یونٹ

4

خطی مساواتیں اور غیر مساواتیں

LINEAR EQUATIONS AND INEQUALITIES

- خطی مساواتیں
- مطلق قیمت والی مساوات
- خطی غیر مساواتیں
- خطی غیر مساواتوں کا حل

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ایک متغیر والی خطی مساوات کو سمجھ سکیں۔
- جذری مساوات کو سادہ خطی مساوات میں تحویل کر کے ان کا حل معلوم کر سکیں۔
- مطلق قیمت کی تعریف کر سکیں۔
- ایک متغیر والی مطلق قیمت کی مساوات کو حل کر سکیں۔
- غیر مساواتیں ($<$, $>$) اور ($\leq$, $\geq$) کی تعریف کر سکیں۔
- غیر مساواتوں کی خاصیتوں (جیسا کہ خاصیت ثلاثی، خاصیت متعدیت، جمعی خاصیت، ضربی خاصیت) کو پہچان کر سکیں۔
- طاق عددی سروں والی غیر مساواتوں کو حل کر سکیں۔

4.1 خطی مساوات LINEAR EQUATIONS

ایسا بیان جس میں دو الجبری جملوں کو برابری کی علامت " = " سے جوڑا گیا ہو مساوات کہلاتا ہے۔ یک درجی کثیر رقمی والی مساوات خطی مساوات کہلاتی ہیں۔ مساوات $ax+b=0$، $a\neq 0$ ایک متغیر میں خطی مساوات کی معیاری صورت ہے۔

مثلاً

(i) $7x+3=5$ (ii) $\frac{3}{2}x+4=\frac{1}{3}$

(iii) $\frac{1}{2}(t+3)-2t=5$ (iv) $\frac{5}{3}y+4=\frac{y-2}{4}$

4.1.1 ایک متغیر میں خطی مساوات Linear Equation In One Variable

ایسی مساوات جو $ax+b=0$ ، $a\neq 0$ .... (i) کی صورت میں لکھی جا سکے، جبکہ "a, b" مستقل مقداریں اور 'x' متغیر ہے۔ ایک متغیر میں یک درجی مساوات کہلاتی ہے۔

مساوات (i) کو ہمیشہ حل کیا جا سکتا ہے۔

$$ax+b=0 \qquad a\neq 0$$
$$ax=-b$$
$$x=\frac{-b}{a}$$

مساوات (i) کا حل ہے۔

مثال:-

ثابت کیجیے کہ $x=2$ مساوات $5x-12=-2$ کا حل ہے۔

حل:

مساوات میں $x=2$ رکھنے سے

$$L.H.S = 5x-12 = 5\times(2)-12$$
$$= 10-12 = -2 = R.H.S$$

مساوات کو حل کرنے کے قوانین:

(i) مساوات کو تبدیل کیے بغیر دونوں طرف یکساں مقدار کو جمع یا تفریق کیا جاسکتا ہے۔

(ii) مساوات کی دونوں طرف ایک ہی غیر صفری عدد سے ضرب دینے سے مساوات تبدیل نہیں ہوتی۔

(iii) مساوات کی دونوں طرف ایک ہی غیر صفری عدد سے تقسیم کرنے سے مساوات تبدیل نہیں ہوتی۔

(iv) ٹرانسپوزیشن:

طرفین کی برابری متاثر ہوئے بغیر کسی بھی رقم کو مساوات کی ایک جانب سے دوسری جانب علامت کی تبدیلی کے ساتھ منتقل کیا جاسکتا ہے اس عمل کو ٹرانسپوزیشن کہتے ہیں۔

مثال:-

$5x-6 = 4x-2$ حل کریں۔

حل:

ہمیں علم ہے کہ $5x-6 = 4x-2$

$5x-4x = -2+6$ ($4x$ کو $L.H.S$ اور -6 کو $R.H.S$ منتقل کرنے سے)

لہٰذا $x = 4$ مساوات کا حل ہے۔

پڑتال: مساوات میں $x = 4$ رکھنے سے

$$L.H.S = 5\times(4)-6 = 20-6 = 14$$

$$R.H.S = 4\times(4)-2 = 16-2 = 14$$

$$L.H.S = R.H.S$$

پس: $x = 4$ مساوات کا حل ہے۔

4.1.2 خطی مساوات کا حل: Solution of a Linear Equation

متغیر کی کوئی ایسی قیمت جو مساوات کو درست بیان ثابت کردے۔ مساوات کا حل کہلاتی ہے (یا مساوات کا روٹ) — مساوات کو حل کرنے سے مراد متغیر کی ایسی قیمت معلوم کرنا ہے۔ جو کہ مساوات کو درست بیان ثابت کرسکے (یا مساوات کے معیار پر پورا اُترے)۔

مثال 1:- $3x+\frac{1}{5} = 2-x$ کو حل کریں۔

حل:

$$3x+\frac{1}{5} = 2-x$$

یا $3x+x = 2-\frac{1}{5}$ ($-x$ کو L.H.S اور $\frac{1}{5}$ کو R.H.S ٹرانسپوز کرنے سے)

یا $4x = \frac{9}{5}$

یا $\frac{1}{4}\times 4x = \frac{1}{4}\times\frac{9}{5}$ (دونوں اطراف کو 4 پر تقسیم کرنے سے)

$$x = \frac{9}{20}$$

پس $x = \frac{9}{20}$ دی گئی مساوات کا حل ہے

پڑتال: مساوات میں $x = \frac{9}{20}$ رکھنے سے

$$L.H.S = 3\times\frac{9}{20}+\frac{1}{5} = \frac{27}{20}+\frac{1}{5} = \frac{31}{20}$$

$$R.H.S = 2-\frac{9}{20} = \frac{31}{20}$$

$$\therefore\ L.H.S = R.H.S$$

پس $x = \frac{9}{20}$ دی گئی مساوات کا حل ہے

مثال 2:- $2y+\frac{11}{4} = \frac{1}{3}y+2$ کو حل کریں۔

حل: ہمیں علم ہے کہ $2y+\frac{11}{4} = \frac{1}{3}y+2$

$2y-\frac{1}{3}y = 2-\frac{11}{4}$ ($\frac{1}{3}y$ کو L.H.S اور $\frac{11}{4}$ کو R.H.S ٹرانسپوز کرنے سے)

$$\frac{5}{3}y = \frac{-3}{4}$$

$\frac{3}{5}\times\frac{5y}{3} = \frac{3}{5}\times\left(\frac{-3}{4}\right)$ (دونوں اطراف $\frac{3}{5}$ سے ضرب دینے سے)

$$y = \frac{-9}{20}$$

پس $y = \frac{-9}{20}$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

پڑتال: $y = \frac{-9}{20}$ مساوات میں رکھنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$L.H.S = 2 \times \left(\frac{-9}{20}\right) + \frac{11}{4} = \frac{-9}{10} + \frac{11}{4} = \frac{37}{20}$$

$$R.H.S = \frac{1}{3} \times \left(\frac{-9}{20}\right) + 2 = \frac{-3}{20} + 2 = \frac{37}{20}$$

$$\therefore\ L.H.S = R.H.S$$

پس $y = \frac{-9}{20}$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

مثال 3:- $\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ حل کیجیے۔

حل: 4,6,2,4 کا ذواضعاف اقل 12 ہے۔

مساوات کے دونوں طرف 12 سے ضرب دینے سے

$$3x + 2x = 6x + 9$$

یا $5x = 6x + 9$

یا $6x - 5x = -9$ [5x اور 9 کو ٹرانسپوز کرنے سے]

یا $x = -9$

پس $x = -9$ دی گئی مساوات کا حل۔

پڑتال: مساوات میں $x = -9$ رکھنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$L.H.S = \frac{1}{4} \times (-9) + \frac{1}{6} \times (-9) = \frac{-9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{-15}{4}$$

$$R.H.S = \frac{1}{2} \times (-9) + \frac{3}{4} = \frac{-9}{2} + \frac{3}{4} = \frac{-15}{4}$$

$$\therefore\ L.H.S = R.H.S$$

پس $x = -9$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

مثال 4:- حل کیجیے۔ $\frac{5x-4}{8} - \frac{x-3}{5} = \frac{x+6}{4}$

حل: $\frac{5x-4}{8} - \frac{x-3}{5} = \frac{x+6}{4}$

طرفین کو 4, 5, 8 کے ذواضعاف اقل 40 سے ضرب دینے سے

$$5(5x-4) - 8(x-3) = 10(x+6)$$

یا $25x - 20 - 8x + 24 = 10x + 60$

یا $17x + 4 = 10x + 60$

یا $17x - 10x = 60 - 4$　　[10x کو L.H.S اور 4 کو R.H.S ٹرانسپوز کرنے سے]

یا $7x = 56$

یا $x = \frac{56}{7} = 8$　　[دونوں اطراف $\frac{1}{7}$ سے ضرب دینے سے]

پس $x = 8$ دی گئی مساوات کا حاصل ہے۔

پڑتال: مساوات میں $x = 8$ رکھنے سے

$$L.H.S = \frac{5 \times 8 - 4}{8} - \frac{8-3}{5} = \frac{36}{8} - 1 = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

$$R.H.S = \frac{8+6}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$\therefore\ L.H.S = R.H.S$

پس $x = 8$ دی گئی مساوات کا حاصل ہے۔

ہمیں جس بات کا علم ہونا چاہیے:

- ایسی خطی مساوات کو کیسے حل کریں کہ جس کے دونوں اطراف نامعلوم (متغیر) قیمتیں ہوں۔
- جملوں اور کلیوں میں رقموں کو سمجھنا کیسے ہے؟
- منفی کی علامت والی مساواتوں کو کیسے حل کیا جائے؟

مثال 5:- $x-\left[2x - \frac{3x-4}{7}\right] = \frac{4x-27}{3} - 3$ کو حل کریں۔

حل:

$$x-\left[2x - \frac{3x-4}{7}\right] = \frac{4x-27}{3} - 3$$

بریکٹوں کو ختم کرنے سے

$$x - 2x+\frac{3x-4}{7} = \frac{4x-27}{3} - 3$$

یا $$-x+\frac{3x-4}{7} = \frac{4x-27}{3} - 3$$

دونوں طرف 3 ,7 کے ذواضعاف اقل 21 سے ضرب دینے سے

$$-21x+3(3x-4) = 7(4x-27)-63$$

یا $$-21x+9x-12 = 28x-189-63$$

یا $$-12x-12 = 28x-252$$

یا $$-12x-28x = -252+12$$ [ٹرانسپوزیشن سے]

یا $$-40x = -240$$

یا $$x = 6$$ [دونوں طرف 40- پر تقسیم کرنے سے]

پس $x = 6$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

پڑتال: مساوات میں $x = 6$ رکھنے سے

$$L.H.S = 6-\left[2\times 6-\frac{3\times 6-4}{7}\right] = 6-\left(12-\frac{14}{7}\right) = 6-(12-2)$$

$$= 6-10 = -4$$

$$R.H.S = \frac{4\times 6-27}{3}-3 = \frac{-3}{3}-3 = -1-3 = -4$$

$$\therefore\ L.H.S = R.H.S$$

پس $x = 6$ دی گئی مساوات کا حاصل ہے۔

ہمیں جس بات کا علم ہونا چاہیے:

- بریکٹ کے باہر (_) علامت کو کیسے استعمال کرنا ہے۔

مثال 6:- $0.3x+0.4 = 0.28x+1.16$ کو حل کریں۔

حل:

$$0.3x+0.4 = 0.28x+1.16$$

یا $0.3x-0.28x = 1.16-0.4$ [ٹرانسپوزیشن سے]

یا $0.02x = 0.76$

یا $x = \frac{0.76}{0.02} = \frac{76}{2} = 38$

پس $x = 38$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

پڑتال: مساوات میں $x = 38$ رکھنے سے

$$L.H.S = 0.3\times 38+0.4 = 11.4+0.4 = 11.8$$

$$R.H.S = 0.28\times 38+1.16 = 10.64+1.16 = 11.8$$

$\therefore\ L.H.S = R.H.S$

پس $x = 38$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

مثال 7:- $3x-2(2x-5) = 2(x+3)-8$ کو حل کریں۔

حل:

$$3x-2(2x-5) = 2(x+3)-8$$

$$3x-4x+10 = 2x+6-8$$

$$-x+10 = 2x-2$$

$$3x-2 = 10$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

پس $x = 4$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

پڑتال: مساوات میں $x = 4$ رکھنے سے

$$3(4)-2(2\times 4-5) = 2(4+3)-8$$

$$12-2(8-5) = 2(7)-8$$

$$12-6 = 14-8$$

$$6 = 6$$

پس $x = 4$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

4.1.3 جذری مساوات Equations Involving Radicals

درج ذیل جیسی مساوات کو حل کرتے ہوئے

$$\sqrt{x-1} = 5 \qquad \text{.........(1)}$$

دونوں طرف مربع لینے سے $x - 1 = 25$

$$x = 26$$

جو کہ مساوات (1) کا حل ہے

اسی طرح ہم اس مساوات کو حل کرتے ہیں

$$\sqrt{x-1} = -5 \qquad \text{.........(2)}$$

$x - 1 = 25$ (دونوں اطراف کا مربع لینے سے)

$$x = 26$$

مساوات (2) کا حل نہیں ہے۔

کیونکہ $5 \neq -5$

اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\{x \mid x = 5\} = \{5\}$$

$$\{x \mid x^2 = 25\} = \{-5, 5\}$$

کوئی سے دو قدرتی اعداد کے لیے

$$\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

دوسری طرح سے

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\ \sqrt{y}$$

جذری مساواتوں میں بے اصل حل بھی نکل آتے ہیں جو کہ اصل مساوات کے حل نہیں ہوتے۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ مساوات $x = 5$ کا حل سیٹ مساوات $x^2 = 25$ کے حل سیٹ کا سب سیٹ ہے جو کہ $x = 5$ کے طرفین کا مربع لینے سے حاصل ہوتا ہے۔

یہ بات یاد رکھنے کی ہے کہ کوئی بھی نئی مساوات جو کہ کسی مساوات کے دونوں طرف ایک جیسی قوت لینے سے حاصل ہوتی ہے اس کے بے اصل حل ہو سکتے ہیں۔ جو کہ اصل مساوات کا حل نہیں ہوتے دوسری طرف اصل مساوات کے حل میں کوئی حل ایسا بھی ہو سکتا ہے جو نئی مساوات سے تعلق رکھتا ہو۔

لہٰذا نئی مساوات کا ہر حل اصل مساوات میں رکھ کر پڑتال کر لینا چاہیے تا کہ بے اصل حذف کیے جا سکیں۔

مثال 1:-

$x+\sqrt{x-4} = 4$ حل کیجیے۔

حل:

$$x+\sqrt{x-4} = 4$$

$$\sqrt{x-4} = 4-x$$ (جذری علامت ایک طرف رکھنے سے)

$$x-4 = 16-8x+x^2$$ (دونوں اطراف کا مربع لینے سے)

$$x^2-9x+20 = 0$$ (دو درجی مساوات حل کرنے سے)

$$(x-5)(x-4) = 0$$

$$x = 5,4$$

فالتو اصل حل دور کرنے کے لیے پڑتال کریں (اگر کوئی ہے تو)

$$x = 5 \quad , \quad x = 4$$

$$5+\sqrt{5-4} = 4 \quad , \quad 4+\sqrt{4-4} = 4$$

$$5+1 \neq 4 \quad , \quad 4 = 4$$

$x = 4$ حل ہے　　لہٰذا $x = 5$ حل نہیں ہے

پس　　$\therefore$ حل سیٹ $= \{4\}$

یاد رکھیں کہ:

- بعض فارمولے مربع اور جذر المربع کے ساتھ استعمال ہوتے ہیں۔
- مربع اور جذر المربع ایک دوسرے کے بالعکس ہیں۔
- مربع کو ختم کرنے کے لیے جذر المربع لیا جاتا ہے۔
- جذر المربع ختم کرنے کے لیے مربع لیا جاتا ہے۔

مثال 2:-

$\sqrt{3x-2} - \sqrt{x} = 2$ حل کیجیے۔

حل:

$$\sqrt{3x-2} = 2+\sqrt{x}$$

$$3x-2 = 4+4\sqrt{x}+x$$ (دونوں طرف مربع لینے سے)

$$3x-x-2-4 = 4\sqrt{x}$$

$$2x-6 = 4\sqrt{x}$$

$$x-3 = 2\sqrt{x}$$ (طرفین کو 2 سے تقسیم کرنے سے)

$$x^2-6x+9 = 4x$$ (طرفین کا مربع لینے سے)

$$x^2-10x+9 = 0$$

$$(x-9)(x-1) = 0$$

$$x = 1,9$$

بے اصل حل دور کرنے کے لیے پڑتال کریں

$x = 9$	,	$x = 1$
$\sqrt{3\times 9-2} - \sqrt{9} = 2$	,	$\sqrt{3\times 1-2} - \sqrt{1} = 2$
$\sqrt{25} - 3 = 2$	,	$\sqrt{1} - \sqrt{1} = 2$
$5-3 = 2$	,	$0 \neq 2$
$x = 9$ حل ہے		$x = 1$ حل نہیں ہے

$\therefore$ حل سیٹ $= \{9\}$

یاد رہے کہ:

جذر المربع ختم کرنے کے لیے طرفین کا مربع لیں : $s = \sqrt{t+r}$

'r' تفریق کرنے سے : $s^2 = t+r$

$$s^2-r = t \Rightarrow t = s^2-r$$

مشق 4.1

حل کریں۔

1. (i) $3x+20=44$　(ii) $\frac{4x}{5}-\frac{3x}{4}=4$

(iii) $3x+3(x+1)=69$　(iv) $(90-9x)+27=90+9$

2. $3(x+3)=14+x$

3. $3(2x+5)=25+x$

4. $9x-3=3(2x-8)$

5. $3(2x-1)=5(x-1)$

6. $2(7x-6)=3(1+3x)$

7. $\frac{10x-1}{2x+5}=3$

8. $\frac{2x+1}{x+5}=1$

9. $\frac{5x+3}{x+6}=2$

10. $y-6+\sqrt{y}=0$

11. $x=15-2\sqrt{x}$

12. $m-13=\sqrt{m+7}$

13. $\sqrt{5n+9}=n-1$

14. $3+\sqrt{2x-1}=0$

15. $\sqrt{x+5}+7=0$

16. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-4}=2$

17. $\sqrt{x+1}=3$

18. $\sqrt{2x-1}=5$

19. $\sqrt{x-1}=10$

20. $\sqrt{3x+4}=7$

4.2 مطلق قیمت والی مساواتیں: EQUATIONS INVOLVING ABSOLUTE VALUE

اس حصہ میں ہم مطلق قیمت والی مساواتوں کو حل کرنا سیکھیں گے۔

4.2.1 مطلق قیمت: Absolute Value

ہر حقیقی عدد 'x' کی مطلق قیمت کو $|x|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کا تعارف یہ ہے کہ

$$|x| = \begin{cases} x & \text{اگر} \quad x > 0 \\ 0 & \text{اگر} \quad x = 0 \\ -x & \text{اگر} \quad x < 0 \end{cases}$$

مثلاً

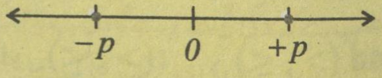
$$|8| = 8$$

$$|-8| = -(-8) = 8$$

4.2.2 مطلق قیمت والی مساواتیں: EQUATIONS INVOLVING ABSOLUTE VALUE

درج بالا تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ہمیں مشکل پیش نہیں آئے گی کہ $p > 0$

$$|x| = p \Leftrightarrow x = \pm p$$

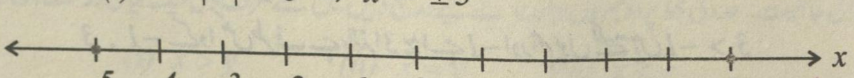


مثال:-

حل کیجیے۔ (i) $|x| = 5$ (ii) $|x-3| = 5$ (iii) $|x+2| = 3$

حل:

(i) $|x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5$



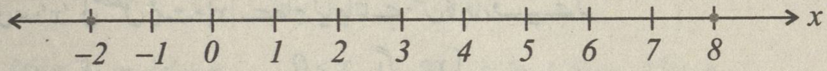
$$(ii)\quad |x-3| = 5 \Rightarrow x-3 = \pm 5$$

$x-3 = 5$ یا $x-3 = -5$

$x = 8$ یا $x = -5+3$

$x = -2$

$x = -2$ یا 8



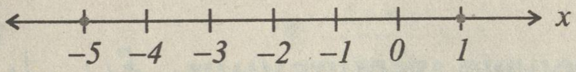
$$(iii)\quad |x+2| = 3 \Rightarrow x+2 = \pm 3$$

$x+2 = 3$ یا $x+2 = -3$

$x = 3-2$ یا $x = -3-2$

$x = 1$ یا $x = -5$

$x = 1$ یا -5



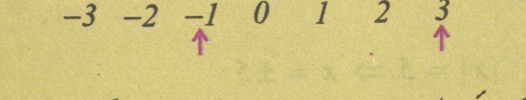
4.3 خطی غیر مساواتیں LINEAR INEQUALITIES

ہم عددی خط پر عددوں کی ترتیب کو جانتے ہیں۔ عددی خطوط پر کسی عدد کے دائیں جانب والا عدد بڑا اور اس کے بائیں جانب والا چھوٹا ہوتا ہے۔

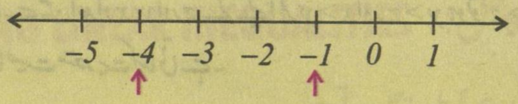
4.3.1 غیر مساواتیں $(>, <)$ اور $(\geq, \leq)$: Inequalities $(>, <)$ And $(\geq, \leq)$

ہم علامات '$>$' استعمال کرتے ہیں ''بڑا ہے'' کے لیے اور علامت '$<$' استعمال کرتے ہیں ''چھوٹا ہے'' کے لیے۔

مثلاً



3 ، -1 کے دائیں طرف ہے، لہٰذا 3 بڑا ہے -1 اور ہم یوں لکھتے ہیں $3 > -1$



-4 ، -1 کے بائیں جانب ہے، لہٰذا -4 چھوٹا ہے -1 سے اور ہم لکھتے ہیں $-4 < -1$

ہم لکھتے ہیں $a < b$ اور پڑھتے ہیں a چھوٹا ہے b سے صرف اور صرف اگر کوئی مثبت حقیقی عدد P اس طرح ہو کہ

$$a + p = b;$$

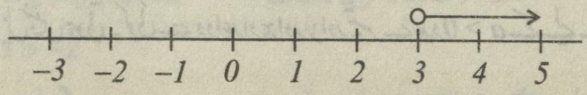
ہم $a > b$ لکھتے ہیں اور پڑھتے ہیں "a, b سے بڑا ہے"۔ ہم لکھتے ہیں $a \leq b$ صرف اور صرف $a < b$ یا $a = b$

اور ہم لکھتے ہیں $a \geq b$ صرف اور صرف $a > b$ یا $a = b$

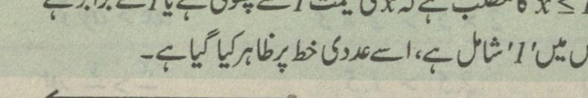
علامات "$<$"، "$>$"، "$\leq$" اور "$\geq$" ترتیبی تعلقات یا غیر مساواتوں کی علامات کہلاتی ہیں۔

دو الجبری جملے غیر مساواتوں کی علامت سے جڑے جیسا کہ $7(3x-2) + \frac{x}{5} < 2x - \frac{2}{3}$ ایک غیر مساوات فقرہ یا صرف غیر مساوات کہلاتا ہے۔

$x > 3$ کا مطلب ہے x کی قیمت 3 سے بڑی ہے اور x کی قیمت 3 نہیں ہے۔
اسے عددی خط پر ظاہر کیا جاتا ہے۔



$x \leq 1$ کا مطلب ہے کہ x کی قیمت 1 سے چھوٹی ہے یا 1 کے برابر ہے
اس میں '1' شامل ہے، اسے عددی خط پر ظاہر کیا گیا ہے۔



4.3.2 غیر مساواتوں کی خصوصیات Properties Of Inequalities

ثلاثی خاصیت: عددی خط پر دو نمبروں x اور y کے لیے درج ذیل میں سے صرف کوئی ایک بیان درست ہوگا۔

(i) $x > y$ (ii) $x = y$ (iii) $x < y$

یہ قانون ثلاثی کہلاتا ہے۔

خاصیت متعدیت: کوئی سے تین اعداد x, y اور z کے لیے اگر $x > y$ اور $y > z$ ہو تو $x > z$ ہوگا۔ یہ غیر مساواتوں کی خاصیت متعدیت کہلاتی ہے۔

مثلاً اگر $x = 10$ ، $y = 5$ اور $z = 2$ ہو تو $10 > 5$ ، $5 > 2$ اور $10 > 2$

جمعی خاصیت: کسی غیر مساوات کے دونوں اطراف ایک ہی عدد جمع کرنے یا ایک ہی عدد تفریق کرنے سے غیر مساوات تبدیل نہیں ہوتی۔ کسی دو اعداد x اور y اور مثبت عدد 'a' کے لیے۔

اگر $x > y$ مثلاً $3 > 5$ اور $< 2 - 0$

$x + b > y + b$ $\quad 5 - (+2) > 3 - (+2)$

اور $x - b > y - b$ $\quad 5 - (-2) > 3 - (-2)$

$5 + 2$

یہی بات منفی عدد 'b' کے لیے بھی درست ہے۔

اگر $x > y$ مثلاً $3 > 5$ اور $-2 < 0$

تو $x + b > y + b$ $\quad 5 - 2 > 3 - 2$

اور $x - b > y - b$ $\quad 5 + 2 > 3 + 2$

ضربی خاصیت: ہم کسی غیر مساوات کے دونوں اطراف کو مثبت عدد سے ضرب دیں یا تقسیم کریں تو غیر مساوات کی سمت تبدیل نہیں ہوتی۔ کوئی سے دو اعداد x اور y اور تیسرے عدد $a > 0$ کے لیے۔

اگر $x > y$ مثلاً $3 > 5$ اور $2 > 0$

تو $ax > ay$ $\quad 2 \times 5 > 2 \times 3$

اور $\dfrac{x}{a} > \dfrac{y}{a}$ $\quad 2.5 > 1.5$

یہ بات منفی نمبر b کیلئے درست نہیں۔ جب کسی منفی عدد سے ضرب یا تقسیم کیا جاتا ہے تو عدم مساوات کی علامت اُلٹ جاتی ہے۔

اگر $x > y$ اور $b < 0$ مثلاً $3 > 5$ اور $-2 < 0$

تو $bx < by$ $\quad (-2) \times 5 < (-2) \times 3$

اور $\dfrac{x}{b} < \dfrac{y}{b}$ $\quad \dfrac{5}{-2} < \dfrac{3}{-2}$

4.4 عدم غیر مساواتوں کا حل: SOLVING LINEAR INEQUALITIES

غیر مساواتیں تقریباً مساواتوں ہی کی طرح حل ہوتی ہیں۔

مثال 1:-

غیر مساواتوں کو حل کریں۔

(i) $x+3<7$ (ii) $2x-1>5$ (iii) $6-x>4$

حل:

(i) $x+3<7$

$x+3-3<7-3$ (دونوں اطراف سے 3 تفریق کرنے سے)

$x<4$

(ii) $2x-1>5$

$2x-1+1>5+1$ (دونوں اطراف میں 1 جمع کرنے سے)

$2x>6$

$x>3$ (دونوں اطراف کو 2 پر تقسیم کرنے سے)

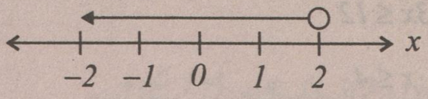
(iii) $6-x>4$

$6-x-6>4-6$ (دونوں اطراف سے 6 تفریق کرنے سے)

$-x>-2$

$x<2$ (دونوں اطراف 1- سے ضرب دینے اور < کو > میں بدلنے سے)

کسی غیر مساوات کے حل میں نقاط کیسے شامل کیے جاتے ہیں؟



شکل (i)

شکل نمبر (i) میں ظاہر کیے گئے عددی خط کے ذریعے عدم مساوات کے حل کو آسانی سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً $x<2$ کو عددی خط شکل (i) میں دکھایا گیا ہے۔ چھوٹا خالی دائرہ ○ '2' کی قیمت ممکن نہ ہونے کی علامت ہے۔ جبکہ 2 کی بائیں جانب کی قیمتیں شامل ہیں۔

مثال 2:-

$\frac{1}{3}x > \frac{1}{4}(x-1)$ غیر مساوات حل کریں۔

حل:

$$\frac{1}{3}x > \frac{1}{4}(x-1)$$

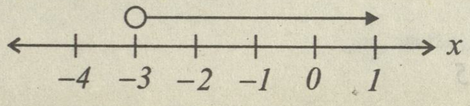
$$12 \times \frac{1}{3}x > 12 \times \frac{1}{4}(x-1)$$

$$4x > 3(x-1)$$

$$4x > 3x - 3$$

$$4x - 3x > -3$$

$$x > -3$$



شکل (ii)

حل کو شکل (ii) میں عددی خط کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔

مثال 3:-

$x - 7 \le 5 - 2x$ غیر مساوات حل کریں۔

حل:

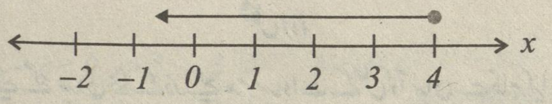
$$x - 7 \le 5 - 2x$$

$$x + 2x - 7 \le 5$$

$$3x \le 5 + 7$$

$$3x \le 12$$

$$x \le 4$$



شکل (iii)

سیاہ دائرہ ظاہر کرتا ہے کہ 4 حل میں شامل ہے۔

مثال 4:-

$\frac{4x-3}{3}+8>6+\frac{3x}{2}$ حل کیجیے اور گراف بنایئے۔

حل:

$$\frac{4x-3}{3}+8>6+\frac{3x}{2}$$

$$6\times\frac{4x-3}{3}+6\times8>6\times6+6\times\frac{3x}{2}$$

$$8x-6+48>36+9x$$

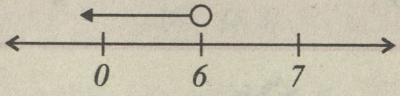
$$8x+42>36+9x$$

$$8x-9x+42>36$$

$$-x>36-42$$

$$-x>-6$$

$$x<6$$



شکل (iv)

حل کو عددی خط پر شکل (iv) میں دکھایا گیا ہے۔

یاد رکھیے کہ:

غیر مساواتیں عموماً الجبرا میں استعمال ہوتی ہیں۔ غیر مساواتیں، مساواتوں کی طرح ہی حل کی جاتی ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ:

- ہم غیر مساواتوں کے دونوں اطراف ایک ہی عدد جمع کر سکتے ہیں۔
- ایک ہی عدد غیر مساواتوں کے دونوں اطراف سے تفریق کر سکتے ہیں۔
- غیر مساواتوں کے دونوں اطراف کسی بھی مثبت عدد سے ضرب یا تقسیم کر سکتے ہیں۔

مشق 4.2

حل کیجیے اور پڑتال کیجیے۔

1. $|x| = 9$
2. $|x-3| = 4$
3. $|x+1| = 5$
4. $|2x-3| = 5$
5. $|3x+4| = 9$
6. $3(x-2) < 2x+1$
7. $3(x+5) > 2(x+2)+8$
8. $\frac{1}{2}(2-x) > \frac{1}{4}(3-x) + \frac{1}{2}$
9. $\frac{x-2}{4} + \frac{2}{3} < \frac{x-4}{6}$
10. $\frac{3x+4}{5} - \frac{x+1}{3} > 1 - \frac{x+5}{3}$
11. $\frac{x+1}{2} - \frac{x+3}{3} > \frac{x+1}{4} + 1$
12. $\frac{x+3}{4} \quad \frac{x+2}{5} < 1 + \frac{x+5}{6}$
13. $\frac{1}{2}x \geq 1 + \frac{1}{3}x$
14. $\frac{1}{4}(2x+3) \leq (7-4x)$
15. $\frac{4}{3}(2x+3) \geq 10 - \frac{4x}{3}$
16. $\frac{x-2}{4} - \frac{x-5}{6} \geq \frac{1}{3}$

جائزہ مشق -4

I- صحیح جوابات کے گرد دائرہ لگایے۔

1. مساوات جو $ax+b=0$ اور $a \neq 0$ کی صورت میں لکھی جا سکتی ہے۔ جبکہ b، a مستقل مقداریں اور x متغیر ہو، کہلاتی ہے۔

(a) خطی مساوات
(b) غیر مساوات
(c) حل
(d) مستقل

2. وہ قیمت جو کسی مساوات کو درست ثابت کرے، کہلاتی ہے:

(a) مساوات
(b) غیر مساوات
(c) حل
(d) مستقل

3. ہر عدد x کی مطلق قیمت کو ظاہر کیا جاتا ہے۔

(a) x (b) $-x$

(c) $|x|$ (d) 0

4. علامت $\geq$ ظاہر کرتی ہے۔

(a) سے بڑا ہے   (b) سے بڑا یا برابر ہے

(c) سے چھوٹا ہے یا برابر   (d) کے برابر ہے

5. علامت $\leq$ ظاہر کرتی ہے۔

(a) سے چھوٹا ہے   (b) سے بڑا یا برابر ہے

(c) سے چھوٹا یا برابر ہے   (d) کے برابر ہے

6. $|x - 3| = 5$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) $\{8, -2\}$ (b) $\{-8, -2\}$

(c) $\{8, 2\}$ (d) $\{-8, 2\}$

7. $|x| = 3$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) 3 (b) -3

(c) ± 3 (d) 0

8. $|x - 1| = 4$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) $\{5, -3\}$ (b) $\{-5, -3\}$

(c) $\{-5, 3\}$ (d) $\{5, 3\}$

II- خالی جگہوں کو '=', '<' یا '>' سے پر کر کے صحیح فقرہ بنائیے۔

1. اگر $15 > 10$ اور $10 > P$ تو P ______ 15

2. اگر $-3 > x$ اور $x > y$ تو y ______ -3

3. اگر $a < 60$ اور $60 < b$ تو b ______ a

4. اگر $y = x + 1$ ہو تو y ______ x

5. اگر $n = m - 2$ ہو تو n ______ m

6. اگر $x > y$ ہو تو $4y$ ______ $4x$

7. اگر $x > y$ ہو تو $\frac{y}{10}$ ______ $\frac{x}{10}$

8. اگر $x > y$ ہو تو $(-2)y$ ______ $(-2)x$

9. اگر $x \geq y$ ہو تو $\frac{x}{-3}$ ______ $\frac{y}{-3}$

10. اگر $p > q$ اور $q > 0$ ہو تو 0 ______ p

11. اگر $u > 0$ ہو تو 0 ______ $(-3)u$

12. اگر $u > 0$ ہو تو 0 ______ $\frac{u}{6}$

خلاصہ SUMMARY

خطی مساوات: ایسی مساوات جو $ax + b = 0$ ، $a \neq 0$ کی صورت میں لکھی جائے جبکہ a اور b مستقلات اور x ایک متغیر ہو، خطی مساوات کہلاتی ہے۔

خطی مساوات کا حل: مساوات میں موجود متغیر کی وہ قیمت جو اسے درست فقرہ بنائے مساوات کا حل کہلاتی ہے۔

مطلق قیمت: ہر حقیقی عدد 'x' کی مطلق قیمت $|x|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جس کو یوں بیان کیا جاتا ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{اگر } x > 0 \\ 0, & \text{اگر } x = 0 \\ -x, & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

خطی غیر مساوات: اگر دو الجبری یک درجی جملوں کو غیر مساوات کی علامتوں $<, >, \leq, \geq$ سے جوڑا گیا ہو تو ایسی مساواتیں غیر مساواتیں کہلاتی ہیں۔

ثلاثی خاصیت: اگر $x, y \in R$ پھر $x > y$ ، $x = y$ یا $x < y$

متعدیت خاصیت: اگر $x, y, z \in R$ تو $x > y$ ، اور $y > z \Leftarrow x > z$

جمعی خاصیت: $\forall a, b, c \in R$ اگر $a > b$ ہو تو $a + c > b + c$ اور $a - c > b - c$

ضربی خاصیت: $\forall a, b, c \in R$ فرض کیا جائے $a > b$ تو $ac > bc$ اگر $c > 0$ اور $ac < bc$ اگر $c < 0$