یونٹ

6

قوت نما اور لوگارتھم
EXPONENTS AND LOGARITHMS

- جذر اور مجذور
- قوانین قوت نما
- سائنسی ترقیم
- لوگارتھم
- لوگارتھم کے قوانین
- لوگارتھم کا استعمال

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- جذر اور مجذور کے تصورات۔
- کہ کسی جملہ کے جذر اور قوت نمائی شکل میں فرق کیا ہے۔
- کہ کسی جملہ کی حالت جذر اور قوت نمائی حالت کو آپس میں تبدیل کیسے کرتے ہیں۔
- اساس، قوت نما اور قیمت میں واضح فرق۔
- حقیقی قوت نما والے جملوں کو مختصر کرنے کے لیے قوت نما کے قوانین کو استعمال کیا جا سکتا ہے۔
- کسی عدد کو سائنسی ترقیم اور عام ترقیم میں کیسے ظاہر کر سکتے ہیں۔
- کسی عدد کے لوگارتھم جس کا اساس 'a' ہو۔

$(a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x, a > 0, y > 0$ اور $a \neq 1)$

- کامن لوگارتھم یا کسی عدد کے لوگارتھم کا خاصہ اور مینٹیسا۔
- عدد کے لوگارتھم کو معلوم کرنے کے لیے جدول کا استعمال کیسے کرتے ہیں۔
- اینٹی لوگارتھم کا تصور اور اس کے جدول کو استعمال کرنے کا طریقہ۔
- درج ذیل قوانین کو کیسے ثابت کرتے ہیں۔
  - $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$
  - $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
  - $\log_a m^n = n \log_a m$
- لوگارتھم کے قوانین کو استعمال کرتے ہوئے ضرب، تقسیم اور قوت نما کے طویل عمل کو جمع اور تفریق جیسے آسان عمل میں کیسے تبدیل کر سکتے ہیں۔

جذر اور مجذور Radicals and Radicands 6.1.1

آیئے ایک حقیقی عدد $\sqrt{5}$ کو دیکھتے ہیں۔ ہم اسے $5^{\frac{1}{2}}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہاں 5 ایک مثبت ناطق عدد ہے، 2 ایک مثبت حقیقی صحیح عدد اور $\sqrt{5}$ ایک غیر ناطق عدد، اس لیے $\sqrt{5}$ ایک جذر المربع ہے اسے 5 کا دوسرا جذر بھی کہتے ہیں۔ اسے دوسرے درجے کا جذر بھی کہتے ہیں۔ $\sqrt{\ }$ جذر کی علامت (Radical Sign) اور 5 مجذور (Radicand) کہلاتا ہے۔

ایک اور حقیقی عدد $\sqrt[3]{4}$ کو دیکھیے۔ ہم اسے $4^{\frac{1}{3}}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہاں 4 ایک مثبت ناطق عدد، 3 ایک مثبت صحیح عدد اور $\sqrt[3]{4}$ غیر ناطق ہے۔ اس لیے $\sqrt[3]{4}$ ایک جذر ہے اسے 4 کا تیسرا جذر بھی کہتے ہیں۔ یہ جذر المکعب بھی کہلاتا ہے۔

اس طرح ہر درجہ کا جذر ایک غیر ناطق عدد ہوتا ہے جس میں جذر المربع بھی شامل ہے۔ مثلاً
$2\sqrt{3},\ 4+3\sqrt{5},\ 10-4\sqrt{6},\ \frac{\sqrt{2}}{5},\ \frac{9}{\sqrt{7}}$ تمام غیر ناطق اعداد ہیں۔

اگر 'a' ایک حقیقی عدد ہو اور 'n' ایک مثبت صحیح عدد، تب ایک عدد کی طاقت $\frac{1}{n}$ لگانے سے $a^{1/n}$ حاصل ہوتا اسے a کا n واں جذر کہتے ہیں۔

$$\sqrt{2} = 2^{1/2}, \sqrt[3]{2} = 2^{1/3}, \sqrt[4]{5} = 5^{1/4}$$ پس

علامت $\sqrt[n]{\ }$ انڈیکس n کی جذری علامت کہلاتی ہے۔ $\sqrt[n]{a}$ میں a مجذور (Radicand) کہلاتا ہے۔

$\sqrt{a}$ ، دوسرا جذر کہلاتا ہے۔

$\sqrt[3]{a}$، تیسرا جذر کہلاتا ہے۔

$\sqrt[4]{a}$ ، چوتھا جذر کہلاتا ہے۔

$\sqrt[n]{a}$ ، n واں جذر کہلاتا ہے۔

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ اور $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ ایک دوسرے کے کانجوگیٹ کہلاتے ہیں۔ ان دو جذروں کا حاصل ضرب ایک ناطق عدد ہوتا ہے۔

6.1.2 کسی جملہ کی جذری اور قوت نمائی اشکال
Radical Form and Exponential Form of an Expression

$\sqrt[3]{8}$ ایک جذری شکل ہے جبکہ $(8)^{\frac{1}{2}}$ اس کی قوت نمائی شکل ہے۔ کیونکہ جذر کو کسری قوت نما میں بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔

$5(3)^{1/2}$ کی جذری شکل $5\sqrt{3}$ ہے۔

$$5(3)^{1/2} = 5\sqrt{3}$$

مندرجہ بالا مثالوں سے ہم دیکھتے ہیں کہ قوت نما کے قوانین کا اطلاق جذری جملوں پر بھی ہوسکتا ہے۔ پس کسی مثبت صحیح عدد 'n' اور مثبت ناطق عدد 'a' کے لیے ہم درج ذیل جدول (Table) پر غور کرتے ہیں۔

جذری شکل	قوت نما کی شکل
(i) $(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\left(a^{1/n}\right)^n = a$
(ii) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$	$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$
(iii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$
(iv) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n} = a^{m/n}$

مثال 1:- مختصر کیجئے۔ $(i)\ (a^3b^2)^{1/4}\times(a^{1/3}b)^{3/4}$ $(ii)\ x^{1/4}\div x^{2/3}$

حل:-

$$(i)\ (a^3b^2)^{1/4}\times(a^{1/3}b)^{3/4}$$

$$= a^{3/4}b^{2/4}\times a^{3/12}b^{3/4}$$

$$= a^{3/4}b^{1/2}\times a^{1/4}b^{3/4}$$

$$= a^{3/4}\times a^{1/4}\times b^{1/2}\times b^{3/4}$$

$$= a^{3/4+1/4}\times b^{1/2+3/4}$$

$$= a^{4/4}\times b^{2+3/4}$$

$$= a^1 b^{5/4}$$

$$= a\,b^{5/4}$$

$$(ii)\ x^{1/4}\div x^{2/3}$$

$$= x^{1/4}\times\frac{1}{x^{2/3}}$$

$$= x^{1/4}.x^{-2/3}$$

$$= x^{1/4-2/3}$$

$$= x^{(3-8)/12}$$

$$= (x)^{-5/12}$$

$$= \frac{1}{x^{5/12}}$$

مثال 2:- مختصر کیجئے۔ $(i)\ \sqrt{(a^3b^2)^{1/4}(a^{1/3}b^{3/4})}$ $(ii)\ \sqrt{x^{1/4}\div x^{\frac{-2}{3}}}$

حل:-

$$(i)\ \sqrt{(a^3b^2)^{1/4}(a^{1/3}b^{3/4})}$$

$$= \sqrt{a^{3/4}\times b^{2/4}\times a^{1/3}\times b^{3/4}}$$

$$= \sqrt{a^{9+4/12}\,b^{2+3/4}}$$

$$= \sqrt{a^{13/12}\,b^{5/4}}$$

$$(ii)\ \sqrt{x^{1/4}\div x^{\frac{-2}{3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{x^{1/4}}{x^{-2/3}}}$$

$$= \sqrt{x^{1/4}\times x^{2/3}}$$

$$= \sqrt{x^{3+8/12}}$$

$$= \sqrt{x^{11/12}}$$

6.1.3 جذری جملے کو قوت نما اور قوت نما جملے کو جذری جملے میں تبدیل کرنا۔

Transform an Expression into Radical Form to an Expression into Exponential Form and Vice Versa

آیئے ہم درج ذیل مثالیں دیکھتے ہیں۔

مثال 1:- قوت نما کی شکل میں تبدیل کیجیے۔

(i) $\sqrt[4]{81a^{28}}$ (ii) $\sqrt[3]{27x^{18}}$ (iii) $\sqrt[3]{\dfrac{x^7y^9}{z^4}}$

حل:-

(i) $\sqrt[4]{81a^{28}} = (81\,a^{28})^{1/4}$

$= (3^4\,a^{28})^{1/4}$

$= 3^{4/4} \times a^{28/4}$

$= 3^1 \times a^7 \quad = 3\,a^7$

(ii) $\sqrt[3]{27x^{18}} = (27\,x^{18})^{1/3}$

$= (3^3 \times a^{18})^{1/3}$

$= 3^{3/3} \times x^{18/3}$

$= 3^1 \times x^6$

$= 3\,x^6$

(iii) $\sqrt[3]{\dfrac{x^7y^9}{z^4}} = \left(\dfrac{x^7\,y^9}{z^4}\right)^{1/3}$

$= \dfrac{x^{7/3}\,y^{9/3}}{z^{4/3}}$

$= \dfrac{x^{7/3}\,y^3}{z^{4/3}} \quad = x^{7/3}\,y^3\,z^{-4/3}$

مثال 2:- مختصر کیجئے اور جواب جذر کی شکل میں دیجئے۔

(i) $\sqrt{18}\times\sqrt[5]{64}$ (ii) $a^{1/2}\times a^{2/3}\div a^{3/4}$ (iii) $(a^{1/3}b^{2/3})^{3/4}\div(a^{2/5}b^{1/3})^{5/6}$

حل:-

(i) $\sqrt{18}\times\sqrt[5]{64} = (18)^{1/2}\times(64)^{1/5}$

$$= (9\times 2)^{1/2}\times(2^{6})^{1/5}$$

$$= 9^{1/2}\times 2^{1/2}\times 2^{6/5}$$

$$= 9^{1/2}\times 2^{17/10}$$

$$= (9)^{1/2}\times(2^{17/5})^{1/2}$$

$$= \sqrt{9\times 2^{17/5}}$$

(ii) $a^{1/2}\times a^{2/3}\div a^{3/4} = \dfrac{a^{1/2+2/3}}{a^{3/4}}$

$$= a^{1/2+2/3-3/4}$$

$$= a^{6+8-9/12}$$

$$= a^{14-9/12}$$

$$= a^{5/12}$$

$$= \sqrt[12]{a^{5}}$$

(iii) $(a^{1/2}b^{2/3})^{3/4}\div(a^{2/5}b^{1/3})^{5/6} = a^{1/2\times 3/4}\times b^{2/3\times 3/4}\div a^{2/5\times 5/6}\times b^{1/3\times 5/6}$

$$= (a^{3/8}b^{1/2})\div a^{1/3}\,b^{5/18}$$

$$= a^{3/8-1/3}\,b^{1/2-5/18} \quad = a^{9-8/24}\,b^{9-5/18}$$

$$= a^{9-8/24}\,b^{9-5/18} \quad = a^{1/24}\,b^{4/18}$$

$$= \sqrt[24]{a}\;\sqrt[9]{b^{2}}$$

مشق 6.1

1- درج ذیل میں جذر اور مجذور بتائیے۔

(i) $\sqrt{3}$ (ii) $4+3\sqrt{a}$ (iii) $\sqrt{11}$

(iv) $8-2\sqrt{6}$ (v) $\dfrac{\sqrt{5}}{7}$ (vi) $\dfrac{9}{\sqrt{13}}$

2- درج ذیل کو قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

(i) $\sqrt{a^3}$ (ii) $\sqrt[5]{a^3}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt[p]{a^k}}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt[b]{a^k}}$

3- جذر کی شکل میں لکھ کر حل کیجیے۔

(i) $(25)^{1/2}$ (ii) $(64)^{1/3}$ (iii) $(81)^{1/4}$ (iv) $(27)^{1/3}$

(v) $(27)^{2/3}$ (vi) $8^{-1/3}$ (vii) $(1000)^{2/3}$ (viii) $(64)^{1/2}$

4- مختصر کیجیے اور جواب قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

(i) $\sqrt{a^{16}}$ (ii) $\sqrt[3]{a^{15}}$ (iii) $\sqrt[3]{27a^9}$ (iv) $\sqrt[3]{8a^9}$

(v) $\sqrt[4]{x^{32}}$ (vi) $\sqrt[4]{81x^{20}}$ (vii) $\sqrt[3]{125\,x^9y^{15}}$ (viii) $\sqrt{(8+y)^7}$

(ix) $\sqrt[4]{16\,x^2y^6}$ (x) $\sqrt[4]{\dfrac{x^5y^6}{z^2}}$ (xi) $\sqrt[3]{\dfrac{8\,x}{x+y}}$ (xii) $\sqrt[p]{\dfrac{y^n}{a^m}}$

5- مختصر کیجیے۔

(i) $\sqrt{3}\times\sqrt{7}$ (ii) $\sqrt[5]{4}\times\sqrt[5]{128}$ (iii) $\sqrt[5]{81}\times\sqrt[5]{27}$

(iv) $\sqrt{2}\div\sqrt[9]{32}$ (v) $\sqrt[5]{118}\div\sqrt[5]{2}$ (vi) $\sqrt{27}\div\sqrt{81}$

(vii) $a^{1/4}\times a^{2/3}$ (viii) $x^{6/7}\times y^{1/4}$ (ix) $(x^{3/4}y^{1/6})^6$

(x) $(x^3y^2)^{1/2}\times(y^3x^4)^{-1/3}$ (xi) $(x^3y^2)^{1/4}\times(x^{1/3}y)^{3/4}$

(xii) $(a^{1/4}b^{1/3})^{-1/2}\div(a^{1/3}b^{1/4})^{-5}$ (xiii) $(x^2y^3)^{1/5}\times(x^{1/3}y^2)^{1/4}$

6.2 قوت نماؤں کے قوانین / انڈیسیز LAWS OF EXPONENTS/INDICES

6.2.1 اساس، قوت نما اور قیمت Base, Exponent and Value

بعض اوقات درج ذیل اقسام کی ضرب ہمارے علم میں آتی ہیں۔

$$3\times3,\ 3\times3\times3,\ 3\times3\times3\times3,\ 3\times3\times3\times3\times3$$

انہیں مختصر شکل میں ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$3\times3 = 3^2$$
$$3\times3\times3 = 3^3$$
$$3\times3\times3\times3 = 3^4$$
$$3\times3\times3\times3\times3 = 3^5$$

اور اسی طرح یہ سلسلہ جاری رہتا ہے۔

کسی حقیقی عدد 'a' اور مثبت صحیح عدد 'n' کے لیے ہم لکھتے ہیں۔

$$a^n = a\times a\times a\times a \ldots\times a \ (n \text{ مرتبہ})$$

یہاں 'a' کو ہم اساس (Base) اور n کو قوت نما یا انڈیکس (Exponents or index) کہتے ہیں۔

تعریف کے مطابق ہم $a^o = 1$ لیتے ہیں۔ پس $2^o = 1, 3^o = 1, (0.5)^o = 1$ اور اسی طرح یہ سلسلہ جاری رہتا ہے۔

نوٹ: "a^n" کو a کی n ویں (n^{th}) پاور کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر

$$3\times3\times3 = 3^3$$
$$4\times4\times4\times4\times4 = 4^5$$
$$7\times7\times7\times7 = 7^4$$
$$8\times8 = 8^2$$

6.2.2 قوت نما کے قوانین اور ان کا استعمال Laws of Exponents and their Applications

1- قوتوں کی جمع کا قانون Law of Sum of Powers

کسی حقیقی عدد a جبکہ $a \neq 0$ اور صحیح اعداد m اور n کے لیے اس قانون کو علامتی طور پر اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال 1:-

مختصر کیجیے۔ $x^3 \times x^4 \times x^6$

حل:-

$$\begin{aligned} x^3 \times x^4 \times x^6 &= x^{3+4+6} \\ &= x^{13} \end{aligned}$$

مثال 2:-

مختصر کیجیے۔ $x^3 \times y^4 \times x^4 \times y^3 \times x^5 \times y^5$

حل:-

$$\begin{aligned} x^3 \times y^4 \times x^4 \times y^3 \times x^5 \times y^5 &= x^3 \times x^4 \times x^5 \times y^3 \times y^4 \times y^5 \\ &= x^{3+4+5} \times y^{3+4+5} \\ &= x^{12} \times y^{12} \\ &= x^{12}\ y^{12} \end{aligned}$$

مثال 3:-

مختصر کیجیے۔ $x^3 \times y^4 \times x^{-2} \times y^{-2}$

حل:-

$$\begin{aligned} x^3 \times y^4 \times x^{-2} \times y^{-2} &= x^3 \times x^{-2} \times y^4 \times y^{-2} \\ &= x^{3-2} \times y^{4-2} \\ &= xy^2 \end{aligned}$$

2- قوتوں کی تفریق کے قوانین Laws of Subtraction of Powers

اگر a ایک حقیقی عدد ہو جبکہ $a \neq 0$ اور m, n کوئی سے دو صحیح اعداد ہوں، تو

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

اس کی تین صورتیں ہیں۔

نمبر 1-

جب: $m > n$

$$\begin{aligned} \frac{a^m}{a^n} &= \frac{a \times a \times a \times \cdots \text{ اجزاء تک } m}{a \times a \times a \times \cdots \text{ اجزاء تک } n} \\ &= a \times a \times a \times \cdots \text{ اجزاء تک } (m-n) \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

نمبر-2

جب: $m = n$

اس صورت میں
$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = \frac{a \times a \times a \times \cdots \text{ اجزاء تک } m}{a \times a \times a \times \cdots \text{ اجزاء تک } m}$$

$$= 1$$

$$= a^o$$

$$= a^{m-m}$$

$$= a^{m-n} \left[\because m = n\right]$$

ہم a^{-n} کو اس طرح بیان کرتے ہیں $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ جبکہ n صحیح عدد ہے اور a حقیقی عدد ہے اور $a \neq 0$

نمبر-3

جب: $m < n$

اس صورت میں
$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times \cdots \text{ اجزاء تک } m}{a \times a \times a \times \cdots \text{ اجزاء تک } n}$$

$$= \frac{1}{a \times a \times a \times \cdots \text{ اجزاء تک } (n-m)}$$

$$= \frac{1}{a^{n-m}}$$

$$= a^{-(n-m)}$$

$$= a^{-n+m}$$

$$= a^{m-n}$$

پس $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ جب کہ $m < n$ یا $m = n$ یا $m > n$

مثال 1:- مختصر کیجئے۔

(i) $\dfrac{x^3 \times x^5 \times x^6}{x^2 \times x^4 \times x}$ (ii) $\dfrac{x^3 \times x^4}{x^2 \times x^5}$ (iii) $\dfrac{x^4 \times x^5 \times x^6}{x^5 \times x^6 \times x^8}$

حل:-

(i)
$$\frac{x^3 \times x^5 \times x^6}{x^2 \times x^4 \times x} = \frac{x^{3+5+6}}{x^{2+4+1}} = \frac{x^{14}}{x^7} = x^{14-7} = x^7$$

(ii)
$$\frac{x^3 \times x^4}{x^2 \times x^5} = \frac{x^{3+4}}{x^{2+5}} = \frac{x^7}{x^7} = x^{7-7} = x^0 = 1$$

(iii)
$$\frac{x^4 \times x^5 \times x^6}{x^5 \times x^6 \times x^8} = \frac{x^{4+5+6}}{x^{5+6+8}} = \frac{x^{15}}{x^{19}} = x^{15-19} = x^{-4}$$

مثال 2:- مختصر کیجئے۔

(i) $x^{1/5} \times x^{2/5}$ (ii) $(x^2 y^3)^{1/6}$ (iii) $\left(\dfrac{x^{2/3}}{y^{3/4}}\right)^{1/2}$

حل:-

(i)
$$x^{1/5} \times x^{2/5} = x^{1/5+2/5} = x^{\frac{1+2}{5}} = x^{\frac{3}{5}}$$

(ii)
$$(x^2 y^3)^{1/6} = x^{2/6} \times y^{3/6} = x^{1/3} y^{1/2}$$

(iii)
$$\left(\frac{x^{2/3}}{y^{3/4}}\right)^{1/2} = \frac{(x^{2/3})^{[illegible]}}{(y^{3/4})^{[illegible]}} = \frac{x^{1/3}}{y^{3/8}}$$

3- حاصل ضرب کی قوت کا قانون Law of Power of Product

اگر a, b حقیقی عدد ہوں اور $a, b \neq 0$ اور n صحیح عدد ہو، تو

$$(i)\ (a\,b)^n = a^n b^n$$

$$(ii)\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

مثال:- مختصر کیجئے۔

$(i)\ (x\,y)^3 \quad (ii)\ (x\,y)^6 \quad (iii)\ \left(\frac{x}{y}\right)^5 \quad (iv)\ \left(\frac{x}{y}\right)^4$

حل:-

$(i)\quad (x\,y)^3 = x^3 y^3$

$(ii)\quad (x\,y)^6 = x^6 y^6$

$(iii)\quad \left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5}$

$(iv)\quad \left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{x^4}{y^4}$

4- قوتوں کی قوت کا قانون Law of Power of Power

اگر a ایک حقیقی عدد ہو جبکہ $a \neq 0$ اور m, n کوئی سے دو صحیح اعداد ہوں، تو

$$(a^m)^n = a^{m\,n}$$

مثال:- مختصر کیجئے۔

حل:-

$(i)\ (x^3)^4 \quad (ii)\ (x^4)^6$

$(i)\quad (x^3)^4 = x^{3\times4} = x^{12}$

$(ii)\quad (x^4)^6 = x^{4\times6} = x^{24}$

مشق 6.2

1- درج ذیل میں اساس (Base) اور قوت نما (Exponent) لکھیے۔

(i) $16x^3$ (ii) x^9 (iii) $(4\,y)^3$

(iv) $(x-2)^3$ (v) $18x^5$ (vi) $5x^{3/2}\times x^{1/2}$

مختصر کیجئے اور جواب مثبت قوت نما میں لکھیے۔

2- $\sqrt{(a^2b^3)^6}$ **3-** $\sqrt[9]{(x^{-4}y^3)^{-3}}$ **4-** $(x^ay^{-b})^3\times(x^3y^2)^{-a}$

5- $\left(\dfrac{16x^2}{y^{-2}}\right)^{-1/4}$ **6-** $\left(\dfrac{27x^3}{8a^{-3}}\right)^{-2/3}$ **7-** $\left(\dfrac{a^{-1/2}}{4c^2}\right)^{-2}$

8- $\sqrt{a^{-2}b}\times 3\sqrt{ab^{-3}}$ **9-** $\left(\dfrac{a^{-3}}{b^{-2/3}c}\right)^{-3/2}\div\dfrac{ab^2c}{a^2c}$ **10-** $\dfrac{(a^4)^3\,(a^{-1}b)^{10}}{a^2b^7}$

11- $\dfrac{(x^3y)^3\;(2xy)^{-2}}{4x^{-4}y^{-5}}$ **12-** $\dfrac{(a^{-5})^3\times(ab)^{15}}{a^{-1}b^2}$ **13-** $a^5b^4c^2\div abc$

14- $(2ab^2)^2(3abc^2)^{-2}\div(ab)^{-4}(bca)^5$ **15-** $\dfrac{2^3\times 6^5}{3^{-3}\times 4^{-4}}$

16- $\dfrac{2^5\times 9^{-1}}{27^{-3}\times 8^{-3}}$ **17-** $(2^{-3}a^4b)^{-1}\times(4^{-2}b^{-5})$

حل کیجئے۔

18- $(3^2)^5\div 9^3\times 27^{-1}$ **19-** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}\div\left(\dfrac{4}{9}\right)^3\times\left(\dfrac{27}{16}\right)^{-1}$

20- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}\div\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-2}\times 27$ **21-** $\dfrac{5^4}{3^7}\times\left(\dfrac{9}{15}\right)^3\div\dfrac{27}{25}$

22- $a^{1/2}b^{2/3}\times a^{2/3}b^{1/4}$ **23-** $a^{2/3}b^{5/6}\times a^{1/2}b\div(ab)^{1/3}$

24- $(a^{1/2}b^{1/3}c^{1/4})^6$ **25-** $(a^{1/2}b^{1/3})^{4/3}\div(a^{1/3}b^{1/4})^{1/2}$

26- $a^{2/3}\times a^{1/2}\div a^{1/4}$

27- درج ذیل میں سے ہر ایک کو مختصر کیجئے۔

(i) $4^{3/5} \times 4^{1/5}$ (ii) $2^{1/8} \times 2^{3/8}$

(iii) $x^{3/4} \times x^{2/5}$ (iv) $5x^{1/3} \times 2x^{1/5}$

(v) $\frac{1}{2}y^{3/7} \times 4y^{2/7}$ (vi) $5x^{3/2} \times x^{1/2}$

28- درج ذیل میں سے ہر ایک کو مختصر کیجئے۔

(i) $a^{2/3}b^{3/4} \times a^{1/3}b^{3/4}$ (ii) $x^{3/5}y^{2/9} \times x^{1/5}y^{1/3}$

(iii) $2ab^{1/3} \times 3a^{3/5}b^{4/5}$ (iv) $6x^{3/7} \times \frac{1}{3}x^{1/4}y^{2/5}$

(v) $x^3y^{1/2}z^{1/3} \times x^{1/6}y^{1/3}z^{1/2}$

29- درج ذیل میں سے ہر ایک کو مختصر کیجئے۔

(i) $3^{1/2} \div 3^{1/3}$ (ii) $\frac{x^{4/4}}{x^{5/9}}$ (iii) $\frac{2x^{3/4}}{4x^{3/5}}$

(iv) $\frac{25y^{3/5}}{20y^{1/4}}$ (v) $x^3y^2 \div x^{4/3}y^{3/5}$ (vi) $a^{5/9}b^{2/3} \div a^{2/5}b^{2/5}$

(vii) $10x^{4/5}y \div 5x^{2/3}y^{1/4}$ (viii) $\frac{5a^{3/4}b^{3/5}}{20a^{1/5}b^{1/4}}$

6.3 سائنسی ترقیم SCIENTIFIC NOTATION

سائنس کی کچھ شاخوں میں ہم بہت بڑے اور بہت چھوٹے اعداد استعمال کرتے ہیں۔ روشنی کی رفتار 186000 میل (یا 29933.24 کلومیٹر) فی سیکنڈ یا 30,000,000,000 سینٹی میٹر فی سیکنڈ ہے۔ ہائیڈروجن ایٹم کا رداس 0.00000073 سینٹی میٹر بالترتیب بہت بڑے اور بہت چھوٹے اعداد کی مثالیں ہیں۔ ایکس رے (X-Ray) کا طول موج 0,0000001 سینٹی میٹر ایک اور بہت چھوٹے عدد کی مثال ہے۔

ان اعداد کو لکھنے کا ایک آسان طریقہ دریافت کیا گیا ہے جسے سائنسی ترقیم کہتے ہیں۔

اس طریقہ میں ایک عدد 'a' کو دو اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے جن میں ایک عدد صفر اور 10 کے درمیان ہوتا ہے اور دوسرا عدد 10 کے مثبت یا منفی قوت نما کی صورت میں ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$a = b \times 10^n$$

مثال 1:- درج ذیل کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

(i) 100 (ii) 1000 (iii) 10000 (iv) $\frac{1}{1000}$ (v) $\frac{1}{10000}$

حل:-

(i) $100 = 1 \times 10^2$

(ii) $1000 = 1 \times 10^3$

(iii) $10000 = 1 \times 10^4$

(iv) $\frac{1}{1000} = 1 \times 10^{-3}$

(v) $\frac{1}{10000} = 1 \times 10^{-4}$

مثال 2:- درج ذیل کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

(i) 190.85 (ii) 112.3 (iii) 12.35 (iv) 0.00018 (v) 0.0000281

حل:-

(i) $90.85 = \frac{9085}{100}$

$= 9085 \times 10^{-2}$

$= 9.085 \times 10^3 \times 10^{-2}$

$= 9.085 \times 10^{3-2}$

$= 9.085 \times 10^1$

(ii) 112.3

$$= \frac{1123}{10}$$
$$= 1123 \times 10^{-1}$$
$$= 1.123 \times 10^{3} \times 10^{-1}$$
$$= 1.123 \times 10^{2}$$
$$= 1.123 \times 10^{2}$$

(iii) 12.35

$$= \frac{1235}{100}$$
$$= 1235 \times 10^{-2}$$
$$= 1.235 \times 10^{+3} \times 10^{-2}$$
$$= 1.235 \times 10^{+3-2}$$
$$= 1.235 \times 10$$

(iv) 0.00018

$$= \frac{18}{100000}$$
$$= 18 \times 10^{-5}$$
$$= 1.8 \times 10 \times 10^{-5}$$
$$= 1.8 \times 10^{-4}$$

(v) 0.0000281

$$= \frac{281}{10000000}$$
$$= 281 \times 10^{-7}$$
$$= 2.81 \times 10^{2} \times 10^{-7}$$
$$= 2.81 \times 10^{2-7}$$
$$= 2.81 \times 10^{-5}$$

سائنسی ترقیم میں مثبت عدد کو دو اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے۔ اس میں پہلے عدد کو دیئے گئے عدد کے بائیں جانب سے پہلے ہندسے کے بعد اعشاریہ لگا کر حاصل کیا جاتا ہے۔

دوسرے عدد کے لیے 10 کا قوت نما حاصل کرنے کے لیے ہم ہندسوں کی تعداد کو گنتے ہیں جو کہ اعشاریہ کی اصل جگہ اور نئی جگہ کے درمیان آتے ہیں۔ اگر اعشاریہ کی جگہ بائیں جانب بدل دی جائے تو 10 کی قوت مثبت جب کہ دائیں جانب تبدیل کرنے سے 10 کی قوت منفی ہوگی۔

مثال 1:-

18.42×10^{-4} کو اعشاریہ کی شکل میں لکھیے۔

حل:-

$$18.42 \times 10^{-4}$$

$$= \frac{1842}{100} \times 10^{-4}$$

$$= \frac{1842}{100 \times 10^{4}}$$

$$= \frac{1842}{1000000}$$

$$= 0.001842$$

مثال 2:-

$50,00,000$ کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

حل:-

$$50,000,000$$

$$= 5 \times 10000000$$

$$= 5 \times 10^{7}$$

مشق 6.3

درج ذیل کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

1- 0.051
2- 89.99
3- 0.424
4- 2566324
5- 0.00000075

اعشاریہ کی شکل میں لکھیے۔

6- 0.86×10^4
7- 1.345×10^{-5}
8- 5.1×10^{-9}
9- 0.525×10^{-7}
10- 636.5×10^{-6}

مختصر کیجیے اور جواب سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

11- $\dfrac{0.96 \times 10^7}{2 \times 10^4}$
12- $\dfrac{2.61 \times 4 \times 10^8}{10^3}$
13- $\dfrac{521 \times 10^3 \times 12}{2 \times 10^2}$

-14 4.5×10^5 سینٹی میٹر کو میٹر میں تبدیل کیجیے اور جواب اعشاریہ کی شکل میں لکھیے۔

-15 زمین کا رداس 6400 کلومیٹر ہے اسے میٹر میں تبدیل کیجیے اور جواب کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

6.4 لوگارتھم LOGARITHM

الخوارزی نے لوگارتھم کے لیے کافی کام کیا۔ سترویں صدی میں جان نیپئر (John Napier) نے لوگارتھم میں مزید تبدیلیاں کیں اور اس کے لیے ایک جدول تیار کیا۔ اس نے ان جدول کے لیے ایک اساس 'e' تیار کیا۔ 'e' کی قیمت 2.7183 ہے۔
جان نیپئر اور ہینری برگز (Henry Briggs) نے اساس 10 کا جدول تیار کرنے کے لیے ایک منصوبہ بنایا۔ بعد میں ہینری برگز نے منصوبہ کو مکمل کیا اور اساس 10 میں جدول تیار کیے۔
سوئٹزرلینڈ کے جابسٹ برگی (Jobst Burgi) نے 1620 عیسوی میں اینٹی لوگارتھم کے لیے ایک جدول تیار کیا۔ اعداد پر حسابی عوامل کو ان جدولوں کے استعمال نے آسان بنا دیا۔

6.4.1 کسی عدد کا لوگارتھم Logarithm of a Number

فرض کیا، $a > 0$ اور $a \neq 1$ اگر y ایک مثبت عدد ہو تو

$x = \log_a y$ اگر اور صرف اگر $a^x = y$

یا $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$ ....(1)

($\log_a y$ کو اس طرح بیان کیجیے "y کا لوگارتھم اساس 'a' کے ساتھ")

مثال 1:- درج ذیل کو قوت نمائی شکل میں تبدیل کیجیے۔

حل:- (i) $\log_5 25 = 2$ (ii) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ (iii) $\log_{10} 1000 = 3$

$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$ کو استعمال کرتے ہوئے۔

(i) $\log_5 25 = 2 \Leftrightarrow 5^2 = 25$

(ii) $\log_3 \frac{1}{9} = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = \frac{1}{9}$

(iii) $\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1000$

مثال 2:- $\log_3(x+1) = 2$ کو حل کیجیے۔

حل:- $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$ کو استعمال کرتے ہوئے۔

$3^2 = x+1$ یا $x+1 = 9$

$\Rightarrow x = 8$

6.4.2 کامن لوگارتھم Common Logarithm

اساس 10 میں شمار کیا گیا لوگارتھم کامن لوگارتھم کہلاتا ہے۔ ہم $\log_{10} m$ کو صرف $\log m$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$10^1 = 10 \Leftrightarrow \log 10 = 1 \ ; \ 10^2 = 100 \Leftrightarrow \log 100 = 2$$

$$10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log 1000 = 3. etc.$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1 \Leftrightarrow \log (0.1) = -1,$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01 \Leftrightarrow \log (0.01) = -2$$

مثال :- حل کیجئے۔ (i) $\log \ (x-2) = 1$ (ii) $\log \ (x+3) = 2$

حل :-

$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$ کو استعمال کرتے ہوئے۔

$$(i) \ \log \ (x-2) = 1 \Rightarrow 10^1 = x-2 \Rightarrow x-2 = 10$$
$$\Rightarrow \boxed{x = 12}$$

$$(ii) \ \log \ (x+3) = 2 \Rightarrow x+3 = 10^2 \Rightarrow x+3 = 100$$
$$\Rightarrow \boxed{x = 97}$$

خاصہ اور مینٹیسا Characteristic and Mantissa of a Log of a Number

کسی عدد کے لوگارتھم کے دو حصے ہوتے ہیں۔ صحیح عددی حصے کو خاصہ (Charatiristic) اور کسری حصے کو مینٹیسا (mantissa) کہتے ہیں۔

مینٹیسا کو ہمیشہ مثبت لیا جاتا ہے۔ جبکہ خاصہ صفر، مثبت یا منفی ہوسکتا ہے۔ جب خاصہ منفی ہو تو ہم اس ہندسے پر لائن (Bar) لگا دیتے ہیں۔ جو خاصہ کو ظاہر کرتا ہے۔ یعنی ہم '2-' کو $\bar{2}$ لکھتے ہیں۔ $\bar{2}.7638$ کا مطلب $-2 + 0.7638$ ہے۔

6.4.3 عدد کا لوگارتھم معلوم کرنا Finding the Logarithm of a Number

عدد کا خاصہ Characteristic of a Number

فرض کیا عدد $m \times 10^p$ ہے تب خاصہ $'p'$ ہے یا

(i) اگر کوئی عدد ایک یا ایک سے زیادہ ہے تو اس کا خاصہ (Characteristic) کسر اعشاریہ (Decimal point) کی بائیں طرف کے ہندسوں کی تعداد سے ایک کم ہوگا۔

(ii) اگر کوئی عدد ایک سے کم ہو تو اس کا خاصہ منفی (Negative number) ہو گا جس کی عددی قیمت (Numerical value) عدد کے اعشاریہ اور پہلے نمایاں ہندسہ کے درمیان صفروں کی تعداد سے ایک زیادہ ہوگی۔

مثال کے طور پر:

عدد	معیاری شکل	خاصہ
5376.4	5.3764×10^3	3
537.64	5.3764×10^2	2
53.764	5.3764×10^1	1
5.3764	5.3764×10^0	0
0.5376	5.376×10^{-1}	$\bar{1}$
0.0537	5.37×10^{-2}	$\bar{2}$
0.00537	5.37×10^{-3}	$\bar{3}$
0.0000046	4.6×10^{-6}	$\bar{6}$

عدد کا مینٹیسا Mantissa of a Number

ہم مینٹیسا کو لوگارتھم کے جدول کی مدد سے معلوم کرتے ہیں۔ مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے کسی عدد میں نقطہ اعشاریہ کے مقام کی کوئی اہمیت نہیں ہوتی۔ ہم اپنے آپ کو صرف چار ہندسی عدد کے مینٹیسا معلوم کرنے تک پابند رکھتے ہیں۔ مثلاً

$\log(45), \log(.45), \log(.045), \log(.0045)$ کا مینٹیسا ایک ہی عدد ہے۔ مینٹیسا ہمیشہ صفر سے بڑا اور ایک سے چھوٹا عدد ہوتا ہے۔

(i) لوگارتھم کے جدول کی مدد سے 4385 کا مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے ہم 43 کی قطار میں سیدھا جاتے ہوئے عدد 8 کے کالم میں ایک عدد معلوم کرتے ہیں اس عدد میں پانچ کے کالم میں اسی قطار میں (Mean difference) معلوم کر کے جمع کرتے ہیں۔

پس 4385 کا مینٹیسا $.6420 = (6415+5).$ ہے۔

(ii) لوگارتھم کی مدد سے 438 کا مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے ہم 43 کی قطار میں سیدھا جاتے ہوئے 8 کے کالم میں عدد معلوم کرتے ہیں جو کہ 0.6415 ہے۔

(iii) لوگارتھم کی مدد سے 43 کا مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے ہم 43 کی قطار میں سیدھا جاتے ہوئے صفر کے کالم میں عدد معلوم کرتے ہیں جو کہ 0.6335 ہے۔

(iv) لوگارتھم کی مدد سے 4 کا مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے ہم 40 کی قطار میں سیدھا جاتے ہوئے صفر کے کالم میں عدد معلوم کرتے ہیں جو کہ 0.6021 ہے۔

پس ہمارے پاس:

$$\log 4385 = 3.6420 \quad , \quad \log 0.4385 = \bar{1}.6420$$
$$\log 438.5 = 2.6420 \quad , \quad \log 0.04385 = \bar{2}.6420$$
$$\log 43.85 = 1.6420 \quad , \quad \log 0.004385 = \bar{3}.6420$$
$$\log 4.385 = 0.6021 \quad , \quad \log 0.0004385 = \bar{4}.6420$$

اور $\log 43 = 1.6415$

$\log 4.3 = 0.6415$

مزید $\log 4 = 0.6021$

$\log .04 = \bar{2}.6021$

6.4.4 اینٹی لوگارتھم کا تصور Concept of Antilogarithm

$\log m = n$ سے مراد ہے کہ $m = n$ اینٹی لوگارتھم اسی طرح $\log 1000 = 3$ سے مراد ہے $1000 = 3$ اینٹی لوگارتھم

کسی عدد کا اینٹی لوگارتھم معلوم کرنے کے لیے ہم عدد کا کسری حصہ استعمال کرتے ہیں اور اینٹی لوگارتھم جدول کو اسی طرح پڑھتے ہیں جس طرح ہم لوگارتھم جدول پڑھتے ہیں۔

اینٹی لوگارتھم جدول سے متعلقہ عدد معلوم کرنے کے بعد ہم نقطہ اعشاریہ کو اس طرح لگاتے ہیں۔

نمبر1-

جب خاصہ 'n' ہو تو نقطہ اعشاریہ کو $(n+1)th$ ہندسہ کے بعد لگاتے ہیں۔
مثلاً اگر ہم 0.2346 اینٹی لوگارتھم معلوم کرنا چاہتے ہیں تو

(i) $= 0.2346$ عدد

$= n = 0$ خاصہ

$= .2346$ مینٹیسا

اینٹی لوگارتھم جدول سے مینٹیسا 2346. کے لیے 1724 ہے۔ چونکہ خاصہ صفر ہے یعنی $n = 0$، اس لیے نقطہ اعشاریہ $(0 + 1)th$ یا بائیں طرف سے پہلے ہندسہ کے بعد عدد 1724 میں لگایا جاتا ہے۔

پس $0.2346 = 1.724$ اینٹی لوگارتھم

(ii) اگر ہم 2.6019 اینٹی لوگارتھم معلوم کرنا چاہتے ہیں تو

$= 2.6019$ عدد

$= n = 2$ خاصہ

$= .6019$ مینٹیسا

اینٹی لوگارتھم جدول کی مدد سے مینٹیسا 6019. کے لیے عدد 3998 ہے۔ نقطہ اعشاریہ کو $(2 + 1)th$ ہندسہ یا عدد کے بائیں طرف سے تیسرے ہندسے کے بعد لگایا جائے گا۔

پس $2.6019 = 399.8$ اینٹی لوگارتھم

(iii) اسی طرح اگر ہم 5.2612 اینٹی لوگارتھم معلوم کرنا چاہتے ہیں تو

$= 5.2612$ عدد

$= n = 5$ خاصہ

$= .2612$ مینٹیسا

اینٹی لوگارتھم جدول کی مدد سے مینٹیسا 0.2612 کے لیے عدد 1825 ہے۔ نقطہ اعشاریہ $(5 + 1)th$ ہندسہ کے بعد عدد 1825 کے بائیں طرف سے چھٹے ہندسے کے بعد لگایا جائے گا۔

پس $5.2612 = 182500.00$ اینٹی لوگارتھم

عدد 1825 میں چار ہندسے ہیں اس لیے ہم اس عدد کے دائیں طرف دو صفر لگا کر اسے 6 ہندسی عدد بنا دیتے ہیں۔ ان دو صفر کے بعد نقطہ اعشاریہ لگایا جائے گا۔

نمبر 2-

جب خاصہ $\bar{n}$ ہو تو نقطہ اعشاریہ اس طرح لگایا جاتا ہے کہ پہلا نمایاں عدد n ویں درجہ پر ہوگا۔

مثلاً اگر ہم $\bar{1}.4356$ اینٹی لوگارتھم معلوم کرنا چاہتے ہوں تو

(i)

$$\text{عدد} = \bar{1}.4356$$
$$\text{خاصہ} = \bar{n} = \bar{1}$$
$$\text{مینٹیسا} = .4356$$

اینٹی لوگارتھم جدول کی مدد سے مینٹیسا 0.4356 کے لیے عدد 2727 ہے۔ چونکہ، $\bar{n} = \bar{1}$ اس سے پہلا نمایاں عدد نقطہ اعشاریہ سے پہلے درجہ پر ہوگا۔

پس $\bar{1}.4356 = 0.2727$ اینٹی لوگارتھم

(ii) اسی طرح اگر ہم $\bar{3}.1459$ اینٹی لوگارتھم معلوم کرنا چاہتے ہوں تو

$$\text{عدد} = \bar{3}.1459$$
$$\text{خاصہ} = \bar{n} = \bar{3}$$
$$\text{مینٹیسا} = .1459$$

اینٹی لوگارتھم جدول کی مدد سے مینٹیسا 0.1459 کے لیے عدد 1399 ہے۔ چونکہ، $\bar{n} = \bar{3}$ اس لیے ایک نمایاں عدد نقطہ اعشاریہ کے بعد تیسرے درجہ پر ہوگا۔

پس $\bar{3}.1459 = 0.001399$ اینٹی لوگارتھم

مثال 1:- قیمت معلوم کیجئے۔

(i) اینٹی لوگارتھم 0.654 (ii) اینٹی لوگارتھم 1.204

(iii) اینٹی لوگارتھم $\bar{1}.3612$ (iv) اینٹی لوگارتھم $\bar{3}.4568$

حل:-

(i) اینٹی لوگارتھم $(0.654) = 4.508$

(ii) اینٹی لوگارتھم $(1.204) = 16.00$

(iii) اینٹی لوگارتھم $(\bar{1}.3612) = 0.2297$

(iv) اینٹی لوگارتھم $(\bar{3}.4568) = 0.002863$

مثال 2:-

(i) $\bar{1}.3612, 3.1946, \bar{2}.0018$ اور $\bar{3}.4619$ کو جمع کیجئے۔

(ii) 2.1375 میں سے $\bar{4}.6342$ تفریق کیجئے۔

(iii) $\bar{3}.4103$ کو 6 سے ضرب دیجئے۔

(iv) $\bar{5}.1820$ کو 15 سے تقسیم کیجئے۔

حل:-

(i) $\bar{1}.3612+3.1946+\bar{2}.0018+\bar{3}.4619$

$$= -1+0.3612+3.1946-2+0.0018-3+0.4619$$

$$= -6+(.3612+3.1946+.0018+.4619)$$

$$= -6+(4.0195)$$

$$= -2+0.0195$$

$$= \bar{2}.0195$$

$$(ii)\ 2.1375-\bar{4}.6342 = 2.1375-[-4+.6342]$$
$$= 2.1375+4-.6342$$
$$= 6.1375-.6342$$
$$= 5.5033$$

$$(iii)\ \bar{3}.4103\times 6 = (-3+.4103)\times 6$$
$$= -18+2.4618$$
$$= (-18+2)+.4618$$
$$= -16+.4618$$
$$= \overline{16}.4618$$

$$(iv)\ (\bar{5}.1820)\div 15 = (-5.1820)\div 15$$
$$= (-5+.1820)\div 15$$
$$= -4.9180\div 15$$
$$= -0.3212$$
$$= -1+(1-(.3212))$$
$$= \bar{1}.6788$$

مثال 3:-

(i) اگر $\log x = 0.5019$ ہو تو x معلوم کیجیے۔

(ii) اگر $\log x = \bar{2}.5321$ ہو تو x معلوم کیجیے۔

حل:- (i) $\log x = 0.5019$

$\log x$ کا خاصہ $=0$

$\log x$ کا مینٹیسا $=0.5019$

اینٹی لوگارتھم کے جدول سے مینٹیسا کے لیے ہمارے پاس جو عدد ہے وہ

$$0.5019 = 3170+7 = 3177$$

چونکہ خاصہ صفر ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ $(0 + 1)$ ویں ہندسے یعنی 3 کے بعد لگایا جاتا ہے۔

$x =$ اینٹی لوگارتھم (0.0519)

$x = 3.177$

(ii) $\log x = \bar{2}.5321$

$\log x$ کا خاصہ $= \bar{2}$

$\log x$ کا مینٹسا $= .5321$

اب اینٹی لوگارتھم جدول میں ہمارے پاس مینٹیسا کے لیے عدد ہے۔

$.5321 = 3404 + 1 = 3405$

چونکہ خاصہ $\bar{2}$ ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ کو اس طرح لگایا جائے گا کہ ہمارے پاس پہلا نمایاں عدد اعشاریہ کے بعد دوسرے درجہ پر ہو۔

$x =$ اینٹی لوگارتھم $\bar{2}.5321$

$= 0.03405$

پس $x = 0.03405$

مشق 6.4

-1 درج ذیل میں دیئے گئے اعداد کا خاصہ لکھیے۔

(i) 6350 (ii) 2035.6 (iii) 2.057
(iv) 0.8657 (v) 0.0732 (vi) 0.000721

-2 درج ذیل کی قیمت لکھیے۔

(i) $\log 52.13$ (ii) $\log 6.304$ (iii) $\log 0.6127$
(iv) $\log 0.0057$ (v) $\log 0.00003$

-3 اگر $\log 6374 = 3.8044$ ہو تو درج ذیل کی قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $\log 6.374$ (ii) $\log 0.6374$ (iii) $\log 0.00637$

-4 (i) اگر $\log x = \bar{2}.0374$ ہو تو x کی قیمت معلوم کیجئے۔

(ii) اگر $\log x = 0.1597$ ہو تو x کی قیمت معلوم کیجئے۔

(iii) اگر $\log x = 4.4236$ ہو تو x کی قیمت معلوم کیجئے۔

6.5 لوگارتھم کے قوانین LAWS OF LOGARITHM

(i) $\log_a (m\,n) = \log_a m + \log_a n$

(ii) $\log_a \left(\dfrac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(iii) $\log_a m^n = n \log_a m$

ثبوت:

(i) اگر m اور n مثبت حقیقی اعداد ہوں اور a ایک ممکن اساس ہو تو فرض کیجئے کہ

$$x = \log_a m \;..........(i)$$
$$y = \log_a n \;..........(ii)$$

اس لیے $a^x = m, \;\; a^y = n$

پس $m\,n = a^x . a^y = a^{x+y}$

اس طرح $\log_a m\,n = x + y$

$$= x + y$$

x اور y کی قیمتیں (i) اور (ii) کی مدد سے درج کرنے سے $\boxed{\log_a m\,n = \log_a m + \log_a n}$

(ii) اگر m اور n مثبت حقیقی اعداد ہوں اور a ایک ممکن اساس ہے (جبکہ $a > 1$) تو فرض کیجئے کہ۔

$$x = \log_a m \,...(i)$$
$$y = \log_a n \,...(ii)$$

اس لیے $a^x = m, \;\; a^y = n$

$$\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y}$$
$$= a^x . a^{-y}$$
$$= a^{x-y}$$

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = x - y$$

x اور y کی قیمتیں (i) اور (ii) کی مدد سے درج کرنے سے $\boxed{\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n}$

(iii) فرض کیجئے کہ $x = \log_a m$

$$a^x = m$$

اور $(a^x)^n = m^n$

$$m^n = (a^x)^n$$

$$= a^{nx}$$

اس لیے $\log_a m^n = nx$

x کی قیمت درج کرنے سے $\boxed{\log_a m^n = n \log_a m}$

6.6 لوگارتھم کا استعمال APPLICATION OF LOGARITHM

اساس 10 میں لوگارتھم کو کامن لوگارتھم کہتے ہیں۔ ہم $\log_{10} m$ کو $\log m$ سے ظاہر کریں گے۔

مثال 1:- ثابت کیجئے۔

(i) $3\log 2 + \log 5 = \log 40$

(ii) $\log 2 + 2\log 5 - \log 3 - 2\log 7 = \log\left(\frac{50}{147}\right)$

(iii) $\log\left(\frac{9}{14}\right) + \log\left(\frac{35}{24}\right) - \log\left(\frac{15}{16}\right) = 0$

(iv) $7\log\left(\frac{16}{15}\right) + 5\log\left(\frac{25}{24}\right) + 3\log\left(\frac{81}{80}\right) = \log 2$

حل:-

$$(i)\ \ L.H.S = 3\log 2 + \log 5$$

$$= \log 2^3 + \log 5$$

$$= \log 8 + \log 5$$

$$= \log (8 \times 5)$$

$$= \log 40$$

$$= R.H.S$$

پس $3\log 2 + \log 5 = \log 40$

$$(ii)\ \ L.H.S\ \log 2 + 2\log 5 - \log 3 - 2\log 7$$

$$= \log 2 + \log 5^2 - (\log 3 + 2\log 7)$$

$$= \log 2 + \log 25 - (\log 3 + \log 7^2)$$

$$= \log(2 \times 25) - (\log 3 + \log 49)$$

$$= \log(50) - (\log 3 \times 49)$$

$$= \log 50 - \log 147$$

$$= \log\left(\frac{50}{147}\right)$$

$$= R.H.S$$

$$(iii)\ \ L.H.S = \log\left(\frac{9}{14}\right) + \log\left(\frac{35}{24}\right) - \log\left(\frac{15}{16}\right)$$

$$= \log\left(\frac{9}{14} \times \frac{35}{24}\right) - \log\left(\frac{15}{16}\right)$$

$$= \quad log\left(\frac{3}{2}\times\frac{5}{8}\right) - log\left(\frac{15}{16}\right)$$

$$= \quad log\left(\frac{15}{16}\right) - log\left(\frac{15}{16}\right)$$

$$= \quad 0$$

$$= \quad R.H.S$$

$$log\left(\frac{9}{14}\right) + log\left(\frac{35}{25}\right) - log\left(\frac{15}{16}\right) = 0$$ پس

(iv) $$L.H.S \quad = \quad 7\,log\left(\frac{16}{15}\right) + 5\,log\left(\frac{25}{24}\right) + 3\,log\left(\frac{81}{80}\right)$$

$$= \quad log\left(\frac{16}{15}\right)^{7} + log\left(\frac{25}{24}\right)^{5} + log\left(\frac{81}{80}\right)^{3}$$

$$= \quad log\left[\left(\frac{16}{15}\right)^{7} \times \left(\frac{25}{24}\right)^{5} \times \left(\frac{81}{80}\right)^{3}\right]$$

$$= \quad log\left[\left(\frac{2^4}{3\times 5}\right)^{7} \times \left(\frac{5^2}{2^3\times 3}\right)^{5} \times \left(\frac{3^4}{2^4\times 5}\right)^{3}\right]$$

$$= \quad log\left[\frac{2^{28}}{3^7\times 5^7} \times \frac{5^{10}}{2^{15}\times 3^5} \times \frac{3^{12}}{2^{12}\times 5^3}\right]$$

$$= \quad log\left[2^{28-15-12} \times 5^{10-7-3} \times 3^{12-7-5}\right]$$

$$= \quad log\left[2^{1} \times 5^{0} \times 3^{0}\right]$$

$$= \quad log\,[2\times 1\times 1]$$

$$= \quad log\,2$$

$$= \quad R.H.S$$

مثال 2:- حل کیجئے۔

(i) $\frac{\log 32}{\log 4}$　　(ii) $\frac{\log 27}{\log 9}$

حل:-

$$(i)\quad \frac{\log 32}{\log 4} = \frac{\log 2^5}{\log 2^2}$$

$$= \frac{5\log 2}{2\log 2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

پس　$$\frac{\log 32}{\log 4} = \frac{5}{2}$$

$$(ii)\quad \frac{\log 27}{\log 9} = \frac{\log 3^3}{\log 3^2}$$

$$= \frac{3\log 3}{2\log 3}$$

$$= \frac{3}{2}$$

پس　$$\frac{\log 27}{\log 9} = \frac{3}{2}$$

مثال 3:- لوگارتھم کا جدول استعمال کیے بغیر مختصر کیجئے۔

(i) $\log 5 + \log 6 - \log 2$

(ii) $\log 88.44 + \log 66.76 - \log 48.55$

(iii) $\log 7.44 + \log 5 + \log 99 - \log 7$

حل:-

$$(i)\quad \log 5 + \log 6 - \log 2$$

$$= \log(5\times 6) - \log 2$$

$$= \log\left(\frac{5\times 6}{2}\right)$$

(ii) $\log 88.44 + \log 66.76 - \log 48.55$

$$= \log(88.44 \times 66.76) - \log 48.55$$

$$= \log\left(\frac{88.44 \times 66.76}{48.55}\right)$$

(iii) $\log 7.44 + \log 5 + \log 99 - \log 7$

$$= \log(7.44 \times 5 \times 99) - \log 7$$

$$= \log\left(\frac{7.44 \times 5 \times 99}{7}\right)$$

مثال 4:- $\dfrac{25.36 \times 2.4569}{847.5}$ کو لوگارتھم کے جدول کی مدد سے حل کیجئے۔

حل:- فرض کیا: $x = \dfrac{25.36 \times 2.4569}{847.5}$

تب $\log x = \log\left(\dfrac{25.36 \times 2.4569}{847.5}\right)$

$$= \log(25.36 \times 2.4569) - \log(847.5)$$

$$= \log(25.36) + \log(2.4569) - \log(847.5)$$

$$= 1.4041 + 0.3903 - 2.9281$$

$$= -1.1337 = -1 - 0.1337$$

$$= -1 - 1 + 1 - 0.1337$$

$$= -2 + 0.8663$$

$x =$ اینٹی لوگارتھم $(\bar{2}.8663)$

$$x = 0.07351$$

مثال 5:-

$\dfrac{8492\times 3.72}{47.82\times 52.24}$ کو لوگارتھم کے جدول کی مدد سے حل کیجئے۔

حل:- فرض کیا:
$$x = \frac{8492\times 3.72}{47.8\times 52.24}$$

تب
$$\log x = \log\left(\frac{8492\times 3.72}{47.8\times 52.24}\right)$$
$$= \log(8432\times 3.72) - \log(47.8\times 52.24)$$
$$= \log 8492 + \log 3.72 - (\log 47.8 + \log 52.24)$$
$$= \log 8492 + \log 3.72 - \log 47.8 - \log 52.24$$
$$= 3.9290 + 0.5705 - 1.6794 - 1.7180$$
$$= 4.4995 - 3.3974$$
$$= 1.1021$$

$x =$ اینٹی لوگارتھم (1.1021)

$= 12.65$

پس دی ہوئی مساوی کی قیمت $= 12.65$

مشق 6.5

-1 حل کیجیے۔

(i) $\frac{\log 81}{\log 9}$ (ii) $\frac{\log 36}{\log 6}$ (iii) $\frac{\log 243}{\log 9}$

-2 حل کیجیے۔

(i) $\log 5 + \log 4 + \log 3 - \log 6$

(ii) $\log 5 + \log 20 + \log 24 + \log 25 - \log 60$

(iii) $2\log 3 + 3\log 4 + 4\log 5 - 2\log 6$

(iv) $2\log 5 + \log 8 - \frac{1}{2}\log 4$

(v) $\log 200 + \log 5$

(جبکہ $\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$)

-3 لوگارتھم کا جدول استعمال کیے بغیر حل کیجیے۔

(i) $\log 1.3472 + \log 22.79 - \log 5$

(ii) $\log 22.13 + \log 0.354 + \log 7 - \log 3$

(iii) $\log 57.86 + \log 4.385 - \log 2.391 - \log 3.072$

-4 لوگارتھم کے جدول کی مدد سے حل کیجیے۔

(i) $\frac{2.38 \times 3.901}{4.83}$ (ii) $\frac{8.67 \times 3.94}{1.78}$

(iii) $\frac{25.36 \times 3.4569}{9.87 \times 8.93}$

5- ثابت کیجئے۔

(i) $log\left(\frac{a^2}{bc}\right)+log\left(\frac{b^2}{ca}\right)+log\left(\frac{c^2}{ab}\right)=0$

(ii) $3\,log\,2+2\,log\,3+log\,5=log\,360$

(iii) $5\,log\,3-log\,9=log\,27$

(iv) $log\left(\frac{75}{16}\right)+log\left(\frac{32}{243}\right)-2\,log\left(\frac{5}{9}\right)=log2$

(v) $2\,log\left(\frac{11}{13}\right)+log\left(\frac{130}{77}\right)-log\left(\frac{55}{91}\right)=log2$

6- ثابت کیجئے۔ $3\,log\,4+2\,log\,5-\frac{1}{3}log\,64-\frac{1}{2}log\,16=2$

7- ثابت کیجئے۔ $log\,(1\times 2\times 3)=log\,1+log\,2+log\,3$

8- لوگارتھم کا جدول استعمال کیجئے اور درج ذیل کو حل کیجئے۔

(i) $69.13\times 0.34\times 0.014$ (ii) $\frac{8.67\times 3.94}{1.78}$ (iii) $\frac{4}{3}\times 3.142\times (1.5)^3$

(iv) $\frac{(25.36)^2\times (0.4569)}{847.5}$ (v) $\frac{0.9876\times (16.42)^2}{(4.567)^{1/3}}$

(vi) $\sqrt{\frac{3\sqrt{0.0125}\times\sqrt{31.15}}{0.00081}}$ (vii) $\frac{(6.45)^3\times (0.00034)^{1/3}\times (981.9)}{(9.37)^2\times (8.93)^{1/4}\times (0.0617)}$

(viii) $\frac{(0.0437)^{2/3}\times (1.407)^2}{(0.0015)^{1/3}\times (1.235)^{1/7}}$

9- اگر $v=\sqrt{\frac{g\,\ell}{2\pi}}$ ہو تو v معلوم کیجئے جبکہ $\ell=150,\ g=32.16,\ \pi=3.142$

10- اگر $H=\frac{I^2Rt}{4.2}$ ہو تو H معلوم کیجئے جبکہ $I=1.3,\ R=6.7$ اور $t=25$

11- اگر $h=\frac{v}{\pi(R^2-r^2)}$ ہو تو h معلوم کیجئے جبکہ $R=83.6, r=62.4$ اور $v=1190,$ $\pi=3.14$

جائزہ مشق 6

-1 صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) $\sqrt{3}$ کیسا عدد ہے؟

(a) ناطق عدد (b) غیر ناطق عدد

(c) قدرتی عدد (d) صحیح عدد

(ii) $\sqrt[3]{7}$ کو کیا کہتے ہیں؟

(a) جذر (b) مجذور

(c) ناطق عدد (d) صحیح عدد

(iii) $\sqrt{3}$ میں 3 کو کیا کہتے ہیں؟

(a) جذر (b) مجذور

(c) صحیح عدد (d) قدرتی عدد

(iv) a^n میں n کو کیا کہتے ہیں؟

(a) جذر (b) مجذور

(c) قوت نما (d) اساس

(v) 4^5 میں 4 کو کیا کہتے ہیں؟

(a) اساس (b) قوت نما

(c) صحیح عدد (d) جذر

(vi) اساس 10 میں حل کیے گئے لوگارتھم کو کیا کہتے ہیں؟

(a) مینٹیسا (b) کامن لوگارتھم

(c) خاصہ (d) قدرتی عدد

(vii) کسی عدد کے لوگارتھم میں صحیح عدد والے حصہ کو کیا کہتے ہیں؟

(a) خاصہ (b) مینٹیسا

(c) اعشاریہ والا حصہ (d) حقیقی حصہ

(viii) کسی عدد کے لوگارتھم میں کسری حصہ کو کیا کہتے ہیں؟

(a) خاصہ (b) مینٹیسا

(c) ناطق عدد (d) حقیقی حصہ

(ix) $\sqrt{\sqrt{2}} = ?$

(a) 2^2 (b) 2

(c) $2^{1/2}$ (d) $2^{1/4}$

(x) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ایک جذر نہیں ہے کیونکہ $2+\sqrt{3}$ ایک

(a) غیر ناطق عدد ہے (b) ناطق عدد ہے

(c) صحیح عدد ہے (d) جذر ہے

-2 خالی جگہ پر کیجئے۔

(i) اگر $\sqrt[n]{a}$ غیر ناطق عدد ہو جبکہ a ناطق عدد ہو تو $\sqrt[n]{a}$ کو ______________ کہتے ہیں۔

(ii) علامت $\sqrt[n]{\ }$ کو ______________ کہتے ہیں۔

(iii) 3^5 میں 5 کو ______________ کہتے ہیں۔

(iv) a^n میں a کو ______________ کہتے ہیں۔

(v) اساس 10 میں حل لوگارتھم کو ______________ کہتے ہیں۔

(vi) کسی عدد میں لوگارتھم کے دو حصے ہوتے ہیں۔ صحیح عددی حصے کو ______________ کہتے ہیں۔

(vii) کسی عدد کے لوگارتھم میں کسری حصہ کو ______________ کہتے ہیں۔

-3 مختصر کیجئے۔

(i) $(x^5y^3)^{1/2} \times (y^7x^3)^{-1/3}$

(ii) $(a^{1/4}b^{1/3})^{-1/2} \div (a^{1/3}b^{1/4})^{-3}$

-4 حل کیجئے۔

(i) $x^{2/3}y^{5/8} \times y^{1/2} \div (xy)^{1/3}$

(ii) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \div \left(\frac{4}{25}\right) \times 625$

-5 ثابت کیجئے $\log\frac{(3\times4\times5)}{7} = \log3 + \log4 + \log5 - \log7$

-6 درج ذیل کو لوگارتھم جدول کی مدد سے حل کیجئے۔

(i) $62.14 \times 0.32 \times 0.015$

(ii) $\frac{3.64 \times 3.94}{2.78}$

(iii) $\frac{(13.26)^2 \times (0.4564)}{325.5}$

خلاصہ

- اگر $\sqrt[n]{a}$ غیر ناطق عدد ہو جبکہ a ایک ناطق عدد ہے تو $\sqrt[n]{a}$, a کا n واں جذر کہلاتا ہے۔

- علامت $\sqrt[n]{\ }$ جذر کی علامت کہلاتی ہے۔ جس کا انڈیکس n ہے۔ $\sqrt[n]{a}$ میں a کو مجذور کہتے ہیں۔

- کسی حقیقی عدد a اور مثبت صحیح عدد n کے لیے ہم a^n کو بیان کرتے ہیں۔

$$a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a \ (n \text{ مرتبہ})$$

یہاں $'a'$ کو اساس اور n کو قوت نما کہتے ہیں۔

- اساس 10 میں حل کیے گئے لوگارتھم کو کامن لوگارتھم کہتے ہیں۔

- کسی عدد کے لوگارتھم کے دو حصے ہوتے ہیں۔ صحیح حصہ کو خاصہ اور کسری حصہ کو مینٹیسا کہتے ہیں۔

- سائنسی ترقیم ایک طریقہ تحریر ہے جس میں بہت بڑے اور بہت چھوٹے عدد کو $a = b \times 10^n$ کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔

- ایسا عدد جس کا مربع ایک غیر منفی عدد ہو حقیقی عدد کہلاتا ہے۔