یونٹ

3

ALGEBRAIC MANIPULATION

الجبری مہارت

- H.C.F اور L.C.M
- الجبری کسور پر بنیادی عوامل
- الجبری کسور کا جذر

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- الجبری جملوں کا عاد اعظم HCF اور ذو اضعاف اقل (LCM) معلوم کر سکیں۔
- تجزی یا تقسیم کے طریقہ سے عاد اعظم اور ذو اضعاف اقل معلوم کر سکیں۔
- عاد اعظم اور ذو اضعاف اقل میں تعلق جان سکیں۔
- کسری جملوں جن میں + ، − ، × ، ÷ کو استعمال کیا گیا کو HCF اور LCM کی مدد سے مختصر کر سکیں۔
- الجبری جملوں کا جذر بذریعہ تجزی اور تقسیم معلوم کر سکیں۔

3.1 عاداعظم (HCF) اور ذواضعاف اقل (LCM)

HIGHEST COMMON FACTOR (HCF) AND LEAST COMMON MULTIPLE (LCM)

3.1.1 عاداعظم (HCF) Highest Common Factor (HCF)

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عاداعظم ایک بڑے سے بڑے درجے کا ایسا مشترکہ جملہ ہوتا ہے جو کہ ان میں سے ہر ایک جملے کو بغیر ''باقی'' کے پورا پورا تقسیم کرتا ہے۔

عاداعظم کا اختصار HCF ہے۔

ہم دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عاداعظم (HCF) درج ذیل طریقوں سے معلوم کر سکتے ہیں:

(i) بذریعہ تجزی　　(ii) تقسیم کے عمل سے

بذریعہ تجزی عاداعظم HCF معلوم کرنا: HCF BY FACTORIZATION

بذریعہ تجزی عاداعظم معلوم کرنے کا طریقہ درج ذیل مثالوں سے واضح کیا جاتا ہے۔

مثال 1:-

$4p^2q^3r$ ، $8p^2qr^3$ اور $12p^3q^2$ کا عاداعظم HCF معلوم کریں۔

حل:

$12p^3q^2 = 2 \times 2 \times 3 \times p \times p \times p \times q \times q$ کی تجزی

$8p^2qr^3 = 2 \times 2 \times 2 \times p \times p \times q \times r \times r \times r$ کی تجزی

$4p^2q^3r = 2 \times 2 \times p \times p \times q \times q \times q \times r$ کی تجزی

مشترک اجزائے ضربی : $2 \times 2 \times p \times p \times q$

پس عاداعظم $HCF = 4p^2q$

مثال 2:-

$2x^2 + 3x + 1$ اور $2x^2 + 5x + 2$ ، $2x^2 - x - 1$ کا عاد اعظم معلوم کریں

حل:

$2x^2 + 3x + 1$ کی تجزی $= 2x^2 + 2x + x + 1$
$= 2x(x+1) + 1(x+1)$
$= (2x+1)\ (x+1)$

$2x^2 + 5x + 2$ کی تجزی $= 2x^2 + 4x + x + 2$
$= 2x(x+2) + 1(x+2)$
$= (2x+1)\ (x+2)$

$2x^2 - x - 1$ کی تجزی $= 2x^2 - 2x + x - 1$
$= 2x(x-1) + 1(x-1)$
$= (2x+1)\ (x-1)$

مشترک جزو ضربی $= 2x+1$

پس عاد اعظم $= 2x+1$

مثال 3:-

$24(6x^4 - x^3 - 2x^2)$ اور $20(2x^6 + 3x^5 + x^4)$ کا عاد اعظم معلوم کریں

حل: فرض کیا

$P(x) = 24(6x^4 - x^3 - 2x^2)$ کی تجزی
$= 24x^2(6x^2 - x - 2)$
$= 24x^2\left[6x^2 - 4x + 3x - 2\right]$
$= 24x^2\left[2x(3x-2) + 1(3x-2)\right]$

$P(x) = 24x^2(2x+1)(3x-2) = 2^2 \times 2 \times 3 \times x^2(2x+1)(3x-2)$

اور فرض کیا

$Q(x) = 20(2x^6 + 3x^5 + x^4)$ کی تجزی
$= 20x^4\left[2x^2 + 3x + 1\right]$
$= 20x^4(2x^2 + 2x + x + 1)$
$= 20x^4\left[2x(x+1) + 1(x+1)\right]$
$= 20x^4(x+1)(2x+1)$
$= 2^2 \times 5 \times x^2 \times x^2(x+1)(2x+1)$

مشترک جزو ضربی $= 2^2 \times x^2 \times (2x+1)$

پس عاد اعظم $= 4x^2\ (2x+1)$

مثال 4:-

$x^2 + x - 6$ ، $x^2 - 7x + 10$ اور $x^2 - 4$ کا عاداعظم معلوم کریں

حل:

$x^2 - 4$ کے اجزائے ضربی $= (x-2)(x+2)$

$x^2 - 7x + 10$ کے اجزائے ضربی $= x^2 - 5x - 2x + 10$

$= x(x-5) - 2(x-5)$

$= (x-5)(x-2)$

$x^2 + x - 6$ کے اجزائے ضربی $= x^2 + 3x - 2x - 6$

$= x(x+3) - 2(x+3)$

$= (x+3)(x-2)$

مشترک جزوضربی $= x - 2$

پس عاداعظم $= x - 2$

مشق 3.1

تجزیہ کے ذریعے عاداعظم معلوم کریں۔

1. $abxy$, a^2bc
2. $6pqr$, $15qrs$
3. $8xy^2z^3$, $12x^2y^2z^2$
4. $14a^2bc$, $21ab^2$
5. $3x^5y^2$, $12x^2y^4$, $15x^3y^2$
6. $4abc^3$, $8a^3bc$, $6ab^3c$
7. $x^3 + 64$, $x^2 - 16$
8. $x^2 - y^2$, $x^4 - y^4$, $x^6 - y^6$
9. $t^2 - 9, (t+3)^2, t^2 + t - 6$
10. $x^2 - x - 2, x^2 + x - 6, x^2 - 3x + 2$
11. $1 - x^2, x^3 + 1, 1 - x - 2x^2$
12. $x^3 - 8, x^2 - 7x + 10$
13. $x^2 + 3x + 2, x^2 + 4x + 3, x^2 + 5x + 4$
14. $x^4 + x^3 - 6x^2, x^4 - 9x^2, x^3 + x^2 - 6x$
15. $35a^2c^3b, 45a^3cb^2, 30ac^2b^3$

بذریعہ تقسیم عاداعظم HCF معلوم کرنا HCF BY DIVISION METHOD

تقسیم کے قاعدے سے عاداعظم معلوم کرنے کے لیے دیے گئے جملوں کو ان کے مشترک متغیر کی قوت نماؤں کے لحاظ سے ترتیب نزولی میں لکھیے۔

بڑے درجے کی کثیر رقمی کو چھوٹے درجے کی کثیر رقمی سے تقسیم کیجیے اور باقی معلوم کیجیے۔ پہلے والے تقسیم کنندہ کو مقسوم علیہ بنا کر باقی کو تقسیم کنندہ بنالیجیے اور تقسیم کر کے باقی معلوم کریں۔ اس عمل کو جاری رکھیں یہاں تک کہ صفر باقی بچے۔ آخری تقسیم کنندہ مطلوبہ عاداعظم ہے۔

مثال 1:-

$(x^3 - x^2 - 3x + 3)$ ، $(x^3 - x^2 + x - 1)$ کا عاداعظم تقسیم کے قاعدہ سے معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x^3 - x^2 + x - 1 & x^3 - x^2 - 3x + 3 \\ & \pm x^3 \mp x^2 \pm x \mp 1 \\ \hline & -4x + 4 = -4(x-1) \end{array}$$

$-4(x-1)$ کو -4 سے تقسیم کرنے سے ہمیں $(x-1)$ حاصل ہوا

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 1 \\ x - 1 & x^3 - x^2 + x - 1 \\ & \pm x^3 \mp x^2 \\ \hline & x - 1 \\ & \pm x \mp 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

پس $x - 1$ = عاداعظم

یاد رکھیے:

عاداعظم معلوم کرتے وقت کسی بھی کثیر رقمی کو کسی ہندسے سے ضرب دینے یا تقسیم کرنے سے عاداعظم متاثر نہیں ہوتا۔

مثال 2:-

بذریعہ تقسیم $5x^3+10x^2-3x-6$ ، $2x^3+6x^2+5x+2$ اور $3x^3+6x^2+2x+4$ کا عادِ اعظم معلوم کیجیے۔

حل:

$$
\begin{array}{r}
5 \\
2x^3+6x^2+5x+2 \;\overline{)\;5x^3+10x^2-3x-6} \\
\times 2 \\
\hline
10x^3+20x^2-6x-12 \\
\pm 10x^3 \pm 30x^2 \pm 25x \pm 10 \\
\hline
-10x^2-31x-22
\end{array}
$$

اب $-10x^2-31x-22$ کو $'-1'$ سے تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوا $(10x^2+31x+22)$

$$
\begin{array}{r}
x-1 \\
10x^2+31x+22 \;\overline{)\;2x^3+6x^2+5x+2} \\
\times 5 \\
\hline
10x^3+30x^2+25x+10 \\
\pm 10x^3 \pm 31x^2 \pm 22x \\
\hline
-x^2+3x+10 \\
\times 10 \\
\hline
-10x^2+30x+100 \\
\mp 10x^2 \mp 31x \mp 22 \\
\hline
61x+122
\end{array}
$$

اب $61x+122$ کو 61 سے تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوا $(x+2)$

$$
\begin{array}{r}
10x+11 \\
x+2 \;\overline{)\;10x^2+31x+22} \\
\pm 10x^2 \pm 20x \\
\hline
11x+22 \\
\pm 11x \pm 22 \\
\hline
0
\end{array}
$$

اب

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 2 \\ x+2 & 3x^3 + 6x^2 + 2x + 4 \\ & \pm 3x^3 \pm 6x^2 \\ \hline & 2x + 4 \\ & \pm 2x \pm 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

پس $x + 2$ = عاداعظم

مثال 3:-

اگر $x^2 - x - 6$ اور $x^2 + 3x - 18$ کا عاداعظم $x - a$ ہو تو 'a' کی قیمت معلوم کریں۔

حل: صاف ظاہر ہے کہ $x - a$، عاداعظم ہو تو دونوں کثیر رقمیوں کو پورا پورا تقسیم کرے گا اور $x = a$ دونوں کثیر رقمیوں کو صفر بنائے گا۔

یعنی کہ $a^2 + 3a - 18 = 0$ اور $a^2 - a - 6 = 0$

$$a^2 - a - 6 = a^2 + 3a - 18$$

$$4a = 12$$

$$a = 3$$

تقسیم کنندہ

کوئی کثیر رقمی $D(x)$ کسی کثیر رقمی $P(x)$ کا تقسیم کنندہ کہلاتی ہے اگر $P(x) = D(x)\ .\ Q(x)$ جبکہ $Q(x)$ کوئی اور کثیر رقمی ہے

مثلاً $P(x) = (x-2)\ (x+3)$ اور $D(x) = x - 2$

تو پھر واضح ہے کہ $D(x)$ ، $P(x)$ کا تقسیم کنندہ ہے

کیونکہ $P(x) = (x-2)\ (x+3)$

$$= D(x)\,.\,Q(x)$$

جبکہ $Q(x) = x + 3$

مشق 3.2

تقسیم کے طریقہ سے عاداعظم HCF معلوم کریں۔

1. $x^4+x^2+1\ ,\ x^4+x^3+x+1$

2. $6x^3+7x^2-9x+2\ ,\ 8x^4+6x^3-15x^2+9x-2$

3. $4x^3+2x^2-6x\ ,\ 4x^3-8x+4$

4. $x^3+7x^2+12x\ ,\ x^3-2x^2-15x$

5. $x^3-x^2-x+1\ ,\ x^4-2x^3+2x-1$

6. $x^3-x^2-x-2\ ,\ x^3+3x^2-6x-8$

7. $x^2+3x-4\ ,\ x^3-2x^2-2x+3$

8. $3x^3-14x^2+9x+10\ ,\ 15x^3-34x^2+21x-10$

9. $2x^4+x^3+4x+2\ ,\ 6x^3+5x^2+x\ ,\ 2x^4+3x^3+x^2+2x+1$

10. $x^3+x^2-5x+3\ ,\ x^3-7x+6\ ,\ x^3+2x^2-2x+3$

3.1.2 ذواضعاف اقل (LCM) Least Common Multiple (LCM)

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا ذواضعاف اقل ایک کم ترین درجہ کا ایسا جملہ ہوتا ہے جو ان سب جملوں سے بغیر "باقی" کے پورا پورا تقسیم ہو سکے۔

ذواضعاف اقل کا مخفف LCM ہے۔

ہم ذواضعاف اقل بذریعہ تجزی معلوم کر سکتے ہیں

بذریعہ تجزی LCM معلوم کرنا LCM BY FACTORIZATION

بذریعہ تجزی LCM معلوم کرنے کے لیے درج ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

مثال 1:- $4p^2q^3r$ ، $8p^2qr^3$ اور $12p^3q^2$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں

حل:

$12p^3q^2 = 2 \times 2 \times 3 \times p \times p \times p \times q \times q$ کی تجزی

$8p^2qr^3 = 2 \times 2 \times 2 \times p \times p \times q \times r \times r \times r$ کی تجزی

$4p^2q^3r = 2 \times 2 \times p \times p \times q \times q \times q \times r$ کی تجزی

ذواضعاف اقل = مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب × غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب

$= (2^2 \times p^2 \times q^2 \times r) \times (2 \times 3 \times p \times q \times r^2)$

$= 4p^2q^2r \times 6pqr^2$

$= 4 \times 6 \times p^2 \times p \times q^2 \times q \times r \times r^2$

ذواضعاف اقل $= 24p^3q^3r^3$

> **یاد رکھیے:**
> مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب لیتے وقت مشترکہ اجزائے ضربی کو بار بار شمار نہیں کرتے۔

مثال 2:- $24ab^2c^2$ ، $6ab^2c^3$ اور $18ab^2c^3$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

حل:

$18ab^2c^3 = 2 \times 3 \times 3 \times a \times b \times b \times c \times c \times c$ کی تجزی

$6a^2bc^3 = 2 \times 3 \times a \times a \times b \times c \times c \times c$ کی تجزی

$24ab^2c^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times a \times b \times b \times c \times c$ کی تجزی

ذواضعاف اقل = مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب × غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب

$= (2 \times 3 \times a \times b^2 \times c^3) \times (2 \times 2 \times 3 \times a)$

$= (6ab^2c^3) \times (12a)$

ذواضعاف اقل $= 72a^2b^2c^3$

مثال 3:- $x^2 - 4x - 21$ اور $x^2 - 49$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

حل:

$$x^2 - 49 = x^2 - 7^2$$
$$= (x-7)\ (x+7)$$

اور

$$x^2 - 4x - 21 = x^2 - 7x + 3x - 21$$
$$= x(x-7) + 3(x-7)$$
$$= (x-7)\ (x+3)$$

مشترک جزوضربی $= x - 7$

غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب $= (x+7)\ (x+3)$

غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب × مشترک جزوضربی = ذواضعاف اقل

ذواضعاف اقل $= (x-7) \times (x+7)\ (x+3)$

$$= (x^2 - 7^2)\ (x+3)$$
$$= (x^2 - 49)\ (x+3)$$

ذواضعاف اقل $= x^3 + 3x^2 - 49x - 147$

مشق 3.3

بذریعہ تجزی ذواضعاف اقل LCM معلوم کیجیے۔

1. $21a^4x^3y\ ,\ 35a^2x^4y\ ,\ 28a^3xy^4$
2. $3a^4b^2c^3\ ,\ 5a^2b^3c^5$
3. $2ab\ ,\ 3ab\ ,\ 4ca$
4. $x^2yz\ ,\ xy^2z\ ,\ xyz^2$
5. $p^3q - pq^3\ ,\ p^5q^2 - p^2q^5$
6. $x^3 + 64\ ,\ x^2 - 16$
7. $x^2 - x - 2\ ,\ x^2 + x - 6\ ,\ x^2 - 3x + 2$
8. $y^2 - 9\ ,\ (y+3)^2\ ,\ y^2 + y - 6$
9. $1 - y^2\ ,\ y^3 + 1,\ 1 - y - 2y^2$
10. $x^2 - y^2\ ,\ x^4 - y^4\ ,\ x^6 - y^6$
11. $x^3 + 1\ ,\ x^4 + x^2 + 1\ ,\ (x^2 + x + 1)^2$
12. $x^3 + y^3\ ,\ x^4 - y^4\ ,\ x^6 + y^6$
13. $2x^2 + 5x + 3\ ,\ x^2 + 2x + 1\ ,\ 2x^2 + 9x + 9$
14. $x^4 + x^3 - 6x^2\ ,\ x^4 - 9x^2\ ,\ x^3 + x^2 - 6x$
15. $x^2 + 4xy + 4y^2\ ,\ x^2 + 3xy + 2y^2\ ,\ x^2 + 2xy + y^2$

Relationship Between HCF and LCM

3.1.3 عاداعظم اور ذواضعاف اقل کا باہمی تعلق

A اور B کوئی سے دو الجبری جملے ہوں اور **HCF** اور **LCM** کو بالترتیب H اور L سے ظاہر کیا جائے تو ان کے درمیان تعلق کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\boxed{A \times B = H \times L}$$

یہ عاداعظم اور ذواضعاف اقل کے درمیان کلیہ کہلاتا ہے۔

ثبوت: فرض کیا

$$\frac{A}{H} = x \quad \text{اور} \quad \frac{B}{H} = y$$

$$A = Hx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

$$B = Hy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (ii)$$

چونکہ x اور y میں کوئی جز وضربی مشترک نہیں

$$L = H.x.y \quad \text{لہٰذا}$$

$$HL = H(H.x.y) \quad (\text{دونوں اطراف } H \text{ سے ضرب دینے سے})$$

$$= (Hx).(Hy)$$

$$HL = A.B.$$

اہم نتائج:

$$(i) \quad L = \frac{A \times B}{H}$$

$$(ii) \quad H = \frac{A \times B}{L}$$

$$(iii) \quad A = \frac{H \times L}{B}$$

نوٹ:

اگر A اور B دو الجبری جملے ہوں تو ہم ذواضعاف اقل معلوم کرنے سے پہلے عاداعظم معلوم کرتے ہیں۔

اگر دو الجبری جملوں کا عاداعظم معلوم ہو تو ہم ان کا ذواضعاف اقل معلوم کرسکتے ہیں۔

مثال 1:-

دو الجبری جملوں کے ذواضعاف اقل اور عاد اعظم بالترتیب $(x^2 - 1)\ (2x + 1)$ اور $(2x + 1)$ ہیں۔ اگر ایک جملہ $(2x + 1)\ (x - 1)$ ہو تو دوسرا جملہ معلوم کریں۔

حل:

$$L = (2x+1)\ (x^2-1)$$

$$H = 2x+1$$

$$A = (x-1)\ (2x+1)$$

$$B = ?$$

ہم جانتے ہیں کہ $A \times B = H \times L$

$$B = \frac{H \times L}{A}$$

$$= \frac{(2x+1)\ (x^2-1)\ (2x+1)}{(x-1)\ (2x+1)}$$

$$= \frac{(2x+1)(x+1)\ (x-1)(2x+1)}{(x-1)\ (2x+1)}$$

$$B = (2x+1)(x+1)$$

مثال 2:-

اگر دو جملوں کا عاد اعظم، $(x + 3)$ اور ان کا ذواضعاف اقل، $x^3 - 7x + 6$ ہو تو دوسرا جملہ معلوم کریں جبکہ پہلا جملہ $(x^2 + 2x - 3)$ ہے۔

حل: فرض کیا مطلوبہ جملہ B ہے۔ تو

$$A \times B = H \times L$$

$$B = \frac{H \times L}{A}$$

$$= \frac{(x+3)\ (x^3-7x+6)}{x^2+2x-3}$$

$$= (x+3)(x-2)$$

$$B = x^2+x-6$$

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ x^2+2x-3 & x^3 - 7x + 6 \\ & -x^3 \mp 3x \quad \pm 2x^2 \\ \hline & -2x^2 - 4x + 6 \\ & \mp 2x^2 \mp 4x \pm 6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

مثال 3:-

دو جملوں کا حاصل ضرب $x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48$ ہے۔ اور ان کا ذواضعاف اقل $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ ہے۔ ان کا عاداعظم معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $A \times B = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48$

$$L = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$$

$$H = ?$$

$$L \times H = A \times B$$

$$H = \frac{A \times B}{L}$$

$$H = \frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48}{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}$$

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ x^3 + 5x^2 - 2x - 24 & x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48 \\ & \underline{\pm x^4 \pm 5x^3 \mp 2x^2 \mp 24x} \\ & -2x^3 - 10x^2 + 4x + 48 \\ & \underline{\mp 2x^3 \mp 10x^2 \pm 4x \pm 48} \\ & 0 \end{array}$$

$\therefore$ عاداعظم $= x - 2$

یاد رکھیے کہ:

عاداعظم × ذواضعاف اقل = دو الجبری جملوں کا حاصل ضرب

ذواضعاف اقل = $\dfrac{\text{دونوں الجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{\text{عاداعظم}}$

عاداعظم = $\dfrac{\text{دونوں الجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{\text{ذواضعاف اقل}}$

مشق 3.4

درج ذیل کا عاد اعظم اور ذو اضعاف اقل معلوم کیجیے۔

1. $x^3+x^2+x+1\ ,\ x^3-x^2+x-1$
2. $x^3-3x^2-4x+12\ ,\ x^3-x^2-4x+4$
3. $2x^3+2x^2+x+1\ ,\ 2x^3-2x^2+x-1$
4. $6x^3+7x^2-9x+2\ ,\ 8x^4+6x^3-15x^2+9x-2$
5. $3x^4+17x^3+27x^2+7x-6\ ,\ 6x^4+7x^3-27x^2+17x-3$
6. $2x^4+3x^3-13x^2-7x+15\ ,\ 2x^4+x^3-20x^2-7x+24$
7. $x^4-x^3-x+1\ ,\ x^4+x^3-x-1$
8. $x^4+x^3+x+1\ ,\ x^4+x^3-x-1$

مطلوبہ کثیر رقمی معلوم کیجیے۔

9. $A=x^2-5x-14\ ,\ H=x-7\ ,\ L=x^3-10x^2+11x+70\ ,\ B=?$
10. $B=3x^2+14x+8\ ,\ H=3x+2\ ,\ L=6x^3+25x^2+2x-8\ ,\ A=?$

11. دو کثیر رقمیوں کا حاصل ضرب $x^4+6x^3-3x^2-56x-48$ ہے اور ان کا عاد اعظم $x^3+2x^2-11x-12$ ہے۔ ذو اضعاف اقل معلوم کیجیے۔

12. دو کثیر رقمیوں کے حاصل ضرب اور L.C.M بالترتیب $x^4+5x^3-x^2-17x+12$ اور $x^3+6x^2+5x-12$ ہیں۔ ان کا H.C.F معلوم کیجیے۔

13. دو کثیر رقمیوں کے حاصل ضرب اور ذو اضعاف اقل بالترتیب $x^4-12x^3+53x^2-102x+72$ اور $x-3$ ہیں۔ ان کا عاد اعظم معلوم کیجیے۔

14. دو کثیر رقمیوں کے حاصل ضرب اور عاد اعظم بالترتیب $x^4-5x^3+2x^2+20x-24$ اور $x+2$ ہیں۔ ان کا ذو اضعاف اقل معلوم کیجیے۔

15. ایک جملہ $x^3+3x^2-4x-12$ ہے۔ جبکہ دوسرا جملہ $x^3+5x^2-4x-20$ ہے۔ ان کا عاد اعظم x^2-4 ہے۔ ان کا ذو اضعاف اقل معلوم کیجیے۔

16. ایک الجبری جملہ x^3-x^2+2x-2 اور دوسرا جملہ x^3-x^2-2x+2 ہے۔ ان کا عاد اعظم، $x-1$ ہے۔ ان کا ذو اضعاف اقل معلوم کیجیے۔

17. ثابت کیجیے کہ $H^3+L^3=A^3+B^3$ جبکہ $H+L=A+B$، H اور L بالترتیب عاد اعظم اور ذو اضعاف اقل کو ظاہر کرتے ہیں اور A اور B بالترتیب کثیر رقمیاں ہیں۔

3.2 الجبری کسور پر بنیادی عوامل

BASIC OPERATIONS ON THE ALGEBRAIC FRACTIONS

3.2.1 الجبری جملوں کی جمع اور تفریق
Addition and Subtraction of the Algebraic Fractions

الجبری جملوں کی جمع اور تفریق کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1:- مختصر کیجیے۔

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-8}+\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}-\frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$$

حل:

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-8}+\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}-\frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$$

$$=\frac{x^2+2x+x+2}{x^2-4x+2x-8}+\frac{x^2-3x-2x+6}{x^2-4x-3x+12}-\frac{x^2+3x-2x-6}{x^2-4x-2x+8}$$

$$=\frac{(x+2)(x+1)}{(x-4)(x+2)}+\frac{(x-3)(x-2)}{(x-4)(x-3)}-\frac{(x+3)(x-2)}{(x-4)(x-2)}$$

$$=\frac{x+1}{x-4}+\frac{x-2}{x-4}-\frac{x+3}{x-4}$$

$$=\frac{x+1+x-2-x-3}{x-4}$$

$$=\frac{x-4}{x-4}\quad=1$$

یاد رکھیے:

(i) الجبری کسور میں نسب نما اور مخرج، کثیر رقمیاں ہوتی ہیں۔

(ii) جب ہم ان کسور کو جمع یا تفریق کرتے ہیں تو پہلے ہم انہیں مختصر ترین شکل میں تبدیل کر لیتے ہیں

مثال 2:- مختصر کریں

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{a-b}-\frac{ab}{a^3-b^3}$$

حل:-

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{a-b}-\frac{ab}{a^3-b^3}$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)+1(a^2+ab+b^2)-ab}{a^3-b^3}$$

$$=\frac{a^2-b^2+a^2+ab+b^2-ab}{a^3-b^3}$$

$$=\frac{2a^2}{a^3-b^3}$$

3.2.2 الجبری کسور کی ضرب اور تقسیم

Multiplication and Division of the Algebraic Fractions

اگر P, Q, R, S الجبری جملے ہوں تو $\frac{P}{Q}$ اور $\frac{R}{S}$ الجبری کسور کہلاتی ہیں جبکہ $Q \neq 0$, $S \neq 0$ ۔

الجبری کسور کی ضرب

$$\frac{P}{Q}\times\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS} \quad \text{جبکہ} \quad Q\neq 0\ ,\ S\neq 0.$$

الجبری کسور کی تقسیم

$$\frac{P}{Q}\div\frac{R}{S}=\frac{P}{Q}\times\frac{S}{R}$$

$$=\frac{PS}{QR} \quad \text{جبکہ} \quad Q\neq 0\ ,\ S\neq 0.$$

مثال 1:- مختصر کیجیے۔

$$\frac{b^2-c^2-a^2+2ac}{c^2+a^2-b^2+2ac}\times\frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{a^2-b^2+c^2-2ac}$$

حل:

$$\frac{b^2-c^2-a^2+2ac}{c^2+a^2-b^2+2ac}\times\frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{a^2-b^2+c^2-2ac}$$

$$=\frac{b^2-(c^2+a^2-2ac)}{(c^2+a^2+2ac)-b^2}\times\frac{(b^2+c^2-2bc)-a^2}{(a^2+c^2-2ac)-b^2}$$

$$=\frac{b^2-(a-c)^2}{(a+c)^2-b^2}\times\frac{(b-c)^2-a^2}{(a-c)^2-b^2}$$

$$=\frac{\left[b^2-(a-c)^2\right]}{(a+c-b)(a+c+b)}\times\frac{(b-c-a)(b-c+a)}{(-1)\left[b^2-(a-c)^2\right]}$$

$$=\frac{-(b-c-a)(b-c+a)}{(a+c-b)(a+b+c)}$$

$$=\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+c-b)(a+b+c)}=\frac{a+b-c}{a+b+c}$$

مثال 2:- مختصر کیجیے۔

$$\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4}\div\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+b^2}$$

حل:

$$\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4}\div\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4}\times\frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}\times\frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}$$

$$=\frac{1}{a+b}$$

مشق 3.5

مختصر کیجیے۔

1. $\frac{1}{a}+\frac{2}{a+1}-\frac{3}{a+2}$

2. $\frac{2a}{(x-2a)}-\frac{x-a}{x^2-5ax+6a^2}+\frac{2}{x-3a}$

3. $\frac{1}{a^2+1}-\frac{a^4}{a^2+1}+\frac{a^6}{a^2-1}-\frac{1}{a^2-1}$

4. $\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{2x+1}{x^4+x^2+1}$

5. $\frac{a^2(b-c)}{(a+b)(a+c)}-\frac{b^2(c-a)}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2(a-b)}{(c+a)(c+b)}$

6. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}$

7. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}+\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$

8. $\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\times\frac{x-y}{x(x+y)}\div\frac{x^2+y^2}{x}$

9. $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}\times\frac{x^3+8}{x^4+4x^2+16}\div\frac{x^2+x}{x^3+2x^2+4x}$

10. $\frac{a^3+64b^3}{a^2+20ab+64b^2}\div\frac{a^2-4ab+16b^2}{a^2+4ab+16b^2}\times\frac{a^2+12ab-64b^2}{a^3-64b^3}$

11. $\frac{a}{(a+b)^2-2ab}\times\frac{a^4-b^4}{(a+b)^3-3ab(a+b)}\div\frac{(a+b)^2-4ab}{(a+b)^2-3ab}$

12. $\frac{a^2-1}{a^2-a-2}\div\frac{a^2+5a+6}{a^2-5a+6}\div\frac{a^2-4a+3}{a^2+4a+3}$

3.3 الجبری جملوں کا جذر SQUARE ROOT OF ALGEBRAIC EXPRESSION

ہم الجبری جملوں کا جذر معلوم کر سکتے ہیں۔

(i) تجزی کے طریقہ سے

(ii) تقسیم کے طریقہ سے

3.3.1 تجزی کے طریقہ سے جذر معلوم کرنا Square Root By Factorization Method

ہم اس طریقہ میں جملے کو مکمل مربع کی صورت میں ظاہر کر کے جذر معلوم کرتے ہیں۔

مثلاً

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

یا $$x^2 \pm 2xy + y^2 = \left[\pm(x \pm y)\right]^2$$

یا $$\sqrt{x^2 \pm 2xy + y^2} = \pm(x \pm y)$$

پس الجبری جملے کا جذر دو ایسے جملوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ جو ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہوتے ہیں۔

مثال 1:-

$49x^2 + 112xy + 64y^2$ کا تجزی کے طریقہ سے جذر معلوم کیجیے۔

حل: $49x^2 + 112xy + 64y^2$

$$= (7x)^2 + 2(7x)(8y) + (8y)^2$$

$$= (7x + 8y)^2$$

$$49x^2 + 112xy + 64y^2 = \left[\pm(7x + 8y)\right]^2$$

دونوں طرف جذر المربع سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\sqrt{49x^2 + 112xy + 64y^2} = \pm(7x + 8y)$$

مثال 2:-

$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 10(x + \frac{1}{x}) + 27$ کا جذر معلوم کریں۔

حل: فرض کیا کہ

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

دونوں طرف مربع لینے سے

$$(x + \frac{1}{x})^2 = z^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = z^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

$$\therefore (x^2 + \frac{1}{x^2}) + 10(x + \frac{1}{x}) + 27 = z^2 - 2 + 10z + 27$$

$$= z^2 + 10z + 25$$

$$= (z)^2 + 2(z)5 + (5)^2$$

$$= (z + 5)^2 \qquad \left[z = x + \frac{1}{x} \text{ رکھنے سے} \right]$$

$$= (x + \frac{1}{x} + 5)^2$$

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 10(x + \frac{1}{x}) + 27 = \left[\pm(x + \frac{1}{x} + 5) \right]^2$$

دونوں طرف جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 10(x + \frac{1}{x}) + 27} = \pm(x + \frac{1}{x} + 5)$$

مثال 3:-

$x(x-1)(x-2)(x-3)+1$ کا جذر معلوم کریں۔

حل:

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1$$

$$=[x(x-3)]\,[(x-1)(x-2)]+1$$

$$=\left[x^2-3x\right]\left[x^2-3x+2\right]+1$$

$x^2-3x = z$ رکھنے سے

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1 = z(z+2)+1$$

$$= z^2+2z+1$$

$$=(z+1)^2$$

$z = x^2-3x$ اب رکھیے

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1 = (x^2-3x+1)^2$$

$$=\left[\pm(x^2-3x+1)\right]^2$$

دونوں طرف جذرالمربع لینے سے

$$\sqrt{x(x-1)(x-2)(x-3)+1} = \pm(x^2-3x+1)$$

مثال 4:-

$(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})^2-4(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}),(x\neq o\ ,\ y\neq o)$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ

$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=z$$

دونوں طرف مربع لینے سے

$$(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})^2=z^2$$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2=z^2$$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=z^2+2$$

$$(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})^2-4(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})=(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2)-4(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})$$

$$=z^2+2+2-4z$$

$$=z^2-4z+4$$

$$=(z-2)^2$$

$$=\left[\pm(z-2)\right]^2$$

$\left[\text{رکھنے سے}\quad \frac{x}{y}-\frac{y}{z}\right]$

$$(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})^2-4(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})=\left[\pm(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}-2)\right]^2$$

دونوں طرف جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})^2-4(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})}=\pm(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}-2)$$

3.3.2 جذر بذریعہ طریقہ تقسیم معلوم کرنا Square Root by Division Method

ہم مندرجہ ذیل مثالوں سے بذریعہ طریقہ تقسیم جذر معلوم کرنے کی وضاحت کرتے ہیں۔

مثال 1:-

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + y + z \\
\hline
x & x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + y^2 + z^2 \\
 & \pm x^2 \\
\hline
2x + y & 2xy + 2xz + 2yz + y^2 + z^2 \\
 & \pm 2xy \qquad \pm y^2 \\
\hline
2x + 2y + z & 2xz + 2yz + z^2 \\
 & \pm 2xz \pm 2yz \pm z^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

مطلوبہ جذرالمربع $\pm(x + y + z)$

(i) دیئے گئے جملے کو ترتیب نزولی میں لکھیے۔
پہلی رقم x^2 کا جذرالمربع x لیجیے۔
جملے میں تفریق کرنے کے بعد $2xy + 2xz + 2yz + y^2 + z^2$ باقی بچتا ہے۔

(ii) حاصل قسمت x کو اس کے دوگنا $2x$ کو y سے ضرب دیجئے جو کہ باقی بچے کی پہلی رقم $2xy$ ہے۔
لہٰذا باقی بچے کو $2x + y$ سے تقسیم کیجیے تو ہمیں $2xz + 2yz + z^2$ نیا باقی بچتا ہے اور
$x + y$ حاصل قسمت ہوتے ہیں۔ جو کہ جذرالمربع کی پہلی دو رقوم ہیں۔

(iii) باقی بچے ہوئے کو حاصل قسمت کے دوگنا + z سے تقسیم کیجیے۔ یعنی $2x + 2y + z$ تو حاصل قسمت
$x + y + z$ حل ہوا اور باقی صفر بچا۔ پس $\pm(x + y + z)$ مطلوبہ جذر ہے۔

مثال 2:-

$(x^2 - \frac{1}{x^2})^2 - 12(x^2 - \frac{1}{x^2}) + 36$ کا جذر معلوم کریں۔

حل:

$$(x^2 - \frac{1}{x^2})^2 - 12(x^2 - \frac{1}{x^2}) + 36$$

$$= x^4 + \frac{1}{x^4} - 2 - 12x^2 + \frac{12}{x^2} + 36$$

$$= x^4 - 12x^2 + 34 + \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^4}$$ (ترتیب نزولی میں لکھنے سے)

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 6 - \frac{1}{x^2} \\
\hline
x^2 & x^4 - 12x^2 + 34 + \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^4} \\
 & \pm x^4 \\
\hline
2x^2 - 6 & -12x^2 + 34 + \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^4} \\
 & \pm 12x^2 \pm 36 \\
\hline
2x^2 - 12 - \frac{1}{x^2} & -2 + \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^4} \\
 & \mp 2 \pm \frac{12}{x^2} \pm \frac{1}{x^4} \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

پس $\pm(x^2 - 6 - \frac{1}{x^2})$ مطلوبہ جذر ہے۔

$x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$ اور $x = \pm\sqrt{a} \Rightarrow x^2 = a$

مثال 3:- $x^4 - 12x^3 + 217x + 320$ کو مکمل مربع بنانے کے لیے

(i) کیا جمع کیا جائے؟　　(ii) کیا تفریق کیا جائے؟

(iii) x کی کس قیمت کے لیے مکمل مربع ہو گی؟

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 6x - 18 \\
\hline
x^2 & x^4 - 12x^3 + 0x^2 + 217x + 320 \\
 & \underline{\pm x^4} \\
2x^2 - 6x & -12x^3 + 0x^2 + 217x + 320 \\
 & \underline{\pm 12x^3 \pm 36x^2} \\
2x^2 - 12x - 18 & -36x^2 + 217x + 320 \\
 & \underline{\mp 36x^2 \pm 216x \pm 324} \\
 & x - 4
\end{array}
$$

(i) $4 + x-$ جمع کرنے سے جملہ مکمل مربع ہو گا۔

(ii) $x - 4$ تفریق کرنے سے جملہ مکمل مربع ہو گا۔

(iii) اگر $x - 4 = 0$ یعنی $x = 4$ ہو تو جملہ ایک مکمل مربع ہو گا۔

مثال 4:-

'ℓ' اور 'm' کی کس قیمت کے لیے جملہ $4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - \ell x + m$ ایک مکمل مربع ہو گا؟ جبکہ $x \neq 0$

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 4 \\
\hline
2x^2 & 4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - \ell x + m \\
 & \underline{\pm 4x^4} \\
4x^2 - 3x & -12x^3 + 25x^2 \\
 & \underline{\mp 12x^3 \pm 9x^2} \\
4x^2 - 6x + 4 & 16x^2 - \ell x + m \\
 & \underline{\pm 16x^2 \mp 24x \pm 16} \\
 & (-\ell + 24)x + (m - 16) \text{ باقی بچا}
\end{array}
$$

دیا گیا جملہ مکمل مربع ہوگا اگر باقی بچا $(-\ell + 24)x + (m - 16)$ کی قیمت صفر کے برابر ہو۔

ایسا ممکن ہوگا اگر

$$-\ell + 24 = 0 \quad \text{اور} \quad m - 16 = 0$$

$$\ell = 24 \quad \text{اور} \quad m = 16$$

لہٰذا $\ell = 24$ اور $m = 16$ کے لیے دیا گیا جملہ ایک مکمل مربع ہوگا۔

مشق 3.6

درج ذیل کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

1. $16x^2 + 24xy + 9y^2$
2. $(x^2 - 7x + 12)(x^2 - 9x + 20)(x^2 - 8x + 15)$
3. $(x^2 + 8x + 7)(2x^2 - x - 3)(2x^2 + 11x - 21)$
4. $x(x + 2)(x + 4)(x + 6) + 16$
5. $(2x + 1)(2x + 3)(2x + 5)(2x + 7) + 16$
6. $(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 10(x + \frac{1}{x}) + 27, x \neq 0$
7. $(t - \frac{1}{t})^2 - 4(t + \frac{1}{t}) + 8, (t \neq 0)$
8. $(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 4(x + \frac{1}{x})^2 + 12, x \neq 0$
9. $4x^4 + 12x^3 + 25x^2 + 24x + 16$
10. $\frac{9x^2}{4y^2} - \frac{3x}{2y} - \frac{7}{4} + \frac{2y}{3x} + \frac{4x^2}{9y^2}, (x \neq 0, y \neq 0)$
11. 'x' کی کس قیمت کے لیے $x^4 + 4x^2 + x + \frac{8}{x^2} + \frac{4}{x^4}$ ایک مکمل مربع ہے۔ جبکہ $x \neq o$
12. اگر $x^4 + \ell x^3 + mx^2 + 12x + 9$ ایک مکمل مربع ہو تو ℓ اور m کی قیمتیں معلوم کریں۔

جائزہ مشق-3

I- صحیح جوابات کے گرد دائرہ لگائیں۔

1. $\dfrac{\text{دوالجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{\text{ذواضعاف اقل}} = ?$

(a) عاداعظم (b) ذواضعاف اقل
(c) ذواضعاف اقل × عاداعظم (d) عاداعظم + ذواضعاف اقل

2. ذواضعاف اقل معلوم کرنے کے طریقے ہیں

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

3. عاداعظم معلوم کرنے کے طریقوں کی تعداد ہے۔

(a) 4 (b) 1 (c) 2 (d) 3

4. $12pq,\ 8p^2q$ کا عاداعظم ہے۔

(a) $4pq$ (b) $4p^2q^2$ (c) $4pq^2$ (d) $4p^2q$

5. $2x^2+3x+1,\ \ 2x^2-x-1$ کا عاداعظم ہے۔

(a) $2x-1$ (b) $2x+1$ (c) $x+1$ (d) $x-1$

6. $6pqr,\ 15qrs$ کا عاداعظم ہے۔

(a) $3qr$ (b) $3pqr$ (c) $3pqrs$ (d) $15pqrs$

7. $12p^3q^2,\ 8p^2$ کا ذواضعاف اقل ہے۔

(a) $24pq^2$ (b) $24p^3q$ (c) $24p^3q^2$ (d) $12p^2q$

8. دوالجبری جملوں کا حاصل ضرب =

(a) عاداعظم (b) ذواضعاف اقل
(c) ذواضعاف اقل × عاداعظم (d) ذواضعاف اقل + عاداعظم

9. $\dfrac{\text{دوالجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{H.C.F} =$

(a) ذواضعاف اقل (b) عاداعظم
(c) 0 (d) عاداعظم × ذواضعاف اقل

10. $\dfrac{L.C.M \times H.C.F}{\text{پہلا جملہ}} =$

(a) دوسرا جملہ (b) 1 (c) عاداعظم (d) ذواضعاف اقل

II- خالی جگہ پر کریں۔

1. عاد اعظم معلوم کرنے کے طریقے ہیں = ______

2. ذو اضعاف اقل معلوم کرنے کے طریقے ہیں = ______

3. دو الجبری جملوں کا حاصل ضرب = ______ × ذو اضعاف اقل

4. $\dfrac{\text{دو الجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{\text{ذو اضعاف اقل}}$ = ______

5. $\dfrac{\text{دو الجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{\text{عاد اعظم}}$ = ______

6. $\dfrac{\text{عاد اعظم} \times \text{ذو اضعاف اقل}}{\text{پہلا جملہ}}$ = ______

7. $2x^2 + 3x + 1,\ 4x^2 - 1$ کا عاد اعظم ہے ______

8. $x^3 + 8,\ x^2 - 4$ کا عاد اعظم ہے ______

9. $2x^3y^3,\ 4x^2y^4$ کا عاد اعظم ہے ______

10. $3x^2y^2,\ 2xyz$ کا ذو اضعاف اقل ہے ______

خلاصہ

عاد اعظم:

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عاد اعظم زیادہ سے زیادہ درجہ کا جملہ ہوتا ہے جو اِن تمام جملوں کو تقسیم کرتا ہے۔

ذو اضعاف اقل:

دو یا دو الجبری جملوں کا ذو اضعاف اقل کم سے کم درجہ کا جملہ ہوتا ہے جو ان تمام جملوں سے بغیر "باقی بچا" کے پورا پورا تقسیم ہوتا ہے۔