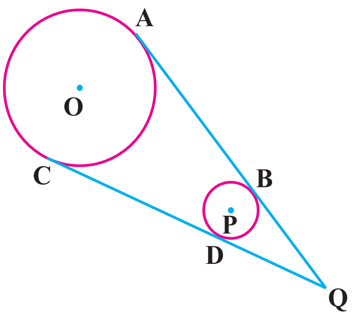
ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\angle APO = 90^\circ = m\angle BPO$	$\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OP}$
$m\angle CQO = 90^\circ = m\angle DQO$	$\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{OQ}$
(i) $m\angle CPQ = m\angle BQP$	متبادلہ زاویے
اور (ii) $m\angle AQP = m\angle QPD$	متبادلہ زاویے
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	ایک ہی متبادلہ اندرونی زاویے مساوات (i) اور (ii) سے

Q.E.D

مثال 2:

ثابت کریں کہ دو دائرے کے راست مشترکہ مماس لمبائی میں مساوی ہوتے ہیں



معلوم: دائروں کے راست مشترکہ مماس $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ ہیں۔ دائروں کے مرکز O اور P ہیں۔

مطلوب: $m\overline{AB} = m\overline{CD}$

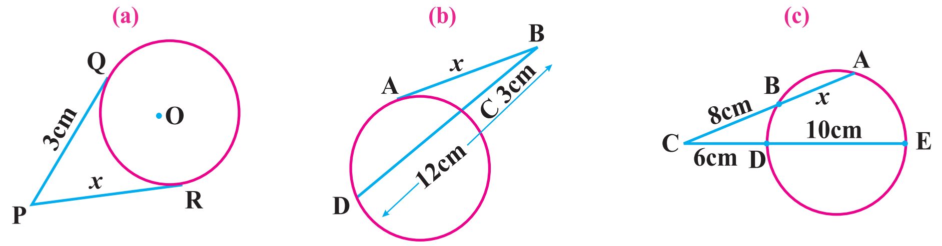
عمل: $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ بڑھائیں تاکہ وہ ایک دوسرے کو نقطہ Q پر قطع کریں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\overline{AQ} = m\overline{CQ}$ (i)	O سے باہر نقطہ Q سے مماس کھینچیں
$m\overline{BQ} = m\overline{DQ}$ (ii)	P سے باہر نقطہ Q سے مماس کھینچیں
$m\overline{AQ} - m\overline{BQ} = m\overline{CQ} - m\overline{DQ}$	(I) سے (ii) کو تفریق کرنے سے
$\therefore$ $m\overline{AB} = m\overline{CD}$	شکل کے استعمال سے

Q.E.D.

مثال 3: مندرجہ ذیل اشکال میں نامعلوم x کی لمبائی معلوم کریں



حل:

(a). مماس $\overline{PQ}$ اور $\overline{PR}$ دائرے کے باہر نقطہ P پر ملتے ہیں لہذا ان کی لمبائی مساوی ہونی چاہیے

یعنی $m\overline{PQ} = m\overline{PR}$ اس لیئے $x = 3\text{cm}$

(b). مماس دائرے کے باہر نقطہ B پر $\overline{AB}$ قاطع $\overrightarrow{DC}$ سے ملتا ہے لہذا ہمارے پاس ہے۔

$$\left(m\overline{AB}\right)^2 = \left(m\overline{DB}\right)\cdot\left(m\overline{BC}\right) \quad \text{یا} \quad x^2 = 12\times 3 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6cm.$$

(c). دائرے کے دو قاطع $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{ED}$ دائرے کے باہر نقطہ C پر قطع کرتے ہیں لہذا ہمارے پاس ہے۔

$$\left(m\overline{AC}\right)\times\left(m\overline{BC}\right) = \left(m\overline{EC}\right)\times\left(m\overline{CD}\right) \quad \text{یا} \quad (x+8)\times 8 = (10+6)\times 6 \Rightarrow 8x+64 = 96$$

آخر کار $8x = 96-64 \Rightarrow 8x = 32 \Rightarrow x = 4\text{cm}$

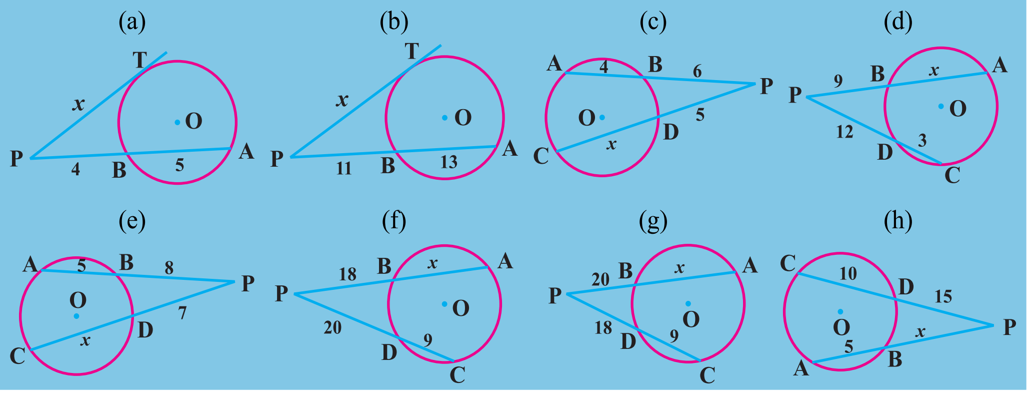
مشق 26.2

1. ثابت کریں کہ ایک دائرے میں وتر کے سروں پر کھینچے گئے مماس وتر کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں۔

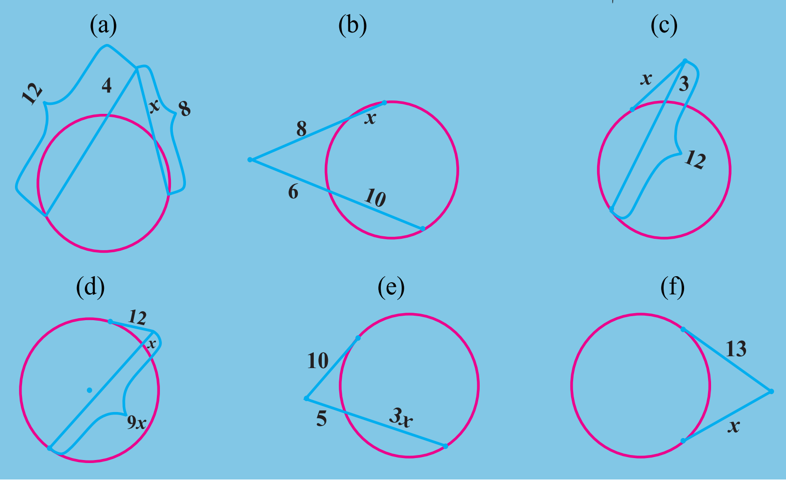
2. ثابت کریں کہ اگر دائرے میں دو مماس متوازی ہیں تو نقاط مماس دائرے کے قطر کے سرے ہونگے۔

3. ثابت کریں کہ اگر دائرے کے دو مماس متوازی نہیں ہیں نقاط مماس دائرے کے وتر کے سرے ہونگے۔

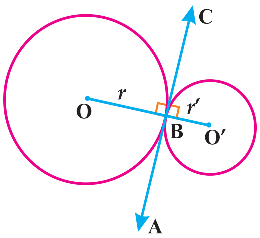
4. مندرجہ ذیل میں نامعلوم x معلوم کریں



5. مندرجہ ذیل میں نامعلوم x معلوم کریں



مسئلہ 26.4 صورت (A)



اگر دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوئیں تو ان کے مراکز کا درمیانی فاصلہ ان کے رداسوں کی مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

معلوم: دو دائرے جن کے مراکز O اور O′ اور رداس بالترتیب r اور r' ہیں۔ دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر نقطہ B پر چھوتے ہیں۔

مطلوب: $m\overline{OO'} = r + r'$

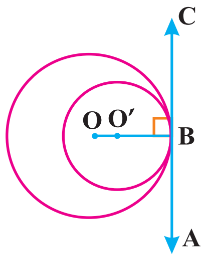
حل: دونوں دائروں پر نقطہ B سے مشترک مماس کھینچیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ لہٰذا $(i) \cdots m\angle OBC = 90^\circ$	مماس رادسی قطعہ پر عمود ہے
$\overline{O'B} \perp \overleftrightarrow{AC}$ لہٰذا $(ii) \cdots m\angle O'BC = 90^\circ$	مماس، رادسی قطعہ پر عمود ہے
$(iii) \cdots$ $m\angle OBC + m\angle O'BC = 180^\circ$	(I) اور (ii) جمع کرنے سے
O، B اور O′ ہم خط ہیں اور، O اور O′ کے درمیان B واقع ہے	(I)، (ii) اور (iii) رو سے
$\therefore$ $m\overline{OB} + m\overline{O'B} = m\overline{OO'}$	تعریف کی رو سے
یا $m\overline{OO'} = r + r'$	$m\overline{OB} = r$ ، $m\overline{O'B} = r'$

Q.E.D.

مسئلہ 26.4 صورت (B) اگر دہ دائرے ایک دو سرے کو اندرونی طور پر چھویں تو انکے مراکز کا درمیانی فاصلہ ان کے رداسوں کے فرق کے برابر ہوتا ہے۔



(A)

معلوم: دہ دائرے جن کے مراکز O اور O′ اور رداس بالترتیب r اور r' ہیں۔
دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر نقطہ B پر چھوتے ہیں۔

مطلوب: $m\overline{OO'} = r - r'$

عمل: دونو دائروں پر نقطہ B سے مشترک مماس $\overline{AC}$ کھینچیں۔

ثبوت:

دلائل	بیانات
مماس، رادس قطعہ پر عمود ہے۔	(i) $m\angle OBC = 90^\circ$ لہذا $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{AC}$
مماس، رادس قطعہ پر عمود ہے۔	(ii) $m\angle O'BC = 90^\circ$ لہذا $\overline{O'B} \perp \overleftrightarrow{AC}$
(I) اور (ii) سے (i)، (ii) اور (iii) سے	(iii) $m\angle OBC = m\angle O'BC = 90^\circ$ O، O′ اور B ہم خط ہیں اور O′، O اور B کے درمیاں واقع ہیں۔
تعریف کی رد سے (iv) سے اور $m\overline{OB} = r$ ، $m\overline{O'B} = r'$.	(iv) $\therefore\ m\overline{OO'} = m\overline{O'B} + m\overline{OB}$ یا $m\overline{OO'} = m\overline{OB} - m\overline{O'B} = r - r'$

Q.E.D.

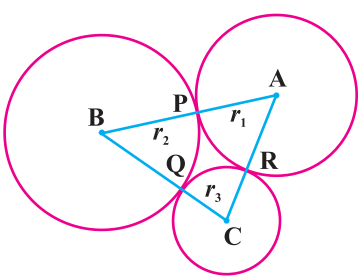
نتیجہ صریح 1:

اگر دو دائرے کا درمیان فاصلہ ان کے رداسوں کے مجموعے (فرق) کے برابر ہو تو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی (اندرونی) طور پر چھوتے ہیں۔

نتیجہ صریح 2:

اگر دو رائرے کے درمیان فاصلہ ان کے رداسوں کے مجموعے یا فرق کے برابر نہ ہو تو دائرے ایک دوسرے کو نہیں چھوتے ہیں۔

مثال 1: اگر تین دائرے جوڑے کی صورت میں بیرونی طور پر ایک دوسرے کو چھوتے ہیں تو ان کے مراکز کو ملانے بنانے والا مثلث کا احاطہ ان کے رداسوں کے مجموعے کے دوگنا کے برابر ہوتا ہے۔



معلوم: تین دائرے جن کے مرکز A، B، C اور رداسی بالترتیب r_1، r_2، r_3 ہیں
اور جوڑے کی صورت میں نقاط P، Q اور R پر بیرونی طور پر چھوتے ہیں۔

مطلوب: ΔABC کا احاطہ $= 2(r_1 + r_2 + r_3)$

عمل: ΔABC مثلث بنانے کے لیئے P، Q اور R کے ذریعے بالترتیب $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ اور $\overline{AC}$ بنائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\overline{AB} = m\overline{AP} + m\overline{BP}$ (i)	P نقاط A اور B کے درمیان واقع ہے
$m\overline{BC} = m\overline{BQ} + m\overline{CQ}$ (ii)	Q نقاط B اور C کے درمیان واقع ہے
$m\overline{AC} = m\overline{AR} + m\overline{CR}$ (iii)	R نقاط A اور C کے درمیان واقع ہے
$m\overline{AB} + m\overline{BC} + m\overline{AC}$ $= m\overline{AP} + m\overline{BP} + m\overline{BQ} + m\overline{CQ} + m\overline{AR} + m\overline{CR}$	(i)، (ii) اور (iii) جمع کرنے سے
$m\overline{AB} + m\overline{BC} + m\overline{AC}$ $= \left(m\overline{AP} + m\overline{AR}\right) + \left(m\overline{BP} + m\overline{BQ}\right) + \left(m\overline{CQ} + m\overline{CR}\right)$	دوبارہ بالترتیب دینے سے
$m\overline{AB} + m\overline{BC} + m\overline{AC} = (r_1 + r_1) + (r_2 + r_2) + (r_3 + r_3)$ $= 2r_1 + 2r_2 + 2r_3 = 2(r_1 + r_2 + r_3)$ لہٰذا $\Delta ABC = 2(r_1 + r_2 + r_3)$ کا احاطہ	$m\overline{AP} = m\overline{AR} = r_1$ $m\overline{BP} = m\overline{BQ} = r_2$ $m\overline{CQ} = m\overline{CR} = r_3$

Q.E.D.

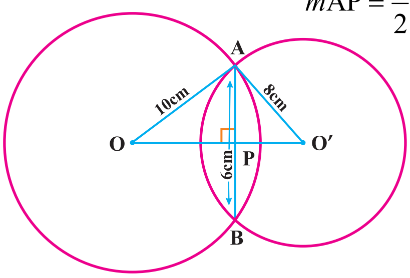
مثال 2: دو متقاطع دائروں کے رداس 10 سنٹی میٹر اور 8 سنٹی میٹر اگر ان کے مشترکہ وتر کی لمبائی 6 سنٹی میٹر ہے۔ ان کے مرکزوں کے درمیان کیا ہے۔

حل: دائرے جن کے مراکز O اور O′ رداس بالترتیب 10 سنٹی میٹر اور 8 سنٹی میٹر ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

شکل سے ہمارے پاس ہے

$$m\overline{OA} = 10\text{cm},\ \ m\overline{O'A} = 8\text{cm},\ m\overline{AB} = 6\text{cm},\ \ m\overline{OO'} = ?$$

P $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے لہٰذا $m\overline{AP} = \frac{1}{2} m\overline{AB} = \frac{6}{2} = 3\text{cm}$



ΔAPO میں، مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$10^2 = 3^2 + \left(m\overline{OP}\right)^2$$

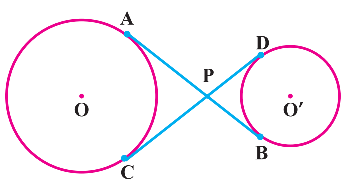
$$\Rightarrow\ \ m\overline{OP} = \sqrt{100-9} = \sqrt{91}\text{cm.}$$

$\Delta APO'$ میں، مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$8^2 = 3^2 + \left(m\overline{O'P}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ \ m\overline{O'P} = \sqrt{64-9} = \sqrt{55}\text{cm}$$

آخر کار $m\overline{OO'} = m\overline{OP} + m\overline{O'P} = \sqrt{91} + \sqrt{55} = 16.955\text{cm}$ (تقریباً)



مثال 3: دو دائروں کے دو مشترکہ معکوس مماس لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔

معلوم: $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ دو دائروں کے دو مشترکہ معکوس مماس ہیں۔

دائروں کے مرکز بالترتیب O اور O′ ہیں

مطلوب: $m\overline{AB} = m\overline{CD}$

عمل: مماس $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ نقطہ P پر ایک دوسرے قطع کرتے ہیں

ثبوت:

بیانات	دلائل
(i) $m\overline{AP} = m\overline{CP}$	دائرے کے باہر نقطے سے مماس
(ii) $m\overline{BP} = m\overline{DP}$	دائرے کے باہر نقطے سے مماس
(iii) $m\overline{AP} + m\overline{BP} = m\overline{CP} + m\overline{DP}$	(i)اور (ii) جمع کرنے سے
$\Rightarrow$ $m\overline{AB} = m\overline{CD}$	(iii) اور شکل سے

Q.E.D

مثال 4: دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں اور ان کے مراکز کو ملانے والے قطعہ کی لمبائی 7 سنٹی میٹر ہے۔ اگر ایک دائرے کا رداس 3 سنٹی میٹر ہے تو دوسرے دائرے کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: دو دائرے بیرونی طور پر ایک دوسرے کو چھوتے ہیں لہٰذا مراکز کو ملانے والے قطعہ کی لمبائی $= r_1 + r_2$

$$7 = 3 + r_2$$

$$\Rightarrow \quad r_2 = 7 - 3 = 4cm.$$

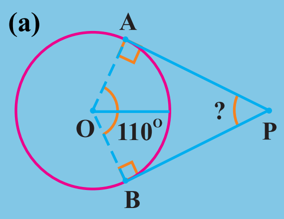
اب

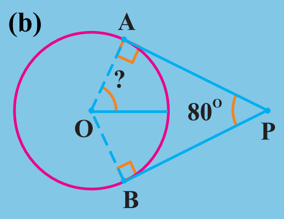
$$\text{دوسرے دائرے کا رقبہ} = \pi r_2^2 = \pi \cdot (4)^2 = 16\pi \text{cm}^2$$

$$= 16\left(\frac{22}{7}\right)\text{cm}^2 = 50.286\text{cm}^2 \ (\text{تقریباً})$$

مشق 26.3

1. اگر دائروں کے مراکز کو ملانے والے قطعہ کی لمبائی دائروں کے رداسوں کا مجموعہ ہے تو ثابت کریں کہ دائرے بیرونی طور پر ایک دوسرے کو چھوتے ہیں۔
2. اگر مثلث کا احاطہ جس کے رداس تین دائروں کے مرکز ہیں ان کے قطروں کے مجموعہ کے برابر ہے تو ثابت کریں کہ تینوں دائرے جوڑی کی صورت میں بیرونی طور پر ایک دوسرے کو چھوتے ہیں۔
3. اگر دو متماثل دائروں کو بیرونی طور پر چھونے والے قطعہ کی لمبائی 12 سنٹی میٹر ہے تو دائروں کے رداس اور محیط معلوم کریں۔
4. اگر $\overline{PA}$ اور $\overline{PB}$ دیئے گئے دائرے پر باہر نقطہ P سے مماس ہیں جیسا کہ شکل میں دیا گیا ہے۔ نامعلوم زاویہ معلوم کریں





5. ثابت کریں کہ اگر دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں تو نقطہ تماس ان کے مراکز کو ملانے والے قطعہ پر واقع ہوتا ہے۔

6. اگر 2.5 سنٹی میٹر رداس کے دائرے میں دو وتر 3.9 سنٹی میٹر کے فاصلے پر ہیں اور ایک وتر کی لمبائی 1.4 سنٹی میٹر ہو تو دوسرے وتر کی لمبائی معلوم کریں۔

7. اگر دائرے جوڑے کی صورت میں ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں اور دو دائروں کے رداس 4 سنٹی میٹر اور 5 سنٹی میٹر ہیں تو ہیں اور دو دائروں کے رداسی 4 سنٹی میٹر اور 5 سنٹی میٹر ہیں تو تیسرے دائرے کا رداس معلوم کریں اگر ان کے مراکز سے بننے والے مثلث کا احاطہ 35 سینٹی میٹر ہے۔

اعادہ مشق 26

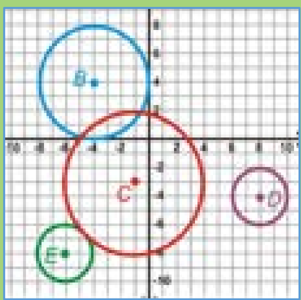
1. درست جواب پر کا نشان لگائیں

i. اگر دائرے کے باہر ایک نقطہ ہے تو اس نقطے ہم ______________ مماس کھینچ سکتے ہیں۔

(a) ایک (b) دو (c) تین (d) کوئی نہیں

ii. مماس اور رداس قطعہ کے درمیان بیرونی سرے پر زاویہ ______________ ہوتا ہے۔

(a) 45^0 (b) 60^0 (c) 90^0 (d) 120^0



iii. متصلہ شکل میں، مراکز E اور C کے دائرے ایک دوسرے کو ______________ ہیں۔

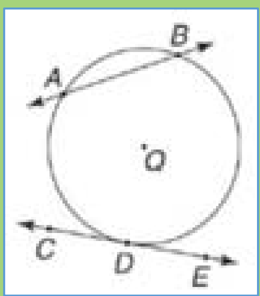
(a) اندرونی طور پر چھوتے (b) بیرونی طور پر چھوتے
(c) نہیں چھوتے (d) متماثل

iv. متصلہ شکل میں مراکز B اور C کے دائروں کے ______________ نقط تماس ہیں۔

(a) کوئی نہیں (b) ایک
(c) دو (d) ان میں کوئی نہیں

v. متصلہ شمثل میں مراکز E اور C کے دائروں کے ______________ نقط تماس ہیں۔

(a) کوئی نہیں (b) ایک
(c) دو (d) ان میں کوئی نہیں



vi. متصلہ شکل میں AB ______________ ہے۔

(a) مماس (b) قاطع
(c) وتر (d) ان میں کوئی نہیں

vii. متصلہ شکل میں CDE ______________ ہے۔

(a) مماس (b) قاطع
(c) وتر (d) ان میں کوئی نہیں

viii. متصلہ شکل میں ______________ نقط مماس ہے۔

(a) A (b) B (c) C (d) D

ix دائرے کے قطر کے سروں پر کھینچے جانے والے مماس ایک دوسرے کے / پر ______________ ہوتے ہیں۔

(a) متوازی (b) عمود (c) تقاطع (d) اور دونوں

x. دو اندرونی طور پر چھونے والے دائروں کے مشترکہ مماسوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد ______________ ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

xi. دو بیرونی طور پر چھونے والی دائروں کے مشترک مماسوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد ______________ ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

خلاصہ

- ایک خط دو دائروں کے صرف ایک نقط چھو تاہے دائرے کا مماس ہو تاہے اور مشترک نقط، نقط مماس یا نقط تماس کہلا تاہے۔
- ایک خط جو دائرے کے دو نقاط کو قطع کر تاہے دائرے کا قاطع ہو تاہے۔ دائرے اور قاطع کے درمیان دو نقاط تماس ہیں
- مماس قطعہ نقط مماس سے مماس پر کسی دوسرے نقط تک قطعہ خط ہو تاہے۔
- دائرے کے مرکز، نقطہ مماس اور مماس کے کسی دوسرے نقط کو ملانے سے ہمیشہ قائمتہ الزاویہ مثلث بنا تاہے۔
- جب دو دائرے ایک دوسرے کو اندرونی یا بیرونی طور پر چھوتے ہیں وہ ان کے درمیان مشترکہ مماس اور مشترکہ نقط تماس دیتے ہیں
- دو دائرے جو ایک دوسرے کو نہیں چھوتے ہیں مشترک مماس ہو سکتاہے۔ بیرونی (راست) اور اندرونی (معکوس) مشترکہ مماس
- دو دائروں کے دو راست مشترک مماس لمبائی میں مساوی ہوتے ہیں۔
- دو دائروں کے معکوس مشترک مماس لمبائی میں مساوی ہوتے ہیں
- دائرے پر ایک نقطے سے صرف ایک مماس کھینچا جا سکتاہے۔
- اگر ایک خط دائرے کے رداسی قطعہ کے بیرونی سرے عموداً کینچھی جائے تو اس نقط پر دائرے کا مماس ہو گی۔
- دائرے کا مماس اور نقطہ مماس اور دائرے کے مرکز ملانے والی رداسی مماس ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔
- دائرے کے باہر ایک نقطے سے دائرے پر دو مماس کھینچے جائیں وہ لمبائی میں مساوی ہوتے ہیں۔
- اگر دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں تو ان کے مراکزوں کے درمیان فاصلہ ان کے رداسوں کے مجموعے کے برابر ہو تاہے۔
- اگر دو دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر چھوتے ہیں تو ان کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ان کے فرق کے برابر ہو تاہے۔

یونٹ 27

وتر اور قوسین
CHORDS AND ARCS

طلباء کے آموزشی حاصلات

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- مندرجہ ذیل مسئلہ بمعہ نتائج صریح سمجھ اور انہیں متعلقہ مسائل کے حل کے لیئے استعمال کر سکیں۔
  - اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کی دو قوسیں متماثل ہوں تو ان کے متقابلہ وتر باہم مساوی ہوتے ہیں
  - اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کے وتر باہم مساوی ہوں تو ان کی متقابلہ قوسیں (صغیرہ، کبیرہ یا نصف دائروی) بھی متماثل ہوتی ہیں۔
  - اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کے وتر مساوی ہوں تو دائرہ کے مرکز (یا متعلقہ مراکز میں) میں مساوی زاویے بناتے ہیں۔
  - اگر ایک دائرے کے (متماثل دائروں کے / دو وتر مرکز (متعلقہ مراکز) میں مساوی مقدار کی زاویے بنائیں تو وتر مقدار میں مساوی ہوتے ہیں۔

اس یونٹ میں ہم دائرے کے وتر اور قوسین سے متعلق مسائل پر بحث کرینگے۔

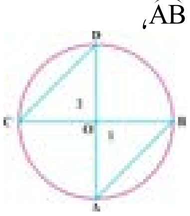
مسئلہ 27.1

اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کی دو قوسین متماثل ہوں تو ان کے متقابلہ وتر باہم مساوی ہوتے ہیں ہم مسئلہ کو ثابت کرینگے۔

i. ایک دائرے کے لیئے

ii. دو متماثل دائروں کے لیئے

i. ایک دائرے کے لیئے



معلوم: ایک دائرے کا مرکز O ہے جس کے $\overset{\frown}{AB}$ اور $\overset{\frown}{CD}$ متماثل قوسین ہیں یعنی $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$،
$\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ دیئے گئے متماثل قوسین کے متقابلہ وتر ہیں۔

مطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

عمل: O کو A، B، C اور D سے ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta OAB \leftrightarrow OCD$ میں	
$\overline{OA} \cong \overline{OC}$	ایک ہی دائرے کے رداس
$\overline{OB} \cong \overline{OD}$	ایک ہی دائرے کے رداس
$m\angle 1 = m\angle 2$	دو متماثل قوسین کے مرکزی زاویے
$\therefore \Delta OAB \cong OCD$	ض-ز-ص موضوعہ
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع

Q.E.D

ii. دو متماثل دائروں کے لیئے

معلوم: دو متماثل دائرے جن کے مراکز بالترتیب O اور O′ ہیں۔ $\overset{\frown}{AB}$ اور $\overset{\frown}{CD}$ ان دائروں کے متماثل قوسین ہیں جبکہ
$\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ دو متقابلہ وتر ہیں۔

مطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

عمل: O کو A اور B سے ملائیں۔ O′ کو C اور D سے ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta OAB \leftrightarrow \Delta O'CD$ میں	
$\overline{OA} \cong \overline{O'C}$	ایک ہی دائرے کے رداس
$\overline{OB} \cong \overline{O'D}$	ایک ہی دائرے کے رداس
$m\angle 1 = m\angle 2$	دو متماثل قوسین کے مرکزی زاویے
$\therefore \Delta OAB \cong \Delta O'CD$	ض-ز-ض موضوعہ
$\therefore \overline{AB} \cong \overline{CD}$	دو متماثل مثلثوں کے قناظرہ اضلاع

Q.E.D

مسئلہ 27.2

اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کے وتر باہم مساوی ہوں تو ان کی متقابلہ قوسین (صغیرہ، کبیرہ یا نصف دائروی) بھی متماثل ہوتی ہیں۔

معلوم: دو متماثل دائرے جن کے مراکز بالترتیب O اور O' ہیں۔ ان دائروں کے دو متماثل قوسین ہیں
جب کہ $\overline{AC} \cong \overline{PR}$

مطلوب: $\widehat{AC} \cong \widehat{PR}$

عمل: O کو A اور C سے ملائیں۔ O' کو P اور R سے ملائیں۔

ثبوت:

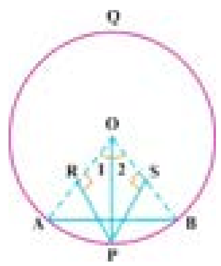
بیانات	دلائل
$\Delta AOC \leftrightarrow \Delta PO'R$ میں	
$\overline{OA} \cong \overline{O'P}$	متماثل دائروں کے رداس
$\overline{OC} \cong \overline{O'R}$	متماثل دائروں کے رداس
$\overline{AC} \cong m\overline{PR}$	معلوم
$\Delta OAC \cong \Delta PO'R$	ض-ص-ص ≅ ض-ض-ض
$m\angle AOC = m\angle PO'R$ (i)	
پس $\widehat{AC} \cong \widehat{PR}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے مساوات (I) سے

Q.E.D

مثال ۱:

ایک دائرے کے محیط پر واقع نقطہ P رداسی قطعات $\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ سے ہم فاصلہ ہے۔ ثابت کریں کہ $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$

حل:



معلوم: ایک دائرے کا مرکز O ہے جس کا وتر $\overline{AB}$ ہے دائرے کے محیط پر واقع نقطہ P
رداسی قطعات $\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ سے ہم فاصلہ ہے یعنی $m\overline{PR} = m\overline{PS}$

مطلوب: $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$

حل: O کو P سے ملائیں $m\angle 1$ اور $m\angle 2$ نام دیں جیسا مشکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں $\Delta OPR \leftrightarrow \Delta OPS$	
$m\overline{OP} = m\overline{OP}$	مشترک
$m\overline{PR} = m\overline{PS}$	
$\therefore \Delta OPR \cong \Delta OPS$	و-ص ≅ و-ض
لہذا $m\angle 1 = m\angle 2$ (i)	متماثل مثلثوں کے متقابلہ زاویے
$\Rightarrow \widehat{AP} \cong \widehat{BP}$	مساوات (i) سے
پس $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$	متماثل قوسین کی رو سے

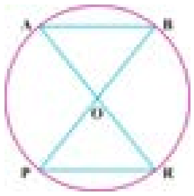
Q.E.D

مسئلہ 27.3:

اگر ایک دائرہ (یا متماثل دائروں کے) کے وتر مساوی ہو تو دائرہ کا مرکز (یا متعلقہ مراکز میں) میں مساوی زاویے بناتے ہیں

1) ایک دائرے کے لیئے ii) دو دائروں کے لئے

i) ایک دائرے کے لیئے



معلوم: ایک دائرہ کا مرکز O ہے جس کے دو متماثل وتر ہیں یعنی $\overline{AB} \cong \overline{PR}$

مطلوب: $m\angle AOB = m\angle POR$

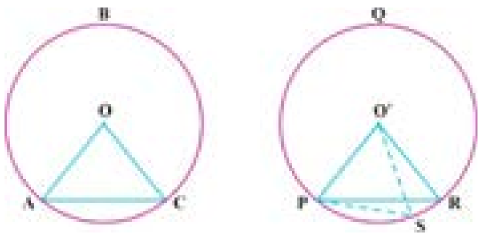
عمل: O کو A اور B سے ملائیں اور O کو P اور Q سے بھی ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
(i) $\overline{AB} \cong \overline{PR}$	معلوم
(ii) $\overline{OB} \cong \overline{OR}$ (iii) اور $\overline{OA} \cong \overline{OP}$	$\overline{OB}$ ، $\overline{OR}$ ، $\overline{OA}$ اور $\overline{OP}$ ایک ہی دائرے کے رداس ہیں
$\Delta AOB \cong \Delta POR$	ض-ض-ض ≅ ض-ض-ض
$m\angle AOB = m\angle POB$	متماثل مثلثوں کے متقابلہ زاویے

Q.E.D

ii) دو متماثل دائروں کے لئے



معلوم: مرکز O اور O′ کے دو متماثل دائرے ہیں لہذا جبکہ $m\overline{AC} = m\overline{PR}$
جبکہ $\overline{AC}$ اور $\overline{PR}$ دائروں کے وتر ہیں

مطلوب: $m\angle AOC = m\angle PO'R$

عمل: قوس PR پر ایک نقطہ S لیں اور S کو P اور O′ سے ملائیں
جیسا کہ $\angle AOC \cong \angle PO'S$

ثبوت:

بیانات	دلائل
فرض کریں $m\angle AOC = m\angle PO'R$	
لیکن $m\angle AOC \cong m\angle PO'S$	عمل
$\therefore$ $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{PS}$ (i)	دو متماثل دائروں کے مساوی مرکزی زاویے جو قوسین سے بنتے ہیں مسئلہ (I) سے
$\therefore$ $m\overline{AC} = m\overline{PS}$ (ii)	
لیکن $m\overline{AC} = m\overline{PR}$ (iii)	معلوم
$\therefore$ $m\overline{PR} = m\overline{PS}$	(ii) اور (iii) کا استعمال کرتے ہوئے
یہ جب ہی ممکن ہے اگر R اور S ایک ہی ہوں	کیونکہ P مشترک نقطہ ہے
$\Rightarrow$ $m\angle AOC = m\angle POR$	ہمارا مفروضہ غلط ہے

Q.E.D

نتیجہ صریح 1:

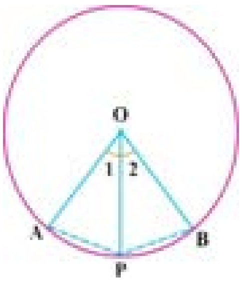
اگر متماثل دائروں یا ایک ہی دائرے میں اگر مرکزی زاویے مساوی ہیں تو متقابلہ قاطعات مساوی ہیں۔

نتیجہ صریح 2:

متماثل دائروں یا ایک ہی دارے میں۔ غیر مساوی مرکزی زاویوں کے قوسین کے وتر غیر مساوی ہیں۔

مثال 1:

ثابت کریں کہ ایک دائرے میں مرکزی زاویے کا اندرونی ناصف متقابلہ قوس کو نصف کرتا ہے۔



معلوم:

ایک دائرے کا مرکز O ہے۔ مرکزی زاویے AOB کا اندرونی ناصف $\overline{OP}$ ہے۔

یعنی $\angle 1 \cong \angle 2$

مطلوب: $\overset{\frown}{AP} \cong \overset{\frown}{PB}$

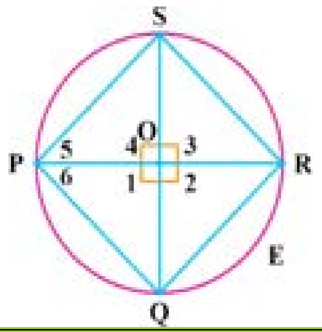
عمل: $\overline{AP}$ اور $\overline{BP}$ کھینچیں تو $\angle 1$ اور $\angle 2$ بالترتیب $\overset{\frown}{AP}$ اور $\overset{\frown}{BP}$ کے متقابلہ زاویے ہیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta OAP \leftrightarrow \Delta OBP$ میں	
$m\overline{OA} = m\overline{OB}$	یک ہی دائرے کے رداس
$m\angle 1 = m\angle 2$	معلوم
اور $m\overline{OP} = m\overline{OP}$	مشترک
$\therefore \quad \Delta OAP \cong \Delta OBP$	ض-ز-ض موضوعہ
پس $\overline{AP} \cong \overline{BP}$	متماثل مثلثوں کے متقابلہ اضلاع
$\Rightarrow \quad \overset{\frown}{AP} \cong \overset{\frown}{BP}$	دائرے میں مساوی وتروں کے متقابلہ قوسین

Q.E.D

مثال 2: ثابت کریں کہ ایک دائرے میں دو قطر ایک دوسرے پر عمود ہیں تو ان کے سروں کو ملانے والے خطوط مربع بناتے ہیں۔



معلوم : $\overline{PR}$ اور $\overline{QS}$ ایک دائرے کے دو عمودی قطر ہیں جس کا مرکز O ہے۔
لہٰذا PQRS ایک چوکور ہے۔ $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5$ اور $\angle 6$ کو نام دیں جیسا کہ شکل میں دکھایا ہے۔

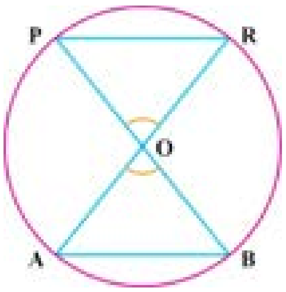
مطلوب: PQRS ایک مربع ہے

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\overline{PR}$ اور $\overline{QS}$ ایک دائری دو عمودی قطر ہیں جس کا مرکز O ہے	معلوم
$m\angle 1 = m\angle 2 = m\angle 3 = m\angle 4 = 90^\circ$	قطر ایک دوسرے پر عمود ہیں
$m\overset{\frown}{PQ} = m\overset{\frown}{QR} = m\overset{\frown}{RS} = m\overset{\frown}{SP}$ (i)	ایک دائرے میں مساوی مرکزی زاویوں کے مخالف قوسین
$m\overline{PQ} = m\overline{QR} = m\overline{RS} = m\overline{SP}$ (ii)	مساوی قوسین کے متقابلہ وتر
قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں ΔPOS	
$m\overline{PO} = m\overline{OS}$ (iii)	$\overline{PO}$ اور $\overline{OS}$ دائرے کے رداس ہیں
ΔPOS قائمۃ الساقین مثلث ہے	(iii) سے
$m\angle 5 = 45^\circ$ (iv)	ΔPOS ایک قائمۃ اساقین مثلث ہے
اس ہی طرح ΔPOQ قائمۃ اساقین مثلث ہے $m\angle 6 = 45^\circ$ (v)	اوپر دیئے گئے عمل کے مطابق
فرید $m\angle P = m\angle 5 + m\angle 6$ $m\angle P = 45^\circ + 45^\circ$	زاویوں کے جمع کا موضوع (iv) اور (v) سے
یا $m\angle P = 90^\circ$ (vi)	
اس ہی طرح $m\angle Q = m\angle R = m\angle S = 90^\circ$ (vii)	اوپر دینے کے عمل کے مطابق
PQRS ایک مربع	(ii)، (vi) اور (viii) سے

Q.E.D

مسئلہ 27.4: اگر ایک دائرے کے یا (متماثل دائروں) کے دو وتر کے مرکز (متعلقہ مراکز) پر مساوی مقدار کے زاویے بنائیں تو وتر مقدار میں مساوی ہوتے ہیں۔



(a) ایک دائرے کے لیئے

معلوم: ایک دائرے کا مرکز O ہے۔ $\overline{PR}$ اور $\overline{AB}$ دائرے کے وتر ہیں دونوں قوسوں اور $\angle POR \cong \angle AOB$

مطلوب: $m\overline{AB} \cong m\overline{PR}$

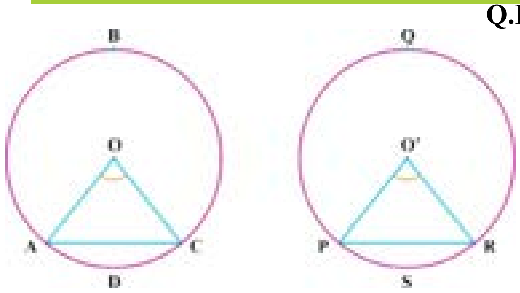
عمل: O کو P اور R سے ملائیں اور A اور B سے بھی ملائیں

ثبوت:

بیانات	دلائل
(i) $\overline{OR} \cong \overline{OB}$	ایک ہی دائرے کے رداس
(ii) $\overline{OP} \cong \overline{OA}$	ایک ہی دائرے کے رداس
اور (iii) $\angle POR \cong \angle AOB$	معلوم
$\Delta PQR \cong \Delta AOB$	ض-ز-ض ≅ ض-ز-ض (موضوعہ)
$\overline{AB} \cong \overline{PR}$	متماثل مثلثوں کے متقابلہ اضلاع

Q.E.D

(b) دو متماثل مثلثوں کے لیئے



دو متماثل دائرے جن کے مرکز O اور O' ہیں اور $\overline{AC}$ اور $\overline{PR}$ ان کے دو وتروں پہ مراکز ہیں مساوی زاویے بناتے ہیں یعنی $\angle AOC \cong \angle PO'R$

مطلوب: $m\overline{AC} = m\overline{PR}$

ثبوت:

بیانات	دلائل
میں $\Delta OAC \leftrightarrow \Delta O'PR$	
$\overline{OA} \cong \overline{O'P}$	متماثل دائروں کے رداس
$\angle AOC \cong \angle PO'R$	معلوم
$\overline{OC} \cong \overline{O'R}$	متماثل دائروں کے رداس
$\therefore \Delta OAC \cong \Delta O'PR$	ض-ز-ض موضوعہ
پس $m\overline{AC} = m\overline{PR}$	متماثل ثلثوں کے متقابلہ اصلاع

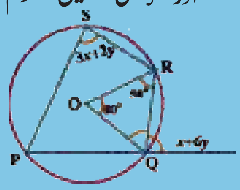
Q.E.D

مشق 27.1

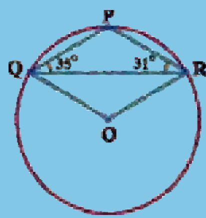
1. ایک دائرے میں ثابت کریں کہ دہ متوازی اور مساوی وتروں کے درمیاں قوسین برابر ہیں.

2. ثابت کریں کہ مساوی دائروں میں مساوی مرکزی زاویے کے مساوی قوسین ہوتے ہیں۔

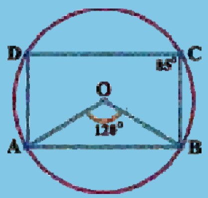
3. مندرجہ ذیل شکل میں O دائرے کا مرکز ہے۔ x اور y کی قیمتیں معلوم کریں



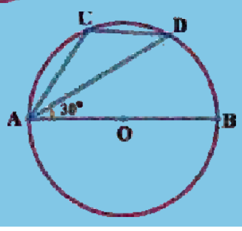
4. مندرجہ ذیل شکل میں $m\angle PQR = 35°$ اور $m\angle PRQ = 31°$.
$m\angle QPR$ اور $m\angle OQR$ معلوم کریں



5. مندرجہ ذیل شکل میں O دائرے کا مرکز ہے۔ جبکہ $m\angle AOB = 120°$
اور $m\angle BCD = 85°$، معلوم کریں $m\angle OAD$



6. مندرجہ ذیل شکل میں $\overline{AB}$ دائرے کا قطر ہے جبکہ $m\angle DAB = 30°$،
$m\angle ACD$ معلوم کریں



اعادہ مشق 27

1. کثیر الانتخابی سوالات
درست جواب پر کا نشان لگائیں

i. اگر دائرے کا وتر مرکز میں 60° کا زاویہ بناتا ہے۔ تو وتر اور رداسی قاطع ______ ہوتے ہیں .

(a) متوازی (b) عمودی (c) متماثل (d) غیر متماثل

ii. ایک قوس مرکز میں $45°$ کا زاویہ بناتی ہے تو متقابلہ قوس مرکز میں ______ کا زاویہ بنائے گی۔

(a) $15°$ (b) $30°$ (c) $45°$ (d) $60°$

iii. ایک دائرے کا وتروں کا جوڑا دو متماثل ______ مرکزی زاویے بناتے ہیں۔

(a) عمود (b) غیر متماثل (c) متماثل (d) ان میں سے کوئی نہیں

iv. ایک دائرے کے متماثل مرکزی زاویوں کے مخالف قوسین ہمیشہ ________ ہوتے ہیں۔
(a) متوازی (b) متماثل (c) عمود (d) ان میں سے کوئی نہیں

v. 6 سنٹی میٹر لمبا وتر 60° کا زاویہ بناتا ہے تو اس دائرے کا رداسی قطعہ ________ ہے۔
(a) 4cm (b) 6cm (c) 5cm (d) 8cm

vi. ایک دائرے کا وتر 180° کا مرکز بناتا ہے تو اُس کی لمبائی ہمیشہ ________ ہو۔
(a) رداسی قطعہ کے برابر (b) رداسی قطعہ سے کم (c) رداسی قطعہ سے دوگنا (d) رداسی قطعہ سے نصف

vii. ایک دائرے کے وتر اور رداسی قطع کی لمبائیاں متماثل ہیں تو وتر کے ذریعے بنا ہوا مرکزی زاویہ ________ کا ہوگا
(a) 60° (b) 75° (c) 90° (d) 45°

viii. ایک دائرے کے دو متماثل قوسین میں سے اگر ایک قوس 30° کا مرکزی زاویہ بناتی ہے تو دوسری قوس ________ کا مرکزی زاویہ بنائے گی۔
(a) 60° (b) 90° (c) 75° (d) 30°

ix. دائرے کا نصف محیط اور قطر دونوں کا مرکزی زاویہ ________ کا بناتے ہیں
(a) دو (b) تین (c) چار (d) یہ سب

خلاصہ

- متماثل دائروں کے رداس مساوی ہوتے ہیں۔
- مساوی وتر مرکز میں مساوی بناتے ہیں ۔
- محیط کے کسی بھی دو نقاط کو ملانے والی خط مستقیم دائرہ کا وتر کہلاتا ہے۔
- دائرے کا وہ حصہ جو ایک قوس اور ایک وتر سے جکڑا ہوا ہو تو اسے دائرے کے حصے کے طور پر جانا جاتا ہے
- دائرے میں ایک حرکت پذیری کے ذریعے معلوم ہونے والی حد کو اس کا محیط کہا جاتا ہے۔
- دائرے کے محیط کا صلہ دائرے کا قوس کہلاتا ہے۔
- دائرے کا مرکز سے کھینچا جانے والا خط مستقیم جو وتر کی تنصیف کرے وتر پر عمود ہوتا ہے۔
- دائرے کے مرکز سے وتر پر عمود کھینچا جائے تو وہ وتر کی تصنیف کرتا ہے۔
- اگر ایک دائرے (یا متماثل دائروں) کی دو قوسین متماثل ہیں تو ان کی متقابلہ وتر مساوی ہوتے ہیں۔
- اگر ایک دائرے (یا متماثل دائروں) کے دو وتر مساوی ہیں تو ان متقابلہ قوسین (صغیرہ، کبیرہ یا نصف دائرہ) متماثل ہوتے ہیں۔
- ایک دائرہ (یا متماثل دائروں) کے مساوی وتر مرکز پر مساوی زاویے بناتے ہیں۔
- اگر ایک دائرے (یا متماثل دائروں) دو وتر مرکز (متقابلہ مراکز) پر مساوی بناتے ہیں تو وتر مساوی ہوتے ہیں۔

یونٹ 28

قطعہ دائرے میں زاویہ

ANGLES IN A SEGMENT A CIRCLE

طلباء کے آموزشی حاصلات

مندرجہ ذیل اثباتی مسائل اور ان کے نتائج صریح سمجھ اور متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے لیئے استعمال کرسکیں۔

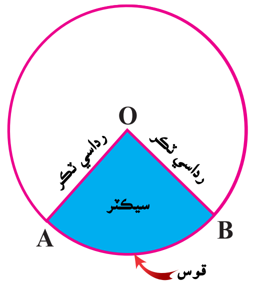
- کسی دائرے میں قوس صغیرہ کا مرکزی زاویہ پیمائش میں متعلقہ قوس کبیرہ سے بننے والے زاویہ سے دوگنا ہوتا ہے۔
- دائرے کے ایک ہی قطعہ میں کوئی بھی دو زاویے برابر ہوتے ہیں
- زاویہ
  - نصف دائرے میں قائمہ زاویہ ہوتا ہے
  - نصف دائرے بڑے قطعہ میں قائمہ زاویہ سے چھوٹا ہوتا ہے (یعنی حادہ زاویہ)
  - نصف دائرے سے چھوٹے قطعہ میں قائمہ زاویہ سے بڑا ہوتا ہے (یعنی منفرجہ زاویہ)
- دائرے میں محصور کسی چوکور کے متقابلہ زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

28.1 قطعہ دائرہ میں زاویہ (Angle in a segment of a circle):

ہم پہلے ہی دائرے سے متعلق اصطلاحات کا مطالعہ کر چکے ہیں جیسے وتر، قوس صغیرہ اور قوس کبیرہ وغیرہ
اب ہمیں قطعہ دائرہ میں زاویہ سے متعلق مسائل کو سمجھنے سے کے لیئے کچھ اور اصطاحات کی وضاحت کرنا ہے۔

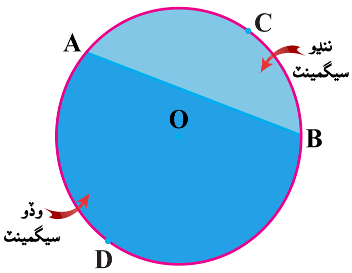
تعریفیں (Definition):

i. قطاع دائرہ (Sector of a circle):



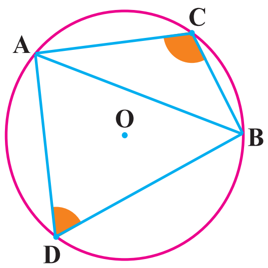
قطاع دائرہ، دائروی علاقے کا حصہ رداسی قطعات سے گھرا ہوا ہو اور قوس جو ان کو قطع کرتا ہے۔دی گئی شکل میں AOB دیے ہوئے دائرے کا قطاع ہے جس کا مرکز O ہے۔

ii. قطعہ دائرہ (Segment of a circle):



قطعہ دائرہ، دائروی علاقے کا حصہ جو ایک قوس اور وتروں سے گھرا ہوا ہو۔
ایسا قطعہ، قطعہ کبیرہ کہلاتا ہے اگر اس کی قوس، قوس صغیرہ ہو۔متعلقہ شکل میں
قطعہ صغیرہ ACB اور ADB قطعہ کبیرہ ہے۔

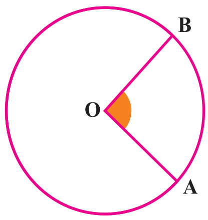
iii. قطعہ دائرہ میں زاویہ (Angle in a segment of circle):



قطعہ دائرہ میں زاویہ ایسا زاویہ ہے جو قطعہ قوس کے سروں کے نقاط کی علاوہ
کسی ایک نقطے پر قطعہ کے وتر سے بناتا ہے۔متصلہ شکل میں، $\angle ACB$ قوس صغیرہ کا
زاویہ ہے جب کہ، $\angle ADB$ قوس کبیرہ کا زاویہ ہے۔

نوٹ: قطعہ دائرہ میں زاویہ قطعہ قوس کا محصور زاویہ بھی کہلاتا ہے یا صرف قوس بننے والا زاویہ

iv. قوس کا مرکزی زاویہ (Central angle of an arc):



دائرے کے مرکز پر قوس سے بننے والا زاویہ دائرے کی قوس کا مرکزی زاویہ کہلاتا ہے۔شکل میں
$\angle ACB$ قوس AB کا مرکزی زاویہ ہے

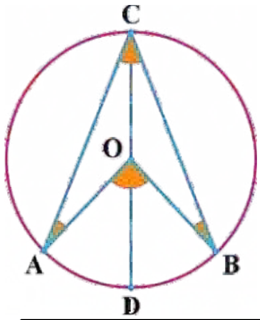
مندرجہ ذیل اثباتی مسائل اور ان کے نتائج صریح سمجھ اور متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے لیئے استعمال کرنا۔

مسئلہ 28.1:

کسی دائرے میں قوس صغیرہ کا مرکزی زاویہ پیائش میں متعلقہ قوس کبیرہ سے بننے والے زاویہ کا دوگنا ہوتا ہے۔

یا

کسی دائرے میں قوس صغیرہ کا مرکزی پیائش میں متعلقہ قوس کبیرہ کے محصور زاویے کا دوگنا ہوتا ہے۔



معلوم: دائرہ جس کا مرکز O ہے، $\angle AOB$ قوس AB صغیرہ کا مرکزی زاویہ ہے۔

زاویہ $\angle ACB$ قوس ACB کبیرہ کا متقابلہ زاویے $\angle AOB$ ہے۔

مطلوب: $m\angle AOB = 2m\angle ACB$

عمل: $\overline{CO}$ کھینچیں اور اسے دائرے پر نقطہ D تک بڑھائیں

ثبوت:

بیانات	دلائل
ΔAOC میں، $\overline{OA} \cong \overline{OC}$	ایک ہی دائرے کے رداسی قطعات
اب $m\angle OAC = m\angle OCA$ ...(i)	متماثل اضلاع کے مخالف زاویے
$m\angle AOD = m\angle OAC + m\angle OCA$	مثلث کا بیرونی زاویہ مخالف اندرونی زاویوں کا مجموعہ ہے
$= 2m\angle OCA$ ...(ii)	مساوات (i) کی رو سے
اس طرح $m\angle BOD = 2m\angle OCB$ ...(iii)	ایک ہی جیسے طریقہ کار سے
اب $m\angle AOB = m\angle AOD + m\angle BOD$	زاویوں کی جمع کا موضوعہ
$= 2m\angle OCA + 2\,m\angle OCB$	مساوات (ii) اور (iii) کی رو سے
$= 2(m\angle OCA + m\angle OCB)$	2 مشترک لینے سے
$m\angle AOB = 2\,m\angle ACB$	زاویوں کی جمع کا موضوعہ

Q.E.D

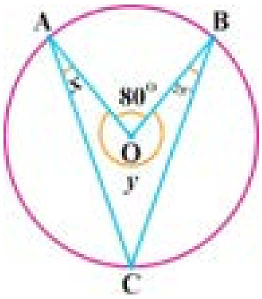
نتیجہ صریح 1:

قوس کبیرہ کا مرکزی زاویے کی پیائش متقابلہ قوس صغیرہ کے محصور زاویے کا دوگنا ہے

نتیجہ صریح 2:

نصف دائرے کے مرکزی زاویے کی پیائش متقابلہ نصف دائرے کے محصور زاویے کا دوگنا ہے

مثال 1: متعلقہ شکل میں، نقطہ O دائرے کا مرکز ہے۔ x کی قیمت معلوم کریں اگر $m\angle AOB = 80°$ اور $m\angle OBC = 25°$



حل: شکل میں $\overset{\frown}{AB}$ کا مرکزی زاویہ $\angle AOB$ ہے۔ اور متقابلہ کا محصور $\overset{\frown}{ACB}$ زاویہ $\angle ACB$ ہے

$\because$ $\overset{\frown}{AB}$ کا مرکزی زاویہ متقابلہ $\overset{\frown}{ACB}$ کے محصور زاویہ کا دوگنا ہے

$\therefore$ $m\angle AOB = 2m\angle ACB$

یعنی $80° = 2m\angle ACB$

$m\angle ACB = 40°$

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ ایک نقطہ کے گرد تمام زاویوں کا مجموعہ $360°$ ہوتا ہے۔

لہذا

$80° + y = 360°$

$\Rightarrow$ $y = 280°$

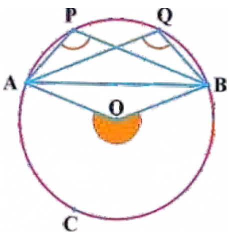
چوکور AOBC میں

$\Leftarrow$ $x + y + 25° + m\angle ACB = 360°$

$\Leftarrow$ $x + 280° + 25° + 40° = 360°$

$x + 345° = 360°$

$\Leftarrow$ $x = 15°$



مسئلہ 28.2: دائرے کا ایک ہی قطعہ میں کوئی بھی دو زاویے برابر ہوتے ہیں۔

معلوم: دائرے کا ایک ہی قطعہ APQB میں دو زاویے $\angle APB$ اور $\angle AQB$ ہیں جس کا مرکز O ہے۔

مطلوب: $m\angle APB = m\angle AQB$

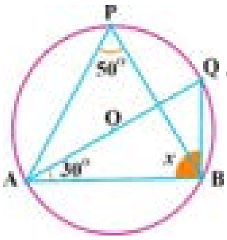
عمل: O کو A اور B سے ملائیں۔ جبکہ $\overset{\frown}{ACB}$ کا مرکزی زاویہ $\angle AOB$ ہے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\overset{\frown}{ACB}$ کا مرکزی زاویہ $\angle AOB$ ہے	عمل
$\angle APB$ اور $\angle AQB$ دائرے کے ایک ہی قطعہ کے زاویے ہیں	معلوم
اب $m\angle AOB = 2m\angle APB$	قوس کبیرہ کا مرکزی زاویہ متقابلہ قوس صغیرہ کے محصور زاویہ کا دوگنا ہے
$m\angle AOB = 2m\angle AQB$	ایک جیسے طریقہ کار سے خاصیت
$2m\angle APB = 2m\angle AQB$	متعدیت کی رو سے
$m\angle APB = m\angle AQB$	دونوں اطراف کو 2 سے تقسیم کرنے سے

نتیجہ صریح 1: کوئی بھی زاویے قطعہ کبیرہ میں برابر ہوتے ہیں۔

مثال: متعلقہ شکل میں دائرے کے ایک ہی قطعہ APQB میں دو زاویے $\angle Q$ اور $\angle P$ ہیں۔ دائرے کا مرکز O ہے۔ x یا $m\angle ABQ$ کی قیمت معلوم کریں جب کہ زاویوں کی پیمائش شکل میں ظاہر کی گئی ہے۔



حل:

$\angle P$ اور $\angle Q$ ایک ہی قطعہ کے زاویے ہیں

$$\therefore \quad m\angle Q = m\angle P$$

یعنی $\quad m\angle Q = 50^\circ \qquad (\because m\angle P = 50^\circ)$

ΔABQ میں

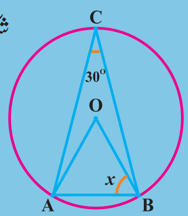
$$m\angle A + m\angle Q + x = 180^\circ$$

یعنی $\quad 30^\circ + 50^\circ + x = 180^\circ$

$$\Rightarrow \quad x = 100^\circ$$

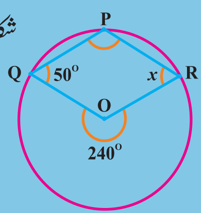
مشق 28.1

شکل 1



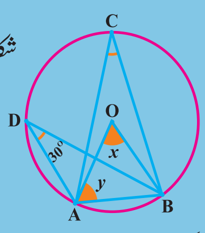
1. شکل 1 میں ۔ نقطہ O دائرے کا مرکز ہے۔ x معلوم کریں
جبکہ $m\angle C = 30^\circ$

شکل 2



2. شکل 2 میں، نقطہ O دائرے کا مرکز ہے۔ x معلوم کریں
جبکہ $m\angle Q = 50^\circ$

شکل 3

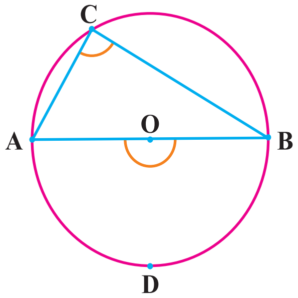


3. شکل 3 میں نقطہ O دائرے کا مرکز ہے۔ $x + y$ معلوم کریں
جبکہ $m\angle D = 30^\circ$

4. دو متماثل دائروں کی دو متماثل قوس کبیرہ کے محصور زاویے متماثل ہیں۔ ثابت کریں

5. ثابت کریں کہ دائرے میں قوس کبیرہ اور اُس کی متقابلہ قوس صغیرہ کے محصور زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

مسئلہ (a) 28.3:



نصف دائرے میں واقع زاویہ، C قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

یا

نصف دائرے میں محصور زاویہ، قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

معلوم: مرکز O کے ایک دائرے میں ADB نصف دائرہ کا مرکزی $\angle AOB$ زاویہ ہے۔
$\angle ACB$ متقابلہ نصف دائرے کا محصور زاویہ ہے

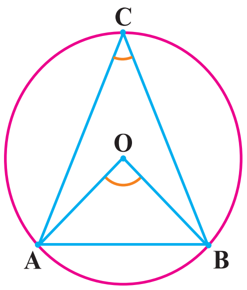
مطلوب: $\angle ACB$ قائمہ زاویہ ہے

ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\angle AOB = 180^\circ$ ...(i)	نصف دائرے کا مرکزی زاویہ
اب $m\angle AOB = 2m\angle ACB$	نصف دائرے کا مرکزی زاویہ متقابلہ نصف دائرے محصور زاویہ کا دو گنا ہے۔
$\Rightarrow$ $2m\angle ACB = 180^\circ$	مساوات (i) کی رو سے
یا $m\angle ACB = 90^\circ$	دونوں اطراف 2 سے تقسیم کرنے سے
یعنی $\angle ACB$ قائمہ زاویہ ہے	قائمہ زاویہ کی تعریف کی رو سے

Q.E.D

مسئلہ (b) 28.3



نصف دائرے سے بڑے قطعہ میں واقع زاویہ، قائمہ زاویہ سے چھوٹا ہوتا ہے۔

یا

قوس کبیرہ میں محصور زاویہ حادہ زاویہ ہوتا ہے۔

معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے ACB ایک زاویہ ہے
جو نصف دائرے سے بڑے قطعہ $\angle ACB$ میں ہے۔
$\angle AOB$ متقابلہ قوس صغیرہ AB کا مرکزی زاویہ ہے

مطلوب: $\angle ACB$ ایک حادہ زاویہ ہے

ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\angle AOB < 180^\circ$ ...(i)	قوس صغیرہ کا مرکزی زاویہ
اب $m\angle AOB = 2m\angle ACB$	قوس صغیرہ کا مرکزی زاویہ متقابلہ قوس کبیرہ کے محصور زاویہ کا دو گنا ہے
$\Rightarrow$ $2m\angle ACB < 180^\circ$	مساوات (i) استعمال کرتے ہوئے
$m\angle ACB < 90^\circ$	دونوں اطراف 2 سے تقسیم کرنے سے
یعنی $\angle ACB$ حادہ زاویہ ہے	حادہ زاویہ کی تعریف کی رو سے

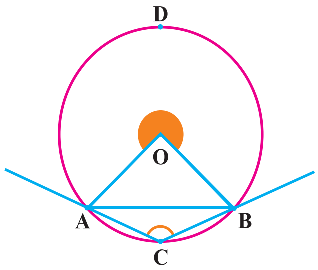
Q.E.D

مسئلہ (c) 28.3:

نصف دائرے سے چھوٹے قطعہ میں واقع زاویہ قائمہ زاویہ متناظرہ زاویہ سے بڑا ہوتا ہے۔

یا

قوس صغیرہ میں محصور زاویہ منفرجہ زاویہ ہوتا ہے۔



معلوم: ایک دائرہ جس کا O مرکز ہے۔ قوس صغیرہ AB کا محصور زاویہ $\angle ACB$ ہے۔

$\angle AOB$ متقابلہ قوس کبیرہ ADB کا مرکزی زاویہ ہے۔

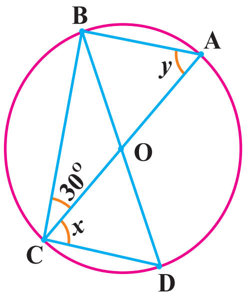
مطلوب: $\angle ACB$ منفرجہ زاویہ ہے

ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\angle AOB > 180^\circ$ ...(i)	قوس کبیرہ کا مرکزی زاویہ
اب $m\angle AOB = 2m\angle ACB$	قوس کبیرہ کا مرکزی زاویہ متقابلہ قوس صغیرہ کے محصور زاویے سے دو گنا ہے
$\Rightarrow\ 2m\angle ACB > 180^\circ$	مساوات (i) استعمال کرتے ہوئے
یا $m\angle ACB > 90^\circ$	دونوں اطراف کو 2 سے تقسیم کرنے سے
یعنی $\angle ACB$ منفرجہ زاویہ ہے	منفرجہ زاویے کی تعریف کی رو سے

Q.E.D

مثال: شکل 1 میں، نقطہ O دائرے کا مرکز ہے۔ x اور y کی قیمتیں معلوم کریں۔
جبکہ $m\angle BCO = 30^\circ$، $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ قطر ہیں۔



شکل 1

حل:

$\because$ $\overline{BD}$ قطر ہے

$\therefore$ $\angle BCD$ نصف دائرے کا محصور زاویہ ہے

پس $m\angle BCD = 90^\circ$

$\Rightarrow\ x + 30^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow\ x = 60^\circ$

$\overline{AC}$ قطر ہے

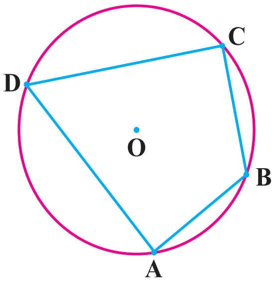
$m\angle CBA$ نصف دائرے کا محصور زاویہ ہے

پس $m\angle CBA = 90^\circ$

ΔABC, میں

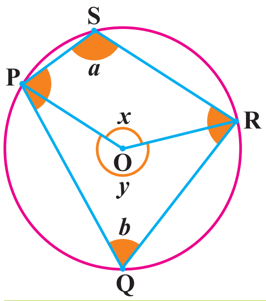
$$30^\circ + m\angle CBA + y = 180^\circ$$
$$\Rightarrow\ 30^\circ + 90^\circ + y = 180^\circ$$
$$\Rightarrow\ y = 60^\circ$$

محصور چوکور یا دوری چوکور:



ایک چوکور یا دوری چوکور کہلاتا ہے۔ اگر اس کے تمام راس ایک ہی دئرے پر واقع ہوتے ہیں۔ شکل میں ABCD ایک دوری چوکور ہے

مسئلہ 28.4: دائرے میں محصور کسی چوکور کے متقابلہ زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں



معلوم: دائرے PQRS میں محصور چوکور ہے۔ دائرے کا مرکز O ہے۔

مطلوب:

$$m\angle Q + m\angle S = 180^\circ$$

$$m\angle P + m\angle R = 180^\circ$$

عمل: $\overline{OP}$ اور $\overline{OR}$ کھینچیں جبکہ $\angle POR$ یا $\angle x$ قوس $\widehat{PR}$ کا مرکزی زاویہ اور $\angle y$ متقابلہ قوس $\widehat{PQR}$ کا مرکزی زاویہ ہے۔

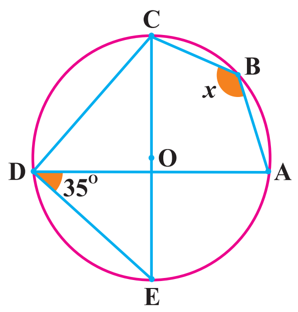
ثبوت:

بیانات	دلائل
قوس $\widehat{PR}$ کے محصور زاویے $\angle a$ یا $\angle S$	تعریف کی رو سے
$\angle y$ متقابلہ قوس $\widehat{PQR}$ کا مرکزی زاویہ	عمل
$m\angle y = 2m\angle a$	قوس کبیرہ کا مرکزی زاویہ متقابلہ قوس صغیرہ محصور زاویہ دو گنا ہے۔
$\Rightarrow \quad m\angle a = \frac{1}{2}m\angle y \ldots(\text{i})$	دونوں اطراف 2 سے تقسیم کرنے سے
اب $\angle Q$ یا $\angle b$ قوس $\widehat{PQR}$ کے محصور زاویہ ہے	تعریف کی رو سے
$\angle x$ متقابلہ قوس $\widehat{PR}$ کا مرکزی زاویہ ہے	عمل
لہذا $m\angle x = 2m\angle b$	قوس صغیرہ کا مرکزی زاویہ متقابلہ قوس کبیرہ کے محصور زاویہ کا دو گنا ہوتا ہے۔
یعنی $m\angle b = \frac{1}{2}m\angle x \ldots(\text{ii})$	دونوں اطراف کو 2 سے تقسیم کرنے سے
اب $m\angle a + m\angle b = \frac{1}{2}m\angle x + \frac{1}{2}m\angle y$	مساوات (i) اور مساوات (ii) کو جمع کرنے سے
$= \frac{1}{2}(m\angle x + m\angle y)$	$\frac{1}{2}$ مشترک لینے سے
$= \frac{1}{2}(360^\circ)$	ایک نقطے کے گرد تمام زاویں کا مجموعہ 360° ہے
یعنی $m\angle a + m\angle b = 180^\circ$	
یا $m\angle Q + m\angle S = 180^\circ$	$\because \angle a \cong \angle S$ اور $\angle b \cong \angle Q$
اس طرح $m\angle P + m\angle R = 180^\circ$	ایک جیسے طریقہ کار سے

Q.E.D

نتیجہ صریح: دائرے میں محصور متوازی الاضلاع مستطیل ہوتا ہے

مثال: دی گئی شکل میں O دائرے کا مرکز ہے۔ CE اس کا قطر ہے ABCD اور دوری چوکور ہے۔ x کی قیمت معلوم کریں اگر $m\angle ODE = 35^\circ$



حل:

$\angle CDE$ نصف دائرے کا محصور زاویہ ہے

$\therefore$ یعنی

$$m\angle CDE = 90^\circ$$
$$35^\circ + m\angle ADC = 90^\circ$$
$$\Rightarrow \quad m\angle ADC = 55^\circ$$

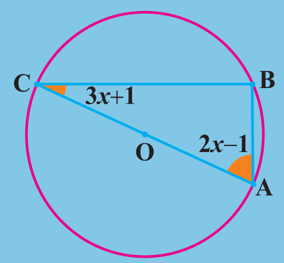
اب

دوری چوکور ABCD میں

$$x + m\angle ADC = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \quad x + 55^\circ = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \quad x = 180^\circ - 55^\circ$$
$$\Rightarrow \quad x = 125^\circ$$

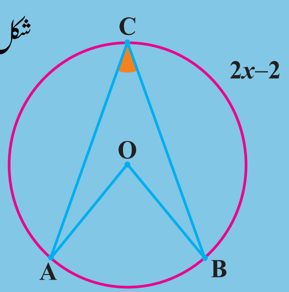
مشق 28.2

شکل 1



1. شکل 1 میں، O دائرے کا مرکز ہے۔ جب کہ $\overline{AC}$ اس کا قطر ہے۔ x معلوم کریں

شکل 2



2. شکل 2 میں ABC دائرے کی قوس کبیرہ ہے۔ جس کا مرکز O ہے اور $\angle C$ اس کا محصور زاویہ ہے x کی قیمت معلوم کریں جب کہ $x \in \mathbb{R}$

3. دائرے میں، دائرے کی قوس صغیرہ کے محصور زاویہ کی پیمائش $7x-1$ ہے کی قیمت معلوم کریں جبکہ $x \in \mathbb{R}$

4. ثابت کریں کہ دائرے میں محصور معین (Rhombus) مربع ہوتا ہے۔

5. ثابت کریں کہ دوری چوکور (cyclic quadrilateral) کا بیرونی زاویہ مخالف اندرونی زاویے کے برابر ہوتا ہے۔

اعادہ مشق 28

1. درست جواب پر کا نشان لگائیں

i. .... کا محصور زاویہ منفرجہ ہوتا ہے۔

(a) قوس صغیرہ (b) قوس کبیرہ (c) نصف دائرہ (d) ان میں سے تمام

ii. .... دائروی علاقہ ہے جو قوس اور اس کے وتر سے گھیرا ہوتا ہے

(a) قطاع (b) قطعہ (c) قوس کبیرہ (d) محیط

iii. اگر $2x$ قوس صغیرہ کا محصور زاویہ ہے تو متقابلہ قوس کبیرہ کا مرکزی زاویہ............ ہے۔

(a) x (b) $2x$ (c) $3x$ (d) $4x$

iv. اگر ایک ہی قطع کے محصور زاویوں کی پیمائش $2x$ اور 60° ہے تو $x =$ ....

(a) 120° (b) 60° (c) 20° (d) 30°

v. دائرے کی قوس صغیرہ کا محصور زاویہ، زاویہ...... ہوتا ہے

(a) حادہ (b) منفرجہ (c) قائمہ (d) عکس

vi. دائرے کی قوس کبیرہ کا محصور زاویہ، زاویہ ________ ہوتا ہے۔

(a) حادہ (b) منفرجہ (c) قائمہ (d) عکس

vii. دوری چوکور کے مخالف زاویوں کا مجموعہ........ ہے۔

(a) 90° (b) 180° (c) 270° (d) 360°

viii. دائرے میں محصور متوازی الاضلاع.......... ہوتا ہے۔

(a) پتنگ (b) ذوزنقہ (c) مستطیل (d) معین

ix. ایک قوس کا مرکزی زاویہ متقابلہ قوس کے محصور زاویے سے........... ہوتا ہے۔

(a) کم (b) بڑا (c) کم یا برابر (d) بڑا یا برابر

x. ایک دائرے کی تمام قوسیں کے مرکزی زاویوں کا مجموعہ...... ہے۔

(a) 90° (b) 180° (c) 360° (d) 1000°

خلاصہ

- دائروی علاقہ جو دو رداسی قطعات اور ایک قوس سے گھیرا ہوتا ہے قطاع کہلاتا ہے
- دائروی علاقہ جو ایک قوس اُس کے وتر سے گھیرا ہوتا ہے قطعہ کہلاتا ہے
- دائرے کے قطعہ میں زاویہ وہ قطعہ کا محصور زاویہ بھی کہلاتا ہے۔
- ایک قوس سے مرکز پر بننے والا زاویہ مرکزی زاویہ کہلاتا ہے۔
- قوس صغیرہ (یا قوس کبیرہ) کا مرکزی زاویہ متقابلہ کبیرہ (یا صغیرہ) زاویے سے بالا ترتیب دوگنا ہوتا ہے۔
- دائرے کے ایک ہی قطعہ میں دو زاویے برابر ہوتے ہیں
- نصف دائرے میں محصور زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔
- قوس صغیرہ میں محصور زاویہ منفرجہ زاویہ ہوتا ہے
- دوری چوکور کے تمام راس ایک ہی دائرے پر ہوتے ہیں
- دوری چوکور کے مخالف زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

یونٹ 29

عملی جیومیٹری-دائرے
PRACTICAL GEOMETRY - CIRCLES

طلباء کے سیکھنے کے نتائج (SLOs)

اس یونٹ کو مکمل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ :

- دیئے گئے دائرے کا مرکز متعین کرنا
- تین غیر ہم خط نقاط سے گزرتا ہوا دائرہ کھینچنا۔
- دائرہ مکمل کرنا۔
  - مرکز معلوم کر کے۔
  - بغیر مرکز معلوم کئے: جب اس کے محیط کا ایک حصہ دیا گیا ہو۔
- دیئے گئے مثلث کا محاصر دائرہ
- دیئے گئے مثلث کا محصور دائرہ۔
- دیئے گئے مثلث کا جانبی دائرہ۔
- دیئے گئے ایک دائرہ کا مساوی الاضلاع کا محاصر کھینچنا
- دیئے گئے مثلث میں مساوی الاضلاع محصور مثلث کھینچنا
- دیئے گئے دائرے کا مساوی الاضلاع کے محصور مثلث بنانا
- دیئے گئے دائرے کا محاصر مربع بنانا۔
- دیئے گئے دائرے کا محاصر منظم مسدس بنانا
- دیئے گئے دائرے کا محصور منظم مسدس بنانا۔
- دیئے گئے نقطہ P سے مرکز کو استعمال کیئے بغیر دی گئی قوس کا مماس کھینچنا جب نقطہ
  - قوس کا وسطی نقطہ ہو۔
  - قوس کے آخری سرے پر واقع ہو۔
  - قوس کے باہر واقع ہو۔
- کسی نقطہ P سے دیئے گئے دائرے پر مماس کھینچنا جب P واقع ہو۔
  - محیط پر
  - دائرے سے باہر
- ایک دائرے کے دو مماس کھینچنا جو دیئے گئے زاویے پر باہم ملتے ہیں۔
- کھینچنا
  - دو مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس یا بیرونی مماس
  - دو مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس یا اندرونی مماس کھینچنا
- کھینچنا
  - دو غیر مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس یا بیرونی مماس
  - دو غیر مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس یا اندرونی مماس
- مماس کھینچنا
  - دو غیر مساوی چھوتے ہوئے دائروں کا۔
  - دو غیر مساوی قطع کرتے ہوئے دائروں کا۔
- دائرہ کھینچنا جو چھوتا ہو۔
  - دیئے گئے زاویہ کے دونوں بازوں کو
  - دو متقاطع خطوط کو اور ان کے درمیان دیئے گئے نقطہ میں گزرے۔
  - تین متقاطع خطوط کو۔

تعارف:

ہم جانتے ہیں کہ عملی جیومیٹری، جیومیٹری کی ایک اہم شاخ ہے جو آرکیٹیکچر، کمپیوٹر گرافکس، آرٹ وغیرہ میں استعمال ہوتی ہے۔ ہم پہلے ہی پچھلی جماعتوں میں زاویے، مثلث، مستطیل، کثیر الاضلاع بنانا سیکھ چکے ہیں آئیں اب ہم دائرے اور اس کی متعلقہ اشکال بنانا سیکھتے ہیں۔

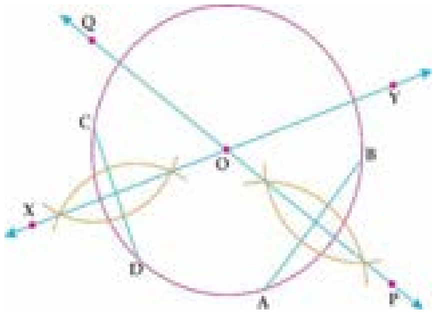
29.1 دائرے بنانا (Construction of Circles):

ہم جانتے ہیں کہ دائرہ پرکار کی مدد سے آسانی سے بنایا جاسکتا ہے جبکہ اُس مرکز اور رداس دیا ہوا ہو۔ اس سیکشن میں ہم ایسے دائرے بنانا بھی سیکھیں گے جن مرکز اور رداس نہیں دیئے گئے ہوں۔

29.1 (i) دیے گئے دائرے کا مرکز متعین کرنا (Locate the center of a grin circle)

دیئے گئے دائرے کا مرکز متعین کرنے کے لیے ہم اس حقیقت کو سامنے رکھیں کہ ایک دائرے دو غیر متوازی وتر کے عمودی ناصف ایک دوسرے کو دائرے کے مرکز پر قطع کرتے ہیں۔

دیئے گئے دائرے کا مرکز متعین کرنے کا طریقہ کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔



مثال: دیے گئے دائرے کا مرکز متعین کرنا جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

معلوم: ایک دائرہ

مطلوب: دیے گئے دائرہ کا مرکز متعین کرنا

مراحل عمل:

(i) دیئے گئے دائرہ کے دو متوازی وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کھینچیں

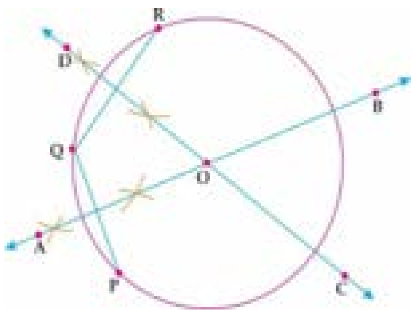
(ii) وتر $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{PQ}$ کھینچیں

(iii) وتر $\overline{CD}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{XY}$ کھینچیں

(iv) دونوں عمودی ناصف O اور O ایک دوسرے کو نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔

29.1 (ii) تین غیر اہم خط نقاط سے گزرتا ہوا دائرہ کھینچنا

ایک دائرہ دیئے گئے تین غیر ہم خط نقاط سے گرتا ہو کھینچنے کے لیئے ہمیں سب سے پہلے مرکز کا متعین کرنا ہو گا پھر دائرہ کھینچا جیسا مندرجہ ذیل مثال سے وضاحت کی گئی ہے۔



مثال: تین غیر اہم خط نقاط P، Q اور R سے گزرتا ہوا دائرہ کھینچیں۔

معلوم: تین غیر ہم خط نقاط P، Q اور R

مطلوب: P، Q اور R سے گزرتے ہوئے ایک دائرہ کھینچا

مراحل عمل:

(i) کوئی بھی تین غیر ہم خط نقاط P، Q اور R

(ii) $\overline{PQ}$ اور $\overline{QR}$ کھینچیں۔

(iii) $\overline{PQ}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{AB}$ کھینچیں

(iv) $\overline{QR}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{CD}$ کھینچیں۔

(v) دونوں عمودی ناصف $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ ناصف ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں جو کہ مطلوبہ دائرے کا مرکز ہے۔

(vi) O کو مرکز مان کر رداس $m\overline{OP}$ یا $m\overline{OQ}$ یا $m\overline{OR}$ کے برابر ایک دائرہ کھینچیں
یہ مطلوبہ دائرہ ہے۔

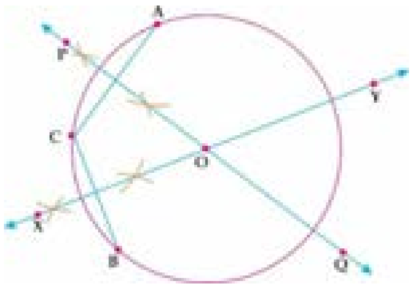
29.1(iii) دائرہ مکمل کرنا

- مرکز معلوم کر کے
- بغیر مرکز معلوم کئے

جب اس سے محیط کا ایک حصہ دیا گیا ہو

(a) مرکز معلوم کر کے دائرہ مکمل کرنا جب اس کے محیط کا ایک حصہ دیا گیا ہو

ہم ایک دائرہ مکمل کر سکتے ہیں جب اس کے محیط کا ایک حصہ یا دی ہوئی قوس کے کسی بھی تین نمبر ہم خط نقاط کی مدد سے مرکز معلوم کر کے مندرجہ ذیل مثال سے طریقے کار کی وضاحت کی گئی ہے۔



مثال: مرکز معلوم کر کے دائرہ مکمل کریں جس کی قوس دی گئی ہو۔
معلوم: محیط کا ایک حصہ یا ایک قوس دی ہوئی ہے
مطلوب: دائرہ مکمل کرنا جس کی قوس دی ہوئی ہے۔
مراحل عمل:

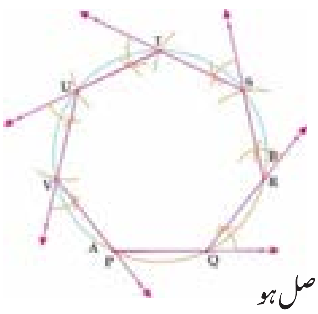
(i) ایک قوس AB کھینچیں
(ii) A اور B کے علاوہ قوس AB پر نقطہ C لیں
(iii) $\overline{AC}$ اور $\overline{BC}$ کھینچیں .
(iv) $\overline{AC}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{PQ}$ کھینچیں .
(v) $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{XY}$ کھینچیں
(vi) $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{XY}$ دونوں ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں جو کہ دائرہ کا مرکز ہے۔
(vii) O کو مرکز مان کر رداس قطعہ $m\overline{AO}$ یا $m\overline{OB}$ یا $m\overline{OC}$ کے برابر دائرہ کا باقی حصہ کھینچیں۔

پس ہمیں دی ہوئی قوس AB سے مکمل دائرہ ملا

(b) بغیر مرکز معلوم کئے دائرہ مکمل کرنا جب اس کے محیط کا ایک حصہ دیا گیا ہو۔

ہم مرکز معلوم کئے بغیر دائرہ مکمل کر سکتے ہیں۔ منظم الکثیر الاضلاع کی مدد سے جب ایک قوس دی گئی ہو۔

ہم اندرونی اور بیرونی زاویوں کی مدد سے جو کہ متماثل ہیں منظم الاضلاع کھینچ سکتے ہیں مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے طریقہ کار کی وضاحت کی گئی ہے۔



مثال: مرکز معلوم کئے بغیر دائرہ مکمل کریں جس کی قوس AB دی گئی ہو۔
معلوم: دائرہ کی ایک قوس AB
مطلوب: AB قوس کا دائرہ مکمل کرنا۔
مراحل عمل:

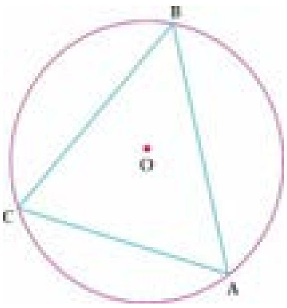
(i) دی گئی $\widehat{AB}$ قوس کے دو متماثل وتر $\overline{PQ}$ اور $\overline{QR}$ کھینچیں
(ii) $\angle Q$ کے متماثل بیرونی $\angle R$ کھینچیں اور $\overline{PQ}$ کے متماثل $\overline{ST}$ کھینچیں۔
(iii) $\angle R$ کے متماثل بیرونی $\angle S$ کھینچیں اور $\overline{PQ}$ کے متماثل $\overline{ST}$ کھینچیں۔
(iv) اس ہی طریقے کار سے ہمیں نقاط S، T، U اور V اور $\angle$ ملتے ہیں لہذا ہمیں منظم سبع حاصل ہو
(v) PQRSTU اور V کی نقاطی قوس بنائیں یہ نقاطی قوسیں دائرہ مکمل کرتی ہیں۔

مشق نمبر 29.1

.1 کسی دائروی اشیاء کی مدد سے دائرہ کھینچیں۔اس کا مرکز تعین کریں
.2 تین غیر ہم خط نقاط X، Y، Z لیں اور ان تینوں نقاط سے گزرتا ہوا دائرہ کھینچیں۔
.3 کسی دائروی جسم کی مدد سے قوس صغیرہ AB کھینچیں۔ مرکز معلوم کرکے دائرہ مکمل کریں۔
.4 کسی دائروی جسم کی مدد سے قوس کبیرہ ABC کھینچیں۔ مرکز معلوم کئے بغیر دائرہ مکمل کریں۔
.5 کسی دائروی جسم کی مدد سے قوس کبیرہ AB کھینچیں۔ مرکز معلوم کئے بغیر دائرہ مکمل کریں۔

29.2 کثیر الاضلاع سے منسلک دائرے (Circles all acted to polygan)

کثیر الاضلاع کے تین یا تین سے زیادہ اطراف کی بند شکل ہوتی ہے مثال کے طور پر مثلث، چوکور، مخمّس، مسدس وغیرہ کثیر الاضلاع سے منسلک دائرے ایسے دائرے ہیں جو کثیر الاضلاع کے تمام رداسوں سے گزرتے ہوں یا کثیر الاضلاع اطراف کو چھوتے ہوں۔



29.2 (i) دی گئی مثلث کا محاصر دائرہ

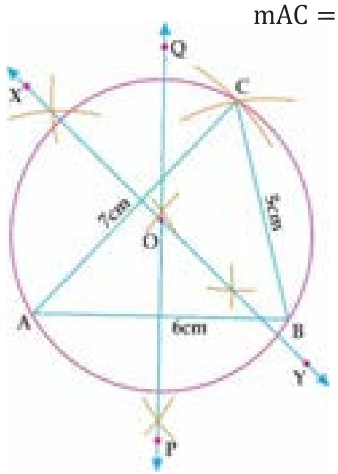
ایک مثلث کا محاصر دائرہ (Circum Circle of Triangle)

ایک دائرہ جو مثلث کے تمام داسوں سے گزرتا ہے وہ مثلث کا محاصر دائرہ کہلاتا ہے۔
شکل میں کا محاصر دائرہ ΔABC دیا گیا ہے جس کا مرکز O ہے جو محاصر مرکز کہلاتا ہے

مثال: ΔABC کا محاصر دائرہ کھینچیں جس میں $m\overline{AB} = 6cm$ ، $m\overline{BC} = 5cm$ اور $m\overline{AC} = 7cm$

معلوم: مثلث ABC ہے جس میں $m\overline{AB} = 6\text{ cm}$ ، $m\overline{BC} = 5cm$ اور $m\overline{AC} = 7cm$

مطلوب: ΔABC کا محاصرہ دائرہ کھینچنا

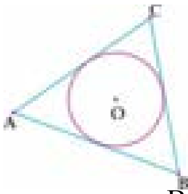


مراحل عمل:

(i) دیئے گئے مواد کی مدد سے ΔABC بنائیں
(ii) $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{PQ}$ کھینچیں
(iii) $\overline{AC}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{XY}$ کھینچیں
(iv) دونوں عمودی ناصف $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{XY}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔
(v) O کو مرکز مان کر رداس $m\overline{OA}$ یا $m\overline{OB}$ یا $m\overline{OC}$ کے برابر ایک دائرہ کھینچیں جو A، B اور C سے گزرتا ہے۔
یہ مثلث کا مطلوبہ محاصر دائرہ ہے۔

29.2 (ii) دیئے گئے مثلث کا محصور دائرہ یا مثلث کا محصور دائرہ:

(Inscribed circle or in-circle of Triangle)

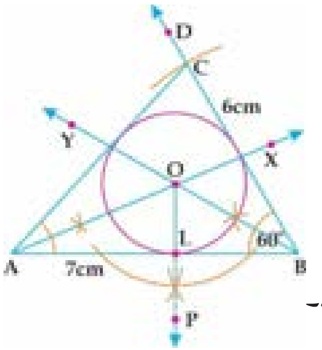


ایک دائرہ جو مثلث کی تمام اطراف چھوتا ہے وہ مثلث کا محصور دائرہ کہلاتا ہے۔
متعلہ شکل میں ΔABC مثلث کا محصور دائرہ جس کا مرکز O ہے جو اندرونی مرکز (In-center) کہلاتا ہے۔

مثال: ΔABC کا محصور دائرہ کھینچیں جس میں $m\overline{AB} = 7cm$، $m\angle B = 60°$ اور $m\overline{BC} = 6\ cm$

معلوم: مثلث جس میں ABC $m\overline{AB} = 7cm$، $m\angle B = 60°$ اور $m\overline{BC} = 6cm$

مطلوب: ΔABC کا محصور دائرہ کھینچنا



مراحل عمل:

(i) دیئے گئے مواد کی مدد سے ΔABC بنائیں .

(ii) $\angle A$ کا اندرونی ناصف $\overrightarrow{AX}$ کھینچیں

(iii) $\angle B$ کا اندرونی ناصف $\overrightarrow{BY}$ کھینچیں

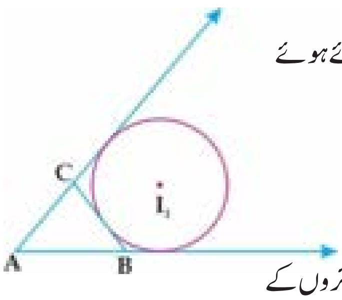
(iv) دونوں اندرونی ناصف $\overrightarrow{AX}$ اور $\overrightarrow{BY}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

(v) نقطہ O سے $\overline{AB}$ پر عمود $\overrightarrow{OP}$ کھینچیں. $\overrightarrow{OP}$ کو $\overline{AB}$ نقطہ L پر قطع کرتا ہے۔

(vi) O کو مرکز مان کر اور رداس $m\overline{OL}$ برابر دائرہ بنائیں جو ΔABC کی تینوں اطراف کو چھوتا ہے یہ مطلوب دائرہ محصور دائرہ ہے

29.2 (iii) دیئے گئے مثلث کا جانبی دائرہ:

جانبی دائرہ (Escribed Circle or Ex-circle)



دائرہ جو مثلث کی ایک بیرونی ضلع کو چھوتا ہے اور دائرے کے دو بڑھائے ہوئے اطراف کو اندرونی طرف سے چھوتا ہے یہ جانبی دائرہ کہلاتا ہے۔

دی ہوئی شکل میں مثلث ΔABC میں راس A مقابل جانبی دائرہ ہے جس کا مرکز I_1 ہے جو جانبی دائرہ کا مرکز (ex-circle) کہلاتا ہے۔

اس ہی طرح I_2 اور I_3 ΔABC کے راس B اور C کے مقابل جانبی دائروں کے مرکز ہیں۔

مثال: ΔABC کے راس A کے مقابل جانبی دائرہ کھینچیں جبکہ $m\overline{AB} = 5cm$، $m\angle A = 30°$، $m\angle B = 60°$

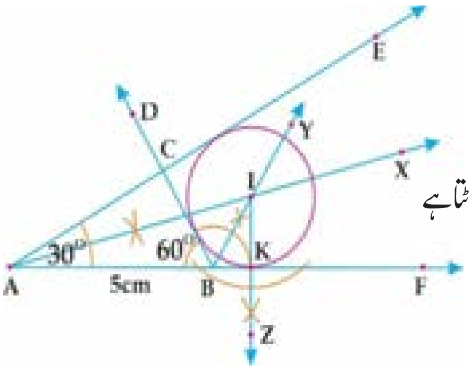
معلوم: ٹلث ABC جس میں $m\overline{AB} = 5cm$، $m\angle A = 30°$ ء $m\angle B = 60°$

مطلوب: ΔABC کے راس A کے مقابل ایک جانبی دائرہ کھینچیں

مراحل عمل:

(i) دیئے گئے مواد کی مدد سے ΔABC بنائیں

(ii) C کو $\overline{AC}$ سے پرے اور $\overline{AB}$ B سے پرے بڑھائیں بالترتیب جو دو بیرونی زاویے جو BCE اور CBF بناتے ہیں



(iii) $\angle A$ کا اندرونی ناصف $\overrightarrow{AX}$ کھینچیں

(iv) $\angle CBF$ کا اندرونی ناصف $\overrightarrow{BY}$ کھینچیں

(v) دونوں ناصف $\overrightarrow{AX}$ اور $\overrightarrow{BY}$ ایک دوسرے کو نقطہ I پر قطع کرتے ہیں

(vi) $\overrightarrow{AF}$ پر ایک عمود $\overrightarrow{IZ}$، I کھینچیں جو $\overrightarrow{AF}$ کو نقطہ K پر کاٹتا ہے

(vii) I کو مرکز مان کر رداس mIK کے برابر ایک دائرہ کھینچیں جو $\overline{BC}$ کو بیرونی اور AE اور $\overrightarrow{AF}$ اندرونی چھوتا ہے

یہ ΔABC کے راس A مقابل مطلوبہ جانبی دائرہ ہے۔

29.2 ایک دائرے کا مساوی الاضلاع کا محاصر کھینچنا

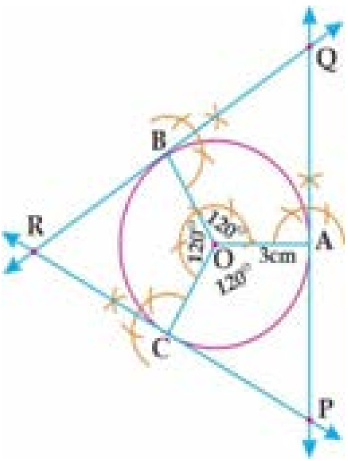
ہم دیئے گئے دائرے کے گرد ایک مساوی الوضلاع مثلث کھینچیں گے در حقیقت اگر دائرے کو تین مماثل قوسین میں تقسیم کیا جائے اور نقاط تقسیمی پر مماس کھینچیں جائے جو دائرے کے گرد مساوی الاضلاع مثلث الاضلاع ہونگے

یہ طریقہ مندرجہ ذیل مثال سے واضح کیا گیا ہے

مثال: 3cm اداس کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے اور دائرے کا مساوی الاضلاع محاصر مثلث کنھچیں

معلوم: 3cm اداس کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے

مطلوب: دیئے گئے دائرے کا مساوی الاضلاع محاصر مثلث کھینچا



مراحل عمل:

(i) 3cm رداس کا دائرہ کنھچیں جس کا مرکز O ہے

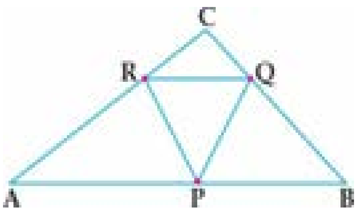
(ii) مرکز زاویے کو تین متماثل زاویوں میں تقسیم کرتی ہوئے دائرے کو تین متماثل قوسین $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ اور $\overset{\frown}{AC}$ میں تقسیم کریں۔

(iii) نقاط B,A اور C پر قائمہ زاویے بناتے ہوئے ان نقاط پر مماس کھینچیں۔

(iv) یہ مماس ایک دوسرے کو نقاط Q,P اور R پر قطع کرتے ہیں۔

اب PQR مطلوبہ مساوی الاضلاع مثلث ہے۔

29.2 (v) دیئے گئے مثلث میں مساوی الاضلاع محصور مثلث کھینچنا

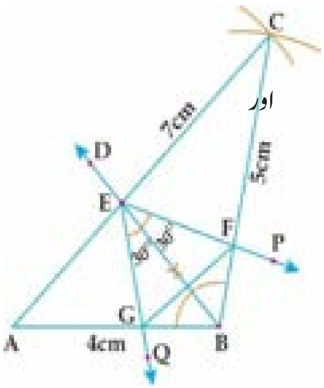


ہم جانتے ہیں اگر مساوی الاضلاع مثلث کے تمام راس کی دیئے گئے مثلث کے تمام راس کی دیئے گئے مثلث کے مختلف اضلاع پر واقع ہوتے ہیں تو یہ دیئے گئے ΔABC مثلث کا مساوی الاضلاع محصور مثلث PQR کہا جاتا ہے۔

مثال: ΔABC میں مساوی الاضلاع محصور مثلث کھینچیں جبکہ $m\overline{BC} = 5cm$، $m\overline{AB} = 4cm$ اور $m\overline{AC} = 7cm$

معلوم: ایک مثلث ABC جس میں $m\overline{AB} = 4cm$, $m\overline{BC} = 5cm$ اور $m\overline{AC} = 7cm$

مطلوب: ΔABC میں مساوی الاضلاع محصور مثلث کھینچنا



مراحل عمل:

(i) دیئے گئے مواد سے ΔABC بنائیں۔

(ii) $\angle B$ کا اندرونی ناصف $\overrightarrow{BD}$ کھینچیں جو مناسب زاویہ ہے (عموماً بڑے سے بڑا زاویہ)۔

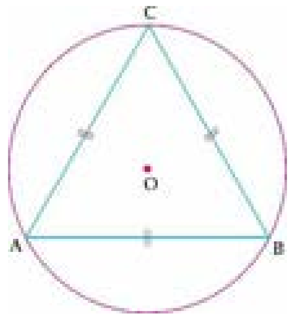
(iii) اندرونی ناصف $\overrightarrow{BD}$ نقطہ E پر $\overline{AC}$ کو قطع کرتا ہے۔

(iv) نقطہ E پر 30^o درجہ پیمائش دو زاویے BEP اور BEQ کھینچیں

(v) $\overrightarrow{EP}$ اور $\overrightarrow{EQ}$ بالترتیب $\overline{BC}$ اور $\overline{AB}$ کو نقاط F اور G پر قطع کرتے ہیں

(vi) $\overline{FG}$ کھینچیں

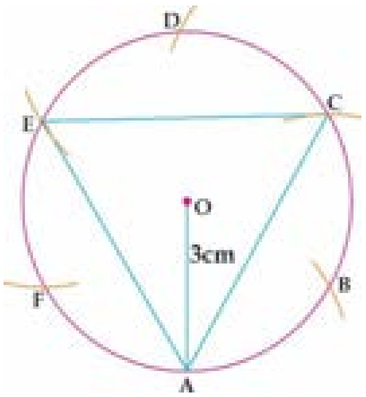
اب ΔABC کا مطلوبہ مساوی الاضلاع محصور مثلث EFG ہے



29.2 (vi) دائرے کا مساوی الاضلاع کے محصور مثلث بنانا

دائرے کا مساوی الاضلاع محصور مثلث

ایک مثلث دائرے کا مساوی الاضلاع محصور مثلث کہلاتا ہے اور اس کے تمام راس دائرے سے گزرتے ہیں۔ متعلقہ شکل میں مثلث دائرے کا مساوی الاضلاع محصور مثلث ABC ہے جس کا مرکز O ہے۔



مثال: محصور مثلث بنائیں اور جس کا رداس 3cm ہے

معلوم: 3cm رداس کا دائرہ جس کا مرکز O ہے

مطلوب: دیئے گئے دائرے کا مساوی الاضلاع محصور مثلث کھینچنا

مراحل عمل:

(i) 3cm رداس ایک دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے

(ii) دائرہ پر ایک نقطہ A لیں، نقطہ A سے شروع کریں اور دائرہ کو چھ متماثل حصوں میں B, C, D, E اور F پر تقسیم کریں۔

(iii) $\overline{AC}$، $\overline{AE}$ اور $\overline{CE}$ کھینچیں

اب AEC دیئے گئے دائرے کا مطلوبہ مساوی الاضلاع محصور مثلث ہے۔

مشق 29.2

1. ΔABC بنائیں اور ہر صورت میں اس کے محاصر دائرے کھینچیں

(i) $m\angle A = 50^\circ$ اور $m\overline{AC} = 6cm,\ m\overline{AB} = 5.5cm$

(ii) $m\overline{AC} = 5cm$ اور $m\overline{BC} = 4.5cm,\ m\overline{AB} = 6cm$

2. ΔPQR بنائیں اور ہر صورت میں اس کے محصور دائرے کھینچیں

(i) $m\overline{RP} = 5.5cm$ اور $m\overline{QR} = 6.5cm,\ m\overline{PQ} = 5cm$

(ii) $m\angle Q = 50^\circ$ اور $m\angle P = 60^\circ,\ m\overline{PQ} = 6cm$

3. ΔXYZ بنائیں اور ہر صورت میں $\angle Y$ کے مقابل جانبی دائرہ کھینچیں

(i) $m\angle Y = 30^\circ$ اور $m\overline{YZ} = 5cm,\ m\overline{XY} = 4.5cm$

(ii) $m\overline{XZ} = 2.5cm$ اور $m\overline{YZ} = 6cm,\ m\overline{XY} = 5.5cm$

4. 3.5cm رداس کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے اور اس دائرے کا مساوی الاضلاع محاصر مثلث بنائیں۔

5. ΔPQR میں مساوی الاضلاع محصور مثلث کھینچیں جبکہ
$m\overline{PR} = 8cm$ اور $m\overline{QR} = 5.5cm,\ m\overline{PQ} = 4.5cm$

6. دائرے کا مساوی الاضلاع محصور مثلث بنائیں جس کا مرکز O اور رداس 3.8cm ہے

29.2 (vii) دیئے گئے دائرہ کا محاصر مربع بنانا:

دیئے گئے دائرے کے محاصر یا محصور مربع، مسدس یا کوئی اور کثیر الاضلاع بنانے سے پہلے ہمیں دائرے سے منسلک منظم کثیر الاضلاع سے تعلق مندرجہ ذیل مسائل ضرور جاننا چاہیے۔

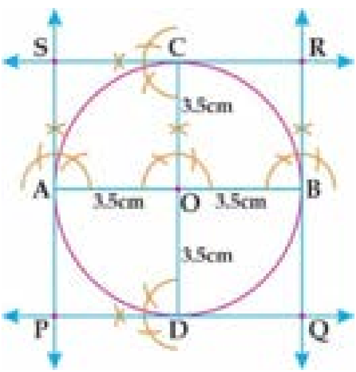
اگر دائرے کا محیط n برابر قوسیں میں تقسیم کیا جائے تو

(i) نقاطی تقسیمی دائرے کے منظم محصور n- الاضلاع کے راس ہیں۔

(ii) ان نقاط سے گزرنے والے دائرے کے مماس دائرے کے محاصر منظم کثیر الاضلاع کی n- اطراف ہوتیں ہیں۔

اس کا مطلب ہے کہ اگر ہم دیئے ہوئے دائرے کے محاصر یا محصور مربع، منظم مخمس، منظم مسدس وغیرہ بناتے ہیں تو ہمیں دائری کو بالترتیب چار، پانچ، چھ وغیرہ برابر حصوں میں تقسیم کرنا پڑتا ہے۔

آئیں ہم مندرجہ ذیل مثال: کی مدد سے سیکھتے ہیں کہ کیسے دائرہ کا محاصر مربع بناتے ہیں۔



مثال: دائرے کا محاصر مربع بنائیں جس کا 3.5cm رداس اور مرکز O ہے۔

معلوم: دائرہ جس کا رداس 3.5cm اور مرکز O ہے۔

مطلوب: دائرے کا محاصر مربع بنانا

مراحل عمل:

(i) 3.5cm رداس کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے۔

(ii) ایک قطر $\overline{AB}$ کھینچیں

(iii) دوسرے قطر $\overline{CD}$ کھینچیں جو $\overline{AB}$ پر عمود ہے

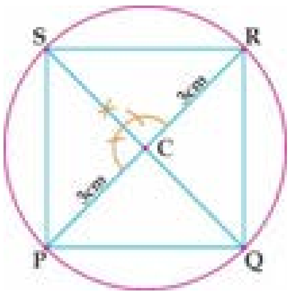
(iv) نقاط A، B، C اور D پر مماس کھینچیں۔

(v) یہ مماس ایک دوسرے کو نقاط P، Q، R اور S قطع کرتے ہیں دیئے گئے دائرے کا مطلوبہ محاصر مربع PQRS ہے۔
آئیں ہم مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے سیکھتے ہیں کہ کیسے دائرہ کا محصور مربع بناتے ہیں۔

مثال: دائرے کا محصور بنائیں جس کا رداس 3cm اور مرکز C ہے۔

معلوم: ایک دائرہ جس کا رداس 3cm اور مرکز C ہے۔

مطلوب: دائرے کا محصور مربع بنائیں۔



مراحل عمل:

(i) 3cm کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز C ہے

(ii) $\overline{PR}$ قطر کھینچیں

(iii) $\overline{QS}$ قطر کھینچیں جو $\overline{PR}$ پر عمود ہے۔

(iv) دائرے کو نقاط P، Q، R اور S پر چار برابر حصوں میں تقسیم کریں۔

(v) $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RS}$ اور $\overline{SP}$ کھینچیں یہ دائرے کا مطلوبہ محصور مربع PQRS ہے۔

29.2 (viii) دیئے گئے کا محاصر منظم مسدس بنانا

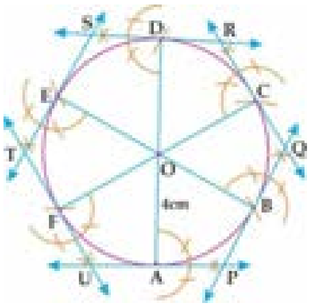
مندرجہ ذیل مثال کی مدد دیئے گئے دائرے کا محاصر منظم مسدس بنانے کے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال: 4cm رداس کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے۔دائرہ کا محاصر منظم مسدس بنائیں۔

معلوم: رداس کا دائرہ جس کا مرکز O ہے

مطلوب: دائرے کا محاصر منظم مسدس بنانا۔

مراحل عمل:



(i) 4cm رداس کا ایک دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے

(ii) دائرہ پر نقطہ A لیں۔

(iii) A سے شروع کریں اور $m\overline{OA}$ رداس کے برابر دیئے گئے دائرے پر نقاط A، B، C، D اور F پر چھ قوسیں لگائیں اور دائرے کو چھ برابر حصوں میں تقسیم کریں

(iv) اب نقاط پر مماس کھینچیں

(v) ایک مماس ایک دوسرے کو نقاط P، Q، R، S، T اور U پر قطع کرتے ہیں۔
دیئے گئے دائرہ کا PQRSTU مطلوبہ محاصر مسدس ہے۔

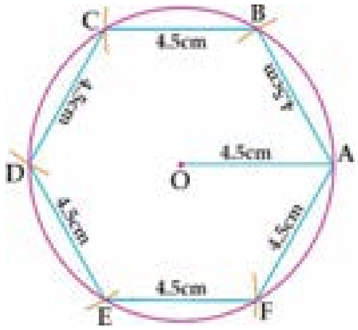
29.2 (ix) دیئے گئے دائرے کا محصور منظم مسدس بنانا

مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے محصور منظم مسدس بنانے کے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال: 4.5 cm رداس کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے۔دائرے کا محصور منظم مسدس بنانا

معلوم: 4.5 cm رداس کا دائرہ جس کا مرکز O ہے۔

مطلوب: دیئے گئے دائرے کا محصور منظم مسدس بنانا



مراحل عمل:

(i) O کو مرکز مان کر 4.5cm دائرہ کھینچیں

(ii) دائرے پر ایک نقطہ A لیں

(iii) A سے شروع کریں اور رداس $m\overline{AO}$ یا 4.5cm کے برابر دیئے گئے دائرے پر نقاط A، B، C، D، E اور F پر چھ قوسیں لگائیں دائرے کو چھ برابر حصوں میں تقسیم کریں

(iv) $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$، $\overline{DE}$، $\overline{EF}$ اور $\overline{AF}$ کھینچیں

یہ دیئے گئے دائرہ کا مطلوبہ محصور منظم مسدس ABCDEF ہے۔

مشق 29.3

1. 4.2cm رداس کا دائرہ جس کا مرکز C ہے اس کا محاصر مربع بنائیں
2. 3.6cm رداس کا دائرہ جس کا مرکز O ہے اس کا محصور مربع بنائیں
3. 4.8cm رداس کا دائرہ جس کا مرکز O ہے اس کا محاصر منظم مسدس بنائیں
4. 4.4cm رداس کا دائرہ جس کا مرکز C ہے اس کا محصور منظم مخمس بنائیں
5. 4.3cm کا دائرہ جس کا مرکز O ہے اس کا محصور منظم مخمس بنائیں (اشارہ: مرکز پر پانچ متماثل زاوے کھینچیں)

3. 29 دائرے کا مماس (Tangents to a circle):

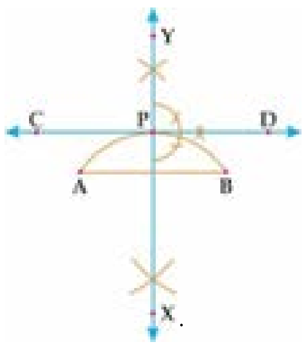
دائرے کا مماس ایک ایسا خط ہوتا ہے جو دائرے کسی ایک نقطے کو چھوتا ہے۔ دائرے کا مماس اور رداس قطع ہمیشہ کسی نقطے پر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔

29.3 (i) دیئے گئے نقطہ P سے مرکز کو استعمال کئے بغیر دی گئی قوس کا مماس کھینچا جب نقطہ

* قوس کا وسطی نقطہ ہو
* قوس کے آخری سرے پر واقع ہو
* قوس کے باہر واقع ہو

صورت 1: جب نقطہ P قوس کا وسطی نقطہ ہو

دیئے گئے نقطہ P سے مرکز کو استعمال کئے بغیر دی گئی قوس کا مماس کھینچا جب نقطہ P قوس کا وسطی نقطہ ہو مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے۔



مثال: ایک قوس AB لیں مرکز کو استعمال کئے بغیر $\overset{\frown}{AB}$ قوس کے وسطی نقطہ P سے قوس $\overset{\frown}{AB}$ کا مماس کھینچیں

معلوم: نقطہ P قوس $\overset{\frown}{AB}$ کا وسطی نقطہ ہے

مطلوب: مرکز کو استعمال کئے بغیر P سے $\overset{\frown}{AB}$ مماس کھینچیں

مراحل عمل:

(i) ایک قوس AB لیں

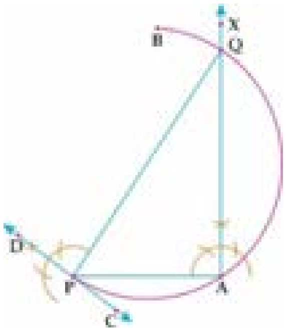
(ii) وتر AB کھینچیں

(iii) $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{XY}$ کھینچیں جو قوس کو نقطہ P پر کاٹتا ہے۔

(iii) $\overleftrightarrow{XY}$ پر $\overleftrightarrow{CD}$ ایک عمودی نقطہ P پر کھینچیں پس $\overleftrightarrow{CD}$ مطلوبہ مماس ہے۔

صورت 2: جب نقطہ P قوس کے آخری سرے پر واقع ہو
دیے گئے نقطہ P سے مرکز کو استعمال کئے بغیر دی گئی قوس کا مماس کھینچا جب نقطہ P قوس کے آخری سرے پر واقع ہو۔
مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال: ایک قوس $\overset{\frown}{PAB}$ لیں قوس $\overset{\frown}{PAB}$ کے آخری سرے پر واقع نقطہ P سے مرکز کو استعمال کئے بغیر مماس کھینچیں۔



معلوم: نقطہ P، قوس $\overset{\frown}{PAB}$ کا آخری سرے پر واقع ہے

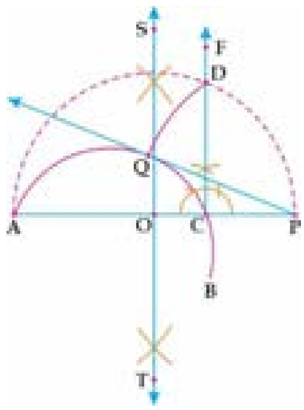
مطلوب: مرکز استعمال کئے بغیر قوس $\overset{\frown}{PAB}$ کے آخری سرے واقع نقطہ P سے مماس کھینچیں۔

مراحل عمل:

(i) کسی مناسب رداس کی قوس $\overset{\frown}{PAB}$ کھینچیں۔
(ii) وتر $\overline{AP}$ کھینچیں
(iii) نقطہ A پر $\overline{PA}$ کا عمود $\overrightarrow{AX}$ کھینچیں جو دی گئی قوس کو نقطہ Q پر کاٹتا ہے۔
(iv) قوس کا قطر $\overline{PQ}$ کھینچیں
(v) نقطہ P پر $\overline{PQ}$ کا عمود $\overrightarrow{CD}$ کھینچیں
لہذا $\overleftrightarrow{CD}$ مطلوبہ مماس ہے۔

صورت 3: جب نقطہ P قوس کے باہر واقع ہے
دیے گئے نقطہ P سے مرکز کو استعمال کئے گئے بغیر قوس کا مماس کھینچیں جب نقطہ P قوس کے باہر واقع ہے۔ مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال: قوس AB لیں۔ نقطہ P سے قوس AB کا مماس کھینچیں جو قوس کے باہر مرکز کو استعمال کئے بغیر ہے۔



معلوم: ایک نقطہ قوس $\overset{\frown}{AB}$ کے باہر

مطلوب: نقطہ P سے ایک قوس AB کا مماس کھینچنا مرکز کو استعمال کئے بغیر

مراحل عمل:

(i) اپنی پسند کی ایک قوس AB کھینچیں
(ii) قوس $\overset{\frown}{AB}$ کے باہر ایک نقطہ P لیں
(iii) $\overline{AP}$ کھینچیں جو دیے گئے قوس کو C پر کاٹتا ہے۔
(iv) $\overline{AP}$ کا عمودی ناصف $\overline{ST}$ کھینچیں جو $\overline{AP}$ کو نقطہ O پر کاٹتا ہے
(v) O کو مرکزی مان کر اور رداس $m\overline{AO}$ یا $m\overline{OP}$ کے برابر نصف دائرہ کھینچیں۔
(vi) نقطہ C پر $\overline{AP}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{CF}$ کھینچیں جو نصف دئرہ کو نقطہ D پر کاٹتا ہے۔
(vii) P کو مان کر اور $m\overline{PD}$ کے برابر رداس کی قوس کھینچیں جو $\overset{\frown}{AB}$ قوس کو نقطہ پر Q کاٹئی ہے۔
(viii) $\overrightarrow{PQ}$ کھینچیں
پس $\overrightarrow{PQ}$ مطلوبہ مماس ہے۔

29.3 (ii) کسی نقطہ P سے دیے گئے دائرے پر مماس کھینچنا جب P واقع ہو۔

- P محیط پر
- P دائرے سے باہر

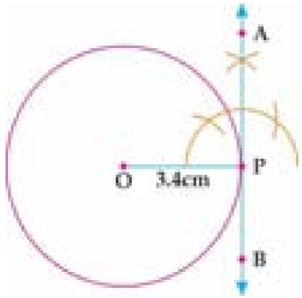
صورت ا : جب نقطہ P محیط پر واقع ہو

دیے ہوئے دائرے پر نقطہ P سے مماس کھینچنا جب کہ نقطہ P محیط پر واقع ہے مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے

مثال: O کو مرکز مان کر 3.4cm رداس کا دائرہ کھینچیں
دائرے کے محیط P پر مماس کھینچیں

معلوم: 3.4cm رداس کا دائرہ جس کا مرکز O ہے اور نقطہ P اس کے محیط پر واقع ہے

مطلوب: نقطہ P سے دائرہ کا مماس کھینچنا



مراحل عمل:

(i) نقطہ O کو مرکز مان کر 3.4cm رداس کا دائرہ کھینچیں
(ii) اس کے محیط پر نقطہ P لیں
(ii) $\overline{OP}$ کھینچیں
(iii) نقطہ P سے $\overline{OP}$ پر عمود $\overleftrightarrow{AB}$ کھینچیں
پس $\overleftrightarrow{AB}$ مطلوبہ مماس ہے

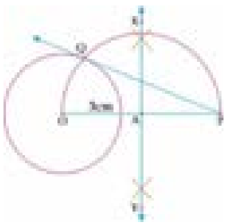
صورت 2 : جب نقطہ P دائرے سے باہر واقع ہے

نقطہ P سے دیئے ہوئے دائرہ کا مماس کھینچنا جو کہ دائرے باہر واقع ہے کو مندرجہ ذیل مثال سے کھینچنے کے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال: 3cm کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز O ہے۔دائرے کے باہر نقطہ P سے دائرے پر مماس کھینچیں۔

معلوم: 3cm رداس کا ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے۔دائرے کے باہر نقطہ P

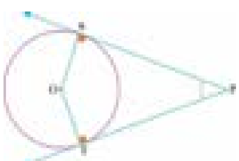
مطلوب: دائرے کے باہر نقطہ P سے دائرے کا مماس کھینچنا۔



مراحل عمل:

(i) O کو مرکز مان کر 3cm کا دائرہ کھینچیں
(ii) دائرے کے باہر ایک نقطہ P لیں
(iii) $\overline{OP}$ کھینچیں
(iv) $\overline{OP}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{XY}$ کھینچیں جو اسے نقطہ A پر کاٹتا ہے
(v) A کو مرکز مان کر رداس $m\overline{AO}$ کے برابر نصف دائرہ کھینچیں جو دیئے گئے دائرے کو نقطہ Q پر کاٹتا ہے۔
(vi) $\overrightarrow{PQ}$ کھینچیں
پس $\overrightarrow{PQ}$ مطلوبہ مماس ہے

9.3 (iii) ایک دائرے کے دو مماس کھینچنا جو دیئے گئے زاویے پر باہم ملتے ہیں



غور کریں ایک دائرے کا مرکز O ہے۔ $\overline{PS}$ اور $\overline{PT}$ دائرے کے دو مماس ہیں
جبکہ مماس کے درمیان زاویہ $\angle P$ ہے۔

یہاں چونکہ $m\angle PSO = 90^\circ$ $(\because \overline{OS} \perp \overrightarrow{PS})$

اور چونکہ $m\angle PTO = 90^\circ$ $(\because \overline{OT} \perp \overrightarrow{PT})$

چوکور PSOT میں

یعنی $m\angle P + m\angle PSO + m\angle O + m\angle PTO = 360^\circ$

$$m\angle P + 90^\circ + m\angle O + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle P + m\angle O = 180^\circ$$

یعنی $\Rightarrow m\angle O = 180^\circ - m\angle P$

دائرے کا مرکزی زاویہ جو نقاط صلاپ کو ملاتا ہے۔ مماس کے درمیان زاویے کا سپلیمینٹ ہوتا ہے۔

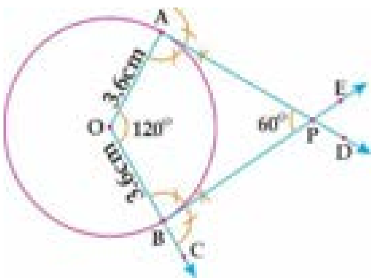
اس حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے ہم ایک دائرے کے دو مماس بنائیں گے جو ایک دوسرے کو ایک دیئے گئے زاویہ پر ملینگے

مثال: 3.6cm رداس کا ایک دائرے پر دو مماس کھینچیں جس کا مرکز O ہے جو 60° کے زاویے پر باہم ملتے ہیں۔

معلوم: 3.6cm رداس کا ایک دائرہ جس مرکز O ہے جبکہ مماس کے درمیان زاویہ 60° ہے

مطلوب: دیئے گئے دائرے پر تو مماس کھینچنا جو باہم 60° پر ملتے ہیں

مراحل عمل:



(i) O کو مرکز مان کر 3.6cm رداس کا دائرہ کھینچیں

(ii) دائرے پر ایک نقطہ A لیں اور اُس O سے ملائیں

(iii) 120° کا زاویہ $\angle AOC$ کھینچیں (یعنی $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$)

یوں $\overline{OC}$ سے دیئے گئے دائرے کو نقطہ B پر کاٹتا ہے۔

(iv) نقطہ A پر $\overline{OA}$ کا عمود $\overrightarrow{AD}$ کھینچیں

(v) نقطہ B پر $\overline{OB}$ کا عمود $\overrightarrow{BE}$ کھینچیں

(vii) دونوں $\overline{AD}$ اور $\overline{BE}$ ایک دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہیں

پس $\overline{AP}$ اور $\overline{BP}$ مطلوبہ مماس ہیں جبکہ $m\angle P = 60^\circ$.

مشق 29.4

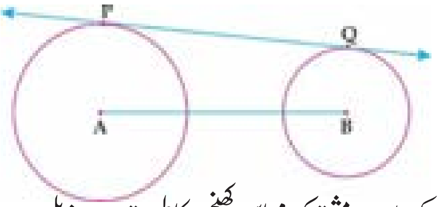
1. صغیرہ قوس $\overset{\frown}{PQ}$ لیں $\overset{\frown}{PQ}$ کے وسطی نقطے A سے مماس کھینچیں مرکز کو استعمال کئے بغیر
2. کبیرہ قوس $\overset{\frown}{PQR}$ لیں۔ $\overset{\frown}{PQR}$ کے آخری سرے پر واقع نقطہ Q سے مماس کھینچیں مرکز کو استعمال کیئے بغیر۔
3. صغیرہ قوس $\overset{\frown}{XY}$ لیں۔ $\overset{\frown}{XY}$ کے باہر نقطے Z سے مماس کھینچیں مرکز کو استعمال کئے بغیر۔
4. 2.9cm رداس کا دائرہ کھینچیں جس میں مرکز C دائرے کے کا نقطہ P سے دائرہ کا مماس کھینچیں۔
5. 3.2cm رداس کا دائرہ کھینچیں جس کا مرکز P ہے۔ نقطہ Q سے دائرے کا مماس کھینچیں جو کہ مرکز P سے 8cm کے فاصلے پر ہے۔
6. 3.3 رداس کا ایک دائرہ پر دو مماس کھینچیں جبکہ مرکز C ہے وہ باہم زاویے پر ملتے ہیں

(i) 50° (ii) 63°

29.3 (iv) کھینچنا

* دو مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس یا بیرونی مماس۔
* دو مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس یا نیرونی مماس کھینچنا راست۔

(a) دو مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس یا بیرونی مماس کھینچنا راست مشترکہ مماس
:(Direct Common Tangent)



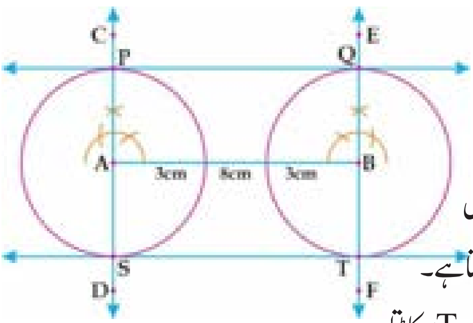
ایک مشترک مماس راست مشترک مماس کہتا ہے یا دو دائروں کا بیرونی مماس کہلاتا ہے۔ اگر یہ دیئے گئے دونوں دائروں کے مرکزوں کو ملانے والی قطعہ خط کو قطع نہیں کرتی ہیں

شکل میں $\overleftrightarrow{PQ}$ دونوں دائروں کے راست مشترک مماس ہیں جن کے مراکز A اور B ہیں۔ نوٹ: $\overleftrightarrow{PQ}$ قطع نہیں کرتا ہے $\overline{AB}$ کو۔ دو مساوی دائروں کے راست مشترک مماس کھینچیں کا طریقہ مندرذیل مثال سے واضح کیا گیا ہے۔

مثال: دو مساوی دائروں کے راست مشترک مماس کھینچیں جن کے مراکز نقطہ A اور B پر ہیں اور ہر ایک کا رداس 3cm ہے اور $m\overline{AB} = 8cm$ ہے۔

معلوم: دو مساوی دائرے ہر ایک کا رداس 3cm اور مراکز A اور B ہیں اور $m\overline{AB} = 8cm$

مطلوب: دیئے گئے دائروں کے راست مشترک مماس کھینچنا



مراحل عمل:

(i) 8cm کا $\overline{AB}$ کھینچیں

(ii) A اور B کو مرکز مان کر 3cm رداس کے دو مساوی دائرے کھینچیں

(iii) نقطہ A پر $\overline{AB}$ پر عمود $\overleftrightarrow{CD}$ کھینچیں جو دائرے کو نقطہ P اور S پر کاٹتا ہے۔

(iv) نقطہ B پر $\overline{AB}$ پر عمود $\overleftrightarrow{EF}$ کھینچیں جو دوسرے دائرے کو نقطہ Q اور T پر کاٹتا ہے۔

(v) $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{SP}$ کھینچیں

(vi) پس $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{ST}$ دیئے گئے دائروں کے مطلوبہ راست مشترک مماس ہیں۔

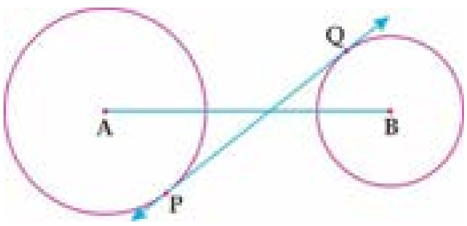
(b) دو مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس یا اندرونی مماس کھینچنا

معکوس مشترکہ مماس (Transverse Common Tangent):

ایک مشترکہ مماس معکوس مشترکہ مماس یا دو دائروں کا اندرونی مماس کہلاتا ہے اگر یہ دیئے گئے دائروں کے مراکز کو ملانے والی قطعہ خط کو قطع کرتا ہے۔

شکل میں PQ دو دیئے گئے دائروں کا معکوس مشترکہ مماس ہے جن کے مراکز A اور B ہیں۔

نوٹ: $\overleftrightarrow{PQ}$ قطع کرتا ہے $\overline{PB}$ کو۔ دو مساوی دائروں کا معکوس مشترکہ مماس کھینچے کا طریقہ مندرجہ ذیل مثال سے واضح کیا گیا ہے۔



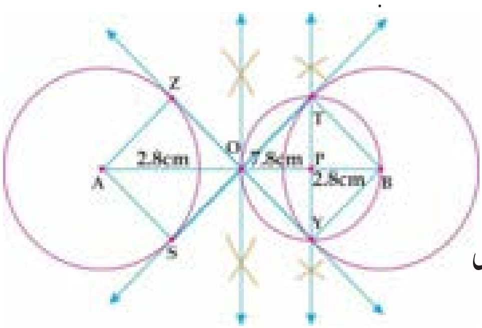
مثال: دو مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس کھینچیں جن کے رداس 2.8cm اور مراکز A اور B ہیں جبکہ $m\overline{AB} = 7.8cm$ ہے۔

طریقہ - I

معلوم: دو دائرے جن کے مراکز A اور B ہیں اور ہر ایک کا رداس 2.8cm جبکہ $m\overline{AB}=7.8cm$ ہے۔

مطلوب: دیئے گئے دائروں کے دو معکوس مشترکہ مماس کھینچنا۔

مراحل عمل:



(i) 7.8cm کا $\overline{AB}$ کھینچیں

(ii) A اور B کو مرکز مان کے 2.8cm رداس کا ہر دائرہ کھینچیں

(iii) $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف کھینچیں جو نقطہ O پر اس سے ملتا ہے

(iv) $\overline{OB}$ کا عمودی ناصف کھینچیں جو نقطہ P پر اس سے ملتا ہے

(v) نقطہ P کو مرکز مان کر اور $m\overline{OP}$ کے برابر رداس کا دائرہ کھینچیں جو مرکز B کے دائرے کو نقاط T اور Y پر کاٹتا ہے۔

(vi) $\overline{BT}$ اور $\overline{BY}$ کھینچیں

(vii) سیٹ اسکوائر کی مدد $\overline{AZ}||\overline{BY}$ اور $\overline{AS}||\overline{BT}$ کھینچیں

(viii) $\overleftrightarrow{ST}$ اور $\overleftrightarrow{YZ}$ کھینچیں

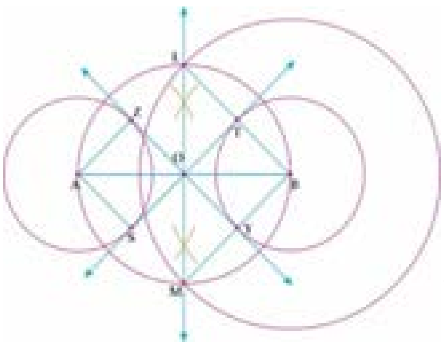
پس $\overleftrightarrow{ST}$ اور $\overleftrightarrow{YZ}$ مطلوبہ معکوس مشترکہ مماس ہیں

طریقہ - 2

معلوم: دو دائرے جن کے مراکز A اور B ہیں اور ہر ایک کا رداس 2.8cm ہے جبکہ $m\overline{AB} = 7.8cm$ ہے۔

مطلوب: دیئے گئے دائروں کے دو معکوس مشترکہ مماس کھینچنا۔

مراحل عمل:



(i) 7.8cm کا $\overline{AB}$ کھینچیں

(ii) A اور B کو مرکز مان کر 2.8cm رداس کا ہر دائرہ کھینچیں

(iii) $\overline{AB}$ کو نقطہ O پر دو برابر حصوں میں تقسیم کریں۔ O کو مرکز مان کر $m\overline{AO}$ کے برابر رداس کا ایک دائرہ کھینچیں۔

(iv) B کو مرکز مان کر اور 5.6cm (2.8cm کا دوگنا) رداس کا دائرہ کھینچیں جو پچھلے دائرے جس کا مرکز O ہے اُس کو نقطہ L اور M پر کاٹتا ہے۔

(v) $\overline{BL}$ اور $\overline{BM}$ کھینچیں جو چھوٹے دائرہ جس کا مرکز B ہے کو بالترتیب نقطہ T اور Y پر کاٹتا ہے۔

(vi) سیٹ اسکوئر کی مدد سے $\overline{AS}||\overline{BT}$ اور $\overline{AZ}||\overline{BY}$ کھینچیں

(vii) $\overleftrightarrow{ST}$ اور $\overleftrightarrow{YZ}$ کھینچیں۔

پس $\overleftrightarrow{ST}$ اور $\overleftrightarrow{YZ}$ مطلوبہ معکوس مشترکہ مماس ہیں

29.3 (v) کھینچنا

* دو غیر مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس یا بیرونی مماس۔
* دو غیر مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس یا اندرونی مماس۔

(a) دو غیر مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس یا بیرونی مماس کھینچنا۔

مندرجہ ذیل مثال دو غیر مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس کھینچنا کا مناسب طریقہ ہے۔

مثال: 3.4cm اور 2.1cm رداس کے دیئے گئے دائروں کے راست مشترکہ مماس کھینچیں جبکہ ان کے مراکز کے درمیان فاصلہ 7.5cm ہے۔

طریقہ - 1

معلوم: A اور B مرکز کے دو دائرے جن کے رداس بالترتیب 3.4cm اور 2.1cm ہیں جبکہ $m\overline{AB} = 7.5cm$

مطلوب: دیئے گئے دائروں کے راست مشترکہ مماس کھینچنا۔

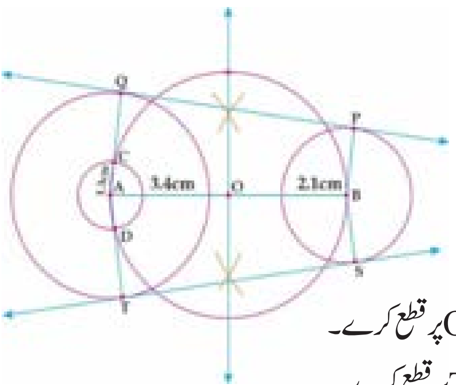
مراحل عمل:

(i) 7.5cm کا $\overline{AB}$ کھینچیں۔

(ii) A اور B کو مرکز مان کر بالترتیب 3.4 سنٹی میٹر اور 2.1 سنٹی میٹر رداس کے دو دائرے کھینچیں۔

(iii) $\overline{AB}$ کو نقطہ O پر دو برابر حصوں میں تقسیم کریں۔ O کو مرکز مان کر $m\overline{AO}$ کے برابر رداس کا دائرہ کھینچیں۔

(iv) بڑے دائرے کا مرکز کو مرکز مان کر 1.3 سنٹی میٹر (3.4-2.1=1.3) رداس کا ایک دائرہ کھینچیں جو پچھلے دائرے کو نقاط C اور D پر کاٹتا ہے۔



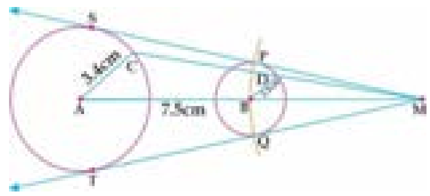
(v) $\overline{AB}$ کھینچیں اور اس قدر بڑھائیں کہ دیئے گئے ہم مرکز دائرے کو نقطہ O پر قطع کرے۔

(vi) $\overline{AO}$ کھینچیں اور اس قدر بڑھائیں کہ دیئے گئے ہم مرکز دائرے کو نقطہ T پر قطع کرے۔

(vii) سیٹ اسکوائر کی مدد سے $\overline{AQ} \parallel \overline{BP}$ کھینچیں اور اس قدر بڑھائیں کہ دیئے گئے ہم مرکز دائرے کو نقطہ O پر قطع کرے۔ اور $\overline{AT} \parallel \overline{BS}$ کھینچیں۔

(viii) $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{ST}$ کھینچیں۔

اب $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{ST}$ مطلوبہ راست مشترکہ مماس ہیں۔



طریقہ - 2

معلوم: A اور B مرکز کے دو دائرے جن کے رداس بالترتیب 3.4cm اور 2.1cm ہیں جبکہ $m\overline{AB} = 7.5cm$ ۔

مطلوب: دیئے گئے دائروں کے راست مشترکہ مماس کھینچنا۔

مراحل عمل:

(i) 7.5cm کا $\overline{AB}$ کھینچیں۔

(ii) A اور B کو مرکز مان کر بالترتیب 3.4cm اور 2.1cm رداس کے دائرے کھینچیں۔

(iii) دائرہ جس کا مرکز A پر نقطہ C لیں اور $\overline{AC}$ کھینچیں

(iv) سیٹ اسکوائر کی مدد سے $\overline{BD}||\overline{AC}$ کھینچیں۔

(v) $\overline{CD}$ کھینچیں اور اسے D کے آگے تک بڑھائیں۔

(vi) $\overline{AB}$ بڑھائیں جو $\overleftrightarrow{CD}$ کو نقطہ M پر قطع کرے۔

(vii) M کو مرکز مان کر اور رداس $m\overline{MB}$ کے برابر ایک قوس کھینچیں۔ جو دائرہ جس کا مرکز B کو نقاط P اور Q پر کاٹتی ہے۔

(viii) $\overline{MP}$ کھینچیں اور اسے اس قدر بڑھائیں کہ دوسرے دائرے پر نقطہ S پر ملے.

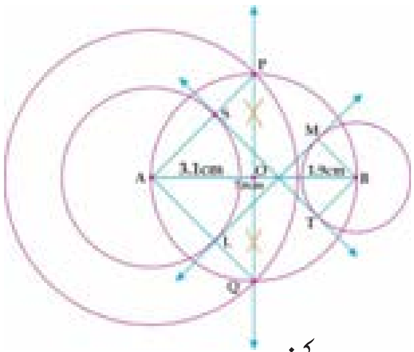
(ix) $\overline{MQ}$ کھینچیں اور اسے اس قدر بڑھائیں کہ دوسرے دائرے پر نقطہ T پر ملے۔

پس $\overleftrightarrow{SP}$ اور $\overleftrightarrow{TQ}$ دیئے گئے دائروں کے مطلوبہ راست مشترکہ مماس ہیں۔

(b) دو غیر مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس یا اندرونی مماس کھینچنا۔

مندرجہ ذیل مثال کی مدد سے ہم دو غیر مساوی دائروں کے معکوس مشترکہ مماس کھینچنے کے طریقے کی وضاحت کرتے ہیں۔

مثال: دو دائرے کے معکوس مشترکہ مماس کھینچیں جن کے مرکز A اور B رداس 3.1cm اور 1.9cm ہیں جبکہ ان کے مراکز کے درمیان فاصلہ 7.6cm ہے۔



معلوم: دو دائرے جن کے مراکز A اور B بالترتیب رداس 3.1cm اور 1.9cm ہیں اور $m\overline{AB}=7.6cm$

مطلوب: دیئے گئے دائروں کے معکوس مشترکہ مماس کھینچنا۔

مراحل عمل:

(i) 7.6cm کے $\overline{AB}$ کھینچیں۔

(ii) A اور B کو مرکز مان کر بالترتیب 3.1cm اور 1.9cm رداس کے دو دائرے کھینچیں۔

(iii) نقطہ O پر $\overline{AB}$ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کریں اور O کو مرکز مان کر $m\overline{OA}$ کے برابر رداس کا ایک دائرہ بنائیں۔

(iv) A کو مرکز مان (سب سے بڑے دائرے کا مرکز) اور 5cm (3.1cm+1.9cm=5cm) رداس کا دائرہ کھینچیں جو پچھلی دائرے کو نقاط P اور Q پر کاٹتا ہے۔

(v) $\overline{AP}$ کھینچیں جو سب سے بڑے دائرے کو نقطہ S پر کاٹتا ہے۔

(vi) $\overline{AQ}$ کھینچیں جو سب سے بڑے دائرے کو نقطہ L پر کاٹتا ہے۔

(vii) $\overline{BM}\|\overline{AQ}$ اور $\overline{BT}\|\overline{AP}$ کھینچیں۔

(viii) $\overleftrightarrow{ST}$ اور $\overleftrightarrow{LM}$ کھینچیں

پس $\overleftrightarrow{ST}$ اور $\overleftrightarrow{LM}$ مطلوبہ معکوس مشترکہ مماس ہیں

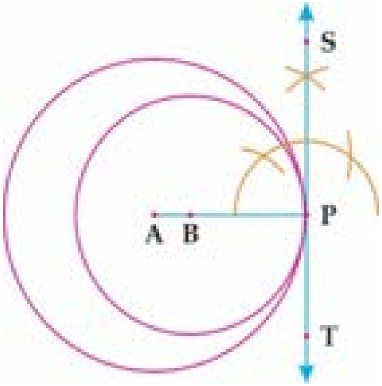
(vi) 29.3

* دو غیر مساوی چھوتے ہوئے دائروں کا مماس کھینچنا۔
* دو غیر مساوی قطع کرتے ہوئے دائروں کا مماس کھینچنا۔

(a) دو غیر مساوی چھوتے ہوئے دائروں کا مماس کھینچنا۔

دو صورتیں ہیں۔

صورت نمبر 1: جب دائرے اندرونی طور پر چھوتے ہیں



طریقے کی وضاحت مندرجہ ذیل مثال سے کی گئی ہے۔

مثال: 3 سنٹی میٹر اور 2 سنٹی میٹر رداس کے دو غیر مساوی دائریں کا مماس کھینچیں جن مراکز بالترتیب A اور B ہیں۔ جبکہ دائرے کے اندرونی طور پر چھوتے ہیں۔

معلوم: مرکز A اور B کے دو دائرے جن کے رداس بالترتیب 3 سنٹی میٹر اور 2 سنٹی میٹر ہیں جو اندرونی طور پر چھوتے ہیں۔

مطلوب: ان دو دائروں کا مماس کھینچنا۔

مراحل عمل: (i) نقطہ A کو مرکز مان کر 3 سنٹی میٹر کے بڑا دائرہ کھینچیں۔

(ii) دائرے پر کوئی نقطہ P لیں اور $\overline{AP}$ کھینچیں۔

(iii) $\overline{AP}$ پر نقطہ P سے 2 سنٹی میٹر کے فاصلہ پر ایک نقطہ B لیں۔

(iv) نقطہ B کو مرکز مان کر 2 سنٹی میٹر رداس کا دائرہ کھینچیں جو بڑے دائرے کو نقطہ P پر چھوتا ہے۔

(v) $\overline{AP}$ پر ایک عمود $\overleftrightarrow{ST}$ نقطہ P پر کھینچیں۔

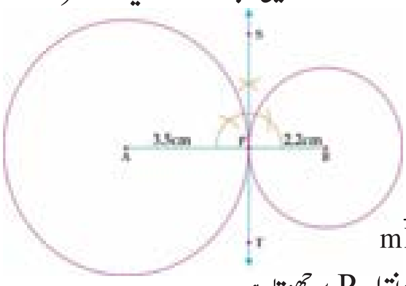
پس $\overleftrightarrow{ST}$ مطلوبہ مماس ہے۔

صورت 2: جب دائرے بیرونی طور پر چھوٹے ہیں

طریقے کی وضاحت مندرجہ ذیل مثال سے کی گئی ہے۔

مثال: 3.5 سنٹی میٹر اور 2.2 سنٹی میٹر رداس کے دو غیر مساوی دائروں کا مماس کھینچیں جن کے مرکز بالترتیب A اور B ہیں دونوں دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور چھوٹے ہیں

معلوم: 3.5 سنٹی میٹر اور 2.2 سنٹی میٹر رداس کے دو دائرے جن کے مرکز A اور B ہیں جبکہ دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوٹے ہیں۔



مطلوب: ان دو دائروں کا مماس کھینچنا۔

مراحل عمل:

(i) A, B کو مرکز مان کر 3.5 سنٹی میٹر کا دائرہ کھینچیں۔

(ii) دائرے پر نقطہ P لیں۔

(iii) $\overline{AP}$ کھینچیں اور اسے نقطہ B تک بڑھائیں اس طرح سنٹی میٹر $m\overline{PB}=2.2$

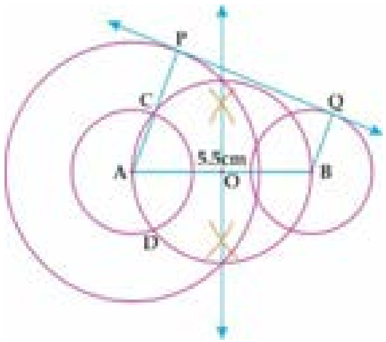
(iv) P کو مرکز مان کر 2.2 سنٹی میٹر رداس کی ایک دائرہ کھینچیں جو پہلے دائرے کو نقطہ P پر چھوتا ہے۔

(v) $\overline{AP}$ پر نقطہ P پر طور $\overleftrightarrow{ST}$ کھینچیں.

پس $\overleftrightarrow{ST}$ مطلوبہ مماس ہے۔

(b) دو غیر مساوی قطع کرتے ہوئے دائروں کا مماس کھینچنا۔

طریقے کی وضاحت مندرجہ ذیل مثال سے کی گئی ہے۔



مثال: 4 سنٹی میٹر اور 2 سنٹی میٹر رداس کے دو غیر مساوی قطع کرتے ہوئے دائرے کا مماس کھینچنا جن کے مرکز بالترتیب A اور B ہیں اس طرح کہ $m\overline{AB} = 5.5$ سنٹی میٹر

معلوم: 4 سنٹی میٹر اور 2 سنٹی میٹر رداس کے دو غیر مساوی قطع کرتے ہوئے دائرے جن کے مراکز بالترتیب A اور B ہیں اور $m\overline{AB} = 5.5$ سنٹی میٹر

مطلوب: دونوں دائروں کا مماس کھینچنا۔

مراحل عمل:

(i) 5.5 سنٹی میٹر کا $\overline{AB}$ کھینچیں۔

(ii) A اور B کو مرکز مان کر بالترتیب 4 سنٹی میٹر اور 2 سنٹی میٹر رداس کے دائرے کھینچیں

(iii) A کو مرکز مان کر (بڑے دائرے کا مرکز) 2 سنٹی میٹر (2 سنٹی میٹر-4 سنٹی میٹر=2 سنٹی میٹر) رداس کا دائرہ کھینچیں۔

(iv) $\overline{AB}$ کو نقطہ O پر دو برابر حصوں میں تقسیم کریں۔ O کو مرکز مان کر $m\overline{AO}$ کے برابر رداس کا دائرہ کھینچیں جو مرکز A کے چھوٹے دائرے کو نقطہ C اور D پر کاٹتا ہے

(v) $\overline{AC}$ کھینچیں اور اسے اس قدر بڑھائیں کہ یہ بڑے باہم مرکز دائرے کو جس کا مرکز A ہے اور نقطہ P پر ملے۔

(vi) سیٹ اسکوائر کی مدد سے $\overline{BQ}||\overline{AP}$ کھینچیں۔

(vii) $\overline{PQ}$ کھینچیں۔ پس $\overline{PQ}$ مطلوبہ مماس ہے۔

29.3 (vii) دائرہ کھینچنا جو چھوتا ہو۔

* دیے گئے زاویہ کے دونوں بازوں کو
* دو متقاطع خطوط کو اور ان کے درمیاں دیے گئے نقطہ میں گذرے
* تین متقاطع خطوط کو

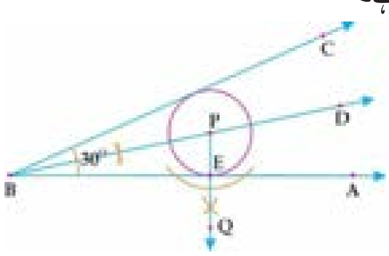
(a) دائرہ کھینچنا جو دیے کے زاویہ کے دونوں بازوں کو چھوتا ہے

مندرہ ذیل دی گئی مثال سے دائرہ کھینچنے کی وضاحت کرتے ہیں جو دیئے گئے زاویہ کے دونوں بازوں کو چھوتا ہے۔

مثال: دائرہ کھینچنا جو 30° کی پیائش کا زاویہ ABC کے دونوں بازوں چھوتا ہے۔

معلوم: 30° کی پیائش کا زاویہ ABC

مطلوب: دائرہ کھینچنا جو زاویے کے دونوں بازوں کو چھوتا ہے



مراحل عمل:

(i) 30° کا زاویہ ABC کھینچیں

(ii) ABC کے پر کوئی نقطہ $\overrightarrow{BD}$ لیں

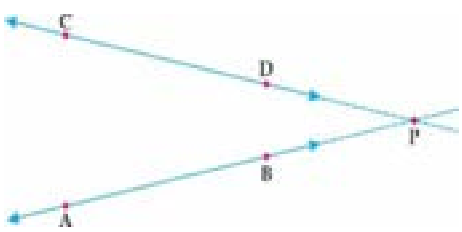
(iii) $\overrightarrow{BD}$ پر کوئی نقطہ P لیں

(iv) نقطہ P سے $\overrightarrow{BA}$، کھینچیں جو اسے نقطہ E پر کاٹتا ہے۔

(v) P کو مرکز مان کر $m\overline{PE}$ کے برابر رداس کا دائرہ کھینچیں جو $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ کو چھوتا ہے۔

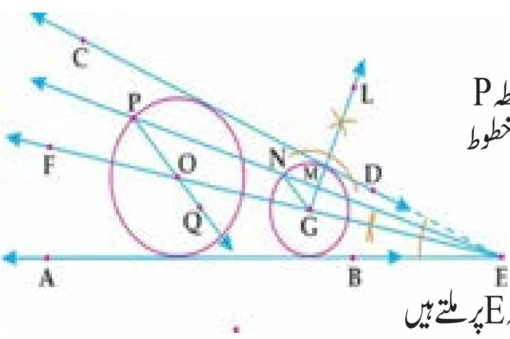
یہ دائرہ مطلوبہ دائرہ ہے۔

(b) دائرہ کھینچنا جو دو ہم نقطہ خطوط کو چھوتے اور ان کے درمیان دیئے گئے نقطے سے گذرے۔



ہم نقطہ خطوط/ملاقی خطوط (Converging Lines):

دو یا دو سے زیادہ خطوط جو ایک دوسرے کے قریب سے قریب تر ہوتے جاتے ہیں اور آخر کار ایک نقطے پر مل جاتے ہیں ہم نقطہ خطوط / ملاقی خطوط کہلاتے ہیں۔ متعلقہ شکل میں دو خطوط $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ ہم نقطہ خطوط ہیں اور وہ آخر میں نقطہ P پر ملتے ہیں۔



مثال: ایک دائرہ کھینچیں جو ہم نقطہ خطوط ملاقی خطوط کے درمیاں نقطہ P سے گذرتا ہے اور دونوں خطوط کو چھوتا ہے۔

معلوم: دو ہم نقطہ خطوط $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ اور ان دونوں کے درمیان نقطہ P

مطلوب: ایک دائرہ کھینچیں جو نقطہ P سے گذرتا ہے اور دی گئی ہم نقطہ خطوط ملاقی خطوط کو چھوتا ہے۔

مراحل عمل:

(i) دو ہم نقطہ خطوط/ملاقی خطوط $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کھینچیں جو نقطہ E پر ملتے ہیں

(ii) ان خطوط کے درمیان کوئی ایک نقطہ P لیں

(iii) $\angle E$ کا اندرونی ناصف $\overline{EF}$ کھینچیں

(iv) $\overline{EF}$ پر کوئی نقطہ G لیں

(v) نقطہ G سے $\overline{EC}$ پر عمود نقطہ M ملتا ہوا ایک عمود $\overline{GC}$ کھینچیں۔

(vi) G کو مرکز مان کر اور $m\overline{GM}$ کے برابر رداس کا دائرہ کھینچیں جو دونوں ہم نقطہ خطوط/ملاقاتی خطوط کو چھوتا ہے

(vii) $\overline{EP}$ کھینچیں جو اس دائرے کو نقطہ N پر کاٹتا ہے

(viii) $\overline{NG}$ کھینچیں اور $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overline{NG}$ بھی کھینچیں

(ix) $\overline{PQ}$ نقطہ O پر $\overline{EF}$ کو کاٹتا ہے

(x) O کو مرکز مان کر ایک دائرہ $m\overline{OP}$ کے برابر رداس کا کھینچیں جو نقطہ P سے گذرتا ہے اور دو ہم نقطہ خطوط کو چھوتا ہے۔

پس یہ مطلوبہ دائرہ ہے۔

(c) ایک دائرہ کھینچنا جو تین ہم نقطہ خطوط/ملاقی خطوط کو چھوتا ہے۔

ایک مستوی میں تین ہم نقطہ خطوط کو چھوتا ہوا دائرہ کھینچنا نہ ممکن ہے تاہم یہ خلا میں ممکن ہے جو اس کتاب کا مقصد نہیں ہے۔

مشق 29.5

.1 دو مساوی دائرے کھینچیں ہر ایک کا رداس 3.3 سنٹی میٹر ہے اور مرکز A اور B ہیں جبکہ $m\overline{AB} = 7.8$ سنٹی میٹر

(a) ان دائروں کے راست مشترکہ مماس کھینچیں

(b) ان دائروں کے معکوس مشترکہ مماس کھینچیں

.2 3.3 سنٹی میٹر اور 2.1 سنٹی میٹر دو غیر مساوی دائرے کھینچیں جس کے مرکز بالترتیب A اور B ہیں جبکہ $8=m\overline{AB}$ سنٹی میٹر ہے

(a) ان دائروں کے راست مشترکہ مماس کھینچیں۔

(b) ان دائروں کے معکوس مشترکہ مماس کھینچیں۔

.3 3.8 سنٹی میٹر اور 2.2 سنٹی میٹر رداس کے دو غیر مساوی دائروں کا مماس کھینچیں جن کے مرکز بالترتیب A اور B ہیں جبکہ

(i) دائرے اندرونی طور پر چھوتے ہیں

(ii) دائرے بیرونی طور پر چھوتے ہیں

(iii) ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوئے دائرے اور سنٹی میٹر $m\overline{AB}=5.6$

.4 دائرہ کھینچیں جو زاویے کے دونوں بازوں کو چھوتا ہے زاویے کی پیمائش (i) 35° (ii) 40°

.5 دائرہ کھینچیں جو ہم نقطہ خطوں / ملاقاتی خطوط PQ اور ST کے درمیاں نقطہ M سے گذرتا ہے اور جبکہ دونوں خطوط کو چھوتا بھی ہے۔

اعادہ مشق 29

درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں

(i) غیر متوازی __________ کا عمودی ناصف دائرے کے مرکز پر قطع کرتا ہے۔

(a) رداس قطعات (b) وتر (c) مماس (d) ان میں کوئی نہیں

(ii) __________ دائرے ایک نقطے سے گذر سکتے ہیں

(a) ایک (b) دو (c) تین (d) لا متناہی

(iii) __________ دائرے غیر ہم خط نقاط سے گذر سکتے ہیں

(a) ایک (b) دو (c) تین (d) لا متناہی

(iv) منظم کثیر الاضلاع کے __________ زاویے پیمائش میں برابر ہوتے ہیں۔

(a) اندرونی (b) بیرونی (c) a اور b دونوں (d) ان میں کوئی نہیں

(v) منظم مسدس کا ہر اندرونی زاویہ پیمائش میں __________ برابر ہوتا ہے۔

(a) 90° (b) 108° (c) 120° (d) 135°

(vi) ایک دائرہ مثلث کی تمام اطراف کو چھوتا ہے __________ کہلاتا ہے

(a) محاصر (b) محور (c) جانبی (d) تین دائرے (Tricircle)

(vii) ایک جو دائرے کی ایک بیرونی ضلع کو چھوتا ہے اور بڑھی ہوئی اندرونی اضلاع کو چھوتا ہے __________ کہلاتا ہے۔

(a) جانبی (b) محاصر (c) محور (d) تین دائرے (Tricircle)

(viii) محور دائرے کا مرکز __________ کہلاتا ہے

(a) جانبی مرکز (b) محور مرکز (c) مرکز نما (d) عمودی مرکز

(ix) ایک مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ایک دوسرے کو ________________ پر قطع کرتے ہیں

(a) محصور مرکز (b) جانبی مرکز (c) مرکز نما (d) محاصر مرکز

(x) ایک مثلث کے زاویوں کا اندرونی ناصف کا نقطہ قطع ________________ کہلاتا ہے

(a) جانبی مرکز (b) محاصر مرکز (c) مرکز نما (d) محصور مرکز

(xi) اگر دائرے کا محصور منظم مسدس ہے تو مسدس کے ہر ضلع کی لمبائی دائرے کے رداس کے ________ ہے

(a) $<$ (b) $>$ (c) $=$ (d) $\leq$

(xii) مماس اور رداسی قطعہ کے درمیان نقطِ ملاپ پر زاویہ ________________ ہو گا

(a) قائمہ (b) منفرجہ (c) حادہ (d) عکسی زاویہ

(xiii) دائرے کا مرکزی زاویہ جو نقاط ملاپ کو ملاتا ہے۔ مماس کے درمیانی زاویے ________________ ہوتا ہے

(a) مربع (b) مکعب (c) سپلیمینٹ (d) کمپلیمینٹ

(xiv) ________________ مشترکہ مماس دائروں کے مرکز کو ملانے والی قطعِ خط کو قطع نہیں کرتے ہیں

(a) اندرونہ (b) معکوس (c) براہ راست (d) عمودی

(xv) دو مساوی دائروں کے راست مشترکہ مماس ________________ ہوتے ہیں

(a) متقاطع (b) منطبق (c) برابر (d) متوازی

(xvi) مساوی دائروں کے ________________ مشترکہ مماس دائروں کے مراکز کو ملانے والے قطعہ خط وسطی نقطے پر قطع کرتے ہیں۔

(a) راست (b) معکوس (c) بیرونہ (d) متوازی

(xvii) اگر 5 سنٹی میٹر اور 2 سنٹی میٹر رداس کے دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں تو ان کے مراکز کے درمیان فاصلہ ________________ ہوتا ہے

(a) 5 سنٹی میٹر (b) 10 سنٹی میٹر (c) 3 سنٹی میٹر (d) 7 سنٹی میٹر

(xviii) اگر 5 سنٹی میٹر اور 2 سنٹی میٹر رداس کے دو دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر چھوتے ہیں تو ان کے مراکز کے درمیان فاصلہ ________________ ہوتا ہے

(a) 5 سنٹی میٹر (b) 10 سنٹی میٹر (c) 3 سنٹی میٹر (d) 7 سنٹی میٹر

(xix) دو یا دو سے زیادہ باہم نقطہ خطوط ہمیشہ ایک دوسرے کو قطع ________________ کرتیں ہیں

(a) ایک نقطہ (b) دو نقاط (c) ایک سے زیادہ نقطے (d) ان میں سے کوئی نہیں

(xx) تین یا تین سے زیادہ بند اطراف شکل ________________ کہلاتی ہے

(a) مخمس (b) مسدس (c) صبع (d) کثیر الاضلاع

خلاصہ

- دائرے کا مرکز متعین کیا جاسکتا ہے دو غیر متوازی وتروں کے عمودی ناصف کھینچ کر جو ایک دوسرے کو مرکز پر ملاتے ہیں
- تین غیر ہم خط نقاط سے صرف ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہے
- مرکز معلوم کئے بغیر ایک دائرہ مکمل کیا جا سکتا ہے۔ منظم اکثیر الاضلاع کی مدد سے جب ایک دی گئی ہو محاصر دائرہ ہمیشہ کسی اکثر اضلاع کے تمام راسوں سے گذرتا ہے
- مثلث کا محصور مثلث ہمیشہ تمام اضلاع کو چھوتا ہے
- ایک مثلث کا جانبی دائرہ مثلث کے ایک ضلع بیرونی طور پر چھوتا ہے اور دو بڑھائے گئے اضلاع کو اندرونی طور پر ہے
- ایک مثلث کے تین جانبی دائرے بنائے جا سکتے ہیں
- مماس ایک خط جو دائرے کو صرف ایک نقطے کو چھوتا ہے
- قاطع ہمیشہ دائرے کو دو نقاط پر کاٹتا ہے
- دائرے کا مماس ہمیشہ رداسی قطعہ پر نقطہ ملاپ پر عمود ہوتا ہے
- محیط کے ایک نقطے سے صرف اور صرف دائرے کا ایک مماس کھینچا جا سکتا ہے
- دائرے کے باہر کسی نقطے سے صرف اور صرف دائرے کے دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں
- دائرے کے مرکزی زاویہ جو نقاط ملاپ کو ملاتا ہے مماس کے درمیاں زاوے کا سپلیمینٹ ہوتا ہے
- اگر ایک خط ایک سے زیادہ دائروں پر مماس ہے یہ مشترکہ مماس کہلاتا ہے
- راست مشترکہ مماس دیئے گئے دو دائروں کے مراکز کو ملانے والے قطعہ خط کو قطع نہیں کرتا ہے
- معکوس مشترکہ مماس دیئے گئے دو دائروں کے مراکز کو ملانے والے قطعہ خط ہمیشہ قطع کرتا ہے
- اگر دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں تو ان کے مراکز کے درمیاں فاصلہ ان کے رداسوں مجموعہ کے برابر ہوتا ہے
- اگر دو دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر چھوتے ہیں تو ان کے مراکز کے درمیان فاصلہ ان کے رداسوں درمیان فرق کے برابر ہوتا ہے
- باہم نقطہ خطوط ایک دوسرے کے قریب سے قریب تر سوتے ہو جاتے ہیں اور آخرکار ایک نقطہ پر مل جاتے ہیں۔

تکونیات کا تعارف
PYTHAGORAS THEOREM

یونٹ نمبر 30

طلباء کے آموزشی حاصلات
اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- سکسا جیسیمل (Senagesined System) میں زاویے کی پیمائش کر سکیں (ڈگری، منٹ اور سیکنڈ)
- زاویے کو "D°M' S سے کسرِ اعشاریہ (دو درجہ اعشاریہ تک) میں اور کسرِ اعشاریہ سے "D°M' S تبدیل کر سکیں۔
- ریڈین کی تعریف (دائروی نظام میں ایک زاویے کی پیمائش) اور ریڈین اور ڈگری پیمائش کے درمیان تعلق کو ثابت کر سکیں۔
- $l = r\theta$ ثابت کر سکیں۔ جبکہ r دائرے کا رداس۔ l دائروی قوس کی لمبائی اور θ مرکزی زاویہ جس کی پیمائش ریڈین میں ہو۔
- قطاع دائرے کا رقبہ $\frac{1}{2}l\theta$ یا $\frac{1}{2}r^2\theta$ ثابت کر سکیں۔
- تعریف اور پہچان کر سکیں۔
  - عمومی زاویہ (ہم بازو زاویے)
  - زاویے کی معیاری صورت
- ربعات (Quadrants) اور ابعی زاویوں (Auadrental Angle) کی پہچان کر سکیں۔
- ایک اکائی دائرے کی مدد سے تکونیاتی نسبتوں اور ان کی معکوس نسبتوں کی تعریف کر سکیں۔
- تکونیاتی نسبتوں 30°، 45° اور 60° کی قیمتوں کو دہرا سکیں۔
- مختلف ربعوں میں تکونیاتی نسبتوں کی علامات کی پہچان کر سکیں۔
- اگر ایک تکونیاتی نسبت دی گئی ہو تو باقی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کر سکیں۔
- تکونیاتی نسبتوں اور کی قیمتیں معلوم کر سکیں۔
- تکونیاتی متطابقات (Trigonometric Identities) کو ثابت کر سکیں اور انہیں مختلف تکونیاتی روابط (Relationship) کو ثابت کرنے کے لیے استعمال کر سکیں۔
- زاویہ صعود اور زاویہ نزول معلوم کر سکیں۔
- زاویہ صعود اور زاویہ نزول پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔

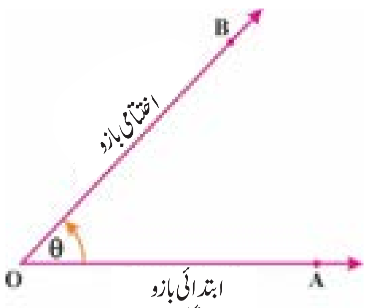
تعارف:

لفظ Trigonometry یونانی لفظ سے بنا ہے Tri (تین)، gono (زاویہ) اور metron (پیمائش) ہے۔
تکونیاتی Trigonometry کا مطلب مثلثوں کی پیمائش ہے۔ ریاضی کی اس شاخ کو یونانیوں نے 330 قبل مسیح میں متعارف کیا تھا۔ اس کا تعلق مثلثوں کے حل سے ہے اس کا وسیع اطلاق طبعیات، نیویگیشن، فلکیات، سروینگ وغیرہ میں ہوتا ہے۔

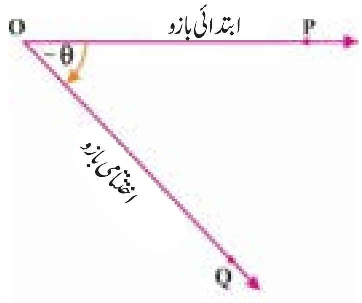
ایک زاویے کی پیمائش (Measurement of an Angle):

زاویہ دو شعاعوں کا یونین ہوتا ہے جن کا ایک مشترکہ نقطہ راس کہلاتا ہے۔ یہ شعاع کو ابتدائی بازو اور دوسری شعاع کو اختتامی بازو کہلاتی ہے۔

زاویہ کی پیمائش ابتدائی بازو سے اختتامی بازو کی طرف گھماؤ کی سمت پر منحصر ہوتا ہے۔ گھڑی کی مخالف سمت میں پیمائش کیے گئے زاویے کو مثبت زاویہ تصور کیا جاتا ہے جیسا کہ شکل (a) میں دکھایا گیا ہے اور گھڑی کی سمت میں پیمائش کیے گئے زاویے کو منفی زاویہ تصور کیا جاتا ہے جیسا کہ (b) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (a)



شکل (b)

ایک زاویہ معیاری صورت میں کہلاتا ہے اگر اس کا ابتدائی طرف مثبت x-محور (x-axis) پر ہو اور اس کا راس مرکز (origin) پر ہو۔

30.1 (i) زاویے کی سیکا جیسیمل نظام میں پیمائش (ڈگری، منٹ اور سیکنڈ):

اگر ابتدائی شعاع $\overrightarrow{OA}$ گھڑی کی مخالف سمت میں ایک چکر مکمل کرتی ہے تو 360 ڈگری یا 360° کا زاویہ بناتی ہے یعنی دائرے کا محیط کو برابر قوسین میں تقسیم کیا جائے۔ دائرے مرکز پر اس طرح کی ایک قوس سے ایک ڈگری کا زاویہ بنتا ہے اور 1° سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہر ڈگری کو 60 برابر حصوں میں تقسیم کیا جائے تو ہر حصہ ا منٹ کہلاتا ہے یوں $1'$ ظاہر کیا جاتا ہے ہر منٹ 60 برابر حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اور ہر حصہ 1 سیکنڈ کہلاتا ہے اور یوں $1''$ ظاہر کیا جاتا ہے۔
پس ایک منٹ 60 واں حصہ ایک ڈگری کا ہوتا ہے اور 1 سیکنڈ 360 واں حصہ ایک ڈگری کا ہوتا ہے۔ اس نظام جس میں زاویے کی پیمائش ڈگری، منٹ اور سیکنڈ میں کی جاتی ہے سیکا جیسیمل نظام کہلاتا ہے۔ ایک مکمل چکر کا 360 واں حصہ ایک ڈگری ہوتا ہے اور یہ یوں $\frac{1}{360}$ ظاہر کیا جاتا ہے اسے مزید یوں تقسیم کیا جاتا ہے۔

$1^\circ = 60$ منٹ $= 60'$
$1' = 60$ سیکنڈ $= 60''$
مثلاً 30 ڈگری، 20 منٹ اور 10 سیکنڈ کو علامتی طور پر یوں لکھا جاتا ہے: "10 '20 °30

30.1 (ii) زاویے کو کسر اعشاریہ (دو درجہ اعشاریہ تک) میں کسر اعشاریہ سے میں تبدیل کرنا:

اس سیکشن میں ہم منٹ اور سیکنڈ کو ڈگری میں تبدیل کرتے ہیں منٹ کو 60 سے اور سیکنڈ کو 3600 سے تقسیم کر کے۔ مختصر کرنے کے بعد ہمیں مطلوبہ شکل حاصل ہوتا ہے۔

مثال 1:

"10 '30 °30 کو ڈگری میں تبدیل کریں اور کسر اعشاریہ کی شکل میں لکھیں۔

حل: چونکہ

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$$

$$\therefore \quad 30' = \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$$

$$1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$$

اور

$$10'' = \left(\frac{10}{3600}\right)^\circ = \left(\frac{1}{360}\right)^\circ$$

$$\therefore \quad 30^\circ 30' 10'' = \left(30 + \frac{1}{2} + \frac{1}{360}\right)^\circ$$

$$= [30 + 0.5 + 0.003]^\circ$$

$$= 30.503^\circ$$

$$= 30.50^\circ$$ (دو درجہ اعشاریہ تک)

مثال 2:

12.51° کو $D^\circ M' S''$ شکل میں تبدیل کریں۔

حل:

$$12.51^\circ = 12^\circ + (0.51)^\circ$$

$$= 12^\circ + (0.51 \times 60)' \qquad (1^\circ = 60')$$

$$= 12^\circ + (30.6)'$$

$$= 12^\circ + 30' + (0.6)'$$

$$= 12^\circ 30' + (0.6 \times 60)'' \qquad (1' = 60'')$$

$$= 12^\circ 30' 36''$$

30.1 (iii) ریڈین کی تعریف (دائروی نظام میں ایک زاویے کی پیائش) اور ریڈین اور ڈگری پیائش کے درمیان تعلق ثابت کرنا۔

زاویے کی پیائش کا ایک اور اکائی ریڈین ہے جو کہ قوس کی لمبائی اور دائرے کے رداس کی نسبت کے برابر ہے

یعنی $\theta = \frac{l}{r}$ جبکہ θ ریڈین میں مرکزی زاویہ ہے اور l قوس کی لمبائی اور r دائرہ کا رداس ہے

نظام جس میں زاویے کی پیائش ریڈین میں کی جاتی ہی دائروی نظام کہلا تا ہے پس زاویے کی پیائش کو دائروی نظام میں 1 ریڈین کہا جاتا ہے اگر یہ قوس سے بنا ہے جو دائرے کے رداس کے برابر ہوتی ہے۔

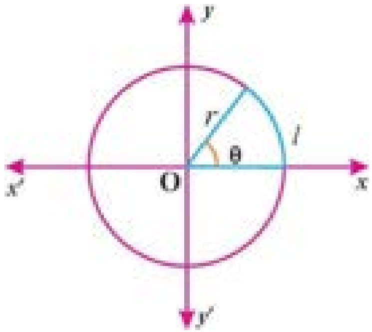


Fig: 30.1

ہمارے پاس $\theta = \dfrac{l}{r}$,

جبکہ $l = r$

تو $\theta = \dfrac{l}{l}$

$\boxed{\theta = 1 \quad \text{ریڈین}}$

اس لیے ایک مکمل چکر میں قوس کی لمبائی دائرے کا محیط ہوتی ہے

یعنی $l = 2\pi r$

اب،

$$\theta = \frac{l}{r}$$

$$\theta = \frac{2\pi r}{r}$$

$\boxed{\theta = 2\pi \quad \text{ریڈین}}$

پس ایک مکمل چکر میں زاویے کے پیائش 2π ریڈین ہے

ڈگری اور یڈین میں تعلق

ہم جانتے ہیں کہ ایک مکمل چکر میں زاویے کی پیائش ڈگری میں 360° ہوتی ہے اور ریڈین میں 2π ہوتی ہے۔

اس طرح

$$360^\circ = 2\pi \text{ ریڈین}$$

$$\Rightarrow \quad 180^\circ = \pi \text{ ریڈین}$$

$$\Rightarrow \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ریڈین} \approx 0.01745 \text{ ریڈین}$$

یا $\quad 1 \text{ ریڈین} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ$

ڈگری	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ریڈین	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

مثال 1

مندرجہ ذیل کو ریڈین پیائش میں تبدیل کریں۔

(a) 120° (b) $10^\circ 30'$ (c) $24^\circ 32' 30''$

حل (a):

ہم جانتے ہیں

$\because \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ ریڈین

$\therefore \quad 120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180}$ ریڈین

$\Rightarrow \quad 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ ریڈین

حل (b): ہم جانتے ہیں

$\because \quad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$

$\therefore \quad 30' = \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$

اب $10^\circ 30' = \left(10 + \frac{30}{60}\right)^\circ = \left(10 + \frac{1}{2}\right)^\circ = \left(\frac{21}{2}\right)^\circ$

$\therefore \quad = \frac{21}{2} \times \frac{\pi}{180}$ ریڈین $\quad$ ($\because 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ ریڈین)

$\Rightarrow \quad = \frac{7\pi}{120}$ ریڈین

حل (c): $24^\circ 32' 30''$

$= 24^\circ + \left(\frac{32}{60}\right)^\circ + \left(\frac{30}{3600}\right)^\circ \qquad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ and $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$

$= \left(24 + \frac{32}{60} + \frac{30}{3600}\right)^\circ = \left(24 + \frac{8}{15} + \frac{1}{120}\right)^\circ$

$= \left(\frac{24 \times 120 + 64 + 1}{120}\right)^\circ$

$= \left(\frac{2945}{120}\right)^\circ \qquad \left(\because 1^\circ \cong \frac{\pi}{180}\right.$ ریڈین $\left.\right)$

اب $\left(\frac{2945}{120}\right)^\circ = \frac{2945}{120} \times \frac{\pi}{180}$ ریڈین

$\therefore \quad = \frac{589}{4320}\,\pi$ ریڈین

تو $24^\circ 32' 30'' = \frac{589}{4320}\,\pi$ ریڈین

مشق 30.1

1. مندرجہ ذیل ڈگری میں تبدیل کریں اور اعشاریہ میں لکھیں

(i) $32^\circ\ 15'$ (ii) $10^\circ\ 30'$ (iii) $8^\circ\ 15'\ 30''$

(iv) $45^\circ\ 21'\ 36''$ (v) $25^\circ\ 30'$ (vi) $18^\circ\ 6'\ 21''$

2. مندرجہ ذیل زاویوں کو $D^\circ M' S''$ میں تبدیل کریں

(i) 32.25° (ii) 47.36° (iii) 57.325°

(iv) 67.58° (v) 22.5° (vi) 225.60°

3. مندرجہ ذیل زاویوں کو ڈگری میں ظاہر کریں

(i) $\frac{\pi}{4}$ ریڈین (ii) $\frac{\pi}{3}$ ریڈین (iii) $-\frac{3\pi}{4}$ ریڈین

(iv) 3 ریڈین (v) $\frac{3}{\pi}$ ریڈین (vi) 4.5 ریڈین

4. مندرجہ ذیل زاویوں کو ریڈین میں تبدیل کریں

(i) 30° (ii) 45° (iii) 60°

(iv) $\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ$ (v) -225 (vi) $60^\circ\ 35'\ 48''$

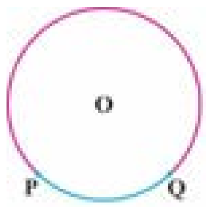
30.2 دائرے کا قطاع (Sector of circle):

تعریف:

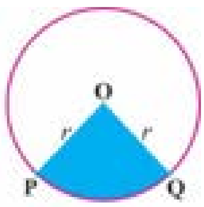
(i) دائرے کے محیط کا ایک قوس (arc) کہلاتا ہے۔

(ii) دائرے کا ایک حصہ جو دو رداسی قطعات اور ایک قوس سے گھِرا ہوا ہو دائرے کا قطاع کہلاتا ہے

مندرجہ ذیل اشکال اوپر دی گئی تعریفوں کو سمجھنے میں مدد کرتی ہیں۔



شکل 30.2(i)



شکل 30.2(ii)

شکل 30.2(i) میں PQ ایک قوس ہے اور شکل 30.2(ii) میں POQ ایک قطاع (Sector) ہے۔

30.2(i) $l = r\theta$ ثابت کرنا۔ جبکہ r دائرے کا رداس، l دائروی قوس کی لمبائی اور θ مرکزی زاویہ جس کی پیمائش ریڈین میں ہو

r رداس کی دائرے میں، l قوس کی لمبائی θ مرکزی زاویے کے درمیان راست تناسب ہے۔

(شکل 30.3 میں دکھایا گیا ہے)

یعنی $l \propto \theta$

$\Rightarrow \quad l = c\theta \qquad ...(i)$

ایک مکمل چکر کے لیے

$$l = 2\pi r$$
$$\theta = 2\pi$$

اور

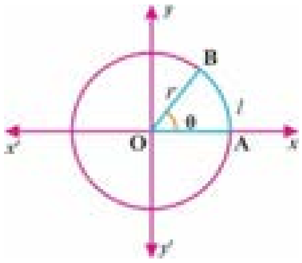
مساوات (i) سے ہمیں ملا

$$2\pi r = c(2\pi)$$
$$\Rightarrow \quad c = r$$

لہٰذا مساوات (i) ہوتی ہے $l = r\theta$

نوٹ: (i) l اور r کی پیمائش ایک جیسی اکائی میں کی جاتی ہے

(ii) θ کی پیمائش ریڈین میں کی جاتی ہے۔



شکل 30.3

مثال 1: 5 سینٹی میٹر رداس کے دائرے کی ایک قوس کی لمبائی معلوم کریں جو $\frac{2\pi}{5}$ ریڈین کا دائرہ بناتی ہے۔

حل:

$r = 5\text{cm}, \theta = \frac{2\pi}{5}$ ریڈین اور $l = ?$

چونکہ $l = r\theta$

$$\therefore \quad l = 5\times\frac{2\pi}{5}$$

$$\Rightarrow \quad l = 2\pi \cong 2\left(\frac{22}{7}\right) \approx 6.28\text{cm}.$$

مثال 2:

ایک لڑکا بائیسکل کے 10 چکروں میں کتنی دور تک سفر کرے گا اگر سائیکل کے ہر پہیہ کا قطر 56 سینٹی میٹر ہے۔

حل:

ہم جانتے ہیں کہ

ایک چکر $= 2\pi$ ریڈین

$\therefore$ 10 چکر $= 20\pi$ ریڈین

یعنی $\theta = 20\pi$ ریڈین

پہیے کا قطر $d = 56$ سینٹی میٹر

$\therefore$ $r = \frac{d}{2} = \frac{56}{2}$ سینٹی میٹر $= \frac{56}{2\times 100}$ میٹر $\quad$ $\because$ (1 میٹر = 100 سینٹی میٹر)

$$l = r\theta$$

$$\therefore \quad l = \frac{56}{2\times 100}\times 20\pi$$

$$\Rightarrow \quad l \approx \frac{56}{2\times 100}\times 20\times\frac{22}{7} \qquad (\because \pi \cong \frac{22}{7})$$

$$\Rightarrow \quad l \approx 17.6\text{m}.$$

پس 10 چکروں میں 17.6 میٹر سفر کرے گا۔

مثال 3:

r کی قیمت معلوم کریں جبکہ $l = 4$ سینٹی میٹر اور $\theta = \frac{1}{4}$ ریڈین

حل:

$l = 4$ سینٹی میٹر

$\theta = \frac{1}{4}$ ریڈین

اور $r = ?$

$l = r\theta$

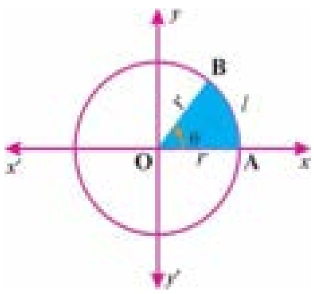
$\therefore \quad r = \frac{l}{\theta}$

$\Rightarrow \quad r = \left(4 \div \frac{1}{4}\right) = 4 \times \frac{4}{1} = 16$

30.2(ii) قطاع دائرے کا رقبہ $\frac{1}{2}lr$ یا $\frac{1}{2}r^2\theta$ ثابت کرنا

ثبوت:

غور کریں: رداس r کے دائرے کا مرکز O، $\overline{AB}$ ہے۔ ایک قوس جو مرکز پر θ ریڈین کا زاویہ بناتی ہے جیسا کہ شکل 30.4 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 30.4

ہم جانتے ہیں کہ

دائرے کا رقبہ $= \pi r^2$

ریڈین 2π = ایک چکر کا زاویہ

ریڈین θ = قطاع دائرے کا زاویہ

تو ایلیمنٹری جیومیٹری کی رو سے بذریعہ قانونِ تناسب ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{\text{قطاع AOB کا رقبہ}}{\text{دائرے کا رقبہ}} = \frac{\text{قطاع کا زاویہ}}{\text{دائرے کا زاویہ}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{قطاع AOB کا رقبہ}}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \text{قطاع AOB کا رقبہ} \quad \frac{\pi r^2 \times \theta}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \text{قطاع AOB کا رقبہ} \quad \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$\text{یا} \quad \text{قطاع AOB کا رقبہ} \quad \frac{1}{2}r\theta \times r$$

$$\Rightarrow \quad \text{قطاع AOB کا رقبہ} = \frac{1}{2}rl \qquad (\because\ r\theta = l)$$

پس ثابت ہوا

مثال 1: 5 سینٹی میٹر رداس کے دائرے قطاع کا رقبہ معلوم کریں جبکہ مرکزی زاویہ 60° ہے۔

حل:

$r = 5$ سینٹی میٹر

$\theta = 60^\circ = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3}$ ریڈین

اور قطاع کا رقبہ $= ?$

$\because$ قطاع کا رقبہ $= \frac{1}{2}r^2\theta$

$\therefore$ قطاع کا رقبہ $= \frac{1}{2}(5)^2 \times \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow$ قطاع کا رقبہ $\approx \frac{1}{2} \times 25 \times \frac{22}{7\times 3}$ $\qquad \pi \approx \frac{22}{7}$

$\Rightarrow$ قطاع کا رقبہ $= 13.09$ مربع سینٹی میٹر

مثال 2: قطاع کا رقبہ معلوم کریں جس کا رداس 4 سینٹی میٹر اور مرکزی زاویہ 12 ریڈین ہے۔

حل:

$r = 4$ سینٹی میٹر

$\theta = 12$ ریڈین

اور قطاع کا رقبہ $= ?$

$\because$ قطاع کا رقبہ $= \frac{1}{2}r^2\theta$

$\therefore$ قطاع کا رقبہ $= \frac{1}{2}(4)^2 \times 12$

$\Rightarrow$ قطاع کا رقبہ $= 16 \times 6 = 96$ مربع سینٹی میٹر

مشق 30.2

1. θ معلوم کریں اگر

(i) $r=$ 5 سینٹی میٹر اور $l =$ 20 سینٹی میٹر
(ii) $r=$ 2 سینٹی میٹر اور $l =$ 30.2 سینٹی میٹر
(iii) $r=$ 2.87 سینٹی میٹر اور $l =$ 6 سینٹی میٹر
(iv) $r=$ 2.5 سینٹی میٹر اور $l =$ 4.5 سینٹی میٹر

2. l معلوم کریں اگر

(i) $\theta =$ 2.1 ریڈین اور $r=$ 1.01 سینٹی میٹر
(ii) $\theta =$ 2 ریڈین اور $r=$ 5.1 سینٹی میٹر
(iii) $\theta = 30^\circ$ اور $r=6$ سینٹی میٹر
(iv) $\theta = 60^\circ 30'$ اور $r=$ 15 سینٹی میٹر

3. r معلوم کریں اگر

(i) $l =$ 2 میٹر اور $\theta = 60^\circ$
(ii) $l = \frac{7}{4}$ میٹر اور $\theta =$ 3.5 ریڈین
(iii) $l =$ 4 سینٹی میٹر اور $\theta = \frac{1}{4}$ ریڈین
(iv) $l =$ 15.4 سینٹی میٹر اور $\theta = 180^\circ$

4. اکائی دائرے کی قوس کی لمبائی معلوم کریں اگر متقابل مرکزی زاویے کی پیمائش

(i) $30°$ (ii) $45°$ (iii) $60°$ (iv) $90°$

5. ایک قوس کے متقابل مرکزی زاویہ $\frac{\pi}{6}$ ریڈین ہے۔ دائرے کا رداس 5 سینٹی میٹر تو معلوم کریں۔

(i) قوس کی لمبائی (ii) دائروی قطاع کا رقبہ

6. 10 سینٹی میٹر رداس کے ایک دائرے پر ایک نقطہ گردش کر رہا ہے۔ اگر یہ 3.5 چکر مکمل کرتا ہے۔ معلوم کریں کہ نقطہ نے کتنا فاصلہ طے کیا ہے۔

7. 4 سینٹی میٹر رداس کے دائرے کے قطاع کا رقبہ معلوم کریں۔ جس کا مرکزی زاویہ $\frac{\pi}{4}$ ہے۔

8. اگر 21 سینٹی میٹر فلائی وہیل کے رم پر نقطہ 5040 میٹر کا سفر ایک منٹ میں طے کرتا ہے تو ایک سیکنڈ میں وہیل کتنا ریڈین گھومتا ہے۔

9.

10. 12 سینٹی میٹر رداس کے دائرے میں ایک قوس کا متقابل مرکزی زاویہ $84°$ ہے۔ اس قوس کی لمبائی اور قطاع کا رقبہ معلوم کریں۔

30.3 تکونیاتی نسبتیں (Trigonometric Ration)

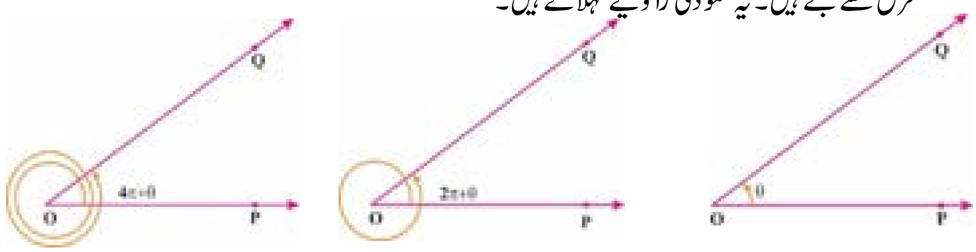
30.3(i) تعریف اور پہچان کرنا:

(a) عمودی زاویہ (ہم بازو زاویے)

(b) زاویے کی معیاری صورت

30.3.1(a) عمودی زاویے (ہم بازو زاویے) General Angle (Co-terminal Angles)

زاویے جن کے ابتدائی اور اختتامی بازوں ایک جیسے ہوں ہم بازوں زاویے کہلاتے ہیں اور یہ 2πڈین کے فرق سے بنتے ہیں۔ یہ عمودی زاویے کہلاتے ہیں۔



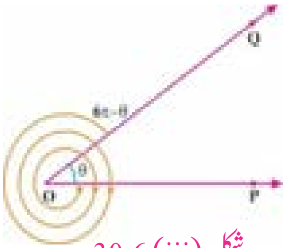
$m\angle POQ = \theta$ ریڈین، جبکہ $0 \le \theta < 2\pi$

(i) θ ریڈین ، (0 چکر)

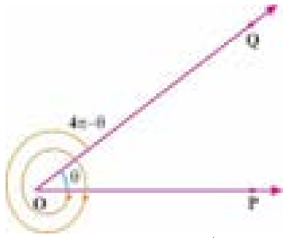
(ii) $(2\pi+\theta)$ ، (ایک چکر کے بعد)

(iii) $(4\pi+\theta)$ ، (دو چکروں کے بعد)

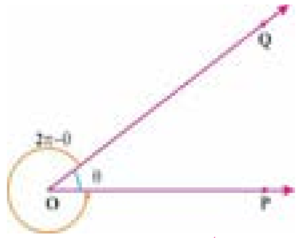
پس θ، $2\pi+\theta$ اور $4\pi+\theta$ اور ہم بازوں زاویے شکل 30.5 میں دکھائے گئے ہیں۔ تاہم اگر گردش گھڑی کی سمت میں ہے جیسا کہ نیچے شکل میں دکھایا گیا ہے



شکل (iii) 30.6



شکل (ii) 30.6



شکل (i) 30.6

(i) $2\pi-\theta$ ریڈین (کوئی چکر نہیں)

(ii) $4\pi-\theta$ ریڈین (ایک چکر کے بعد)

(iii) $6\pi-\theta$ ریڈین (دو چکروں کے بعد)

ریڈین $m\angle POQ=\theta$، جبکہ $0\le\theta<2\pi$

پس θ، $2\pi+\theta$ اور $4\pi+\theta$ اور ہم بازوں زاویے شکل 30.6 میں دکھائے گئے ہیں۔

مثال:

مندرجہ ذیل کونسے زاویے 120° کے ساتھ ہم بازو زاویہ ہیں

-240°، 480°، $\frac{14\pi}{3}$ اور $-\frac{14\pi}{3}$

حل:

ہاں -240°، 120° کا ہم بازو زاویہ ہے $\quad 120^\circ-(-240^\circ)=120^\circ+240^\circ=360^\circ$

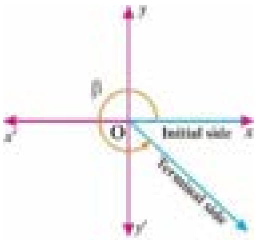
ہاں 480°، 120° کا ہم بازو زاویہ ہے $\quad 480^\circ-120^\circ=360^\circ$

ہاں $\frac{14\pi}{3}$، 120° کا ہم بازو زاویہ ہے $\quad \frac{14\pi}{3}-120^\circ=\frac{14\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=\frac{12\pi}{3}=4\pi$

یہ 2π کا عاد نہیں ہے $\quad 120^\circ-\left(\frac{14\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}+\frac{14\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}$

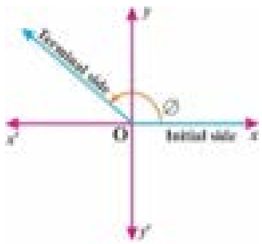
لہٰذا $-\frac{14\pi}{3}$، 20° کا ہم بازو زاویہ نہیں ہے

30.3(i)(b) ایک زاویہ معیاری صورت (Stanton Position) مین کہلاتا ہے اگر اس کا راس محور پر ہو اور ابتدائی بازو مثبت x- محور پر جیسا کہ شکل 30.7 میں دکھایا گیا ہے۔

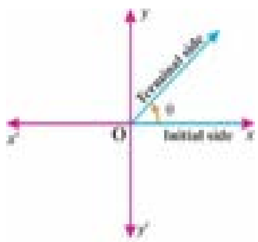


شکل (iv) 30.7

شکل (iii) 30.7



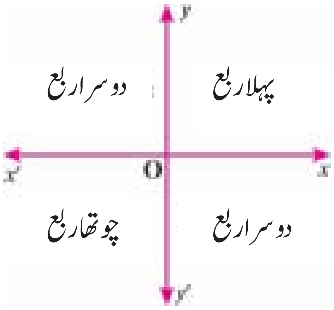
شکل (ii) 30.7



شکل (i) 30.7

30.3(ii) ربعات (Quadrants) اور ربعی زاویوں (Quadrants Angles) کی پہچان کرنا۔

مستطیلی عددی نظام میں دو محور ایک مستوی کو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں ہر حصہ ربع (Quadrants) کہلاتا ہے۔ جس سے چار ربعات بنتے ہیں جیسا کہ شکل 30.5 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 30.8

پہلے ربع میں زاویے 0° اور 90° کے درمیان

یعنی $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

دوسرے ربع میں زاویے 90° اور 180° کے درمیان

یعنی $90^\circ < \theta < 180^\circ$

تیسرے ربع میں زاویے 180° اور 270° کے درمیان

یعنی $180^\circ < \theta < 270^\circ$

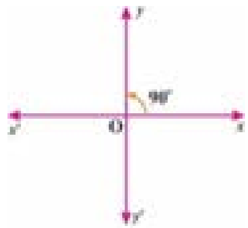
چوتھے ربع میں زاویے 270° اور 360° کے درمیان

یعنی $270^\circ < \theta < 360^\circ$

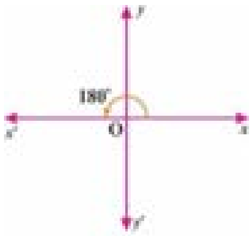
ربع میں زاویہ معیاری صورت میں ہوتا ہے اگر اس کا اختتامی بازو ربع میں ہوتا ہے۔

30.3(ii)(b) ربعی زاویے (Quadrants Angles)

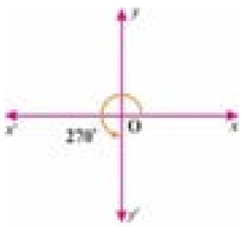
اگر معیاری زاویے کے اختتامی بازو x- محور یا y- محور پر واقع ہو تو یہ ربعی زاویہ کہلاتا ہے۔ مثلاً 90°، 180°، 270° اور 360° جو کہ مندرجہ ذیل اشکال میں دکھائے گئے ہیں۔



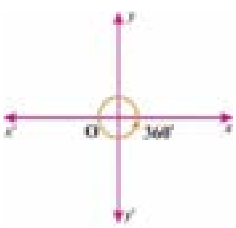
شکل 30.9 (i)



شکل 30.9 (ii)



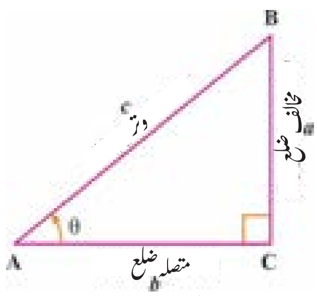
شکل 30.9 (iii)



شکل 30.9 (iv)

30.3(iii) ایک اکائی دائرے کی مدد سے تکونیاتی نسبتوں اور ان کی معکوس نسبتوں کی تعریف کرنا۔

ہم پہلے ہی پچھلی جماعتوں میں قائمۃ الزاویہ مثلث ABC کے کسی حادہ زاویہ θ کے لیے تکونیاتی نسبتوں کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔ جیسا کہ نیچے دی گئی ہیں۔



شکل 30.10

1. $\sin\theta = \dfrac{\text{مخالف ضلع کی لمبائی}}{\text{وتر کی لمبائی}} = \dfrac{a}{c}$

2. $\cos\theta = \dfrac{\text{متصل ضلع کی لمبائی}}{\text{وتر کی لمبائی}} = \dfrac{b}{c}$

3. $\tan\theta = \dfrac{\text{مخالف ضلع کی لمبائی}}{\text{متصل ضلع کی لمبائی}} = \dfrac{a}{b}$

اور ان کے معکوس بالترتیب ہیں

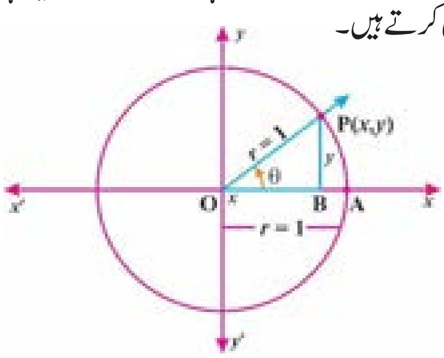
4. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{وتر کی لمبائی}}{\text{مخالف ضلع کی لمبائی}} = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{c}{a}$

5. $\sec\theta = \dfrac{\text{وتر کی لمبائی}}{\text{متصلہ ضلع کی لمبائی}} = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{c}{b}$

6. $\cot\theta = \dfrac{\text{متصلہ ضلع کی لمبائی}}{\text{مخالف ضلع کی لمبائی}} = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{b}{a}$

دائرے کے ہر نقطہ کے متقابل ہمیشہ ایک زاویہ ہوتا ہے۔

فرض کریں $P(x, y)$ اکائی دائرے میں پہلے ربع (Quadrants) میں ایک نقطہ ہے اور θ متقابلہ زاویہ ہے جیسا کہ شکل 30.1 میں دکھایا گیا ہے۔ ہم تکونیاتی نسبتوں کو یوں بیان کرتے ہیں۔



شکل 30.11

$\sin\theta = \dfrac{|BP|}{|OP|} = \dfrac{y}{1} = y,$

$\cos\theta = \dfrac{|OB|}{|OP|} = \dfrac{x}{1} = x,$ اور

$\tan\theta = \dfrac{BP}{OB} = \dfrac{y}{x},$ بشرطیکہ $x \neq 0$ اب

اور اس ہی طرح،

$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$ $\quad y \neq 0$ بشرطیکہ

$\sec\theta = \dfrac{1}{x}$ $\quad x \neq 0$ بشرطیکہ

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{y}$ $\quad y \neq 0$ بشرطیکہ

معکوس نسبتیں نیچے دی گئی ہیں۔

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ یا $\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ یا $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ یا $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

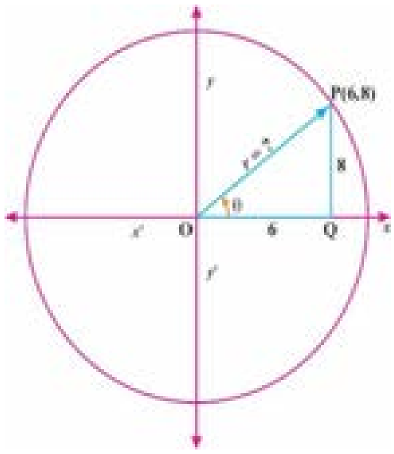
نوٹ:

- تمام تکونیاتی نسبتیں x اور y کی صورت میں تکونیاتی تفاعل کہلاتی ہیں۔
- تفاعل $\cos\theta$ اور $\sin\theta$ دائرے تفاعل بھی کہلاتے ہیں۔

مثال:

زاویہ θ کے لیے تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں۔ اگر نقطہ P (6,8) کے اختتامی بازو پر ہے۔

حل:



شکل 30.12

یہاں $P(x,y)=(6,8)$

جیسا کہ شکل 30.12 میں دکھایا گیا ہے $y=8$ اور $x=6$ $\Rightarrow$

مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore \quad r^2 = (6)^2 + (8)^2$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{100} = 10, \quad \text{جبکہ} \quad r = |\overline{OP}|$$

پس تمام چھ تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں ہیں

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \qquad \sec\theta = \frac{5}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \qquad \text{اور} \qquad \cot\theta = \frac{3}{4}$$

30.3 (iv) تکونیاتی نسبتوں °30، °45 اور °60 کی قیمتوں کا اعادہ کے لیے

تکونیاتی نسبتوں °30، °45 اور °60 کی قیمتیں معلوم کرنا ہم پہلے سیکھ چکے ہیں۔ جو نیچے جدول میں دی گئی ہیں

θ	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

اب ہم معکوس تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں اوپر دی گئی جدول کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\operatorname{cosec}30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \qquad \text{cosec}\,45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \qquad \cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{cosec}\,60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

اور

(v)30.3 مختلف ربعوں میں تکونیاتی نسبتوں کی علامت پہچانا

اگر θ ربعی زاویہ نہیں ہے تو تکونیاتی نسبتوں کی علامت اُس کے اختتامی بازو پر نقطہ $P(x,y)$ کے مطابق معلوم کی جاسکتی ہیں۔

1. اگر θ پہلے ربع میں واقع ہے تو نقطہ $P(x,y)$ اُس کے اختتامی بازو پر واقع ہے x اور y - محور (Cordinates) مثبت ہوتے ہیں یعنی $x>0$ اور $y>0$

$\therefore$ تمام تکونیاتی نسبتیں / تفاعل پہلے ربع میں مثبت ہوتے ہیں

2. دوسرے ربع میں $x<0$ اور $y>0$ اس لیے $\sin\theta$ اور $\text{cosec}\theta$ دوسرے ربع میں مثبت ہوتے ہیں اور باقی تمام نسبتیں منفی ہوتی ہیں

3. تیسرے ربع میں $x<0$ اور $y<0$ اس لیے $\tan\theta$ اور $\cot\theta$ تیسرے ربع میں مثبت ہوتے ہیں اور باقی تمام نسبتیں منفی ہوتی ہیں

4. چوتھے ربع میں $x>0$ اور $y<0$ مثبت ہوتے ہیں اس لیے $\cos\theta$ اور $\sec\theta$ چوتھے ربع میں مثبت ہوتے ہیں اور باقی تمام نسبتیں منفی ہوتی ہیں۔

مثال: مندرجہ ذیل تکونیاتی نسبتوں / تفاعل کی علامات معلوم کریں

(i) $\cos 120^\circ$ (ii) $\sin 1030^\circ$ (iii) $\tan 229^\circ$ (iv) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (v) $\text{cosec}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

حل:

(i) $\cos 120^\circ$

$\because$ 120° دوسرے ربع میں واقع ہے اور $\cos\theta$ منفی دوسرے ربع میں منفی ہے۔

$\therefore$ $\cos 120^\circ$ منفی ہے

(ii) $\sin(720^0 + 310^0) = \sin 1030^\circ$

$\because$ یہ 310° چوتھے ربع میں واقع ہے اور چوتھے ربع میں $\sin\theta$ منفی ہے

$\therefore$ پس $\sin 1030^\circ$ منفی ہے

(iii) $\tan 229^\circ$

$\because$ 229° تیسرے ربع میں واقع ہے اور $\tan\theta$ تیسرے ربع میں مثبت ہے

$\therefore$ $\tan 229^\circ$ مثبت ہے۔

(iv) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\dfrac{-\pi}{4}$ چوتھے ربع میں واقع ہے اور $\tan\theta$ چوتھے ربع میں منفی ہے

$\tan\dfrac{-\pi}{4}$ منفی ہے

(v) $\operatorname{cosec}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\because$ $\dfrac{-\pi}{3}$ چوتھے ربع میں واقع ہے اور $\operatorname{cosec}\theta$ چوتھے ربع میں منفی ہے

$\therefore$ $\operatorname{cosec}\dfrac{-\pi}{3}$ منفی ہے

30.3(v) اگر ایک تکونیاتی نسبت کی قیمت دی گئی ہو تو باقی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کریں

اس طریقے کو مندرجہ ذیل مثالوں سے سمجھایا گیا ہے

مثال 1: اگر $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ تو باقی تمام تکونیاتی نسبتیں / تفاعل معلوم کریں

چونکہ $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

شکل 30.13 کی مدد سے

$$\frac{3}{5} = \frac{y}{r}$$

$\Rightarrow$ $y = 3$ اور $r = 5$

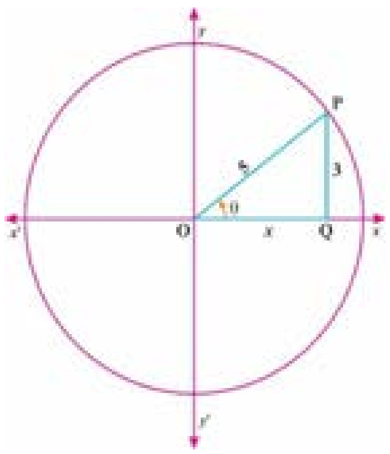
چونکہ

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + (3)^2 = (5)^2$$
$$x^2 + 9 = 25$$
$$x^2 = 25 - 9$$
$$\Rightarrow \quad x^2 = 16$$
$$\Rightarrow \quad x = 4$$

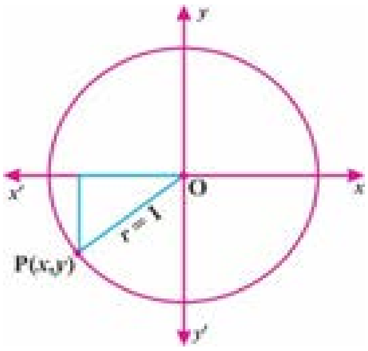
اب

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$
$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{4}$$
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{3}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$$
$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$



مثال 2: اگر $\tan\theta = 1$ اور θ تیسرے ربع میں واقع ہے باقی تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں معلوم کریں



شکل 30.14

حل:

شکل 30.14 کی مدد سے

$$\therefore \quad \tan\theta = 1$$

$$\therefore \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} = 1,$$

$$\Rightarrow \quad y = x$$

$$\because \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$\therefore \quad x^2 + x^2 = 1 \qquad \because \; y = x$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

یہاں ہم منفی قیمت لیتے ہیں کیونکہ θ تیسرے ربع میں واقع ہے

$y = \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ اور $x = \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

اس لیے باقی تکونیاتی تفاعل ہیں

$\cot\theta = 1$،

$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$،

$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = -\sqrt{2}$،

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

اور $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\sqrt{2}$

مثال 3: اکائی دائرے کی مدد سے باقی تکونیاتی نسبتوں / تفاعل معلوم کریں اگر

(i) $\cos\theta = \frac{2}{3}$ اور θ پہلے ربع میں واقع ہے

(ii) $\sin\theta = 0.6$ اور $\tan\theta$ منفی ہے

حل:

$\cos\theta = x = \frac{2}{3}$، $\quad \therefore \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{3}{2}$،

چونکہ θ پہلے ربع میں واقع ہے $\quad \therefore \quad$ جبکہ $(x, y) \in Q_1$

اور $x^2 + y^2 = 1$ (معلوم)

یہاں $x = \cos\theta$ اور $y = \sin\theta$

$$\therefore \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

یہاں ہم مثبت قیمت لیتے ہیں کیونکہ θ پہلے ربع میں واقع ہے

$$\therefore \quad y = \frac{\sqrt{5}}{3} = \sin\theta \ ; \qquad \therefore \ \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{3}{\sqrt{5}} \ ,$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}; \qquad \therefore \ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \text{اور}$$

پس مطلوبہ تکونیاتی نسبتیں ہیں

1. $\sec\theta = \dfrac{3}{2}$ 2. $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 3. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

4. $\tan = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ اور $= \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

حل (ii): لہٰذا

$$\sin y = 0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \qquad \therefore \ \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3} = 1.6,$$

لہٰذا $\sin\theta > 0$ اور $\tan\theta < 0$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\therefore \quad x^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \pm\frac{4}{5}$$

یہاں ہم منفی قیمت لیں گے کیونکہ p(θ) دوسرے ربع میں ہے۔

$$\therefore \quad x = \cos\theta = -\frac{4}{5} = -0.8 \quad \text{اور} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{5}{4} = -1.25$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = -\frac{3}{4} = -0.75 \quad \text{اور} \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = -\frac{4}{3} = 1.3 \quad \text{اب}$$

پس مطلوبہ باقی تکونیاتی نسبتیں ہیں

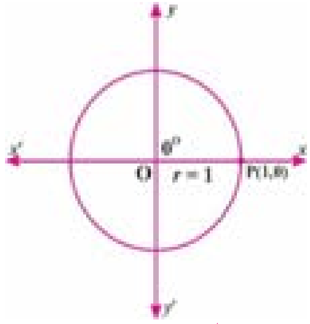
1. $\operatorname{cosec}\theta = 1.6$ 2. $\cos\theta = -0.8$ 3. $\sec\theta = -1.25$

4. $\tan\theta = -0.75$ 5. $\cot\theta = -1.3$

30.3 (vii) تکونیاتی نسبتوں اور کی قیمتیں معلوم کریں $0°, 90°, 180°, 270°$ اور $360°$

ہم پہلے ہی سیکشن 30.3(ii)(b) میں ربعی زاویے زیر بحث کر چکے ہیں۔
یہاں ہم تکونیاتی نسبتوں کے ربعی زاویے معلوم کرینگے

جب $\theta = 0°$



شکل 30.15

اکائی دائرے میں نقطہ P(1,0) زاویہ 0° کے اختتامی بازو پر واقع ہے۔

$\therefore$ یہاں $r = 1$ اور $x = 1, y = 0$ جبکہ اکائی دائرے کا رداس r ہے۔

$\therefore \quad \sin 0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0\,; \qquad \therefore \quad \operatorname{cosec}0° = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

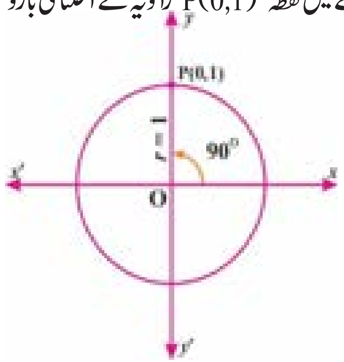
$\therefore \quad \cos 0° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1\,; \qquad \therefore \quad \sec 0° = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$

$\therefore \quad \tan 0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0\,; \qquad \therefore \quad \cot 0° = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

جب $\theta = 90°$

اکائی دائرے میں نقطہ P(0,1) زاویہ کے اختتامی بازو $90°$ پر واقع ہے اور مثبت طور y - محور پر واقع ہے۔

$\therefore$ یہاں $x = 0, y = 1$ اور $r = 1.$



شکل 30.16

$\therefore \quad \sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1;$

$\operatorname{cosec}90° = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$

$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0;$

$\sec 90° = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

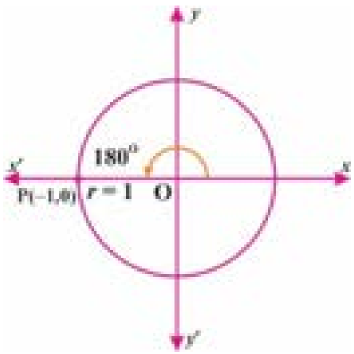
$\tan 90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

$\cot 90° = \frac{x}{y} = 0$ اور

جب $\theta = 180°$

اکائی دائرے میں، نقطہ $P(-1,0)$ زاویہ 180° کے اختتامی بازو پر واقع ہے اور منفی x-محور پر واقع ہے۔
اس صورت میں

$$P(-1,0) \Rightarrow x=-1,\ y=0 \quad \text{اور} \quad r=1$$



شکل 30.17

$$\sin 180^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec} 180^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} \quad (\text{ناقابل تعریف})$$

$$\cos 180^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1;$$

$$\sec 180^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

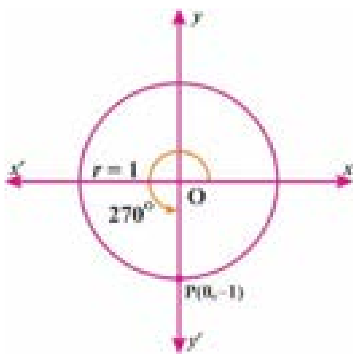
$$\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0;$$

$$\cot 180^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} \quad (\text{ناقابل تعریف})$$

جب $\theta = 270^\circ$

اکائی دائرے میں، نقطہ $P(0,-1)$ زاویہ 180° کے اختتامی بازو پر واقع ہے اور منفی y-محور پر واقع ہے۔
اس صورت میں

$$\therefore \quad P(0,-1) \Rightarrow x=0, y=-1 \quad \text{اور} \quad r=1$$



شکل 30.18

$$\therefore \quad \sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1;$$

$$\operatorname{cosec} 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cos 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$\sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} \quad (\text{ناقابل تعریف})$$

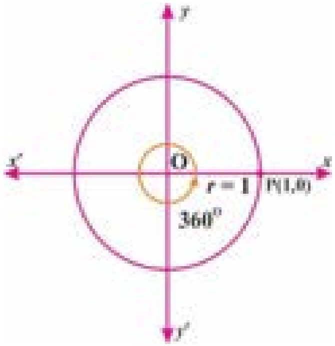
$$\tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} \quad (\text{ناقابل تعریف})$$

$$\text{اور} \quad \cot 270^\circ = \frac{0}{-1} = 0$$

جب $\theta = 360^\circ$

اکائی دائرے میں، نقطہ $P(1,0)$ زاویہ 360° کے اختتامی بازو پر واقع ہے اور مثبت x-محور پر واقع ہے۔
اس صورت میں

$$P(1,0) \Rightarrow x=1,\ y=0 \quad \text{اور} \quad r=1$$



شکل 30.19

$\therefore$ $\sin 360^\circ = \dfrac{y}{r} = \dfrac{0}{1} = 0$;

$\operatorname{cosec} 360^\circ = \dfrac{1}{\sin 360^\circ} = \dfrac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

$\cos 360^\circ = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{1} = 1$;

$\sec 360^\circ = \dfrac{1}{\cos 360^\circ} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\tan 360^\circ = \dfrac{y}{x} = \dfrac{0}{1} = 0$;

اور $\cot 360^\circ = \dfrac{1}{\tan 360^\circ} = \dfrac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

تمام نتائج کے خلاصے سے ہمیں یہ جدول ملتی ہے

360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	0°	θ
0	−1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	sin
1	0	−1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	cos
0	−∞	0	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	tan
∞	−1	∞	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	cosec
1	∞	−1	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	sec
∞	0	∞	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	cot

مشق 30.3

.1 مندرجہ ذیل زاویوں کے عمومی زاویے معلوم کریں۔

(i) 55° (ii) $\dfrac{\pi}{6}$ (iii) -45° (iv) $\dfrac{-3\pi}{4}$

.2 مندرجہ ذیل زاویوں کے ربعات کی شناخت کریں

(i) $\dfrac{8\pi}{5}$ (ii) 75° (iii) -818° (iv) 1090° (v) $\dfrac{7\pi}{6}$ (vi) $-\dfrac{5\pi}{4}$

3. مندرجہ ذیل کی علامت معلوم کریں۔

(i) $\cos 120^\circ$ (ii) $\sin 340^\circ$ (iii) $\sec 200^\circ$

(iv) $\operatorname{cosec} 198^\circ$ (v) $\tan\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ (vi) $\cot\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$

4. θ، کس ربع میں واقع ہے اگر

(i) $\sin\theta > 0$ اور $\cos\theta < 0$ (ii) $\cos\theta < 0$ اور $\tan\theta > 0$

(iii) $\sec\theta < 0$ اور $\sin\theta < 0$ (iv) $\sec\theta < 0$ اور $\cot\theta > 0$

(v) $\tan\theta < 0$ اور $\cos\theta < 0$ (vi) $0 < \cot\theta < 1$

5. اگر $\cos\theta = \frac{3}{5}$ اور $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi,$ تو بقیہ تمام تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں

6. بقیہ تکونیاتی نسبتیں / تفاعل معلوم کریں اگر

(i) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ اور θ دوسرے ربع میں واقع ہے

(ii) $\cos\theta = \frac{2}{3}$ اور θ چوتھے ربع میں واقع ہے

(iii) $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ اور θ دوسرے ربع میں واقع ہے

(iv) $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{2}$ $\sec\theta =$ اور θ پہلے ربع میں واقع ہے

(v) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ اور $\tan\theta$ مثبت ہے

7. قیمتیں معلوم کریں

(i) $\tan 30^\circ \tan 60^\circ + \tan 45^\circ \cot 45^\circ$ (ii) $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ}$ (iii) $\frac{\sin 45^\circ}{\sin 45^\circ + \cot 45^\circ}$

(iv) $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$ (v) $\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}$ (vi) $\frac{\tan 45^\circ + \cot 45^\circ}{\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ}$

30.4 تکونیاتی متطابقات (Trigonometric Identities):

متطابق ایسی مساوات ہوتی ہے جو متغیر کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہو (سوائے جہاں قیمت واضح نہ ہو)

30.4.1 تکونیاتی متطابقات (Trignometric Identities) کو ثابت کرنا اور انہیں مختلف تکونیاتی روابط کو ثابت کرنے کے لیے استعمال کرنا۔

ایک اکائی دائرے میں قائمۃ الزاویہ مثلث متعلق کسی بھی حقیقی عدد θ کے لیے۔ ہمارے پاس مندرجہ ذیل بنیادی تکونیاتی متطابقات ہیں۔

(i) $\sin\theta + \cos\theta = 1$ (ii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ (iii) $\operatorname{cosec}\theta = 1 + \cot\theta$

(i) ثبوت

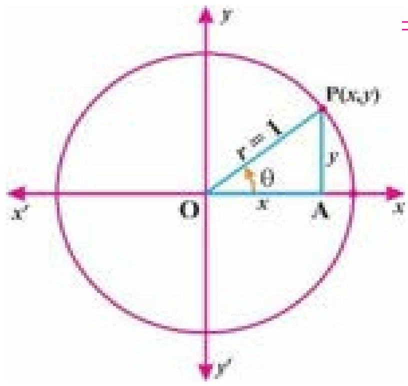
اکائی دائرے میں ΔOAP، پر غور کریں جس میں $m\angle AOP = \theta$ ریڈین معیاری صورت میں

فرض کریں $P(x, y)$ زاویئے کے اختتامی بازو پر ایک نقطہ ہے

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے ہمارے پاس $x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad [\because \; x = \cos\theta$ ء $y = \sin\theta]$

پس ثابت ہو



شکل 30.20

(ii) ثبوت: مسئلہ فیثاغورث

$1 = x^2 + y^2$

دونوں اطراف x^2 سے تقسیم کرنے سے ہمیں ملا

$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2}$ یا $\frac{1}{x^2} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta,$

$\Rightarrow \quad \boxed{\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta}$ (بشرطیکہ $x = \cos\theta \neq 0$)

پس ثابت ہوا

(iii) ثبوت: مسئلہ فیثاغورث

$1 = x^2 + y^2$

دونوں اطراف y^2 سے تقسیم کرنے سے ہمیں ملا

$\frac{1}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} + 1,$ یا $\left(\frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2 = (\cot\theta)^2 + 1,$ (بشرطیکہ $\sin\theta \neq 0$)

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta} \quad \left(\because \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta\right)$

پس ثابت ہوا

مثال 1: ثابت کریں $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta)$

پس ثابت ہوا: $L.H.S = (\sin\theta + \cos\theta)^2$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

$= 1 + 2\sin\theta\cos\theta \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= R.H.S$

$\because$ $L.H.S = R.H.S$

$\because$ $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = 1+2\sin\theta\cos\theta$

پس ثابت ہوا

مثال 2: ثابت کریں $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

ثبوت:

$$
\begin{aligned}
L.H.S &= \sin\theta \\
&= \sqrt{(\sin\theta)^2} \\
&= \sqrt{\sin^2\theta}, \\
&= \sqrt{1-\cos^2\theta}, \quad \left[\therefore \sin^2\theta+\cos^2\theta = 1\right]
\end{aligned}
$$

$R.H.S =$

$\therefore$ $R.H.S = L.H.S$

$\therefore$ $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

پس ثابت ہوا

مثال 3:

ثابت کریں (بشرطیکہ $\cos\theta \neq 0$) , $\dfrac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta} = \dfrac{\sin\theta+\tan\theta}{\sin\theta-\tan\theta}$

ثبوت:

$$
\begin{aligned}
L.H.S &= \frac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta}, \\
&= \frac{1+\dfrac{1}{\cos\theta}}{1-\dfrac{1}{\cos\theta}}, \\
&\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta-1} \\
&= \frac{\sin\theta(\cos\theta+1)}{\sin\theta(\cos\theta-1)} \quad (\sin\theta \neq 0 \text{ بشرطیکہ}) \\
&= \frac{\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta-\sin\theta} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} \quad (\cos\theta \neq 0 \text{ بشرطیکہ})
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\sin\theta + \tan\theta}{\sin\theta - \tan\theta}$$

$$= R.H.S$$

$\because$ $L.H.S = R.H.S$

$\therefore$ $\dfrac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta} = \dfrac{\sin\theta + \tan\theta}{\sin\theta - \tan\theta}$

پس ثابت ہوا

مثال 4: ثابت کریں $\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$

ثبوت :

$$L.H.S = \sin\theta,$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta, \quad (\cos\theta \neq 0 \text{ بشرطیکہ})$$

$$= \tan\theta \cdot \cos\theta,$$

$$= R.H.S$$

$$L.H.S = R.H.S$$

$\therefore$ $\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$

پس ثابت ہوا

مشق 30.4

-1 مندرجہ ذیل تکونیاتی متطابقات کو ثابت کریں

(i) $\sin^2\theta = \left(\sec^2\theta - 1\right)\cos^2\theta$ $\quad \left(\cos\theta \neq 0\right)$

(ii) $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta + \sec\theta$ $\quad \left(\cos\theta \neq 0\right)$

(iii) $\tan\theta = \sin\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}$ $\quad \left(\cos\theta \neq 0\right)$

(iv) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

(v) $\sin^3\theta = \sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta$

(vi) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ $\quad \left(\cos\theta \neq 1\right)$

(vii) $\sqrt{\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}} = \dfrac{\sec\theta+1}{\tan\theta}$ $\quad \left(\tan\theta \neq 0\right)$

(viii) $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$ $\quad \left(\tan\theta \neq 0\right)$

(ix) $\operatorname{cosec}\theta\cot\theta = \dfrac{\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta}{\sin\theta+\tan\theta}$ ، $(\sin\theta \neq 0)$

(x) $\sin^2\theta = \dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$, $(\cos\theta \neq 0)$

(xi) $\cos^2\theta = \dfrac{\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta}$, $(\sin\theta \neq 0)$

(xii) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \sin\theta\cos\theta\cot\theta = 1$, $(\sin\theta \neq 0$ یا $\cos\theta \neq 0)$

.2 پہلے اظہاریے کو دوسرے اظہاریے میں تبدیل کریں

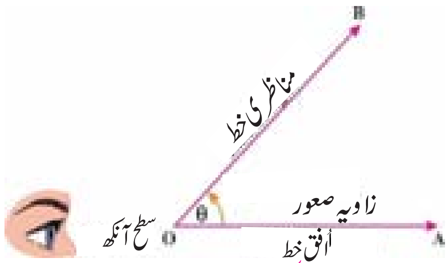
(i) $(\sec\theta+1)(\sec\theta-1)$ کو $\tan^2\theta$ میں

(ii) $\dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ کو $\tan\theta$ میں

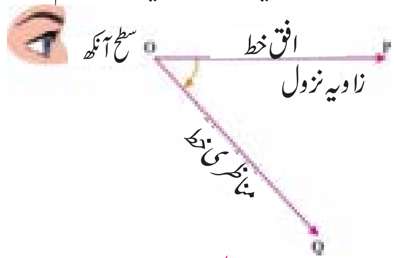
(iii) $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ کو $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ میں

30.5 اُزاویہ صعود اور زاویہ نزول (Angles of Elevation and Depression)

30.5 (i). اُزاویہ صعود اور زاویہ نزول معلوم کرنا



شکل 30.21: (i)



شکل 30.21 (ii)

جب ایک جسم مشاہدے کی آنکھ کی سطح سے اوپر ہو تو گھڑی کی مخالف سمت میں افقی خط سے مناظری خط کی جانب زاویہ صعود ہوتا ہے جیسا کہ شکل میں 30.2(i) دکھایا گیا ہے۔ جب ایک جسم مشاہدے کی آنکھ کی سطح سے نیچے ہو تو گھڑی کی سمت میں افقی خط سے مناظری خط کی جانب زاویہ نزول ہوتا ہے جیسا کہ شکل 30.2(ii) میں دکھایا گیا ہے

ہماری روز مرہ زندگی میں یہ فاصلہ معلوم کرنے کے لیئے استعمال کیا جاتا ہے زاویے کا تعلق مشاہدے سے دور جسم جو مشاہدے کے مقام سے اوپر ہو یا نیچے ہو اس میں زاویہ صعود یا نزول کے استعمال پر مشتمل ہوتا

30.5 (ii) زاویہ صعود اور نزول پر مشتمل روز مرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1: ایک بجلی کے کھمبے کی چوٹی سے زمین پر ایک نقطے پر اپنی بُنیاد سے 18 میٹر دور زاویہ صعود 30° ہے بجلی کے کھمبے کی بلندی معلوم کریں

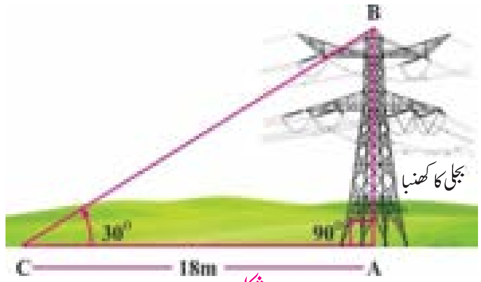
حل زاویہ صعود ایک نقطہ P کھمبے کی چوٹی B (آنکھ کی سطح سے اوپر) 30° ہے اور فرض کریں کنبھے کی اونچائی h ہے کھنبا نقطہ P سے 18 میٹر فاصلے پر ہے۔ΔPAB میں ہمارے پاس $\theta = 30^\circ$ $|\overline{PA}| = 18\text{ m}$ ہے

$$\therefore \quad \tan 30^\circ = \frac{h}{|PA|} = \frac{h}{18}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{18}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{18}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} \text{ میٹر}$$



شکل 30.22

پس بجلی کے کھنبے کی اونچائی $6\sqrt{3}$ میٹر ہے

مثال 2: ایک جسم کی بُلندی معلوم کریں اگر سورج کا زاویہ صعود 19 ہے اور جسم کے سائے کی لمبائی 1.7 میٹر ہے۔

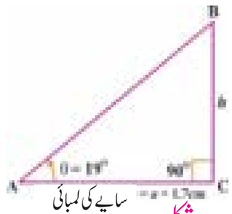
حل: سورج کا ذریعہ صعود 19° یعنی $\theta=19^\circ$ اور سایے کی لمبائی میٹر $a = 1.7$ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے تو

$$\tan 19^\circ = \frac{h}{a} = \frac{h}{1.7}$$

$$\Rightarrow \quad h = (1.7)\cdot \tan 19^\circ$$

$$\Rightarrow \quad h = (1.7)\cdot(0.3443) = 0.585\text{m}$$

پس جسم کی مطلوبہ اونچائی 0.585 میٹر ہے



شکل 30.23

مثال 3: ٹاور کی اونچی سے جہاز کی قریبی بندر گاہ زاویہ نزول اُس کے پائی کے خط پر 40° ہے اگر ٹاور کی اونچی 35 میٹر ہے۔ جہاز اور ٹاور کے پائے کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

حل: فرض کریں 'x' فاصلہ ہے جہاز کا لفظ B سے ٹاور کا پایا نقطہ A تک جیسا کہ شکل دکھایا گیا ہے اور "h" ٹاور کی اونچی ہے۔

یہاں $h = 35$ میٹر (ٹاور کی اونچائی)

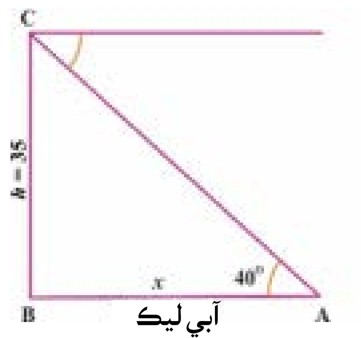
اور $\theta = 40^\circ$ (زاویہ نزول)

$x = ?$

ΔABC میں

$$\tan 40^\circ = \frac{h}{x} = \frac{35}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{35}{\tan 40^\circ} = \frac{35}{0.8391} = 41.71\text{m (تقریباً)}$$



شکل 30.24

پس جہاز اور ٹاور کے پائے کے درمیان فاصلہ 41.71 میٹر (تقریباً) ہے۔

مشق 30.5

1. 102 میٹر اونچے روشنی کے مینار سے جہاز کا زاویہ نزول $30^\circ18'$ ہے۔ جہاز روشنی کے مینار سے کتنے فاصلے پر ہے۔
2. ایک سیڑھی زمین کے ساتھ 65° کا زاویہ بناتی ہے اور دیوار پر 6 میٹر کی بلندی تک پہنچتی ہے۔ سیڑھی کی لمبائی معلوم کریں۔
3. زاویہ صعور معلوم کریں جب ایک 6 میٹر بانس $2\sqrt{3}$ میٹر لمبائی کا سایہ بناتا ہے۔
4. ایک مقام سے پہاڑی کی چوٹی کا زاویہ صعود 30° کا ہے۔ اس مقام 210 میٹر پہاڑی کی طرف چلنے سے چوٹی کا زاویہ صعود 45° ہو جاتا ہے۔ پہاڑی کی بلندی معلوم کریں
5. ایک مشاہدے کا مطابق ایک غبارہ زمین سے 4280 میٹر اوپر ہے اور فارم ہاؤس 9613 میٹر دور ہے۔ غبار سے مشاہدہ کیا جائے تو فارم ہاؤس کے زاویہ نزول معلوم کریں۔

اعادہ مشق 30

1. درست جواب پر ($\surd$) کا نشان لگائیں۔

i. پچائش کے نظام میں جو زاویہ ریڈین میں پیائش ________ کہا جاتا ہے کہتا ہے

(a) CGS نظام (b) سکسا جیمل نظام
(c) MCS نظام (d) دائروی نظام

ii. دو غیر ہم خط شعاعوں کا یونین کا مشترکہ راس ________ کہلاتا ہے

(a) ایک زاویہ (b) ایک ڈگری
(c) ایک منٹ (d) ریڈین

iii. $10^0 =$ ________.

(a) $600''$ (b) $3600''$ (c) $600'$ (d) 600

iv. $5\frac{\pi}{4}$ ریڈین $=$ ________.

(a) 115° (b) 225° (c) 135° (d) 45°

v. $\frac{1}{2}\sec 45^\circ =$ ________.

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{2}$

vi. $\operatorname{cosec}\theta \cdot \sin\theta =$ ________.

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) 0.5

vii. $\sec^2\theta - \tan^2\theta =$ ________.

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\cos^2\theta$

viii. اکائی دائرے میں لفظ p(x,y) کے لیے $\sin\theta =$ ____________.

(a) x (b) $-x$ (c) y (d) $-y$

ix. اگر $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ اور θ تیسرے ارباع میں واقع ہے تو $\tan\theta =$ ____________.

(a) -1 (b) 1 (c) ± 1 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

x. اگر ایک جسم مشاہدہ کی سطح سے اوپر ہے تو افقی خط اور دیکھنے والے کے مناظری خط کے درمیان ____________ کہلاتا ہے۔

(a) زاویہ نزول (b) زاویہ صعود
(c) زاویہ منفرجہ (d) ان میں کوئی نہیں

2. زاویہ اور معیاری صورت میں زاویے کی وضاحت کریں۔

3. $70^\circ 30' 90''$ کو ریڈین میں تبدیل کریں۔

4. (7200)' میں کتنے ڈگری ہوتے ہیں۔

5. $\frac{2\pi}{3}$ ریڈین کو ڈگری پیمائش میں تبدیل کریں۔

6. $\frac{3}{\pi}$ ریڈین کو “D°M'S” شکل میں تبدیل کریں۔

7. r معلوم کریں جب کہ l=7cm اور $\theta = \frac{\pi}{4}$

8. θ معلوم کریں جب کہ قوس کی لمبائی دائرے کے رداس کے برابر ہے۔

9. ثابت کریں کہ $(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta)=1$

10. قطاع دائرے کا رقبہ معلوم کریں جبکہ r=2cm اور $\theta=3$ ریڈین

خلاصہ

- دائرے کے محیط کی 360 برابر حصوں میں تقسیم اور ہر حصے کا مرکز پر بنانے والا زاویہ ایک ڈگری کہلاتا ہے اور اسے 1° سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- دائرے کے مرکز پر بننے والا اس طرح کہ قوس کی لمبائی اور دائرے کی رداس برابر ہیں تو زاویہ کی پیمائش ایک ریڈین ہے۔
- ریڈین/ڈگری کی مزید تقسیم

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ ریڈین ≈ 0.01745 ریڈین

- دائرے کی قوس کی لمبائی معلوم کرنے کا کلیہ $l = r\theta$ ہے۔
- قطاع کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ $= \frac{1}{2}lr$ or $= \frac{1}{2}r^2\theta$.

- زاویے جن کے ابتدائی اور اختتامی بازو ایک جیسے ہوں ہم بازو اوے کہلاتے ہیں اور یہ 2π ریڈین کے فرق سے بنتے ہیں۔ یہ عمومی زاویے بھی کہلاتے ہیں۔
- ایک زاویہ معیاری صورت میں کہلاتا ہے اگر اس کا راس مبداء پر ہو اور اس کے ابتدائی بازو مثبت x-محور پر ہو۔
- مستطیلی محور نظام (Rectangular coordinate system) میں محور ایک مستوی کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں ہر حصہ ربع (Quadrant) کہلاتا ہے جس سے چار ربعات بنتے ہیں

  زاویے 0° سے 90° کے درمیاں پہلے ربع میں ہوتے ہیں

  زاویے 90° سے 180° کے درمیاں پیرے ربع میں ہوتے ہیں

  زاویے 180° سے 270 درمیان تیرے ربع میں ہوتے ہیں

  زاویے 270° سے 360 درمیان چوتھے ربع میں ہوتے ہیں
- اگر معیاری زاویے کا اختتامی بازو x-محور اور y-محور پر واقع ہوتے ہیں تو یہ ربعی زاویے کہلاتے ہیں
- زاویہ θ کی چھ بنیادی تکونیاتی نسبتیں ہوتی ہیں $\sin\theta$، $\cos\theta$، $\tan\theta$، $\text{cosec}\theta$، $\sec\theta$ اور $\cot\theta$
- معکوس نسبتیں نیچے دی گئی ہیں

$$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{یا} \quad \sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{یا} \quad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \quad \text{یا} \quad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

- مطابق (Identity) ایسی مساوات ہوتی ہے جو متغیر کی تمام قیمتوں کے لیئے درست ہوتی (سوائے جہاں قیمت واضح نہ ہو)
- تین بنیادی تکونیاتی متطابقات ہیں

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

(iii) $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

- جب ایک جسم مشاہد کی آنکھ کی سطح سے اوپر ہو تو گھڑی کی مخالف سمت میں افق خط سے مناظری خط کی جانب زاویہ صعود ہوتا ہے
- جب ایک جسم مشاہد کی آنکھ کی سطح سے نیچے ہو تو گھڑی کی سمت میں افقی خط سے مناظری خط کی جانب زاویہ نزول ہوتا ہے۔

جوابات

مشق 17.1

1. (i) $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ (ii) $B=\{4,6,8,9,10\}$
(iii) $C=\{7,11,13\}$ (iv) $D=\{9,11,13,15\}$
(v) $E=\{-11,11\}$ (vi) $F=\{\ \}$ یا $\varnothing$

2. (i) $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{Q}\wedge 5<x<6\}$ (ii) $B=\{x\,|\,x$ مثبت تقسیم ہے 12 کا $\}$
(iii) $C=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}\wedge -40\le x\le 40\}$ (iv) $D=\{x\,|\,x\in\mathbb{E}\wedge -4\le x\le 4\}$
(v) $E=\{x\,|\,x$ پہلے پانچ قدرتی نمبروں کا مربع ہے $\}$
(vi) $F=\{x\,|\,x$ منفی طاق عدد ہے $\}$

3. (i) $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{W}\wedge x<0\}$ (ii) A = لڑکیوں کے کالج میں لڑکوں کے طلباء کا سیٹ
(iii) $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}\wedge 2x+1=2\}$ (iv) $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\wedge x^2=-1\}$
(v) A = پاکستان کی خواتین صدر کا سیٹ

4. i. متناہی ii. متناہی iii. غیر متناہی iv. متناہی v. غیر متناہی

5. (i) تین تحتی سیٹ ہیں: $\{a,i\},\{e,u\}$ اور $\{i,o\}$ مترادف سیٹ: $\{1,2,3,4,5\}$
$\{-2,-1,0,1,2\}$ غیر واجب تحتی سیٹ ہے
(ii) تین تحتی سیٹ ہیں $\{-1,0\},\{+1,+2\}$ اور $\{0,+2\}$ مترادف سیٹ: $\{a,b,c,d,e\}$
$\{-2,-1,0,1,2\}$ غیر واجب تحتی سیٹ ہے

6. $\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}\wedge -1<x<1\}$ ؛ $\{x\,|\,x\in\mathbb{N}\wedge x^2=16\}$

7. (i) $P(A)=\{\varnothing,\{5\},\{10\},\{15\},\{5,10\},\{5,15\},\{10,15\},\{5,10,15\}\}$
(ii) $P(B)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{0,1,2\},\{0,2,3\},\{0,1,3\},\{1,2,3\},\{0,1,2,3\}\}$

8. i. ممکن نہیں ii. یکتا سیٹ iii. خالی سیٹ

مشق 17.2

1. i. ڈس جوائنٹ سیٹ ii. اوور لیپنگ iii. جزا
iv. مکمل سیٹ v. جزا

2. i. $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8,10\}$ ii. $B\cap A=\{2,4,6\}$ iii. $A-B=\{1,3,5\}$
iv. $B-A=\{8,10\}$ v. $A\Delta B=\{1,3,5,8,10\}$

3.

i. $A' = \{6,7,8,9,10\}$　　ii. $B' = \{2,4,6,8,10\}$

iii. $A' \cup B' = \{2,4,6,7,8,9,10\}$　　iv. $A' \cap B' = \{6,8,10\}$

v. $(A \cup B)' = \{6,8,10\}$　　vi. $(A \cap B)' = \{2,4,6,7,8,9,10\}$

vii. $A' \Delta B' = \{2,4,7,9\}$　　viii. $(A \Delta B)' = \{1,3,5,6,8,10\}$

ix. $A - B' = \{1,3,5\}$　　x. $A' - B = \{6,8,10\}$

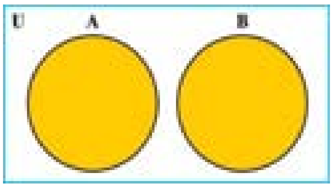
5.

i. $A \cap B = \{6n \mid n \in \mathbb{N}\}$　　ii. $A \cup C = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$　　iii. $B \cap C = \{12n \mid n \in \mathbb{N}\}$

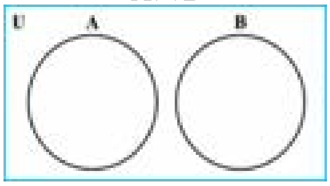
مشق 17.4

(i)

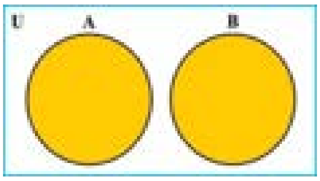
$A \cup B$



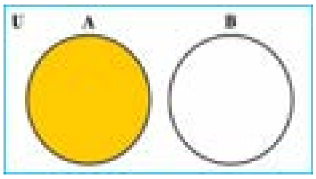
$A \cap B$



$A \Delta B$

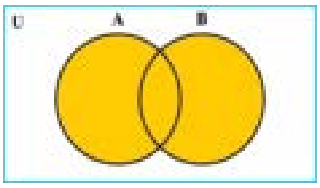


$A - B$

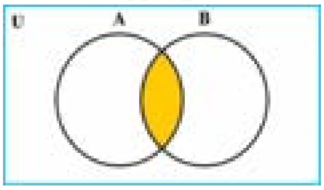


(ii)

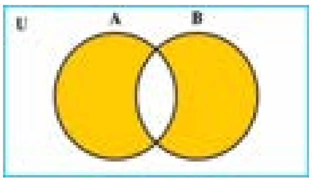
$A \cup B$



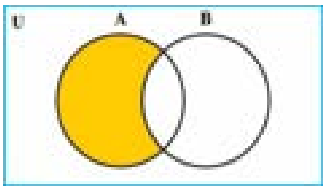
$A \cap B$



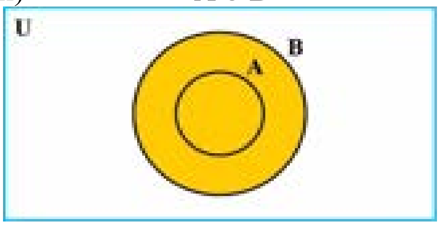
$A \Delta B$



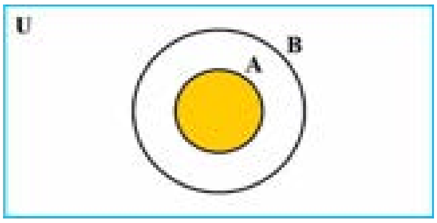
$A - B$



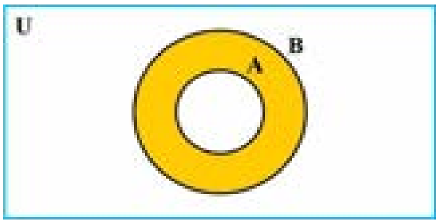
(iii) $A \cup B$



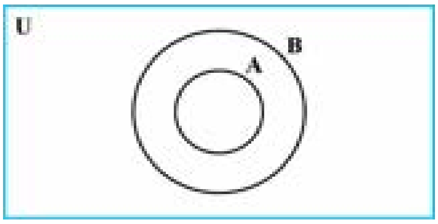
$A \cap B$



$A \Delta B$



$A - B$



مشق 17.5

1. i. $y = 17$ اور $x = 16$ ii. $y = 2$ اور $x = 1$ iii. $y = 1$ اور $x = 3$

2. $n(P \times Q) = 150$, $n(Q \times P) = 150$, $n(P \times P) = 100$

3.
(i) $A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$
(ii) $B \times C = \{(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),(3,3),(3,5)\}$
(iii) $A \times (B \cup C) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,5)(2,1),(2,2),(2,3),(2,5)\}$
(iv) $B \times (A \cup C) = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,5)(3,1),(3,2),(3,3),(3,5)\}$
(v) $(A \cap B) \times (B \cap C) = \{(2,3)\}$

4.
(i) $R_1 = \{(5,2),(5,3)\}, R_2 = \{(5,1),(6,3)\}, R_3 = \{(6,2)\}$
(ii) $R_1 = \{(2,5)\}, R_2 = \{(3,5)\}, R_3 = \{(2,5),(3,5)\}, R_4 = \{(3,5),(1,5),(3,6)\}$
(iii) $R_1 = \varnothing, R_2 = \{(1,1),(1,2)\}, R_3 = \{(2,1),(2,3)\}, R_4 = \{(1,2),(2,2),(3,3)\},$
$R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$
(iv) $R_1 = \varnothing, R_2 = \{(5,5)\}, R_3 = \{(5,6)\}, R_4 = \{(6,5)\}, R_5 = \{(6,6)\},$
$R_6 = \{(5,5),(5,6)\}, R_7 = \{(5,5),(6,5)\}, R_8 = \{(5,5),(6,6)\},$
$R_9 = \{(5,6),(6,5)\}, R_{10} = \{(5,6),(6,6)\}, R_{11} = \{(6,5),(6,6)\},$
$R_{12} = \{(5,5),(5,6),(6,5)\}, R_{13} = \{(5,5),(6,5),(6,6)\},$
$R_{14} = \{(5,5),(5,6),(6,6)\}, R_{15} = \{(5,6),(6,5),(6,6)\},$
$R_{16} = \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\},$

5. ثنائی روابط کی تعداد: 2^{12}

6. (i) $R_1 = \{(0,2),(0,4),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$

(ii) $R_2 = \{(1,8),(3,6)\}$

(iii) $R_3 = \{(3,2)\}$

7. i. ثنائی ربط کا ڈومین $= \{1,3,5,7,9\}$

ii. ثنائی ربط کا حلقہ اثر $= \{3,4,5,6\}$

8. i. ثنائی ربط کا حلقہ اثر $= \{0,1,2,3\}$

ثنائی ربط کا ڈومین $= \{2,5,8,11\}$

ii. ثنائی ربط کا حلقہ اثر $= \{6,7,8,9,...\}$

ثنائی ربط کا ڈومین $= \{0.1,2,3,4,...\}$

9. ثنائی ربط کا حلقہ اثر $f = \{1,2,3,4\}$

ثنائی ربط کا ڈومین $f = \{5,6,7,8\}$

قدرتی اعداد کا سیٹ کوڈ مین ہے f کا۔

$f(2) = 6, f(4) = 8$

10. i. تفاعل نہیں ہے

ii. تفاعل نہیں ہے

iii. ان ٹو تفاعل

iv. ان ٹو تفاعل

v. دونوں ون-ون اور آن ٹو تفاعل

11. i. آن ٹو تفاعل

ii. ون-ون مطابقت

iii. نہ ون۔ ون عمل اور نہ ون۔ون مطابقت

12. i. $f = \{(a,x),(b,y),(c,y)\}$

ii. $g = \{(p,a),(q,b),(r,c),(s,a)\}$

iii. $h = \{(a,q),(b,r),(c,s)\}$

iv. $k = \{(x,a),(y,c),(z,b)\}$

جائزہ مشق 17

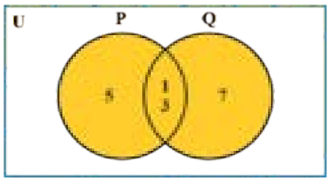
1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i.	d	ii.	b	iii.	c	iv.	c	v.	d
vi.	c	vii.	b	viii.	c	ix.	a	x.	b
xi.	a	xii.	a	xiii.	d	xiv.	c	xv.	c
xvi.	b	xvii.	c	xviii.	d	xix.	c	xx.	b

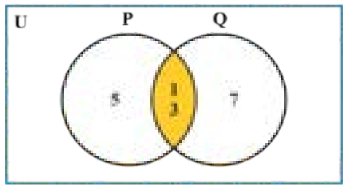
2. (a) $A \cup B = \{1,2,4,5,6\}$ (b) $A \cap B = \{2\}$ (c) $A \Delta B = \{1,4,5,6\}$

(d) $A - B = \{1,5\}$ (e) $A' = \{3,4,6\}$ (f) $B' = \{1,3,5\}$

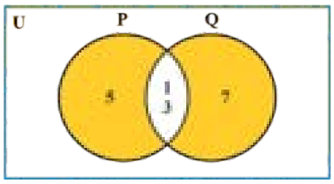
5. $P \cup Q$



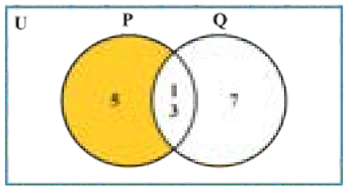
$P \cap Q$



$P \Delta Q$



$P - Q$



6. (a) $R_1 = \{(a,a),(a,c)\}, R_2 = \{(c,a),(c,c)\}$
   (b) $R_1 = \{(b,b),(b,d)\}, R_2 = \{(d,b),(d,d)\}$
   (c) $R_1 = \{(a,b)\}, R_2 = \{(a,d),(c,b)\}, R_3 = \{(c,b),(c,d)\}$
   (d) $R_1 = \{(a,c),(b,d)\}, R_2 = \{(c,c),(d,c)\}$

7. (a) $f_1 = \{(1,6),(2,8),(5,6)\}$ (b) $f_2 = \{(1,6),(2,6),(5,6)\}$

مشق 18.1

1. i. 5:2 ii. 3:5 iii. 2:9 iv. 1:10 v. 3:8 vi. 35:52
2. i. 5:3 ii. 3:5 iii. 3:8 iv. 5:8
3. 6:17 4. $a = 8$ 5. مطلوبہ عدد 6 ہے
6. $\dfrac{47}{81}$
7. i. $x = 45$ ii. $x = \dfrac{7}{6}$ iii. $x = 38$ iv. $x = a^2 - b^2$ v. $x = 4$

مشق 18.2

1. (i) $y = \dfrac{10}{3}x$ (ii) $y = 20$ (iii) $x = \dfrac{9}{2}$
2. (i) $V = \dfrac{5}{8}T$ (ii) $V = \dfrac{75}{4}$ (iii) $T = 16$ 3. $V = 216$ جب $U = 6$
   $U = 5$ جب $V = 125$

4. $F=375$ 5. $y=3$ جب $x=10$ 6. $P=81$ جب $V=4$

7. i. $F=\frac{32}{25}$ جب $r=5$ ii. $r=\frac{2}{\sqrt{3}}$ جب $F=24$

8. $x=\frac{1}{8}$ 9. $d=\frac{1}{2}$ 10. $y=\frac{18}{5}$

مشق 18.3

1. (i) 18 (ii) $(a-b)^2$ (iii) $\frac{(x+y)^2}{x^2-xy+y^2}$ (iv) $a+b$
2. (i) 1 (ii) $(a-b)$ (iii) $2a^2$ (iv) a^2+ab+b^2
3. (i) 12 (ii) $10a^2b^2$ (iii) a^2-b^2 (iv) $a-b$
4. (i) 15 (ii) 12 (iii) 8 (iv) 31

مشق 18.4

3. (i) $\{3,9\}$ (ii) $\{\ \}$ (iii) $\{\frac{101}{4}\}$ (iv) $\{0,3\}$

مشق 18.5

1. $y=\frac{x^2z}{24}$, $y=32$ 2. $y=\frac{6xu^2}{5vt}$, $y=\frac{64}{5}$ 3. $w=360$

4. 3.21 سیکنڈ 5. 177.8 معکب یونٹس

مشق 18.7

1. 3.068 ایمپیئر 2. 0.01125 فوٹ کینڈلز 3. 900 پاؤنڈ 4. 360000 روپے
5. 5600روپے

جائزہ مشق 18

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i.	d	ii.	b	iii.	a	iv.	b	v.	b
vi.	c	vii.	c	viii.	b	ix.	a	x.	c
xi.	a	xii.	c	xiii.	a	xiv.	a	xv.	c

2. (i) $20m : 1m$ (ii) $500g : 3g$

3. (i) $x=4$ (ii) $x=14$ 4. $y=48$ 5. $y=\frac{25}{2}$

7. $x=\frac{7\pm i\sqrt{15}}{2}$ 8. $x=10$ 9. 3.33 ایمپیئر

مشق 19.1

1. (i) مربعی قالب (ii) کالمی قالب
(iii) قطاری قالب (iv) وتری قالب
(v) میزانیہ قالب

2. i. 3×3 ii. 3×2 iii. 2×3 iv. 3×1 v. 1×1

3. (i) سمیٹرک قالب (ii) اسکیو سمیٹرک قالب
(iii) اسکیو سمیٹرک قالب (iv) سمیٹرک قالب

4. (i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) ممکن نہیں (iii) ممکن نہیں (iv) $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (vii) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (viii) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

5. (i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 2 & 11 & 2 \\ 15 & 10 & -1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 6 & 8 & 7 \\ 5 & 12 & 10 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 9 & 8 & 1 \\ 13 & 6 & -3 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 51 & -36 \end{bmatrix}$ **9.** $d=1$ اور $a=-2, b=1, c=-1$

10. $z=2$ اور $a=-1, b=2, c=3, d=2, x=3, y=3$

11. $AB=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}, BC=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 11 & 8 & 0 \\ 11 & 11 & 2 \\ 8 & 13 & 6 \end{bmatrix}$

مشق 19.2

1. i. 29 ii. 9 iii. 7 iv. 8 v. −59 vi. −105
vii. −84 viii. 184 ix. −42 x. 0 xi. $2x$

2. i. 1 ii. 3 iii. 3 iv. −1 v. 3 vi. −3

3. (i) $x = 3$ **4.** (i) نادر قالب (ii) غیر نادر قالب

5. (i) $\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} -8 & 18 & -4 \\ -5 & 12 & -1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ -18 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

7. (i) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) وجود نہیں رکھتا (iii) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1.2 & 1.4 & 0.8 \\ -0.4 & 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$

8. (i) { (-5,8)} (ii) $\{ (-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})\}$

جائزہ مشق

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i.	c	ii.	c	iii.	d	iv.	b	v.	d
vi.	a	vii.	c	viii.	b	ix.	a	x.	b

3. (i) 1×3 (ii) 2×3 (iii) 3×2

5. (i) $\begin{bmatrix} 3 & 13 & 17 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 11 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -9 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 73 & 47 & 76 \\ 5 & 13 & 20 \\ 46 & 7 & 16 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} -4 & 29 & 74 \\ -1 & 15 & 37 \\ 3 & 62 & 91 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 5 & 40 & 45 \\ 10 & 5 & 0 \\ -10 & 5 & 35 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 14 & 35 & 56 \\ 7 & 21 & 28 \\ 49 & 14 & 28 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} -10 & 19 & 0 \\ 7 & -19 & -36 \\ -79 & -10 & 20 \end{bmatrix}$ **6.** 368 **8.** $\begin{bmatrix} \frac{-9}{47} & \frac{8}{47} & \frac{18}{47} \\ \frac{21}{94} & \frac{-3}{94} & \frac{5}{94} \\ \frac{7}{47} & \frac{-1}{47} & \frac{-14}{47} \end{bmatrix}$

9. { (1,5)}

مشق 20.1

1. (i) روٹس حقیقی، ناطق اور غیر مساوی ہیں
(ii) روٹس حقیقی، ناطق اور غیر مساوی ہیں
(iii) روٹس کمپلیکس ہیں
(iv) روٹس حقیقی، ناطق اور غیر مساوی ہیں
(v) روٹس کمپلیکس ہیں
(vi) روٹس کمپلیکس ہیں
(vii) روٹس کمپلیکس ہیں
(viii) روٹس کمپلیکس ہیں

2. (i) (b) $k < \frac{9}{4}$ اور (a) $k = \frac{9}{4}$ (ii) (b) $k < 4$ اور (a) $k = 4$
(iii) (a) $k = \pm 2\sqrt{2}$ (b) $k < -2\sqrt{2}$ اور $k > 2\sqrt{2}$ (iv) (b) $k < 3, k \neq 1$ اور (a) $k = 3$
(v) (a) $k = \pm 4$ (b) $k < -4$ اور $k > 4$
(vi) (a) $k = \pm 24$ (b) $k < -24$ اور $k > 24$
(vii) (a) $k = 0$ (b) $k < 0$ اور $k > 0,\ k \neq 2$
(viii) (a) $k = \pm 2$ (b) $k < -2$ اور $k > 2$

3. (i) $m = 3, -2$ (ii) $m = \pm 24$

6. $q = \frac{-5}{3}$ اور $p = 2$

مشق 20.2

1. (i) $4\omega^2$ اور $4, 4\omega$ (ii) $-5\omega^2$ اور $-5, -5\omega$ (iii) $6\omega^2$ اور $6, 6\omega$

2. (i) ω (ii) 4 (iii) 729 (iv) -16

مشق 20.3

1. (i) روٹس کی ضرب اُپت $= -1$ اور روٹس کی جوڑ اُپت $= 1$
(ii) روٹس کی ضرب اُپت $= -2$ اور روٹس کی جوڑ اُپت $= \frac{3}{2}$
(iii) روٹس کی ضرب اُپت $= \frac{-3a^2}{4}$ اور روٹس کی جوڑ اُپت $= a$
(iv) روٹس کی ضرب اُپت $= k$ اور روٹس کی جوڑ اُپت $= \frac{5k}{7}$

2. (i) $m = \frac{2}{3}$ (ii) $m = \frac{1}{8}$

3. (i) $p = \pm 5$ (ii) $p = 0, 1$

4. (i) $m = 3$ (ii) $m = 13$

5. (i) $k=-4$ (ii) $k=-\frac{10}{7}$

6. (i) $p=\frac{3}{2}$ (ii) $p=1$

مشق 20.4

1. (i) $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ (ii) $(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

(iii) $\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$ (iv) $\alpha\beta\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]$

(v) $\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}$ (vi) $\frac{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

2. (i) $\frac{9}{49}$ (ii) $-\frac{99}{98}$ (iii) $\frac{3a+4}{7a^2+3a+2}$ 3. $-\sqrt{\frac{q}{p}}$

4. $\alpha+\beta$ ظاہر کرتا ہے سیدھی لکیر کو اور $\alpha\beta$ ظاہر کرتا ہے ہائپر بولا کو

مشق 20.5

1. (i) $x^2+5x+6=0$ (ii) $x^2+x+1=0$

(iii) $x^2-4x+5=0$ (iv) $x^2-8=0$

2. (i) $3x^2-9x+8=0$ (ii) $36x^2-33x+1=0$

(iii) $x^2-3x+6=0$ (iv) $2x^2-x+1=0$

(v) $2x^2-7x+3=0$

3. $rx^2-qx+p=0$ 4. $x^2-2px+4q=0$ 5. $px^2-(4p-q)x+(4p-2q+r)=0$

6. (i) $3b^2=16ac$ (ii) $b^3+ac(a+c)=3abc$

(iii) $b=0$ (iv) $a=c$

مشق 20.6

1. (i) بقایا2روٹس -1 اور $\frac{1}{2}$ ہیں (ii) بقایا2روٹس -1 اور 2 ہیں

(iii) بقایا2روٹس 6 اور -4 ہیں

2. (i) بقایا2روٹس $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{2}$ ہیں (ii) بقایا2روٹس $\sqrt{5}i$ اور $-\sqrt{5}i$ ہیں

(iii) بقایا2روٹس -1 اور 2 ہیں

3. -1 اور $\frac{3}{2}$ روٹس اور بقایا 2 ہیں $m=\frac{7}{3}$

4. -1 اور 6 روٹس اور بقایا 2 ہیں $a=2$

5. -3 اور 7 روٹس اور بقایا 2 ہیں $b=36$ اور $a=49$

مشق 20.7

1. $\left\{(1,-1),\left(\frac{7}{5},-\frac{1}{5}\right)\right\}$ 2. $\left\{(2,0),\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)\right\}$

3. $\left\{(4,3),\left(\frac{25}{8},-\frac{25}{6}\right)\right\}$ 4. $\{(-3,0),(1,2)\}$

5. $\{(\pm3,\pm4),(0,5),(-5,0)\}$ 6. $\left\{(\pm2\sqrt{2},\pm2\sqrt{2}),\left(\frac{\pm4\sqrt{5}}{5},\frac{\pm8\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$

7. $\{(1,2),(2,1),(-1,-2),(-2,-1)\}$ 8. $\left\{\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\right\}$

9. $\left\{\left(\frac{4}{5},20\right),\left(\frac{1}{5},5\right)\right\}$ 10. 7 اور 5 یا 5 اور 7

11. لمبائی = 9 میٹر اور چوڑائی = 4 میٹر 12. 8 اور 6

13. جب وتر 15cm ہے 12cm اور 9cm

14. 10cm اور 13cm ,13cm 15. 25 اور 30

جائزہ مشق 20

1. کثیر الانتخابی سوالات (MCQs)

i.	d	ii.	c	iii.	c	iv.	c	v.	c
vi.	b	vii.	a	viii.	b	ix.	c	x.	c

2. (i) ناطق روٹ (ii) حقیقی اور مساوی (iii) فرضی روٹ
(iv) حقیقی اور مساوی

3. (i) $k=\pm4$ (ii) $k<4$ اور $k>-4$ (iii) $k>4$ اور $k>-4$
(iv) $k=\pm4, \pm5$ اور اس کے علاوہ k کی قیمتیں جس پر فرق کنندہ کو مکمل مربع کریں۔

4. $9, 9\omega, 9\omega^2$

5. (i) $S.O.R=7$ اور $P.O.R=29$ (ii) $S.O.R=p$ اور $P.O.R=q$
(iii) $S.O.R=\frac{7}{5}$ اور $P.O.R=\frac{8}{5}$ (iv) $S.O.R=\frac{11}{9}$ اور $P.O.R=-\frac{28}{9}$

7. $x^2-2x-1=0$ 8. $16x^2-10x+1=0$

9. (i) $\{(2,3),(3,2)\}$ (ii) $\{(1,6),(-1,-6),(6,1),(-6,-1)\}$

مشق 21.1

1. $\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x+3}$ 2. $\frac{5}{x+1}-\frac{1}{x-3}$ 3. $\frac{3}{x}+\frac{2}{x-2}-\frac{4}{x-1}$

4. $\frac{7}{x+4}-\frac{3}{x+1}-\frac{2}{2x-1}$ 5. $1+\frac{2}{x+3}+\frac{6}{x-2}$ 6. $1-\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+1}$

7. $3x-2+\frac{1}{x-2}-\frac{5}{x+2}$

مشق 21.2

1. $\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{7}{(x+1)^2}$

2. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x+3}$

3. $\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{10}{(x-2)^2}+\dfrac{4}{(x-2)^3}$

4. $\dfrac{2}{x-5}-\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{4}{(x+2)^2}$

5. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{(x-1)^3}$

مشق 21.3

1. $\dfrac{2x+3}{x^2+7}-\dfrac{1}{x-2}$

2. $\dfrac{x+5}{x^2+10}-\dfrac{1}{x+1}$

3. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2-5x}{x^2+5}$

4. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x-2}{x^2-x+3}$

5. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x^2+3}$

مشق 21.4

1. $\dfrac{1}{4(1-x)}-\dfrac{(x+1)}{4(x^2+1)}+\dfrac{(x-1)}{2(x^2+1)^2}$

2. $\dfrac{1}{9x}+\dfrac{2}{9x^2}-\dfrac{(x+2)}{9(x^2+3)}-\dfrac{(x-1)}{3(x^2+3)^2}$

3. $\dfrac{1}{4(1+x)}+\dfrac{(1-x)}{4(x^2+1)}+\dfrac{x-1}{2(x^2+1)^2}$

4. $\dfrac{7}{9x+1}+\dfrac{7(1-x)}{9(x^2+2)}+\dfrac{7(1-x)}{(x^2+2)^2}$

5. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x+2}{3+x^2}-7\dfrac{(x+2)}{8(3+x^2)^2}$

جائزہ مشق 21

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i. d ii. b iii. d iv. b v. a

3. (i) $\dfrac{13}{3(x-1)}+\dfrac{2}{3(x+2)}$ (ii) $\dfrac{-7}{10x}+\dfrac{33}{14(x+2)}+\dfrac{257}{35(x-5)}$

(iii) $\dfrac{11}{5(x-2)}-\dfrac{6x+2}{x^2+1}$ (iv) $1+\dfrac{16}{x+1}-\dfrac{10x+8}{x^2+x+1}$

مشق 22.3

1. (a). A.M. = 11.889, H.M. = 11.194, وسطانیہ = 12, عادہ = 12.
(b). A.M. = 0, G.M. = 0, وسطانیہ = 0, غیر عادہ
(c). A.M. = 13.044, G.M. = 12.837, H.M. = 11.727, وسطانیہ = 12.3.
(d). A.M. = 56.5, G.M. = 56.339, H.M. = 56.180, وسطانیہ = 56, عادہ = 52.
(e). عادہ = AB^+. (f). غیر عادہ
(g). A.M. = B+, وسطانیہ = B+, عادہ = B+.
2. A.M. = 172.1, G.M. = 169.551, H.M. = 166.615, وسطانیہ = 184.5, عادہ = 190.
3. A.M. = کتوں کو پسند کرتے ہیں، وسطانیہ = کتوں کو پسند کرتے ہیں، عادہ = کتوں سے محبت کرتے ہیں
4. کووڈ

5. A.M.=7.149, G.M.=7.106, H.M.=7.061, وسطانیہ =7, Q_1= 6.5, Q_3 = 7.5, عادہ = 7.
6. A.M.=32.5, G.M.=32.303, H.M.=32.102, وسطانیہ=32, Q_1=30, Q_3 = 34, عادہ = 32.
7. A.M. = 9640 روپے.
8. A.M. = 36.464, G.M. = 36.087, H.M. = 35.700, وسطانیہ = 36.643, عادہ = 36.929.
9. A.M.=11.9179, G.M.=11.9039, H.M.=11.8897, وسطانیہ=11.9708, عادہ = 12.117.

مشق 22.4

1. (c). –6, (d). 458.125.
2. X غیر تشاکل ہے، Y تشاکل ہے۔
3. $(A.M.)_w$ = 330, $(G.M.)_w$ = 310.902, $(H.M.)_w$ = 295.806.
4. $(A.M.)_w$ = 23.852 کلوگرام, $(G.M.)_w$ = 23.850 کلوگرام, $(H.M.)_w$ = 23.848 کلوگرام

مشق 22.5

1. وسعت = 7, تغیر = 4.490, S.D. = 2.119, M.D. = 1.673.
2. بلے باز-A: وسعت = 185, M.D. = 45.111, تغیر = 3699.222, S.D. = 60.821.
   بلے باز-B: وسعت = 72, M.D. = 21.111, تغیر = 601.555, S.D. = 24.527
   بلے باز - A بلے باز - B سے مستقل مزاج کھلاڑی ہے۔
3. متعلقہ S.D. (آمدنی) = 0.488, متعلقہ S.D. (خرچا) = 0.4945.
   کمائی میں تغیر خرچے میں تغیر سے کم ہے
4. ٹیم-A: متعلقہ S.D. = 1.012, متعلقہ M.D. = 0.528 (تقریباً).
   ٹیم-B: متعلقہ S.D. = 0.866, متعلقہ M.D. = 0.5 (تقریباً).
   ٹیم - A ٹیم - B سے زیادہ مستقل مزاج ہے۔
5. متعلقہ = 2.1, تغیر = 0.196, S.D. = 0.443, M.D. = 0.343 (تقریباً).

جائزہ مشق 22

1. کثیر الانتخابی سوالات (MCQs)
   i. (c), ii. (c), iii. (b), iv. (a), v. (a), vi. (a), vii. (b), viii. (c), ix. (c), x. (d).

مشق 23.1

2. (i) $x = 25$ (ii) $x = 12$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = 15$
3. $\sqrt{34}$
4. 12
5. 10
6. 6
7. $a = 2\sqrt{5}, b = 2\sqrt{21}, h = \sqrt{35}$
8. 58.31
9. $4\sqrt{3}$
10. 12
11. 30
12. لمبائی =12 اور چوڑائی = 5

جائزہ مشق 23

1. کثیر الانتخابی سوالات (MCQs)
   i. ii. (a) iii. (b) iv. (b) v. (a) vi. (d) vii. (c)
2. 24
3. $2\sqrt{119}m$
4. (i) $\sqrt{13}$ (ii) $\sqrt{51}$ (iii) $\sqrt{63}$

مشق 24.1

1. $m\overline{CE} = 10cm$
2. $x = 1$

مشق 24.2

1. $x = 1$; مساوی الاضلاع مثلث
2. $y = 4$ اور $x = 2$
3. $A_2 = 7cm^2$
4. $x = 11cm$

جائزہ مشق 24

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i.	d	ii.	d	iii.	c	iv.	b	v.	a	vi.	b
vii.	c	viii.	c	ix.	d	x.	b	xi.	a	xii.	b

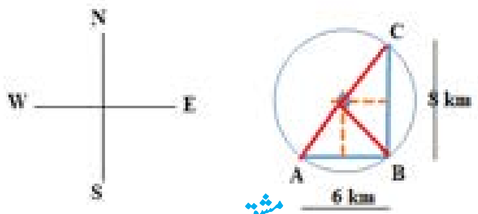
مشق 25.1

1. جی نہیں، کیوں کہ ایک عمودی ناصف تمام غیر ہم خط نقاط سے کبھی بھی ایک جیسے نقطہ سے نہیں گزرے گا۔

2. جی ہاں، یہ ممکن ہے کہ ایک چوکور چار غیر ہم خط نقاط سے کھینچا جاسکتا ہے کیوں کہ چوکور کے مخالف زاویوں کا مجموعہ 180^o ہے۔ لیکن عام طور پر چار ہم خط نقاط سے یہ ممکن نہیں ہے کہ ایک دائرہ ان میں سے گزرے۔

3. اشارہ: 1 اور 2 مثالوں میں دیکھیں۔ 4. اشارہ: 1 اور 2 مثالوں میں دیکھیں۔

5. مسجد کے مقام کا مطلوبہ تعین دائرے کا مرکز ہے جو A، B اور C دیہاتوں کو ملانے سے بنتا ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے ہر دیہاتی کو 5 کلومیٹر کا مساوی فاصلہ طے کرنا پڑے گا۔



مشق 25.2

1. مرکز سے وتر اور قطر گزرے گا۔ مسئلہ 25.3 اور 25.2 میں دیکھیں
2. حوالہ کے لیے مسئلہ 25.2 اور 25.3 دیکھیں 3. $C = 10\pi\ cm$ اور $A = 25\pi\ cm.$
4. (a). $6cm.$ (b). $6\sqrt{3}cm.$ تفصیل اور شکل مثال 1 اور 2 میں دیکھیں۔
5. $r = \sqrt{34}cm.$ تفصیل اور شکل مثال 1 اور 2 میں دیکھیں۔

مشق 25.3

1. حوالہ کے لیے مسئلہ 25.4 اور 25.5 دیکھیں 2. حوالہ کے لیے مسئلہ 25.4 اور 25.5 دیکھیں
3. (a). $\sqrt{95}cm$ (b). $\sqrt{39}cm$ (c). $2\sqrt{15}cm$ (d). $2\sqrt{77}cm$
4. (a). 7cm (b). 27.594 cm 5. (a). $2\sqrt{5}$ (b). 6 (c). 5 (d). 10.8 (e). $2\sqrt{51}$ (f). 6

جائزہ مشق 25

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i. (b) ii. (c) iii. (c) iv. (b) v. (b) vi. (a) vii. (a) viii. (b) ix. (a)

مشق 26.1

1. اشارہ: ثبوت کو مثال 1 میں دیکھیں 2. اشارہ: ثبوت کو مثال 1 میں دیکھیں
3. $5\sqrt{3}cm$ یا $\frac{5\sqrt{3}}{2}\ cm.$ d = 6cm, A = 28.2743cm^2 اور C = 18.8495cm (تقریباً).
4. 24cm. 5. $\sqrt{109}cm.$

مشق 26.2

1. اشارہ: حوالہ مسئلہ 26.3 اور نتیجہ صریح سے ہے۔
2. اشارہ: بیان کا ثبوت مسئلہ عکس کی مثال 1 سے ہے۔
3. حوالہ مسئلہ 26.3
4. (a). 6, (b). $2\sqrt{66}$, (c). 7, (d). 11, (e). $\frac{55}{7}$, (f). 14.22 (تقریباً), (g). 4.3, (h). 18.8714 (تقریباً).
5. (a). 6, (b). 4, (c). 6, (d). 1.1547 (تقریباً),(e). 5, (f). 13.

مشق 26.3

1. اشارہ: بیان کا ثبوت مسئلہ عکس 26.4 صورت سے ہے۔
2. اشارہ: بیان کا ثبوت مسئلہ عکس کی مثال 1 سے ہے۔
3. 6cm اور 37.7cm (تقریباً).
4. (a). 70^0 (b). 50^0
5. اشارہ: حوالہ مسئلہ 26.4 صورت (A) سے
6. 4cm
7. 8.5cm

جائزہ مشق 26

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i. (b) ii. (c) iii. (b) iv. (c) v. (b) vi. (b) vii. (a) viii. (d) ix. (a) x. (b) xi. (d)

مشق 27.1

3. $x = 20$ اور $y = 10$ 4. 114° اور 92° 5. 30° اور 65° 6. 120°

جائزہ مشق 27

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i. b ii. c iii. c iv. b v. b vi. c vii. a viii. d ix. a

مشق 28.1

1. 18° 2. $x < 46°$ 3. $x > 13°$

مشق 28.2

1. 60° 2. 70° 3. 120°

جائزہ مشق 28

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i. (a)	ii. (b)	iii. (d)	iv. (d)	v. (b)
vi. (a)	vii. (b)	viii. (c)	ix. (b)	x. (c)

جائزہ مشق 29

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i. (b)	ii. (d)	iii. (a)	iv. (c)	v. (c)	vi. (b)	vii. (a)
viii. (b)	ix. (d)	x. (d)	xi. (c)	xii. (a)	xiii. (b)	xiv. (c)
xv. (d)	xvi. (b)	xvii. (d)	xviii. (c)	xix. (a)	xx. (d)	

مشق 30.1

1.	(i)	32.25°	(ii)	10.5°	(iii)	8.25°
	(iv)	45.36°	(v)	25.5°	(vi)	18.11°
2.	(i)	$32°15'$	(ii)	$47°21'36''$	(iii)	$57°19'38''$
	(iv)	$-(67°34'48'')$	(v)	$22°30'$	(vi)	$225°36'$

3. (i) $45°$ (ii) $60°$ (iii) $-135°$
(iv) $171.82°$ (v) $54.67°$ (vi) $257.73°$

4. (i) $\frac{\pi}{6}$ ریڈیان (ii) $\frac{\pi}{4}$ ریڈیان (iii) $\frac{\pi}{3}$ ریڈیان
(iv) $\frac{\pi}{8}$ ریڈیان (v) $\frac{-5\pi}{4}$ ریڈیان (vi) 1.06 ریڈیان

مشق 30.2

1. (i) 4 ریڈیان (ii) 15.1 ریڈیان (iii) 2.09 ریڈیان (iv) 1.8 ریڈیان
2. (i) $l = 2.12$ cm (ii) $l = 10.2$ cm (iii) $l = 3.14$ cm (iv) $l = 15.84$ cm
3. (i) $r = 1.91$ m (ii) $r = 0.5$ m (iii) $r = 16$ cm (iv) $r = 4.9$ cm
4. (i) $l = 0.52$ یونٹ (ii) $l = 0.79$ یونٹ (iii) $l = 1.05$ یونٹ (iv) $l = 1.57$ یونٹ
5. (i) $l = 2.62$ cm (ii) دائرَوی قطاع کا رقبہ $= 6.55\text{ cm}^2$
6. $l = 2.2$ m نقطہ نے فاصلہ طے کیا
7. قطاع کا رقبہ $= 6.28\text{ cm}^2$
8. $\theta = 800$ ریڈیان
9. $\theta = 0.5$ ریڈیان
10. $105.6\text{ cm}^2 =$ قطاع کا رقبہ اور $l = 17.6$ cm

مشق 30.3

1. (i) $-305°$ اور $415°$ (ii) $-\frac{11\pi}{6}$ اور $\frac{13\pi}{6}$
(iii) $-405°$ اور $315°$ (iv) $\frac{5\pi}{4}$ اور $-\frac{11\pi}{4}$
2. (i) Q_4 (ii) Q_1 (iii) Q_3
(iv) Q_1 (v) Q_3 (vi) Q_2
3. منفی نشان ہیں (i), (ii), (iii), (iv), (v) (vi) مثبت نشان
4. (i) Q_2 میں ہے (ii) Q_3 میں ہے (iii) Q_3 میں ہے
(iv) Q_3 میں ہے (v) Q_2 میں ہے (vi) Q_1 یا Q_3 میں ہے
5. (i) $\cot\theta = -\frac{3}{4}$ اور $\tan\theta = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\sec\theta = -\frac{5}{3}$

6. (i) $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ اور $\tan\theta = -\sqrt{3}$, $\sec\theta = -2$, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(ii) $\cot\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ اور $\tan\theta = \frac{-\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{3}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta = \frac{-\sqrt{5}}{3}$, $\sec\theta = \frac{3}{2}$

(iii) $\sec\theta = \frac{-\sqrt{5}}{2}$ اور $\cot\theta = -2$, $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{5}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

(iv) $\tan\theta = \cot\theta = 1$ اور $\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(v) $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ اور $\tan\theta = \sqrt{3}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sec\theta = 2$

7. (i) 2 (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\sqrt{2}-1$

(iv) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ (v) $2-\sqrt{3}$ (vi) 4

مشق 30.5

1. $x = 304.85m$ 2. $L = 4\sqrt{3} \approx 6.93m$ 3. $\theta = 60^\circ$

4. $x = 286.86\ m$ 5. $\theta = 24^\circ$

جائزہ مشق 30

1. (MCQs) کثیر الانتخابی سوالات

i.	b	ii.	a	iii.	c	iv.	b	v.	b
vi.	a	vii.	b	viii.	c	ix.	b	x.	b

3. $\frac{2821\pi}{7200}$ rad. 4. 120 درجے 5. 120 درجے

6. 54°40'12" 7. $\frac{28}{\pi}cm$ 8. 1 ریڈیان

10. 6 cm^2