یونٹ

6

MATRICES AND DETERMINANTS

قالب اور مقطع

- قالبوں کا تعارف
- قالبوں کی اقسام
- قالبوں کی جمع اور تفریق
- قالبوں کی ضرب
- قالب کا ضربی معکوس
- ہم زاد خطی مساوات کا حل

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- قالب کا تعارف کروا سکیں۔
  - حقیقی اعداد پر مشتمل مستطیلی شکل میں روزمرہ زندگی سے تعلق کے ساتھ
  - قالب کی قطاریں، کالم، مرتبہ اور قالبوں کی برابری
- قطاری، کالمی، مستطیلی اور مربعی قالبوں کا تعارف اور پہچان کر سکیں۔ صفری، ضربی ذاتی، سکیلر، وتری، ٹرانسپوز، متشاکل، اور ضد متشاکل قالب پہچان سکیں۔
- جان سکیں کہ دیے ہوئے قالب آپس میں جمع ہو سکتے ہیں یا نہیں۔
- قالب کو جمع اور تفریق کر سکیں۔
- قالب کو حقیقی عدد سے ضرب کر سکیں۔
- جمع کے لحاظ سے قوانین مبادلہ اور تلازم کی پڑتال کر سکیں۔
- جمعی ذاتی قالب متعارف کروا سکیں۔
- قالب کا جمعی معکوس معلوم کر سکیں۔
- جان سکیں کہ دیے ہوئے قالبوں کا کی ضرب ہو سکتی ہے یا نہیں۔
- دو یا تین قالبوں کو ضرب دے سکیں۔
- ضرب کے لحاظ سے قانون تلازم کی پڑتال کر سکیں۔
- قوانین تقسیمی پڑتال کر سکیں۔
- ثابت کر سکیں کہ عمودی طور پر ضرب کے لحاظ سے قانون مبادلہ پورا نہیں اترتا۔ $(AB \neq BA)$
- ضربی ذاتی قالب متعارف کروا سکیں۔
- $(AB)^t = B^t A^t$ کی تصدیق کر سکیں۔
- مربعی قالب کا مقطع متعارف کروا سکیں۔
- قالب کا مقطع حل کر سکیں۔
- نادر اور غیر نادر قالب کا تعارف کروا سکیں۔
- قالب کا ایڈ جائنٹ معلوم کر سکیں۔
- غیر نادر قالب A کا ضربی معکوس معلوم کر سکیں اور تصدیق کر سکیں کہ $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ جہاں I ضربی ذاتی قالب ہے۔
- ایڈ جائنٹ کے طریقہ سے قالب کا ضربی معکوس معلوم کر سکیں۔
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ کی تصدیق کر سکیں۔
- خطی مساواتوں کے نظام کو حل کر سکیں۔
  - معکوس کے قالب کے طریقہ سے
  - کریمر کے طریقہ سے

6.1 تعارف INTRODUCTION

اس باب میں ہم نئی حسابی صورت متعارف کروائیں گے جسے ہم قالب کہتے ہیں۔ جس کی مدد سے ہم مختلف مقداروں کو ایک اکائی میں ظاہر کرسکیں گے۔

مشہور ریاضی دان آرتھر کیلے نے 1857ء میں قالب کا تصور متعارف کروایا۔ قالب طبیعات اور عمرانیات دونوں میں بہت وسیع حد تک استعمال کیے جاتے ہیں۔

قالب (مربعی یا مستطیلی شکل میں) اعداد کی قطاروں اور کالموں میں متعین ترتیب میں لکھی گئی شکل ہوتی ہے۔ جن کو بڑی یا چھوٹی بریکٹ میں لکھا جاتا ہے۔

عموماً قالبوں کو بڑے حروف تہجی ....A, B, C سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جبکہ قالب

کے ارکان کو چھوٹے حروف تہجی ....a, b, c یا اعداد ....$1, 2, 3$ میں لکھا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ایک اور مثال لیجیے:

ایک شرٹ بنانے والی کمپنی ایک معیار کا اور ایک مقابلے کا ماڈل تیار کرتی ہے۔ دونوں ماڈلوں کے لیے مزدوری (گھنٹوں میں) کو 3×2 درجے والے قالب سے باآسانی ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{بنوائی} & \text{صفائی} & \text{پیکنگ اور ہینڈلنگ} \end{array} \\ M = & \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0.2 \\ 7 & 2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{معیاری ماڈل} \\ \text{مقابلے کا ماڈل} \end{array} \end{array}$$

ہفتہ وار پیداوار کو ایک قطاری قالب میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{array}{cc} \text{معیاری شرٹس} & \text{مقابلہ ٹی شرٹس} \\ [100 & 10] \end{array}$$

ہر قالب ارکان کی افقی اور عمودی ترتیب پر مشتمل ہوتا ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}2\\5\end{matrix}} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ \boxed{3 \quad 5} \end{bmatrix}$$

ارکان کی عمودی ترتیب

ارکان کی افقی ترتیب

قطاریں: افقی ترتیب میں لکھے گئے ارکان قطاریں کہلاتی ہیں۔

کالم: ارکان کی عمودی ترتیب کالم کہلاتی ہے۔

قالبوں میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر بھی ہوسکتی ہے اور مختلف بھی۔ لیکن ہر دو قطاروں میں ارکان کی تعداد یا پھر دو کالموں میں عناصر کی تعداد یکساں ہوتی ہے۔

عموماً قطاروں کو R اور کالموں کو C سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\begin{array}{cccc} & \text{کالم } 1 \text{ یا } C_1 & \text{کالم } 2 \text{ یا } C_2 & \\ & \downarrow & \downarrow & \\ A = & \left[\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \longleftarrow \text{قطار1 یا } R_1 \\ \longleftarrow \text{قطار2 یا } R_2 \end{matrix} \end{array}$$

قالب A میں دو قطاریں اور دو کالم ہیں جبکہ $a,\ b,\ c,\ d$ اس کے ارکان کہلاتے ہیں۔ قطاروں کی تعداد کو m جبکہ کالموں کی تعداد کو n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

درج بالا مثال میں $m = 2$ اور $n = 2$

قالب کا مرتبہ **Order of a Matrix:**

اگر کسی قالب A میں قطاروں کی تعداد 'm' اور کالموں کی تعداد 'n' ہو تو قالب A کا مرتبہ $m \times n$ ہوتا ہے۔ جو کہ (m بائی n) پڑھا جاتا ہے۔

مثال 1:- $P = [\ 3\ ]$ کا مرتبہ لکھیے۔

حل: قالب P میں صرف ایک قطار اور ایک کالم ہے لہٰذا

P (1 بائی 1) یعنی 1×1 مرتبہ کا قالب ہے۔

مثال 2:- $Q = [\ 4 \quad 7\ ]$ کا مرتبہ معلوم کیجیے۔

حل: Q قالب میں قطاروں کی تعداد '1' اور کالموں کی تعداد '2' ہے۔

Q قالب کا مرتبہ 1×2 یعنی 1 بائی 2 ہے۔

مثال 3:- $R = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ معلوم کیجیے۔

حل: قالب میں قطاروں کی تعداد دو یعنی $m = 2$ ہے۔

اور کالموں کی تعداد دو یعنی $n = 2$ ہے۔

R کا مرتبہ 2×2 یعنی 2 بائی 2 ہے۔

مثال 4:- $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ لکھیے۔

حل: قالب میں قطاروں کی تعداد تین یعنی $m = 3$ کالموں کی تعداد تین یعنی $n = 3$

پس A کا مرتبہ 3×3 (تین بائی تین) ہے۔

یاد رکھیے کہ:

- کسی قالب A کے مرتبہ $m \times n$ کو m بائی n پڑھتے ہیں۔
- یہ بات اہمیت کی حامل ہے کہ اس قالب کے مرتبہ میں قطاروں کی تعداد پہلے یعنی بائیں جانب اور کالموں کی تعداد بعد میں دائیں جانب لکھی جاتی ہے۔

مساوی قالب: MatrixEquality

دو قالب مساوی ہوں گے اگر ان کا مرتبہ یکساں ہو اور ان کے متناظرہ ارکان یکساں ہوں۔

دو قالبوں A اور B کے مساوی ہونے کو یوں لکھتے ہیں $A = B$

مثال کے طور پر

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & 2\times 2 \\ \frac{12}{2} & 4\times 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{4}{2} \\ 4 = 2\times 2 \\ 6 = \frac{12}{2} \\ 8 = 4\times 2 \end{cases}$$

مثال:- درج ذیل میں کون کون سے قالب مساوی اور کون سے غیر مساوی ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3-2 & \frac{4}{2} \\ 3 & 2\times 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 & \frac{6}{2} & 7 \\ \frac{6}{3} & 1 & 3 \\ 2\times 2 & 2 & \frac{10}{2} \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل: قالب B کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$B = \begin{bmatrix} 3-2 & \frac{4}{2} \\ 3 & 2\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$$

(i) A اور B کا مرتبہ یکساں یعنی 2×2 ہے اور متناظرہ ارکان بھی ایک جیسے ہیں۔ لہٰذا $A = B$

(ii) A، B اور C کے مرتبے یکساں ہیں لیکن C کے متناظرہ ارکان ایک جیسے نہیں۔ لہٰذا $A = B \neq C$

(iii) قالب E کے ارکان کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے کہ D اور E کے مرتبے یکساں ہیں یعنی 3×3 اور متناظرہ ارکان بھی مساوی ہیں۔ لہٰذا $D = E$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \frac{6}{2} & 7 \\ \frac{6}{3} & 1 & 3 \\ 2\times 2 & 2 & \frac{10}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = D$$

(iv) چونکہ F کا مرتبہ 2×2 ہے۔ لہٰذا

$E \neq F$ اور $F \neq D$

مشق 6.1

درج ذیل قالبوں کی مدد سے سوال نمبر **1** تا **3** کا جواب دیجیے۔

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -5 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 0 & 4\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 5\\ 4 & -2 & 2\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 0\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 0 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

-1 قالبوں A، C اور F کے مرتبے کیا ہیں؟

-2 قالبوں B، D اور E کے مرتبے کیا ہیں؟

-3 قالب D کی دوسری قطار اور تیسرے کالم کا رکن کیا ہے؟

-4 درج ذیل قالبوں میں سے کون سے برابر ہیں اور کون سے برابر نہیں؟

$$A=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}6\\ 9\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}2+2\end{bmatrix},$$

$$E=\begin{bmatrix}3+3\\ 8+1\end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix}\frac{5}{5} & \frac{4}{2}\end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 6 & 8\end{bmatrix},$$

$$H=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 4\\ 2 & 6 & 3\end{bmatrix}, I=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 6 & 7\end{bmatrix}, J=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 6 & 16/2\end{bmatrix},$$

$$K=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3+2\\ 0 & 3 & 4\\ 2 & 4+2 & 3\end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 3 & 4\\ 2 & 6 & 3\end{bmatrix}$$

6.2 قالبوں کی اقسام TYPES OF MATRICES

(I) قطاری قالب Row Matrix

ایسا قالب جس میں صرف ایک ہی قطار ہو، قطاری قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad 2 \times 1$ مرتبہ کا قالب ہے۔

$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad 3 \times 1$ مرتبہ کا قالب ہے۔

(II) کالمی قالب Column Matrix

ایسا قالب جس میں صرف ایک ہی کالم ہو، کالمی قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad 1 \times 2$ مرتبہ کا قالب ہے۔

$D = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ $\quad 1 \times 3$ مرتبہ کا قالب ہے۔

(III) مستطیلی قالب Rectangular Matrix

ایسا قالب جس میں قطاروں کی تعداد کالموں کی تعداد کے برابر نہ ہو، مستطیلی قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

B، A اور C بالترتیب 2×1، 1×2 اور 3×2 مرتبہ کے قالب ہیں۔

(IV) مربعی قالب Square Matrix

اگر کسی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو، مربعی قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

QP بالترتیب: 2×2 اور 3×3 مرتبہ کے قالب ہیں۔

(V) صفری قالب Zero or Null Matrix

اگر کسی قالب میں تمام ارکان صفر ہوں تو اسے صفری قالب کہتے ہیں۔ صفری قالب کو O سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

1×1 کے مرتبہ کا قالب ہے $\quad O = [0]$

2×1 مرتبہ کا قالب ہے $\quad O = [0 \quad 0]$

2×2 مرتبہ کا قالب ہے $\quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3×3 مرتبہ کا قالب ہے $\quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(VI) وتری قالب Diagonal Matrix

ایسا مربعی قالب جس میں وتر کے کم از کم ایک رکن کے علاوہ باقی سب کے سب ارکان صفر ہوں وتری قالب کہلاتا ہے۔
وتر کے کچھ ارکان صفر ہو سکتے ہیں مگر سارے نہیں۔

مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

تمام کے تمام وتری قالب ہیں۔

(VII) سکیلر قالب Scalar Matrix

ایسا وتری قالب جس میں وتر کے تمام ارکان آپس میں برابر ہوں سکیلر قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

سکیلر قالب کہلاتے ہیں

(VIII) وحدانی قالب یا ضربی ذاتی قالب Unit Matrix or Identity Matrix

ایسا سکیلر قالب جس کے وتر میں ہر رکن '1' ہو۔ ضربی ذاتی قالب کہلاتا ہے۔ جس کو I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر: $I = [1]$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

مختلف مرتبوں کے ضربی ذاتی قالب ہیں۔

(IX) قالب کا ٹرانسپوز Transpose of a Matrix

قالب A جس کا مرتبہ $m \times n$ ہو، کی قطاروں کو کالموں میں تبدیل کر کے $n \times m$ مرتبہ کا حاصل ہونے والا نیا قالب A^t ، A کا ٹرانسپوز کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ تو $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

اگر A^t ، B^t بالترتیب A اور B کے ٹرانسپوز اور K کوئی سکیلر ہو تو

(a) $(A^t)^t = A$

(b) $(kA)^t = kA^t$

(c) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(d) $(AB)^t = B^t A^t$

(X) متشاکل قالب Symmetric Matrix

کوئی مربعی قالب A متشاکل قالب ہوتا ہے اگر $A = A^t$

مثال کے طور پر: $A = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ اور $A^t = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$

چونکہ $A = A^t$ ، قالب A ایک متشاکل قالب ہے۔

$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $B^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

چونکہ $B = B^t$ قالب B ایک متشاکل قالب ہے۔

(XI) غیر متشاکل قالب Skew-Symmetric Matrix

مربعی قالب A، غیر متشاکل ہوتا ہے اگر $A^t = -A$

مثال کے طور پر:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

چونکہ $A^t = -A$

پس A ایک غیر متشاکل قالب ہے۔

مشق 6.2

-1 مندرجہ ذیل میں سے قطاری قالب، کالمی قالب، مربعی قالب اور مستطیلی قالب کا تعین کیجیے۔

$$A = [3 \quad 1 \quad 1 \quad 1],\ B = \begin{bmatrix} 5+2 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} a+x \\ b+y \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} x & -2 \\ b & 5 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix},\ H = [0]$$

-2 وتری قالب، سکیلر قالب، ضربی ذاتی قالب کا تعین کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

-3 درج ذیل قالبوں کے ٹرانسپوز معلوم کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \ell & m & n \\ p & q & r \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

-4 قطاری قالبوں کی شناخت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} e & f & g \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 8 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix},$$

-5 کالمی قالبوں کی شناخت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

-6 کالمی قالبوں کی پہچان کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 5 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

-7 3×3 مرتبہ کی مربعی قالبوں کی پہچان کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

6.3 ADDITION AND SUBTRACTION OF MATRICES قالبوں کی جمع اور تفریق

دو قالب A اور B آپس میں جمع ہو سکتے ہیں اگر وہ ہم مرتبہ ہوں اور یہ مجموعہ $(A + B)$ کے مطابقت کے ارکان کو جمع کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

$A + B$ کا مرتبہ A اور B کے مرتبہ کے برابر ہوگا۔

6.3.2 Add and Subtract Matrices قالبوں کو جمع اور تفریق کرنا

Addition of Matrices قالبوں کی جمع

جب دو قالب جمع کے موافق ہوں تو ان کے مطابقت کے ارکان کو جمع کر کے ان قالبوں کا مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

(i) $$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w+a & x+b \\ y+c & z+d \end{bmatrix}$$

(ii) $$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+3 & 2+(-2) & 4+(-5) \\ 2+(-5) & -3+2 & 5+1 \\ 3+(-1) & 4+(-3) & 7+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Subtraction of Matrices قالبوں کی تفریق

اگر دو قالبوں کا مرتبہ یکساں ہو تو ان کا فرق $A-B$ لکھا جاتا ہے۔

$A-B$، قالب B کے متناظرہ ارکان کے ارکان کو قالب A کے مطابقت کے ارکان میں سے تفریق کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 1:- اگر $B = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو $A - B$ معلوم کریں۔

حل:
$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-a & x-2 \\ y-3 & 4-b \end{bmatrix}$$

مثال 2:- اگر $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ اور $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ ہو تو $A - B$ معلوم کریں۔

حل:
$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-1 & 7-3 & 3-5 \\ -1-2 & 3-1 & 4-6 \\ 0-(-1) & 4-8 & -2-3 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

مثال 3:- قالبوں B، A اور C کو جمع کریں جب کہ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: چونکہ قالب B، A اور C ہم مرتبہ ہیں لٰہذا یہ جمع کے لیے موافق ہیں۔

$$A + B + C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+1+2 & 1+3-6 \\ 3-2-4 & 4+5+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

مثال 4:-

قالب B کو قالب A سے تفریق کریں۔

$$A=\begin{bmatrix}2&4&7\\1&3&-2\\4&5&6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}11&-5&2\\2&4&-6\\3&6&-1\end{bmatrix}$$

حل:

چونکہ A اور B ہم مرتبہ ہیں لہٰذا تفریق کے موافق ہیں۔

$$A-B=\begin{bmatrix}2&4&7\\1&3&-2\\4&5&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}11&-5&2\\2&4&-6\\3&6&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2-11&4+5&7-2\\1-2&3-4&-2+6\\4-3&5-6&6+1\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}-9&9&5\\-1&-1&4\\1&-1&7\end{bmatrix}$$

6.3.3 سکیلر سے ضرب A Scalar Multiplication

حقیقی اعداد کے سیٹ کا ہر رکن ایک سکیلر کہلاتا ہے۔ہم کسی قالب A کی کسی سکیلر k سے ضرب کو kA سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ ایسا قالب ہوتا ہے جو قالب A کے تمام ارکان کو k سے ضرب دے کر بنایا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

(i) اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ ، ہو تو $kA=\begin{bmatrix}ka&kb\\kc&kd\end{bmatrix}$

(ii) اگر $A=\begin{bmatrix}4&3&2\\2&6&-1\\-3&4&7\end{bmatrix}$ ، ہو تو $3A=\begin{bmatrix}12&9&6\\6&18&-3\\-9&12&21\end{bmatrix}$

6.3.4 قالبوں کی جمع کے قوانین Laws of Addition of Matrices

قانون مبادلہ Commutative Law

کوئی سے دو ہم مرتبہ قالبوں A اور B کے لیے

$$A + B = B + A$$

یہ قانون مبادلہ بلحاظ جمع کہلاتا ہے۔

مثال 1:-

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو $A + B = B + A$ ثابت کیجیے۔

حل: قالب A اور B ہم مرتبہ ہیں۔ اس لیے یہ جمع کے لیے موافق ہیں۔

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 3+2 \\ 4-6 & 5+1 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

اور

$$B+A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 2+3 \\ -6+4 & 1+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

پس $A + B = B + A$

قانون تلازم Associative Law

تین ہم مرتبہ قالبوں A, B اور C کے لیے۔

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

یہ قانون ''قانون تلازم بلحاظ جمع'' کہلاتا ہے۔

مثال:- اگر $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ اور $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ہوتو

قانون تلازم بلحاظ جمع کی تصدیق کیجیے۔

حل:

$$(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

$$A+(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

(i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(A + B) + C = A + (B + C)$

6.3.5 قالبوں کے جمعی ذاتی قالب Additive Identity of Matrices

حقیقی اعداد کے سیٹ میں صفر "0" جمعی ذاتی عدد ہوتا ہے۔ یعنی حقیقی عدد اور صفر کا حاصل جمع وہی عدد ہوتا ہے۔
مثلاً $5 = 5 + 0 = 0 + 5$ اسی طرح صفری قالب O جس کا مرتبہ $(m \times n)$ ہے۔ جمعی ذاتی قالب کہلاتا ہے یعنی

$$A + O = O + A = A$$

مثلاً
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

اب
$$A+O = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A+O = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A$$

اور
$$O+A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A$$

پس $A + O = O + A = A$ لہٰذا 'O' جمعی ذاتی قالب ہے۔

6.3.6 قالب کا جمعی معکوس Additive Inverse of a Matrix

اگر قالب A اور B اس طرح ہوں کہ ان کا مجموعہ $(A + B)$ ایک صفری قالب 'O' ہو تو دونوں A اور B ایک دوسرے کا جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔

مثال کے طور پر:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ اور } B = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

اب

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

A اور B ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہیں۔

مثال:-

اگر

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

ہو تو

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+1 & 2-2 & -3+3 \\ 2-2 & -4+4 & 5-5 \\ -2+2 & -1+1 & 7-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = O$$

A اور B ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہیں۔

مشق 6.3

1- اگر $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ اور $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \\ 4 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) $A + B$ (ii) $A - B$ (iii) $B - A$

(iv) $2A + 3B$ (v) $3A - 4B$ (vi) $A - 2B$

2- درج ذیل قالبوں کے جمعی معکوس معلوم کیجیے۔

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 4 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ ،

$E = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

3- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

(i) $4A - 3A = A$ (ii) $3B - 3A = 3(B - A)$

4- x اور y معلوم کیجیے اگر $\begin{bmatrix} x+3 & 1 \\ -3 & 3y-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

5- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

(i) $A + B = B + A$ (ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$

6- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو X معلوم کیجیے جبکہ $3X - 2A = B$

-7 a، b، c، d، e اور f معلوم کیجیے۔

جبکہ
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

-8 w، x، y، z معلوم کیجیے جبکہ

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

-9 اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو A کا جمعی معکوس معلوم کریں۔

-10 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $A^2 - 4A + 5I = 0$

-11 اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $(A+B)^t = A^t + B^t$

-12 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

ہو تو ثابت کیجیے کہ $A + B - C = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

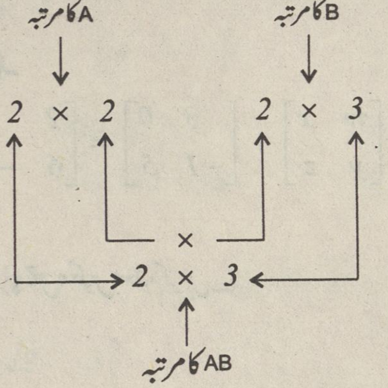
6.4.1 قالبوں کی ضرب MULTIPLICATION OF MATRICES

دو قالب A اور B ضرب AB کے لیے موزوں ہوتے ہیں اگر A میں کالموں کی تعداد B میں قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔

مثال کے طور پر:
$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{2 \quad\quad 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \downarrow 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 4 + 3\times 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 8+6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 14 \end{bmatrix}$$

مثال 1:-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$



حاصل ضرب AB کے ارکان اس طرح ہوں گے کہ:

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$ جبکہ

$$c_{11} = a_{11}\ b_{11} + a_{12}\ b_{21}$$

A کی پہلی قطار کے ارا کین اور B کے پہلے کالم کے ارا کین کی ضرب

$$c_{12} = a_{11}\ b_{12} + a_{12}\ b_{22}$$

A کی پہلی قطار کے ارا کین اور B کے دوسرے کالم کے ارا کین کا حاصل ضرب

$$c_{13} = a_{11}\ b_{13} + a_{12}\ b_{23}$$

A کی پہلی قطار کے ارا کین اور B کے تیسرے کالم کے ارا کین کا حاصل ضرب

$$c_{21} = a_{21}\ b_{11} + a_{22}\ b_{21}$$

$$c_{22} = a_{21}\ b_{12} + a_{22}\ b_{22}$$

$$c_{23} = a_{21}\ b_{13} + a_{22}\ b_{23}$$ ، لہٰذا

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} & a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} & a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} \end{bmatrix}$$

مثال 2:-

اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ہو تو AB معلوم کیجیے۔

حل:

A کا مرتبہ $= 2 \times 2$

B کا مرتبہ $= 2 \times 1$

کیوں کہ A میں کالموں کی تعداد $=$ B میں قطاروں کی تعداد $= 2$ کا مرتبہ $AB = 2 \times 1$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\times 2 + 2\times 3 \\ 3\times 2 + 4\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 6 \\ 6 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 18 \end{bmatrix}$$

نتیجہ:

اگر A مربعی قالب ہو تو $A^2 = A.A$

$A^3 = A.A.A = AA^2 = A^2A$

n بار $A^n = A.A.A \ldots\ldots\ldots\ldots n$

یاد رکھیے کہ:

قالبوں A اور B کی ضرب AB کے لیے درج ذیل نکات کو ملحوظ خاطر رکھیے۔

(i) B میں قطاروں کی تعداد $=$ A میں کالموں کی تعداد

(ii) A اور B کا حاصل ضرب $A \times B$ یا AB سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(iii) اگر قالب A کا مرتبہ $(m \times p)$ اور قالب B کا مرتبہ $(p \times n)$ ہو تو AB کا مرتبہ $(m \times n)$ ہوگا۔

6.4.3 قانون تلازم بلحاظ ضرب Associative Law of Matrices with respect to Multiplication

اگر تین قالب A ، B اور C ضرب کے لیے موزوں ہوں تو

$$A(BC) = (AB)C$$

یہ قانون تلازم بلحاظ ضرب کہلاتا ہے۔

مثال:- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

ہوتو بلحاظ ضرب قانون تلازم کی تصدیق کیجیے۔

حل:

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\times 4 + 1\times 3 & 1\times 2 + 1\times 1 \\ 2\times 4 + 3\times 3 & 2\times 2 + 3\times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4+3 & 2+1 \\ 8+9 & 4+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 17 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 7 + 1\times 17 & 2\times 3 + 1\times 7 \\ 3\times 7 + 1\times 17 & 3\times 3 + 1\times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14+17 & 6+7 \\ 21+17 & 9+7 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 31 & 13 \\ 38 & 16 \end{bmatrix} \text{...........}(i)$$

اور

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 1 + 1\times 2 & 2\times 1 + 1\times 3 \\ 3\times 1 + 1\times 2 & 3\times 1 + 1\times 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 2+2 & 2+3 \\ 3+2 & 3+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4\times4 + 5\times3 & 4\times2 + 5\times1 \\ 5\times4 + 6\times3 & 5\times2 + 6\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+15 & 8+5 \\ 20+18 & 10+6 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 31 & 13 \\ 38 & 16 \end{bmatrix} \text{...........}(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے $A(BC) = (AB)C$

قالبوں میں قانون تلازم بلحاظ ضرب درست ہے۔

6.4.4 ضرب کے قوانین تقسیمی Distributive Laws

اگر قالب A، B اور C جمع اور ضرب کے لیے موزوں ہوں

(i) $A(B + C) = AB + AC$ (بائیں طرف سے قالبوں کی ضرب کا قانون تقسیمی)

(ii) $(A + B)C = AC + BC$ (دائیں طرف سے قالبوں کی ضرب کا قانون تقسیمی)

(i) اور (ii) قوانین تقسیمی کہلاتے ہیں۔

مثال:-

اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

ہو تو بائیں طرف سے دائیں طرف قوانین تقسیمی کی تصدیق کیجیے۔

حل: (i) بائیں طرف سے قانون تقسیمی $A(B + C) = AB + AC$

$$B + C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B+C=\begin{bmatrix}2-1 & 3-4\\ -1+3 & -2+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

اب

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+6 & -4+12\\ 2+4 & -2+8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 8\\ 6 & 6\end{bmatrix}\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

اور

$$AB+AC=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 3 & 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8-3 & 12-6\\ 4-2 & 6-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4+9 & -16+18\\ -2+6 & -8+12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 2 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 2\\ 4 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 8\\ 6 & 6\end{bmatrix}\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$$A\,(B+C)=AB+AC.$$

(ii) دائیں طرف سے قانون تقسیمی $(A + B)\,C = AC + BC$

$$A+B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

لہٰذا

$$(A+B)\,C = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6+18 & -24+36 \\ -1+0 & -4+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \text{...........}(i)$$

اور

$$AC + BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4+9 & -16+18 \\ -2+6 & -8+12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2+9 & -8+18 \\ 1-6 & 4-12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \text{...........}(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$$(A + B)\,C = AC + BC.$$

6.4.5 قانون مبادلہ بلحاظ ضرب Commutative Law

عموماً قالبوں کی ضرب میں قانون مبادلہ لاگو نہیں ہوتا۔ یعنی $AB \neq BA$

مثال 1:- اگر $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ اور $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ہو تو پڑتال کریں کہ $AB \neq BA$

حل: فرض کریں کہ قالب A اور B ضرب AB اور BA کے موزوں ہیں۔

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+8 & 3+4 \\ -3-8 & 9-4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -11 & 5 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+9 & -2-6 \\ 4+6 & 8-4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$$AB \neq BA$$

پس عموماً قانون مبادلہ قالبوں کی ضرب میں درست نہیں ہے۔

مثال 2:-

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $I_2A = AI_2 = A$

حل:

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times a + 0\times c & 1\times b + 0\times d \\ 0\times a + 1\times c & 0\times b + 1\times d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$I_2A = A \quad ....(i)$$

$$AI_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a\times 1 + b\times 0 & a\times 0 + b\times 1 \\ c\times 1 + d\times 0 & c\times 0 + d\times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$AI_2 = A \quad ....(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$$I_2A = AI_2 = A$$

6.4.7 مسئلہ Theorem

$(AB)^t = B^t A^t$ جبکہ A اور B دو قالب ہیں۔

مثال:-

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کریں کہ $(AB)^t = B^t A^t$

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+6 & 6+3 \\ -1-4 & 3-2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L.H.S = (AB)^t = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \text{..........} (i)$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R.H.S = B^t A^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+6 & -1-4 \\ 6+3 & 3-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \text{..........} (ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$$(AB)^t = B^t A^t$$

مشق 6.4

سوالات 1 تا 8 میں دیے ہوئے بیانات کی تصدیق کیجیے جبکہ:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ، B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} ، C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

1. $(AB)C = A(BC)$　　　**2.** $AB \neq BA$

3. $A(B+C) = AB + AC$　　　**4.** $(B+C)A = BA + CA$

5. $(B+C)(B-C) \neq B^2 - C^2$　　　**6.** $(BC)^t = C^t B^t$

7. $BI = B$　　　**8.** $BC \neq CB$

قالبوں کے حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

9. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$　　　**10.** $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$　　　**12.** $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$　　　**14.** $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -0 \end{bmatrix}$

15. اگر $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 10 \end{bmatrix}$ ہو تو a اور b کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

16. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $(AB)^t = B^t A^t$

6.5 قالب کا ضربی معکوس MULTIPLICATIVE INVERSE OF A MATRIX

6.5.1 تفاعل کا مقطع Determinant Function

اس حصہ میں ہم ایک نئے تفاعل کا تعارف کروا رہے ہیں۔ جو کہ کسی مربعی قالب کا مقطع کہلاتا ہے۔ اس کی ڈومین میں حقیقی اعداد والے ارکان کے قالب ہوتے ہیں اور رینج تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہوتی ہے۔

اگر A کوئی مربعی قالب ہو تو قالب A کا مقطع $|A|$ یا $det\ A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو کہ ایک منفرد حقیقی عدد ہوتا ہے۔

2×2 مرتبہ والے قالب کے مقطع کو درج ذیل طریقہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$-\ ad = bc$$

6.5.2 قالب A کے مقطع کی قیمت معلوم کرنا Evaluate Determinant of a Matrix

مثال 1:- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ ، $det\ A$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = (-1)\times(-4) - (-3)\times 2$$

$$= 4+6 = 10$$

مثال 2:- اگر $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ، $det\ A$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$det\ A = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 12-8 = 4$$

مثال 3:- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$ ، $det\ A$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$det\ A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = 20-20 = 0$$

6.5.3 نادر اور غیر نادر قالب Singular and Non-Singular Matrices

نادر قالب Singular Matrix

ایک مربعی قالب A نادر قالب کہلاتا ہے اگر $det\ A = 0$

مثال:- اگر
$$A = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$det\ A = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 36 - 36$$

$$det\ A = 0$$

پس A ایک نادر قالب ہے۔

غیر نادر قالب Non-Singular Matrix

ایک مربعی قالب A غیر نادر قالب کہلاتا ہے اگر $det\ A \neq 0$

مثال:- اگر
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$det\ A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 30$$

$$det\ A = -14 \neq 0$$

پس A ایک غیر نادر قالب ہے۔

6.5.4 قالب کا ایڈ جائنٹ Adjoint of a Matrix

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک 2×2 کا مربعی قالب ہے۔ اگر اس قالب کے وتری ارکان a اور d کی جگہ آپس میں بدل دی جائے اور باقی ارکان b اور c کی علامتیں تبدیل کر دی جائیں تو اس طرح حاصل ہونے والا قالب A کا ایڈ جائنٹ کہلاتا ہے۔

قالب A کا ایڈ جائنٹ $adj\ A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ہوتو $adj\ A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ایک دوسری مثال لیجیے۔

اگر $P = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہوتو $adj\ P = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

6.5.5 ضربی معکوس Multiplicative Inverse

ہم جانتے ہیں کہ حقیقی اعداد کے سیٹ میں ہر غیر صفری حقیقی عدد 'a' کے ذریعے ایک دوسرا حقیقی عدد a^{-1} ایسا موجود ہوتا ہے کہ $a\,a^{-1} = 1$ تو عدد a^{-1} پہلے عدد a کا ضربی معکوس کہلاتا ہے۔

اسی طرح ہر مربعی قالب A کا ضربی معکوس A^{-1} ہوتا ہے۔ اس طرح کہ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ جبکہ $det\ A \neq 0$

کسی غیر نادر قالب A کا ضربی معکوس A^{-1} یوں معلوم کیا جاتا ہے

$$\boxed{A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}} \quad , |A| \neq 0$$

اگر A ایک نادر قالب ہوتو اس کا ضربی معکوس نہیں ہوتا۔

یاد رکھیے کہ:

(i) مربعی قالب A کا ضربی معکوس A^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(ii) صرف غیر نادر قالب کا ضربی معکوس ہوتا ہے۔

(iii) کسی مربعی قالب A کا ضربی معکوس منفرد ہوتا ہے۔

(iv) غیر مربعی قالبوں کے ضربی معکوس نہیں معلوم کیے جاسکتے۔

(v) $A^{-1} = \dfrac{adj\ A}{|A|}$

مثال:- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو $A A^{-1} = A^{-1} A = I$ کی تصدیق کیجیے۔

جبکہ I ضربی ذاتی قالب ہے۔

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad adj\ A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 16 - 10$$

$$|A| = 6 \neq 0$$

ہم جانتے ہیں کہ $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\ adj\ A$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

اب $A A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 16-10 & -8+8 \\ 20-20 & -10+16 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A A^{-1} = I \quad ....(i)$$

اور $A^{-1} A = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 16-10 & 8-8 \\ -20+20 & -10+16 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} A = I \quad ....(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) کی رو سے $AA^{-1} = I = A^{-1} A$

6.5.6 غیر نادر قالب کا ضربی معکوس Inverse of a Non-Singular Matrix

کسی غیر نادر قالب $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ کا ضربی معکوس $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ہوتا ہے جبکہ $ad - bc \neq 0$

مثال 1:- اگر $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 9 \end{bmatrix}$ ہو تو قالب کا ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 9 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad adj\ A = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -14 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 63 - 42 = 21 \neq 0$$

ہم جانتے ہیں کہ $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A$

$$= \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -14 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{21} & \frac{-3}{21} \\ \frac{-14}{21} & \frac{7}{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

مثال 2:- اگر $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ ہو تو B^{-1} معلوم کیجیے۔

حل:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad adj\ B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|B| = -6-12 = -18 \neq 0$$

ہم جانتے ہیں کہ $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\, adj\, B$

$$= \frac{1}{-18}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2}{-18} & \frac{4}{-18} \\ \frac{3}{-18} & \frac{3}{-18} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} \end{bmatrix}$$

مثال 3:- اگر $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ ہو اور ممکن ہو تو P^{-1} معلوم کیجیے۔

حل:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix},\ adj\, P = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times 4 - 2\times 6 = 12-12 = 0$$

چونکہ $|P| = 0$

P کا معکوس معلوم نہیں کیا جا سکتا کیوں کہ $\frac{1}{0}$ معروف نہیں ہے۔

6.5.7 ثابت کرنا کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ Verify $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

اسے ہم درج ذیل مثال سے ثابت کرتے ہیں۔

مثال:-

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ہوتو ثابت کیجیے کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12+30 & 6+24 \\ 8+5 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 30 \\ 13 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 42 & 30 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = 42 \times 8 - 13 \times 30$$

$$= 336 - 390$$

$$= -54 \neq 0$$

اب $L.H.S = (AB)^{-1} = \dfrac{1}{|AB|} adj(AB)$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{-54} \begin{bmatrix} 8 & -30 \\ -13 & 42 \end{bmatrix} \text{ ....(i)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad adj\ A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-12$$

$$= -9 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad adj\ B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16-10 = 6$$

اب $$B^{-1} = \frac{adj\ B}{|B|}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

اب $$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{-9}\right)\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{54}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{54}\begin{bmatrix} 4+4 & -24-6 \\ -5-8 & 30+12 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{-1}{54}\begin{bmatrix} 8 & -30 \\ -13 & 42 \end{bmatrix} \quad ....(ii)$$

(i) اور (ii) کی رو سے

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

مشق 6.5

-1 درج ذیل قالبوں کے مقطع معلوم کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

-2 نادر اور غیر نادر قالبوں کو الگ الگ کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -a & b \\ a & b \end{bmatrix}$

-3 ہر ایک قالب A کا ضربی معکوس A^{-1} معلوم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ $A^{-1}A = I$ اگر ضربی معکوس معلوم نہ کیا جاسکے تو وجہ بیان کریں۔

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

-4 اگر $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو

(a) M^{-1} معلوم کیجیے۔

(b) ثابت کیجیے کہ $M^{-1}M = MM^{-1}$

-5 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

6.6 ہمزاد خطی مساواتوں کا حل SOLUTION OF SIMULTANEOUS LINEAR EQUATIONS

دو متغیرات کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے ہمیں دو مساواتوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ مساواتوں کا ایسا جوڑا ہمزاد خطی مساواتوں کا نظام کہلاتا ہے۔

1- ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے کے طریقے
(a) معکوس قالب کا طریقہ (b) کریمر کا قانون

2- ان طریقوں کی مدد سے ہم حقیقی مسائل کا حل سیکھیں گے۔

6.6.1 معکوس قالب کا طریقہ Matrix Inversion Method

فرض کیا کہ $a_1x + a_2y = b_1$ ....(i)

اور $a_3x + a_4y = b_2$ ....(ii)

دو یک درجی ہمزاد مساواتیں ہیں۔ یہ مساواتیں قالبوں کی شکل میں یوں لکھی جا سکتی ہیں۔

$$\begin{bmatrix} a_1x + a_2y \\ a_3x + a_4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

یا
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

یا
$$AX = B \text{ ....(iii)}$$

جبکہ
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

x اور y کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے ہم مساوات (iii) درج ذیل طریقہ سے حل کرتے ہیں۔

$$AX = B$$

اگر A کا ضربی معکوس A^{-1} ہو تو

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \qquad (\because A^{-1}A = I) \text{ جبکہ}$$

$$IX = A^{-1}B \qquad (\because IX = X)$$

$$X = \frac{adj\ A}{|A|}B \qquad |A| \neq 0 \text{ جبکہ}$$

اگر A نادر قالب یعنی $(|A| = 0)$ ہو تو دی ہوئی مساوات کا حل نکالنا ممکن نہیں۔

مثال:- درج ذیل مساواتوں کے سیٹ کو معکوس قالب کے طریقہ سے حل کریں۔

$$3x - 4y = 7, \quad 5x - 7y = 12$$

حل: دی گئی ہمزاد مساواتوں کو یوں قالب کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

یہاں پر $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -21 + 20 = -1$$

$$|A| = -1 \neq 0$$

A ایک غیر نادر قالب ہے۔ لہٰذا مساواتیں حل کی جاسکتی ہیں۔

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \, adj\, A = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

چونکہ $X = A^{-1}B$

$$X = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 49 - 48 \\ 35 - 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

لہٰذا $x = 1$ اور $y = -1$

حل سیٹ $= \{(1, -1)\}$

کریمر کا قانون Cramer's Rule

یک درجی ہمزاد مساواتیں کریمر کے قانون سے حل کی جاسکتی ہیں۔ کریمر کے طریقہ سے یک درجی ہمزاد مساواتوں کے حل کرنے کی وضاحت نیچے دی جاتی ہے۔ درج ذیل دو مساواتوں پر غور کریں۔

$$a_1x + a_2y = b_1$$
$$a_3x + a_4y = b_2$$

قالبی شکل میں

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$ جبکہ $|A| \neq 0$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_2 \\ b_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_2 \end{vmatrix}$$

اب $x = \dfrac{|D_1|}{|A|}$ اور $y = \dfrac{|D_2|}{|A|}$

مثال 1:- کریمر کے طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل یک درجی ہمزاد مساواتوں کو حل کریں۔

$x + 3y = 6 \quad , \quad 2x + y = 4$

حل: $x + 3y = 6 \ , \ 2x + y = 4$

قالبی شکل میں

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-6 = -5 \neq 0$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6-12 = -6$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-12 = -8$$

$\therefore \ x = \dfrac{|D_1|}{|A|} = \dfrac{-6}{-5}$ اور $y = \dfrac{|D_2|}{|A|} = \dfrac{-8}{-5}$

$x = \dfrac{6}{5}$, $y = \dfrac{8}{5}$ $\therefore$ حل سیٹ $= \left\{\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{5}\right)\right\}$

مثال 2:- 7 سیب اور 4 ناشپاتیوں کی قیمت 11 روپے جبکہ 5 سیب اور 2 ناشپاتیوں کی قیمت 7 روپے ہے۔ ہر ایک سیب اور ایک ناشپاتی کی قیمت کیا ہے؟

حل: ہم ہر سیب کی قیمت کو 'x' اور ناشپاتی کی قیمت کو 'y' سے ظاہر کرتے ہیں تو

$$7x + 4y = 11$$
$$5x + 2y = 7$$

قالبی شکل میں

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 14-20 = -6 \neq 0$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 22-28 = -6$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 49-55 = -6$$

$x = \dfrac{|D_1|}{|A|} = \dfrac{-6}{-6} = 1,$ ایک سیب کی قیمت 1 روپیہ

$y = \dfrac{|D_2|}{|A|} = \dfrac{-6}{-6} = 1,$ ایک ناشپاتی کی قیمت 1 روپیہ

مثال 3:- دو اعداد معلوم کیجیے جن کا مجموعہ 67 اور فرق 3 ہے۔

حل: فرض کیا کہ x اور y دو نمبر اس طرح ہیں کہ $y < x$ تو سوال کی دونوں شرائط کے مطابق

$x + y = 67$ ________ (i)

$x - y = 3$ ________ (ii)

قالبوں کی شکل میں

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 67 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -67 - 3 = -70$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 1 & 67 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 67 = -64$$

$$x = \frac{|D_1|}{|A|} = \frac{-70}{-2} = 35$$

$$y = \frac{|D_2|}{|A|} = \frac{-64}{-2} = 32$$

$$x = 35 \qquad y = 32$$

$\therefore$ پس مطلوبہ اعداد 32 اور 35 ہیں۔

مثال 4:- ایک بیلٹ اور پرس کی مجموعی قیمت 42 روپے ہے۔ جبکہ 7 عدد بیلٹوں اور 4 عدد پرسوں کی کل قیمت 213 روپے ہے۔ ہر ایک کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ بیلٹ اور پرس کی قیمت بالترتیب x اور y ہے۔

$x + y = 42$ ________ (i)

$7x + 4y = 213$ ________ (ii)

قالبوں کی شکل میں

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 213 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 4-7 = -3 \neq 0$$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \left(\frac{adj\ A}{|A|}\right) B$$

$$= \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 42 \\ 213 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 168 - 213 \\ -294 + 213 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -45 \\ -81 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$x = 15$ ، $y = 27$

$\therefore$ پس ایک بیلٹ کی قیمت 15 روپے جبکہ پرس کی قیمت 27 روپے ہے۔

مشق 6.6

-1 مساواتوں $2x + ky = 7$ اور $4x - 9y = 4$ کو قالب شکل میں لکھیے اور k کی قیمت بھی معلوم کیجیے اگر مساواتوں میں عددی سروں کا قالب نادر ہو۔

-2 جہاں ممکن ہے، ہمزاد مساواتوں کو معکوس قالب کے طریقہ سے حل کریں۔ جہاں حل ممکن نہ ہو وجہ بیان کریں۔

(i) $2x - 5y = 1$, $3x - 7y = 2$

(ii) $3x + 2y = 10$, $2y - 3x = -4$

(iii) $4x + 5y = 0$, $2x + 5y = 1$

(iv) $5x + 6y = 25$, $3x + 4y = 17$

(v) $x + y = 2$, $y = 2 + x$

(vi) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, $-4x + y = 14$

-3 معکوس قالب کے طریقہ سے حل کریں۔

$$3x - y = 10$$
$$2x + 3y = 3$$

-4 کریمر کے طریقہ سے ہمزاد مساواتوں کو حل کریں۔ جہاں حل ممکن نہ ہو، وجہ بیان کریں۔

(i) $x + 2y = 3$, $x + 3y = 5$

(ii) $2x + y = 1$, $5x + 3y = 2$

(iii) $x + 3y = 1$, $2x + 8y = 0$

(iv) $-2x + 6y = 5$, $x - 3y = -7$

(v) $x - 3y = 5$, $2x - 5y = 9$

(vi) $5x + 2y = 13$, $2x + 5y = 17$

-5 درج ذیل قالبوں کو یک درجی مساواتوں کی صورت میں لکھیے۔

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

جائزہ مشق-6

I- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگایئے۔

1. قطاروں اور کالموں کی تعداد کسی قالب میں کے .... کو ظاہر کرتی ہے۔

(a) مرتبہ (b) قطاریں
(c) کالم (d) مقطع

2. قالب جس میں صرف ایک قطار ہو، کہلاتا ہے:

(a) قطاری قالب (b) کالمی قالب
(c) ضربی ذاتی قالب (d) سکیلر قالب

3. وہ قالب، جمع کے لیے موزوں ہوتے ہیں اگر وہ ہوں:

(a) ہم مرتبہ (b) مختلف مرتبہ والے
(c) مرتبہ 2×2 (d) مرتبہ 3×3 کے

4. مربعی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد ہوتی ہے:

(a) 2×3 (b) 3×2
(c) یکساں (d) 2×1

5. دو قالب جن کے مرتبے اور متبادل ارکان یکساں ہوں کہلاتے ہیں:

(a) مساوی قالب (b) وتری قالب
(c) مربعی قالب (d) غیر مساوی قالب

6. ایک ضربی ذاتی قالب میں وتر کے ارکان ہوتے ہیں:

(a) 3 (b) 2
(c) 1 (d) 0

7. اگر $A^t = -A$ ہو تو A کہلاتا ہے:

(a) متشاکل (b) غیر متشاکل
(c) ٹرانسپوز (d) مربعی قالب

8. $(A+B)^t$ قالبوں A اور B کے لیے برابر ہوتا ہے۔

(a) A^t (b) B^t
(c) $A^t + B^t$ (d) $A^t\ B^t$

9. قالبوں کے لیے ؟ = $(AB)^t$

(a) A (b) B
(c) $B^t\ A^t$ (d) $A^t\ B^t$

10. قالبوں کے لیے ؟ = $(AB)^{-1}$

(a) A^{-1} (b) B^{-1}
(c) $B^{-1}\ A^{-1}$ (d) $A^{-1}\ B^{-1}$

II- خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. قطاروں اور کالموں کی تعداد کسی قالب کے ________ کا تعین کرتے ہیں۔

2. قالب جس میں صرف ایک قطار ہو ________ کہلاتا ہے۔

3. دو قالب جمع کے لیے موزوں ہوتے ہیں اگر وہ ________ ہوں۔

4. ایک مربعی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد ________ ہوتی ہے۔

5. دو قالب جو ہم مرتبہ قالب ________ کہلاتے ہیں اگر ان کے متبادل ارکان بھی یکساں ہوں۔

6. ضربی ذاتی قالب میں وتر کے ارکان ________ ہوتے ہیں۔

7. $(AB)C = A(BC)$ جبکہ A ، B اور C قالب ہیں تو یہ ________ بلحاظ ضرب کہلاتا ہے۔

8. اگر $A^t = -A$ ہو تو A قالب ________ کہلاتا ہے۔

9. قالبوں میں ________ = $(AB)^t$

10. قالبوں میں ________ = $(AB)^{-1}$

خلاصہ SUMMARY

قالب: دو بریکٹوں میں قاعدہ کے تحت اعداد کی مستطیلی ترتیب قالب کہلاتی ہے۔

قالب کا مرتبہ: قطاروں اور کالموں کی تعداد، قالب کے مرتبہ کا تعین کرتے ہیں۔

قطاری قالب: قالب جس میں صرف ایک ہی قطار ہو قطاری قالب کہلاتا ہے۔

کالمی قالب: قالب جس میں صرف ایک ہی کالم ہو، کالمی قالب کہلاتا ہے۔

مربعی قالب: ایسا قالب جس میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو، مربعی قالب کہلاتی ہے۔

مستطیلی قالب: مستطیلی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر نہیں ہوتی۔

صفری قالب: اگر کسی قالب میں تمام ارکان صفر ہوں وہ صفری قالب کہلاتا ہے۔

وحدانی یا ضربی ذاتی قالب: ضربی ذاتی قالب میں وتر کے ارکان 'I' اور غیر وتری ارکان تمام صفر ہوتے ہیں۔

ٹرانسپوز قالب: کسی قالب کے کالموں اور قطاروں کو آپس میں بدلنے سے حاصل ہونے والا قالب اس قالب کا ٹرانسپوز کہلاتا ہے۔

متشاکل قالب: اگر $A^t = A$ ہو تو A متشاکل قالب کہلاتا ہے۔

غیر متشاکل قالب: اگر $A^t = -A$ ہو تو A غیر متشاکل قالب کہلاتا ہے۔

قالب کا مقطع: وہ حقیقی عدد جو ایک مربعی قالب کی قیمت ہو قالب کا مقطع کہلاتا ہے۔

نادر قالب: اگر کسی قالب کا مقطع صفر ہو تو وہ نادر قالب وگرنہ غیر نادر قالب کہلاتا ہے۔

2×2 مرتبہ والی مربعی قالب کا ایڈ جائنٹ: یہ قالب اس قالب کے وتری ارکان کو آپس میں بدل کر باقی دو ارکان کی علامت تبدیل کر کے حاصل ہوتا ہے۔

مربعی قالب کا ضربی معکوس: کوئی قالب B، قالب A کا ضربی معکوس ہوگا اگر $AB = I$ ہو۔