یونٹ

2

تجزی FACTORIZATION

- تجزی
- مسئلہ باقی اور مسئلہ تجزی
- تین درجے والی کثیر رقمی کی تجزی

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- درج ذیل قسم کے جملوں کی تجزی کر سکیں۔
  - قسم I $kx + ky + kz,$
  - قسم II $ax + ay + bx + by,$
  - قسم III $a^2 \pm 2ab + b^2,$
  - قسم IV $a^2 - b^2,$
  - قسم V $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2,$
  - قسم VI $a^4 + a^2b^2 + b^2$ or $a^4 + 4b^4,$
  - قسم VII $x^2 + px + q,$
  - قسم VIII $ax^2 + bx + c,$
  - قسم IX $\begin{cases} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3, \end{cases}$
  - قسم X $a^3 \pm b^3,$
- مسئلہ باقی کا بیان اور اطلاق
- بغیر تقسیم کیے کسی کثیر رقمی کو یک درجی کثیر رقمی سے تقسیم کرنے کے بعد جو باقی بچا معلوم کر سکیں۔
- کسی کثیر رقمی میں صفر معلوم کر سکیں۔
- مسئلہ تجزی کا بیان اور مثالوں سے اس کی شناخت کر سکیں۔
- مسئلہ تجزی کے استعمال سے تین درجے والی کثیر رقمی کی تجزی معلوم کر سکیں۔

2.1 جملوں کی تجزی : FACTORIZATION OF EXPRESSIONS

یک درجی کثیر رقمی : Linear Polynomials

ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ '1' ہو، یک درجی کثیر رقمی کہلاتی ہے۔ مثلاً $x + 3,\ 2x - 5$ وغیرہ۔ یک درجی کثیر رقمی کی عمومی شکل $ax + b$ ہے جبکہ $a\ ,\ b$ حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$۔

دو درجی کثیر رقمی : Quadratic Polynomials

ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ '2' ہو۔ دو درجی کثیر رقمی کہلاتی ہے۔ مثلاً $4x^2 - 3x + 1\ ,\ 3x^2 + 5x - 2$ وغیرہ۔
دو درجی کثیر رقمی کی عمومی شکل $ax^2 + bx + c$ ہے۔ جبکہ $a,\ b,\ c$ حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$۔

تین درجہ والی کثیر رقمی : Cubic Polynomials

ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ '3' ہو۔ تین درجے والی کثیر رقمی کہلاتی ہے۔ مثلاً $4x^3 + 5x^2 - 2\ ,\ x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ وغیرہ۔ تین درجے والی کثیر رقمی کی عمومی شکل $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ہوتی ہے۔ جبکہ $a,\ b,\ c,\ d$ حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$۔

اگر $P(x)$ کوئی کثیر رقمی ہو اور $a,\ b,\ c$ کوئی حقیقی اعداد ہوں جبکہ $P(x) = (x-a)\ (x-b)\ (x-c)$ ہو تو صاف ظاہر ہے کہ $(x-a),\ (x-b),\ (x-c)$ ہر ایک $P(x)$ کا یک درجی جز وضربی ہے۔

کسی بھی کثیر رقمی کو یک درجی کثیر رقموں کے حاصل ضرب یا اس کثیر رقمی کے درجہ سے کم درجہ والی کثیر رقموں کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھنے کے عمل کو تجزی کرنا کہتے ہیں

ہم جانتے ہیں کہ $3 \times 5 = 15$ میں $(3,5)$ 15 کے اجزائے ضربی کہلاتے ہیں۔ اس طرح $ax + ay = a(x + y)$ میں $a, (x + y)$، $ax + ay$ کے اجزائے ضربی کہلاتے ہیں اور $ax + ay + az = a(x + y + z)$ میں a اور $(x + y + z)$، $ax + ay + az$ کے اجزائے ضربی کہلاتے ہیں۔

کسی جملے کو اس کے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھنے کے عمل کو تجزی کرنا کہتے ہیں۔
ہم مختلف قسم کے جملوں کی تجزی کرتے ہیں۔

$kx + ky + kz$ کی شکل کے جملوں کی اجزائے ضربی

درج ذیل مثالوں سے اس قسم کے جملوں کی اجزائے ضربی کی وضاحت ہوگی۔

مثال 1:-

درج ذیل کے اجزائے ضربی بنایئے۔

(i) $3x + 12y$ (ii) $x^2 + xy$ (iii) $ad + dc + df$

(iv) $2pq + 6p^2q - 4p^3q$

حل:

(i) $3x + 12y = 3(x + 4y)$

(ii) $x^2 + xy = x(x + y)$

(iii) $ad + dc + df = d(a + c + f)$

(iv) $2pq + 6p^2q - 4p^3q = 2pq(1 + 3p - 2p^2)$

$ax + ay + bx + by$ کی قسم کے جملوں کی اجزائے ضربی

درج ذیل مثالوں سے اس قسم کے جملوں کی اجزائے ضربی کی وضاحت ہوگی۔

مثال 2:-

درج ذیل جملوں کی اجزائے ضربی کیجیے۔

(i) $2ax + bx + 6ay + 3by$ (ii) $2yx + 18y^2 - 3zx + 27zy$

(iii) $5ym + 15yn + 2zm + 6zn$

حل:

(i) $2ax + bx + 6ay + 3by$

$= x(2a + b) + 3y(2a + b)$

$= (2a + b)(x + 3y)$

ہم پڑتال کرتے ہیں۔ $(2a + b)(x + 3y) = 2ax + bx + 6ay + 3by$

(ii) $2yx + 18y^2 + 3zx + 27zy$

$= 2y(x + 9y) + 3z(x + 9y)$

$= (2y + 3z)(x + 9y)$

(iii) $5ym + 15yn + 2zm + 6zn$

$= 5y(m + 3n) + 2z(m + 3n)$

$= (5y + 2z)(m + 3n)$

$a^2 \pm 2ab + b^2$ کی شکل کے جملوں کی اجزائے ضربی

ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{(i)} \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$\text{(ii)} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

(i) اور (ii) کی بائیں جانب کے جملے مکمل مربع کہلاتے ہیں۔ یہ فارمولے، کچھ جملوں کی تجزی کرنے میں معاون ثابت ہوتے ہیں۔ درج ذیل مثالیں ایسے جملوں کی تجزی کی وضاحت کریں گی۔

مثال 3:-

درجہ ذیل کی تجزی کریں۔

(i) $x^2 + 6x + 9$ (ii) $t^2 - 12t + 36$

حل:

$$\text{(i)} \quad x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2(3)(x) + 3^2 = (x+3)^2$$

$$\text{(ii)} \quad t^2 - 12t + 36 = t^2 - 2(6)(t) + 6^2 = (t-6)^2$$

$a^2 - b^2$ کی قسم کے جملوں کی تجزی معلوم کرنا۔

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ یہ دو مربعوں کا فرق کہلاتا ہے۔

درج ذیل مثالیں ایسے جملوں کی تجزی کی وضاحت کریں گی۔

مثال 4:-

درجہ ذیل کی تجزی کریں۔

(i) $k^2 - 81$ (ii) $9a^2 - (b+c)^2$

حل:

$$\text{(i)} \quad k^2 - 81 = k^2 - 9^2 = (k+9)(k-9)$$

$$\text{(ii)} \quad 9a^2 - (b+c)^2 = (3a)^2 - (b+c)^2 = \left[3a + (b+c)\right]\left[3a - (b+c)\right] = \left[3a + b + c\right]\left[3a - b - c\right]$$

مثال 5:- تجزی کیجیے۔ $36d^2 - 1$

حل:

$$\begin{aligned} 36d^2 - 1 &= (6d)^2 - (1)^2 \\ &= (6d+1)(6d-1) \end{aligned}$$

مشق 2.1

تجزی کیجیے۔

1- $3a(x+y) - 7b(x+y)$

2- $ax + ay - x^2 - xy$

3- $a^3 + a - 3a^2 - 3$

4- $x^3 + y - xy - x$

5- $3ax + 6ay - 8by - 4bx$

6- $2a^2 - bc - 2ab + ac$

7- $a(a-b+c) - bc$

8- $8 - 4a - 2a^3 + a^4$

9- $16x^2 - 24xa + 9a^2$

10- $1 - 14x + 49x^2$

11- $20x^2 + 5 - 20x$

12- $2a^3b + 2ab^3 - 4a^2b^2$

13- $x^2 + x + \frac{1}{4}$

14- $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$

15- $5x^3 - 30x^2 + 45x$

16- $a^2 + b^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

(i) $(a^2 + 2ab + b^2) - c^2$

کی قسم کے جملوں کی اجزائے ضربی (ii) $(a^2 - 2ab + b^2) - c^2$

ان جملوں کی تجزی کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے ہوگی۔

مثال 1:-

تجزی کیجیے۔ $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2$

حل:

$$\begin{aligned} &(x^2 + 2xy + y^2) - 4z^2 \\ &= (x+y)^2 - (2z)^2 \\ &= (x+y-2z)\ (x+y+2z) \end{aligned}$$

مثال 2:-

اجزائے ضربی کی صورت میں لکھیے۔ $c^2 + 6bc + 9b^2 - 16x^2$

حل:

$$
\begin{aligned}
&(c^2 + 6bc + 9b^2) - 16x^2 \\
&= (c + 3b)^2 - (4x)^2 \\
&= (c + 3b + 4x)\ (c + 3b - 4x)
\end{aligned}
$$

مثال 3:-

تجزی کیجیے۔

(i) $a^2 - 2ab + b^2 - 9c^2$

(ii) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 4z^2$

حل:

$$
\begin{aligned}
\text{(i)}\quad a^2 - 2ab + b^2 - 9c^2 &= a^2 - 2ab + b^2 - 9c^2 \\
&= (a - b)^2 - (3c)^2 \\
&= (a - b - 3c)(a - b + 3c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(ii)}\quad x^2 - 6xy + 9y^2 - 4z^2 &= x^2 - 2(3)xy + 9y^2 - 4z^2 \\
&= (x - 3y)^2 - (2z)^2 \\
&= (x - 3y - 2z)(x - 3y + 2z)
\end{aligned}
$$

(i) $a^4 + a^2b^2 + b^4$

کی شکل کے جملوں کی تجزی (ii) $a^4 + 4b^4$

مثال 4:-

تجزی کیجیے۔ $x^4 + x^2 + 1$

حل:

$$
\begin{aligned}
x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + x^2 + 1 + x^2 - x^2 \\
&= (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 \\
&= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)
\end{aligned}
$$

مثال 5:-

تجزی کیجیے۔ $x^4 + 64$

حل:

$$\begin{aligned} x^4 + 64 &= (x^2)^2 + 8^2 + 2(8)x^2 - 2(8)x^2 \\ &= (x^2 + 8)^2 - 16x^2 \\ &= (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 \\ &= (x^2 + 8 + 4x)(x^2 + 8 - 4x) \end{aligned}$$

مثال 6:-

اجزائے ضربی لکھیے۔ $x^4 + x^2y^2 + y^4$

حل:-

$$\begin{aligned} x^4 + x^2y^2 + y^4 &= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) \end{aligned}$$

مشق 2.2

جزو ضربی بنائیے۔

1. $x^2 + 2xy + y^2 - a^2$
2. $4a^2 + 4ab + b^2 - 9c^2$
3. $x^2 + 6ax + 9a^2 - 16b^2$
4. $y^2 - c^2 + 2cx - x^2$
5. $x^2 + y^2 + 2xy - 4x^2y^2$
6. $a^2 - 4ab + 4b^2 - 9a^2c^2$
7. $x^2 - 2xy + y^2 - a^2 + 2ab - b^2$
8. $y^4 + 4$
9. $z^4 + 64y^4$
10. $x^4 + 324$
11. $z^4 - z^2 + 16$
12. $4x^4 - 5x^2y^2 + y^4$

$x^2 + px + q$ کی شکل کے جملوں کی تجزی

فرض کیا $x^2 + px + q = (x+r)\ (x+s)$

تب $x^2 + px + q = x^2 + (r+s)\,x + rs$

دونوں اطراف ایک جیسی رقموں کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$r + s = p$ اور $rs = q$

پس $x^2 + px + q$ کی اجزائے ضربی لکھنے کے لیے ہمیں دو نمبروں 'r' اور 's' کی قیمت معلوم کرنا ہے۔اس طرح کہ $r + s = p$ اور $rs = q$۔

درج ذیل مثالیں اسطرح کے جملوں کی تجزی کی وضاحت ہوگی۔

مثال:-

تجزی کیجیے۔

(i) $x^2 + 7x + 12$ (ii) $x^2 + 4x - 21$ (iii) $x^2 - 5x - 14$

حل:

(i) $x^2 + 7x + 12$ کی تجزی کرنے کے لیے ہمیں 'r' اور 's' کی قیمتیں معلوم کرنا ہوں گی۔ جبکہ

$r + s = 7$ اور $rs = 12$

صاف ظاہر ہے کہ $4 + 3 = 7$ اور $4 \times 3 = 12$

$$\begin{aligned} \therefore\quad x^2 + 7x + 12 &= x^2 + 4x + 3x + 12 \\ &= x(x+4) + 3(x+4) \\ &= (x+4)\ (x+3) \end{aligned}$$

(ii) $x^2 + 4x - 21$ کی جزو ضربی لکھنے کے لیے ہمیں 'r' اور 's' کی قیمتیں معلوم کرنا ہوں گی جبکہ

$r + s = 4$ اور $rs = -21$

صاف ظاہر ہے کہ $7 + (-3) = 4$ اور $7(-3) = -21$

$$\begin{aligned} \therefore\quad x^2 + 4x - 21 &= x^2 + 7x - 3x - 21 \\ &= x(x+7) - 3(x+7) \\ &= (x+7)\ (x-3) \end{aligned}$$

(iii) $x^2 - 5x - 14$ کی اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے 'r' اور 's' کی قیمتیں معلوم کرنا ہوگی جبکہ

$$r + s = -5 \quad \text{اور} \quad rs = -14$$

صاف ظاہر ہے کہ $-7 + 2 = -5$ اور $-7 \times 2 = -14$

$$\therefore \quad x^2 - 5x - 14 = x^2 - 7x + 2x - 14$$
$$= x(x-7) + 2(x-7)$$
$$= (x-7)(x+2)$$

$ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ شکل کے جملوں کی اجزائے ضربی معلوم کرنا۔

$ax^2 + bx + c$ کے شکل کے جملے کی تجزی کرنے کے لیئے اعداد 'p' اور 'q' اسطرح سے معلوم کرتے ہیں۔ کہ $p + q = b$ اور $pq = ac$ جبکہ a, b, c مستقل مقداریں اور $a \neq 0$۔

مندرجہ ذیل مثالیں اسطرح کے جملوں کی تجزی کی وضاحت کریں گی۔

مثال:- تجزی کیجیے۔

(i) $6x^2 + 7x - 3$ (ii) $\sqrt{3}x^2 + 11x + 6\sqrt{3}$

حل:

(i) دیا گیا جملہ $6x^2 + 7x - 3$

$ax^2 + bx + c$ کی شکل میں ہے۔ $ac = 6 \times (-3) = -18$

$$\therefore \quad 6x^2 + 7x - 3 = 6x^2 + 9x - 2x - 3$$
$$= 3x(2x+3) - 1(2x+3)$$
$$= (2x+3)(3x-1)$$

$6 \times (-3) = -18$
ممکن جوڑے
$18 \times (-1) = -18$
$(-18) \times (1) = -18$
$6 \times (-3) = -18$
$-6 \times 3 = -18$
$-9 \times 2 = -18$
$9 \times (-2) = -18$
منتخب شدہ جوڑے
$9 \times (-2) = -18$

(ii) $\sqrt{3}x^2 + 11x + 6\sqrt{3}; \ ac = \sqrt{3} \times 6\sqrt{3} = 18$

صاف ظاہر ہے۔ $9 + 2 = 11$

$$\therefore \quad \sqrt{3}x^2 + 11x + 6\sqrt{3} = \sqrt{3}x^2 + 9x + 2x + 6\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3}x\left[x + 3\sqrt{3}\right] + 2\left[x + 3\sqrt{3}\right]$$
$$= (\sqrt{3}x + 2)(x + 3\sqrt{3})$$

مشق 2.3

اجزائے ضربی بنائیے۔

1. $x^2+9x+20$
2. $x^2+5x-14$
3. x^2+5x-6
4. $x^2-7x+12$
5. $x^2-x-156$
6. x^2-x-2
7. $x^2-9x-90$
8. $a^2-12a-85$
9. $98-7x-x^2$
10. $y^2-11y-152$
11. $2x^2+3x+1$
12. $3x^2+5x+2$
13. $2x^2-x-1$
14. $6x^2+7x-3$
15. $2-3x-2x^2$
16. $8+6x-5x^2$
17. $3u^2-10u+8$
18. $10x^2-7x-12$
19. $5x^2-32x+12$
20. $4\sqrt{3}x^2+5x-2\sqrt{3}$

$\left\{\begin{array}{l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{array}\right.$ کی شکل کے جملوں کی تجزی

ہم جانتے ہیں کہ

(i) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(ii) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

درج ذیل مثالیں اس قسم کے جملوں کی تجزی کی وضاحت کریں گی۔

مثال:- تجزی کیجیے۔ (i) $x^3+6x^2+12x+8$ (ii) $x^3-6x^2+12x-8$

حل:

(i) $x^3+6x^2+12x+8 = (x)^3+3(2)(x)^2+3(2)^2x+(2)^3$

$= (x+2)^3$

(ii) $x^3-6x^2+12x-8 = (x)^3-3(2)(x)^2+3(2)^2x-(2)^3$

$= (x-2)^3$

$a^3 \pm b^3$ کی قسم کے جملوں کی تجزی

ہمیں معلوم ہے کہ

(i) $a^3 + b^3 = (a+b)\ (a^2 - ab + b^2)$

(ii) $a^3 - b^3 = (a-b)\ (a^2 + ab + b^2)$

مندرجہ ذیل مثالوں سے اس قسم کے جملوں کی وضاحت کریں گی۔

مثال 1:-

تجزی کیجیے۔

(i) $x^3 + 27$ (ii) $8a^3 - 125b^3$ (iii) $x^6 - y^6$ (iv) $a^3 - b^3 - a + b$

حل:

(i) $x^3 + 27 = x^3 + 3^3$

$= (x+3)\ (x^2 - 3x + 9)$

(ii) $8a^3 - 125b^3 = (2a)^3 - (5b)^3$

$= (2a - 5b)\left[(2a)^2 + (2a)\times(5b) + (5b)^2\right]$

$= (2a - 5b)\left[4a^2 + 10ab + 25b^2\right]$

(iii) $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2$

$= (x^3 + y^3)\ (x^3 - y^3)$

$= (x+y)\ (x^2 - xy + y^2)\ (x-y)\ (x^2 + xy + y^2)$

$= (x+y)\ (x-y)\ (x^2 - xy + y^2)\ (x^2 + xy + y^2)$

(iv) $a^3 - b^3 - a + b = (a^3 - b^3) - (a - b)$

$= (a-b)\ (a^2 + ab + b^2)\ -\ (a-b)$

$= (a-b)\left[a^2 + ab + b^2 - 1\right]$

یاد رکھیے:

(i) $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

(ii) $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

(iii) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$

(iv) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$

(v) $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$

(vi) $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

مشق 2.4

تجزی کیجیے۔

1. $8x^3 - y^3$

2. $27x^3 + 1$

3. $1 - 343x^3$

4. $a^3b^3 + 512$

5. $27 - 1000y^3$

6. $27x^3 - 64y^3$

7. $x^3y^3 + z^3$

8. $216P^3 - 343$

9. $8x^3 - \frac{1}{27}$

10. $a^3 + b^3 + a + b$

11. $a - b - a^3 + b^3$

12. $x - 8xy^3$

13. $x^{12} - y^{12}$

14. $1 - \frac{64p^3}{q^3}$

15. $1 + 64U^3$

16. $8x^3 - 6x - 9y + 27y^3$

17. $z^3 + 125$

18. $x^9 + y^9$

19. $m^6 - n^6$

20. $64x^7 - xa^6$

21. $x^3 - 27a^3$

22. $x^3 + 27a^3$

2.2 مسئلہ باقی اور مسئلہ تجزی:
REMAINDER THEOREM AND FACTOR THEOREM

ایک تفاعل (function) کو درج ذیل مساوات سے متعارف کرایا گیا ہے۔

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 \ , \ a_n \neq 0$$

جس میں 'n' ایک غیر منفی صحیح عدد ہے اور تمام عددی سر، مستقل مقداریں ہیں۔ ایسا تفاعل درجہ 'n' کی کثیر رقمی کہلاتا ہے۔

مثلاً

(i) $P(x) = a_1 x + a_0$ (یک درجی کثیر رقمی تفاعل ہے) $a_1 \neq 0$

(ii) $P(x) = 3x^2 + 5x + 11$ (دو درجہ کثیر رقمی تفاعل ہے)

(iii) $P(x) = 7x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 5x + 6$ (5 درجہ کثیر رقمی تفاعل ہے)

(iv) $P(x) = 5x^5 + \frac{7}{x} + 6 = 5x^2 + 7x^{-1} + 6$ (یہ تفاعل کثیر رقمی نہیں ہے)

مثال:-

$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - x - 5$ کو $x + 2$ سے تقسیم کیجیے۔

حل:

$2x^3 - x^2 + 2x - 5$ ← حاصل قسمت

تقسیم کنندہ → $x + 2 \ \overline{)\,2x^4 + 3x^3 - x - 5}$ ← مقسوم علیہ

$$\begin{array}{l}
\underline{\pm 2x^4 \pm 4x^3} \\
-x^3 - x - 5 \\
\underline{\mp x^3 \quad \mp 2x^2} \\
2x^2 - x - 5 \\
\underline{\pm 2x^2 \pm 4x} \\
-5x - 5 \\
\underline{\mp 5x \mp 10} \\
5
\end{array}$$

5 ← باقی

یاد رکھیے کہ: مقسوم علیہ = تقسیم کنندہ × حاصل قسمت + باقی

2.2.1 مسئلہ باقی The Remainder Theorem

اگر کسی کثیر رقمی $P(x)$ کو $x - a$ پر تقسیم کرنے سے R باقی بچے تو $P(a) = R$

یا

اگر کثیر رقمی $P(x)$ جس کا درجہ $n \geq 1$ ہو تو $x - a$ سے تقسیم کیا جائے جبکہ 'a' ایک مستقل مقدار ہو تو باقی $P(a)$ ہوتا ہے۔ جبکہ اس میں x رکھنے والی رقم نہ بچے۔

مثال 1:-

اگر $P(x) = 4x^4 + 10x^3 + 19x + 5$ کو $x+3$ پر تقسیم کیا جائے تو باقی معلوم کریں۔

حل:

$$P(x) = 4x^4 + 10x^3 + 19x + 5$$

$$x - a = x + 3 \quad \Rightarrow \quad a = -3$$

لہذا $$P(-3) = 4(-3)^4 + 10(-3)^3 + 19(-3) + 5$$

$$= 4 \times 81 - 10 \times 27 - 57 + 5$$

$$= 324 - 270 - 57 + 5$$

$$= -3 + 5$$

پس $$P(-3) = 2$$

$$\boxed{R = 2}$$

مثال 2:-

اگر $P(x) = 5x^4 + 14x^3 + 3x^2 - 5x - 3$ کو $x - 1$ سے تقسیم کیا جائے تو باقی معلوم کریں۔

حل:

$$P(x) = 5x^4 + 14x^3 + 3x^2 - 5x - 3$$

$$x - a = x - 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

لہذا $$P(1) = 5(1)^4 + 14(1)^3 + 3(1)^2 - 5(1) - 3$$

$$= 5 + 14 + 3 - 5 - 3$$

$$= 14$$

پس $$P(1) = 14$$

$$\boxed{R = 14}$$

2.2.2 تقسیم کیے بغیر باقی معلوم کرنا Finding Remainder Without Dividing

درج ذیل مثالوں میں ہم بغیر تقسیم کیے باقی نکالنا سیکھتے ہیں۔ جبکہ کسی کثیر رقمی کو یک درجی کثیر رقمی سے تقسیم کیا جائے۔

مثال 1:-

مسئلہ باقی کا استعمال کرتے ہوئے باقی معلوم کریں جبکہ پہلی کثیر رقمی کو دوسری کثیر رقمی سے تقسیم کیا جائے۔

(i) $x^2 + 3x + 7,\ x + 1$ (ii) $x^3 - 2x^2 + 3x + 3,\ x - 3$

حل: (i) فرض کیا $P(x) = x^2 + 3x + 7$

چونکہ تقسیم کنندہ $= x + 1$

لہذا $x - a = x + 1 \Rightarrow a = -1$

مسئلہ باقی کی رو سے

$R = P(-1)$

اب $P(-1) = (-1)^2 + 3(-1) + 7$

$= 1 - 3 + 7$

$R = 5$

(ii) فرض کیا $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 3$

$x - a = x - 3 \Rightarrow a = 3$

$R = P(3)$

اب $P(3) = (3)^3 - 2(3)^2 + 3(3) + 3$

$= 27 - 18 + 9 + 3$

$\boxed{R = 21}$

مثال 2:-

جب $x^4 + 2x^3 + kx^2 + 3$ کو $x - 2$ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو 1 باقی بچتا ہے 'k' کی قیمت معلوم کریں۔

حل: فرض کیا $P(x) = x^4 + 2x^3 + kx^2 + 3$

چونکہ تقسیم کنندہ $= x - 2$

لہذا $x - a = x - 2 \Rightarrow a = 2$

اب $P(2) = (2)^4 + 2(2)^3 + k(2)^2 + 3$

$= 16 + 16 + 4k + 3 \quad = 35 + 4k$

لہٰذا $P(2) = 1$ (دیا گیا)

$$1 = 35 + 4k \quad \Rightarrow \quad 4k = -34 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{-17}{2}$$

2.2.3 کثیر رقمی کے صفر: Zeros of a Polynomial

اگر $P(x) = x - a_1$ اور $Q(x) = x - a_2$ کوئی سی یک درجی کثیر رقمیاں ہوں اس طرح کہ $P(a_1) = 0$ اور $Q(a_2) = 0$ تو a_1، a_2 بالترتیب $P(x)$ اور $Q(x)$ کے صفر کہلاتے ہیں۔

2.2.4 مسئلہ تجزی: The Factor Theorem

اگر کثیر رقمی $P(x)$ کے لیے $P(a) = 0$ ہو تو $x - a$، $P(x)$ کا جزو ضربی ہوتا ہے۔

اس کے برعکس اگر $x - a$، $P(x)$ کا جزو ضربی ہو تو 'a'، $P(x)$ کا صفر ہوگا۔

مثال 1:-

مسئلہ تجزی سے معلوم کریں کہ پہلی کثیر رقمی دوسری کثیر رقمی کا جزو ضربی ہے یا نہیں۔

$$x - 1, \quad x^2 + 4x - 5$$

حل: فرض کیا $P(x) = x^2 + 4x - 5$

اور $x - a = x - 1$

$\Rightarrow \quad a = 1$

$P(1) = 1^2 + 4(1) - 5$

$= 1 + 4 - 5$

$= 5 - 5$

$= 0$

چونکہ $P(1) = 0$

لہٰذا مسئلہ تجزی کی رو سے $x - 1$، $x^2 + 4x - 5$ کا جزو ضربی ہے۔

مثال 2:- مسئلہ تجزی کے استعمال سے ثابت کیجیے کہ $x + 1$ ، $P(x) = x^{25} + 1$ کا جزو ضربی ہے۔

حل: قیمت درج کرنے سے پتا چلتا ہے۔کہ -1 ، $P(x)$ کا صفر ہے۔

$$P(x) = x^{25} + 1$$
$$P(-1) = (-1)^{25} + 1 \qquad \therefore (-1)^{\text{طاق}} = -1$$
$$= -1 + 1$$
$$= 0$$

چونکہ -1 ، $P(x) = x^{25} + 1,$ کا صفر ہے۔

لہذا ایک درجی کثیر رقمی $x - (-1) = x + 1$

مسئلہ تجزی کی رو سے کثیر رقمی $x^{25} + 1$ کا جزو ضربی ہے۔

مثال 3:- مسئلہ تجزی استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $x - 1$ ، $4x^7 - 2x^6 + x^2 + 2x + 5$ کا جزو ضربی نہیں ہے۔

حل: فرض کیا کہ $P(x) = 4x^7 - 2x^6 + x^2 + 2x + 5$

$$x - a = x - 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$
$$P(1) = 4(1)^7 - 2(1)^6 + 1^2 + 2(1) + 5$$
$$= 4 - \cancel{2} + 1 + \cancel{2} + 5$$
$$= 10 \neq 0$$

پس $x - 1$ ، $4x^7 - 2x^6 + x^2 + 2x + 5$ کا جزو ضربی نہیں ہے۔

مثال 4:- مسئلہ تجزی کے استعمال سے ثابت کریں کہ $x + 1$ ، $2x^5 - 5x^2 - x + 4$ کا جزو ضربی نہیں ہے۔

حل: چونکہ $P(x) = 2x^5 - 5x^2 - x + 4$

$$x - a = x + 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$
$$P(-1) = 2(-1)^5 - 5(-1)^2 - (-1) + 4$$
$$= -2 - 5 + 1 + 4$$
$$P(-1) = -2 \neq 0$$

پس $x + 1$ ، $2x^5 - 5x^2 - x + 4$ کا جزو ضربی نہیں ہے۔

2.3 تین درجہ کثیر رقمی کی تجزی کرنا: FACTORIZING A CUBIC POLYNOMIAL

کسی تین درجہ کثیر رقمی کی تجزی سمجھنے کے لیے ہم درج ذیل مثالوں کا مطالعہ کرتے ہیں۔

مثال 1:- درج ذیل کی تجزی کیجیے۔ $x^3 - x^2 - 10x + 10;\ x - 1$

حل:

$$P(x) = x^3 - x^2 - 10(x) + 10;\ x - 1$$

$$x - a = x - 1 \Rightarrow a = 1$$

$$P(1) = 1^3 - 1^2 - 10 + 10$$

$$= 0$$

لہذا $x - 1$ ، $P(x)$ کا جزو ضربی ہے۔

اب

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 10 \\ \hline x - 1 & x^3 - x^2 - 10x - 10 \\ & \underline{\pm x^3 \mp x^2} \\ & -10x + 10 \\ & \underline{\mp 10x \pm 10} \\ & 0 \end{array}$$

چونکہ $P(x) =$ تقسیم کنندہ × حاصل قسمت

پس $x^3 - x^2 - 10x + 10 = (x^2 - 10)\ (x - 1)$

مثال 2:- $x^3 - 8$ کی تجزی کیجیے جبکہ $x - 2$ جزو ضربی ہو۔

حل:

$$P(x) = x^3 - 8\ ,\ x - a = x - 2 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

$$P(2) = 2^3 - 8 = 8 - 8$$

$$= 0$$

پس $x - 2$ ، $P(x)$ کا جزو ضربی ہے۔

اب

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 2x + 4 \\ \hline x - 2 & x^3 - 8 \\ & \underline{\pm x^3 \mp 2x^2} \\ & 2x^2 - 8 \\ & \underline{\pm 2x^2 \mp 4x} \\ & 4x - 8 \\ & \underline{\pm 4x \mp 8} \\ & 0 \end{array}$$

پس $P(x) = x^3 - 8$

$$= (x - 2)\ (x^2 + 2x + 4)$$

مشق 2.5

I- دی گئی قیمت کے لیے کثیر رقمی کی قیمت معلوم کریں۔

1. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 7;\ P(2)$

2. $P(x) = x^4 - 10x^2 + 25x - 2;\ P(-4)$

3. $P(x) = x^4 + 5x^3 - 13x^2 - 30;\ P(-1)$

4. $P(x) = x^5 - 10x^3 + 7x + 6;\ P(3)$

5. $P(x) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 19x + 6;\ P(-2)$

II- تقسیم کیے بغیر معلوم کریں کہ دوسری کثیر رقمی، پہلی کثیر رقمی کا جزو ضربی ہے یا نہیں۔

6. $x^{18} - 1;\quad x + 1$

7. $x^{18} - 1;\quad x - 1$

8. $x^9 - 2^9;\quad x + 2$

9. $x^9 + 2^9;\quad x - 2$

10. $3x^4 - 2x^3 + 5x - 6;\quad x - 1$

11. $5x^6 - 7x^3 - 6x + x;\quad x - 1$

12. $3x^3 - 7x^2 - 8x + 2;\quad x + 1$

13. $5x^8 - 2x^5 + 3x^3 + 6x + 2;\quad x + 1$

14. $6x^3 + 2x^2 - x + 9;\quad x - 1$

15. $4x^3 - 3x^2 - 8x + 4;\quad x - 2$

16. $5x^3 + 3x^2 - x + 1;\quad x + 1$

17. $2y^3 - 8y^2 + y - 4;\quad y - 4$

18. $z^3 - 5z^2 - 4z - 4;\quad z + 2$

III- حل کریں۔

19. اگر $P(x) = x^3 - kx^2 + 3x + 5$ کو $x - 1$ پر تقسیم کرنے سے 8 باقی بچتا ہو تو 'k' کی قیمت معلوم کریں۔

20. اگر $P(x) = 3x^3 + kx - 26$ کو $x - 2$ پر تقسیم کرنے سے 0 باقی بچتا ہو تو 'k' کی قیمت معلوم کریں۔

جائزہ مشق-2

I- درست جوابات پر دائرہ لگایئے۔

1. یک درجی کثیر رقمی کا درجہ ہوتا ہے۔

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d)

2. دو درجی کثیر رقمی کا درجہ ہوتا ہے۔

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

3. سہ درجی کثیر رقمی کا درجہ ہوتا ہے۔

(a) 0 (b)

(c) 2 (d) 3

4. $(x+3)^2-4$ کی تجزی ہے۔

(a) $(x+1)(x+5)$ (b) $(x-1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$ (d) $(x-1)(x-5)$

5. x^4-16 کی تجزی ہے۔

(a) $(x-2)(x+2)$ (b) $(x-4)(x+4)$

(c) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$ (d) $(x-2)(x+4)$

6. x^3-y^3 کی تجزی ہے۔

(a) $(x-y)(x^2+y^2)$ (b) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

(c) $(x-y)(x^2-xy+y^2)$ (d) $(x+y)(x^2+xy+y^2)$

7. a^4-1 کی تجزی ہے۔

(a) $(a-1)(a+1)(a^2+1)$ (b) $(a-1)(a^2+1)$

(c) $(a+1)(a^2-1)$ (d) $(a^2+1)(a+1)$

8. اگر کثیر رقمی $P(x)$ جس کا درجہ $n\geq 1$ ہے کو کثیر رقمی '$x-a$' سے تقسیم کیا جائے جبکہ a ایک مستقل مقدار ہے تو $P(a)$ کی قیمت ہوگی۔

(a) باقی (b) صفر

(c) 1 (d) a

.9 اگر $x-a$ ، $P(x)$ کا جزو ضربی ہو تو $P(a)$ ہوگا۔

(a) 0 (b) 1

(c) $-a$ (d) a

.10 اگر $P(x)=x^3+2x^2+5x+1$ ہو تو $P(1)$ ہوگا۔

(a) 5 (b) -5

(c) -7 (d) 0

II- خالی جگہوں کو پُر کیجیے

.1 یک درجی کثیر رقمی کا درجہ ہوتا ہے ________

.2 دو درجی کثیر رقمی کا درجہ ہوتا ہے ________

.3 سہ درجی کثیر رقمی کا درجہ ہوتا ہے ________

.4 x^2-9 کی تجزی ________

.5 $(x+2)^2-1$ کی تجزی ________

.6 x^3+8 کی تجزی ________

.7 x^3-8 کی تجزی ________

.8 اگر $P(x)=x^4+3x^2-2x+1$ ہو تو $P(1)=$ ________

.9 اگر $P(x)=x^3+3x^2-3x+1$ ہو تو $P(-2)=$ ________

.10 اگر $P(x)=x^3-a^3$ ہو تو $P(a)=$ ________

خلاصہ SUMMARY

یک درجی کثیر رقمی: ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ "1" ہو یک درجی کثیر رقمی کہلاتی ہے۔

دودرجی کثیر رقمی: ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ "2" ہو دودرجی کثیر رقمی کہلاتی ہے۔

سہ درجی کثیر رقمی: ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ "3" ہو سہ درجی کثیر رقمی کہلاتی ہے۔

درج ذیل قسم کی کثیر رقمیوں کی تجزی کرنا۔

$kx+ky+kz,\ ax+ay+bx+by,\ \ a^2 \pm 2ab+b^2$

$a^2-b^2,\ (a^2 \pm 2ab+b^2)-c^2,\ a^4+a^2b^2+b^4$ یا $a^4+4b^4,$

$x^2+px+q,\ ax^2+bx+c,$

$a^3+3a^2bx+3ab^2+b^3,\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$

$a^3 \pm b^3.$

مسئلہ باقی: اگر $P(x)$ کثیر رقمی جس کا درجہ $n \geq 1$ ہو تو کثیر رقمی '$x-a$' سے تقسیم کیا جائے جبکہ 'a' کوئی مستقل ہے، تو باقی $P(a)$ ہوگا۔

مسئلہ تجزی: اگر کثیر رقمی $P(x)$ کو '$x-a$' سے تقسیم کیا جائے کہ $P(a)=0$ تو '$x-a$'، $P(x)$ کا جزوضربی ہوتا ہے۔