

اعداد کے جمعی اور ضربی سلسلے

ARITHMETIC AND GEOMETRIC SEQUENCES

- ◀ اعداد کا سلسلہ
- ◀ اعداد کا جمعی سلسلہ
- ◀ جمعی وسط
- ◀ اعداد کا ضربی سلسلہ
- ◀ ضربی وسط

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- ◀ اعداد کا سلسلہ اور اس کے ارکان کیا ہیں۔
- ◀ کہ اعداد کا سلسلہ ایک قاعدہ یا استقرائی تعریف کے تحت ہے۔
- ◀ اعداد کا سلسلہ اعداد کا جمعی سلسلہ کیا ہے۔
- ◀ کسی جمعی سلسلے کی n ویں رقم کیا ہے۔
- ◀ جمعی سلسلوں پر مبنی سوالات کیسے حل کرتے ہیں۔
- ◀ کہ دو اعداد کے درمیان جمعی وسط کیسے معلوم کر سکتے ہیں۔
- ◀ دو اعداد کے درمیان n جمعی وسط کیسے معلوم کر سکتے ہیں۔
- ◀ کہ ضربی سلسلے کی پہچان کیا ہے۔
- ◀ کہ ہندسی سیکوینس کی n th یا نمائندہ رکن (General Term) کیسے معلوم کی جاتی ہے۔
- ◀ ضربی سلسلہ پر مبنی سوالات کیسے معلوم کر سکتے ہیں۔
- ◀ کہ دو اعداد کے درمیان ضربی وسط کیسے معلوم کیا جاسکتا ہے۔
- ◀ کہ دو اعداد کے درمیان n ضربی وسط کیسے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

7.1 اعداد کا سلسلہ Sequence (progression)

روزمرہ زندگی میں ہم اکثر مشاہدہ کرتے ہیں کہ چیزیں ایک مقررہ مقدار سے سلسلہ وار بڑھتی یا کم ہوتی ہیں۔ مثلاً

- 1- سال میں دن ہفتہ وار 7 ایام کے حساب سے گزرتے ہیں۔
- 2- ہماری عمر ہر سال 12 ماہ کے حساب سے بڑھتی ہے۔
- 3- کسی شے کی قیمت مقررہ مقدار سے بڑھتی جاتی ہے جیسے جیسے آپ اس کی تعداد میں ایک ایک کر کے اضافہ کرتے چلے جاتے ہیں۔

ہماری زندگی میں ایسے معاملات کے مطالعہ کے لیے آئیے ہم سلسلہ کے تصور پر غور کرتے ہیں۔ ”ایک عددی سلسلہ، مخصوص قاعدہ کے مطابق لکھے گئے اعداد کی ترتیب ہوتی ہے“۔ عددی سلسلے کو انگریزی میں سیکوینس یا پروگریشن (Sequence or Progression) کہتے ہیں۔

اعداد کے درج ذیل نمونہ جات (Number Pattern) پر غور کیجئے۔

(i) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

(ii) $2, 4, 6, 8, 10, \dots$

(iii) $1, 4, 9, 16, 25, \dots$

(iv) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

(v) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

اعداد کے ان دیئے گئے سلسلوں سے یہ بات مشاہدہ کی جاسکتی ہے کہ ہر آنے والا رکن (Term) خاص قاعدہ کے تحت معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اس قاعدہ کے مطابق ایک رکن کے بعد آنے والا رکن معلوم کیا جاسکتا ہے۔ دی گئی مثالوں میں

- (i) میں قاعدہ یہ ہے کہ '1' سے شروع کر کے ہر رکن میں '2' جمع کرنے سے آنے والا رکن حاصل ہوتا ہے۔
- (ii) میں قاعدہ یہ ہے کہ '2' سے شروع کر کے ہر رکن کی رقم میں '2' جمع کرنے سے آنے والا رکن حاصل ہوتا ہے۔

(iii) میں قاعدہ یہ ہے کہ سلسلہ کی ہر رقم قدرتی اعداد کا مربع ہے۔

(iv) میں قاعدہ یہ ہے کہ '1' سے شروع کر کے اگلی رقم (Next Term) کو حاصل کرنے کے لیے کچھلی رقم

(Preceding Term) کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دی گئی۔

(i) تا (iv) میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہر ایک، ایک عددی سلسلہ (Number Sequence) ہے۔ یہی اعداد اس سلسلہ کو

(Sequence) کی رقم (Terms) کہلاتے ہیں۔

کسی بھی سلسلہ کو ظاہر کرنے کے لیے علامت a_n یا $\{a_n\}$ یا $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ استعمال ہوتی ہے۔

(آخر میں دیئے نقاط ... وغیرہ وغیرہ کہے جاتے ہیں)۔

$$a_1 = \text{پہلی رقم} = \text{First term}$$

$$a_2 = \text{دوسری رقم} = \text{Second term}$$

$$a_3 = \text{تیسری رقم} = \text{Third term}$$

.....

$$a_n = \text{نمائندہ رقم یا } n^{\text{th}} \text{ term or general term}$$

7.1.1 محدود اور غیر محدود سلسلے Finite and Infinite Sequences

درج ذیل مترتب اعداد پر غور کیجئے۔

$$(i) 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$(ii) 1, 3, 5, 7, \dots, 15$$

$$(iii) 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

$$(iv) 2, 4, 6, 8, \dots, 20$$

$$(v) 1, 4, 7, 10, \dots$$

$$(vi) 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$$

اگر کسی سلسلہ میں آخری رقم موجود ہو تو یہ محدود سلسلہ کہلاتا ہے۔ جیسا کہ اوپر مثالوں میں (ii) اور (iv) محدود سلسلے ہیں۔

اگر کسی سلسلہ میں آخری رقم (Last Term) موجود نہیں تو یہ لامحدود سلسلہ کہلاتا ہے۔ جیسا کہ اوپر مثالوں میں (i)، (iii)، (v)،

اور (vi) لامحدود سلسلے (Infinite Sequences) ہیں۔

7.1.2 قاعدہ کے تحت سیکوینس کی بناوٹ

آئیے اب ہم سلسلہ کو n ویں رقم (n th term) کی مدد سے لکھتے ہیں اگر

$$\text{اگر } a_n = 2n + 3 \text{ جبکہ } n = 1, 2, 3, \dots, 8 \text{ ہو تو}$$

$$a_1 = 2 \times 1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$a_2 = 2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$a_3 = 2 \times 3 + 3 = 6 + 3 = 9$$

$$a_4 = 2 \times 4 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$a_5 = 2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$$

$$a_6 = 2 \times 6 + 3 = 12 + 3 = 15$$

$$a_7 = 2 \times 7 + 3 = 14 + 3 = 17$$

$$a_8 = 2 \times 8 + 3 = 16 + 3 = 19$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ کی مدد سے سلسلہ 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 حاصل ہوتا ہے

جس میں رقوم کا سلسلہ $\{a_n\}$ میں n کی جگہ 1, 2, 3, ..., 8 رکھنے سے حاصل ہونیں۔

مثلاً

$$\text{اگر } a_n = (-1)^{n+1} (n+3) \text{ اور } n = 1, 2, 3, 4 \text{ ہو تو}$$

$$a_1 = (-1)^{1+1} (1+3) = (-1)^2 (4) = 1 \times 4 = 4$$

$$a_2 = (-1)^{2+1} (2+3) = (-1)^3 (5) = -1 \times 5 = -5$$

$$a_3 = (-1)^{3+1} (3+3) = (-1)^4 (6) = 1 \times 6 = 6$$

$$a_4 = (-1)^{4+1} (4+3) = (-1)^5 (7) = -1 \times 7 = -7$$

لہذا سلسلہ 4, -5, 6, -7 حاصل ہوتا ہے۔

ہم n ویں رقم میں n کی مخصوص قیمت درج کر کے مطلوبہ رقم لکھ سکتے ہیں۔

مشق 7.1

1- درج ذیل کی پہلی تین رقوم (Terms) لکھیے۔

(i) $a_n = n + 3$

(ii) $a_n = (-1)^n n^3$

(iii) $a_n = 3n + 5$

(iv) $a_n = \frac{n+1}{2n+5}$

(v) $a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$

(vi) $a_n = n + 3 = 2$

(vii) $a_n = \frac{1}{3^n}$

(viii) $a_n = 3n - 5$

(ix) $a_n = (n+1)a_{n-1}, a_1 = 1$

2- درج ذیل سلسلوں کی نشاندہی کی گئی رقوم معلوم کیجئے۔

(i) 2, 6, 11, 17, ..., a_8

(ii) 1, 3, 12, 60, ..., a_7

(iii) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, a_6$

(iv) -1, 1, 3, 5, ..., a_9

(v) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \dots, a_5$

(vi) 1, -3, 5, -7, ..., a_9

3- مندرجہ ذیل سلسلوں میں اگلی چار رقوم لکھیے۔

(i) 12, 16, 21, 27, ...

(ii) 1, 3, 7, 15, 31, ...

(iii) -1, 2, 12, 40, ...

(iv) 9, 11, 14, 17, 19, 22, ...

(v) 4, 8, 12, 16, ...

(vi) -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, ...

7.2 جمعی سلسلہ (Arithmetic Sequence (progression))

جمعی سلسلہ (مخفف A.P) اعداد کی ایسی ترتیب ہوتی ہے جس میں پچھلی رقم سے اگلی رقم ایک قدر مشترک (Common difference) جمع کر کے حاصل کی جاتی ہے۔

فرض کیا کسی جمعی سلسلہ میں 'a' پہلی رقم اور 'd' قدر مشترک (Common difference) ہو تو اس کی دوسری رقم $a + d$ جبکہ تیسری رقم $a + 2d$ ہوتی ہے۔ ان میں سے ہر رقم میں 'd' کا عددی سر رقم کی حیثیت میں سے '1' کم ہے۔ اس طرح $a + 9d$ 10 ویں رقم کو ظاہر کرتی ہے۔

چونکہ n ویں رقم پہلی رقم کے بعد (n - 1) مقام پر آتی ہے لہذا یہ رقم d کا عددی سر (n - 1) رکھنے سے حاصل ہوگی۔

$$n \text{ ویں رقم} = a_n = a + (n - 1)d \quad (\text{جنرل ٹرم}) \text{ نمائندہ ٹرم}$$

اگر $n = 12$ ہو تو $12 = a_{12} = a + (12 - 1)d$

$$= a + 11d$$

مثال 1:- اس A.P میں رقم اور 14 ویں رقم معلوم کیجئے جس کی پہلی رقم 2 اور مشترکہ قدر

(Common difference) 5 ہے۔

$$a_1 = a = 2, d = 5$$

حل :- چونکہ

$$a_n = a + (n-1)d$$

ہم جانتے ہیں

$$= 2 + (n-1)5$$

$$= 2 + 5n - 5$$

$$= 2 - 5 + 5n$$

$$= 5n - 3$$

$$n \text{ ویں رقم } = a_n = 5n - 3$$

اب $n = 14$ رکھنے سے

$$a_{14} = a + (14-1)d$$

$$= 2 + 13 \times 5$$

$$= 2 + 65$$

$$= 67$$

$$a_{14} = 67$$

مثال 2:- اگر کسی جمعی سلسلہ کی 5 ویں رقم 16 اور 20 ویں رقم 46 ہو تو اس کی 15 ویں رقم کیا ہوگی۔

$$a_5 = 16 \quad \text{اور} \quad a_{20} = 46$$

حل :- چونکہ

$$a_n = a + (n-1)d \quad \dots\dots\dots (i) \quad \text{چونکہ}$$

اس لیے مساوات (i) میں $n = 5$ رکھنے سے

$$a_5 = a + (5-1)d$$

$$16 = a + 4d \quad \dots\dots\dots (ii)$$

مساوات (i) میں $n = 20$ رکھنے سے

$$a_{20} = a + (20-1)d$$

$$46 = a + 19d \quad \dots\dots\dots (iii)$$

مساوات (ii) کو (iii) میں سے تفریق کرنے سے

$$46 - 16 = a - a + 19d - 4d$$

$$30 = 15d \Rightarrow \boxed{d = 2}$$

$d = 2$ مساوات (ii) میں رکھنے سے

$$16 = a + 4 \times 2$$

$$16 = a + 8 \Rightarrow 16 - 8 = a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 8}$$

مساوات (i) میں $n = 15$, $d = 2$ اور $a = 8$ رکھنے سے

$$a_{15} = a + (15 - 1)d$$

$$= 8 + 14 \times 2$$

$$= 8 + 28$$

$$= 36$$

$$\boxed{a_{15} = 36}$$

لہذا

مثال 3:- جمعی سلسلہ میں رقم کی تعداد معلوم کیجئے۔

$$\text{جبکہ } a_1 = 3, d = 4, a_n = 59$$

حل:- ہمیں معلوم ہے کہ $a_1 = a = 3, d = 4, a_n = 59$

$$a_n = a + (n - 1)d \quad \text{چونکہ}$$

$$59 = 3 + (n - 1)4 \quad \text{اس لیے}$$

$$= 3 + 4n - 4$$

$$= 4n - 1$$

$$60 = 4n$$

$$n = \frac{60}{4} = 15$$

$$\boxed{n = 15}$$

مثال 4:- اگر $a_{n-3} = 2n - 12$ ہو تو a_n معلوم کریں۔

حل :- ہمیں معلوم ہے کہ $a_{n-3} = 2n - 12$

n کی جگہ $n + 3$ رکھنے سے

$$a_{n+3-3} = 2(n+3) - 12$$

$$a_n = 2n + 6 - 12$$

$$= 2n - 6$$

$$\boxed{a_n = 2n - 6}$$

مشق 7.2

1- مندرجہ ذیل میں مطلوبہ رقم معلوم کریں۔

(i) 61 ویں رقم، $3, 7, 11, \dots$

(ii) $-4, -7, -10, \dots, a_{19}$

(iii) 45 ویں رقم، $6, 4, 2, \dots$

(iv) $9, 14, 19, \dots, a_{14}$

(v) $11, 6, 1, \dots, a_{18}$

2- جمعی سلسلہ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے نامعلوم عنصر (Element) معلوم کیجئے۔

$$a_n = a + (n-1)d$$

(i) $a = 2, a_n = 402, n = 26,$

(ii) $a_n = 81, d = -3, n = 18$

(iii) $a = 5, a_n = 61, n = 15$

(iv) $a = 16, a_n = 0, d = -\frac{1}{4}$

(v) $a = 10, a_n = 400, d = 5$

(vi) $a_n = 261, d = 4, n = 18$

3- جمعی سلسلہ کی 15 ویں رقم معلوم کریں جبکہ تیسری رقم 8 اور مشترکہ قدر (Common difference) $\frac{1}{3}$ ہے۔

4- جمعی سلسلہ $6, 2, -2, \dots$ کی کونسی رقم -146 ہے؟

5- جمعی سلسلہ $5, 2, -1, \dots$ کی کونسی رقم -118 ہے؟

6- جمعی سلسلہ کی کتنی رقم (Terms) ہیں کہ جس میں $a_1 = a = 11, a_n = 68, d = 3$ ۔

7- جمعی سلسلہ $2-x, 3-2x, 4-3x, \dots$ کی 11 ویں رقم معلوم کیجئے۔

8- جمعی سلسلہ کی n ویں رقم معلوم کیجئے جبکہ $a_{n-5} = 3n + 9$ ۔

9- جمعی سلسلہ $\left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{3}{7}\right)^2, \left(\frac{3}{10}\right)^2, \dots$ کی n ویں رقم معلوم کیجئے۔

10- اگر جمعی سلسلہ کی n ویں رقم $3n - 5$ ہو تو جمعی سلسلہ معلوم کیجئے۔

7.3 جمعی وسط Arithmetic Mean

کوئی عدد 'A' دو اعداد a اور b کے درمیان جمعی وسط (A.M) کہلاتا ہے اگر a, A, b ایک جمعی سلسلہ میں ہوں۔

$$A - a = b - A \quad (\text{Common Difference}) \quad \text{مشترکہ قدر}$$

$$A + A = a + b$$

$$2A = a + b$$

$$A = \frac{a+b}{2}$$

مثال 1:- 4 اور 8 کے درمیان جمعی وسط (A.M) معلوم کیجئے۔

$$a = 4, b = 8$$

حل:-

$$A = \frac{a+b}{2}$$

اس لیے

$$= \frac{4+8}{2}$$

$$= \frac{12}{2} = 6$$

$$A = 6$$

A.M جمعی وسط
Arithmetic Mean
کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 2:- $2\sqrt{5}$ اور $6\sqrt{5}$ میں جمعی وسط معلوم کیجئے۔

$$a = 2\sqrt{5}, b = 6\sqrt{5} \quad \text{چونکہ}$$

حل:-

$$A = \frac{a+b}{2}$$

اس لیے

$$= \frac{2\sqrt{5} + 6\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{8\sqrt{5}}{2}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

7.3.2 دو اعداد کے درمیان n جمعی وسط

"n" Arithmetic Means Between Two Numbers

فرض کیا کہ دو اعداد a, b کے درمیان مطلوبہ " n " جمعی وسط $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ اس طرح ہیں کہ

$a, A_1, A_2, A_3 \dots, A_n, b$ ایک جمعی سلسلہ ہے۔

یہاں $a_1 = a, a_{n+2} = b$ کیونکہ اس جمعی سلسلہ میں رقوم کی تعداد $n + 2$ ہے۔

کلیہ $a_n = a + (n-1)d$ کا استعمال کرتے ہوئے

$$a_{n+2} = a + (n+2-1)d$$

$$b = a + (n+1)d$$

$$b - a = (n+1)d$$

$$\frac{(b-a)}{n+1} = d \quad \text{یا} \quad \boxed{d = \frac{b-a}{n+1}}$$

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1} = \frac{an+a+b-a}{n+1} = \frac{na+b}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + 2\left(\frac{b-a}{n+1}\right) = \frac{na+a+2b-2a}{n+1} = \frac{na+a+2b}{n+1} = \frac{(n-1)a+2b}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + 3\left(\frac{b-a}{n+1}\right) = \frac{na+a+3b-3a}{n+1} = \frac{na-2a+3b}{n+1} = \frac{(n-2)a+3b}{n+1}, \dots,$$

$$A_n = a + nd = a + n\left(\frac{b-a}{n+1}\right) = \frac{na+a+nb-na}{n+1} = \frac{a+nb}{n+1}$$

مثال 1:- اگر a اور b کے درمیان 8 اور 12 دو جمعی وسط ہوں تو a اور b معلوم کیجئے۔

حل:- چونکہ $a, 8, 12, b$ ایک جمعی سلسلہ میں ہیں۔

$$\text{لہذا} \quad d = \text{مشترکہ قدر (Common difference)}$$

$$= a_3 - a_2$$

$$= 12 - 8 = 4$$

$$b = a_4$$

$$= a_3 + d$$

$$b = 12 + 4 = 16$$

$$a = a_2 - d$$

$$= 8 - 4 = 4$$

$$a = 4, b = 16 \text{ لہذا}$$

مثال 2:- $\sqrt{3}$ اور $9\sqrt{3}$ کے درمیان تین جمعی وسط معلوم کیجئے۔

حل:- فرض کیا $\sqrt{3}$ ، $9\sqrt{3}$ کے درمیان A_1, A_2, A_3 تین جمعی وسط ہیں۔

اس طرح $\sqrt{3}, A_1, A_2, A_3, 9\sqrt{3}$ ایک جمعی سلسلہ ہیں۔

یہاں $a_1 = a = \sqrt{3}$ ، $n = 5$ ، $a_5 = 9\sqrt{3}$

$$a_n = a + (n-1)d \quad \text{اس لیے}$$

$$a_5 = a + (5-1)d$$

$$9\sqrt{3} = a + 4d$$

$$9\sqrt{3} = \sqrt{3} + 4d$$

$$9\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4d$$

$$4d = 8\sqrt{3}$$

$$d = 2\sqrt{3}$$

$$A_1 = a + d = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \quad \text{لہذا}$$

$$A_2 = A_1 + d = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$A_3 = A_2 + d = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

پس $\sqrt{3}, 9\sqrt{3}$ کے درمیان $3\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 7\sqrt{3}$ مطلوبہ تین جمعی وسط ہیں۔

مشق 7.3

- 1- درج ذیل کے درمیان جمعی وسط معلوم کیجئے۔
 - (i) $-3, 7$
 - (ii) $x-1, x+7$
 - (iii) $\sqrt{7}, 3\sqrt{7}$
 - (iv) $x^2+x+1; x^2-x+1$
- 2- اگر a اور b کے درمیان $6, 3$ دو جمعی وسط ہیں تو a اور b معلوم کیجئے۔
- 3- 11 اور 19 کے درمیان تین جمعی وسط معلوم کیجئے۔
- 4- $\sqrt{2}$ اور $6\sqrt{2}$ کے درمیان تین جمعی وسط معلوم کیجئے۔
- 5- 5 اور 8 کے درمیان چھ جمعی وسط معلوم کیجئے۔
- 6- 8 اور 12 کے درمیان سات جمعی وسط معلوم کیجئے۔
- 7- اگر 5 اور b کے درمیان جمعی وسط 10 ہو تو b کی قیمت معلوم کیجئے۔
- 8- اگر a اور 10 کے درمیان جمعی وسط 40 ہو تو a کی قیمت معلوم کیجئے۔
- 9- اگر دو اعداد a اور b کے درمیان $9, 5$ اور 13 تین جمعی وسط ہوں تو a اور b کی قیمت معلوم کیجئے۔

7.4 ضربی سلسلہ (Geometric Sequence (progression))

ضربی سلسلہ (Geometric Progression) (مختصراً G.P.)، اعداد کی ایسی ترتیب ہے کہ جس میں ہر آنے والا عدد (رقم) پچھلی رقم کو ایک مقررہ مقدار (مشترکہ نسبت / ضارب Common Ratio) سے ضرب دے کر حاصل ہوتا ہے۔ مشترکہ نسبت کو 'r' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جبکہ ترتیب میں ہر عدد، ضربی سلسلہ کی رقم (Term) کہلاتی ہے۔ 'r' کبھی بھی صفر نہیں ہوتا۔ پس 'r' کی قیمت:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots$$

کسی بھی ضربی سلسلہ میں اگر پہلی رقم 'a' ہو اور مشترکہ نسبت 'r' ہو تو دوسری رقم 'ar' ہوگی اور تیسری رقم ar^2 ہوگی۔ ہر رقم میں 'r' کا قوت نما اس رقم کے مقام سے ایک کم ہوتا ہے اس طرح 8 ویں رقم ar^7 ہوگی۔ جبکہ n ویں رقم ar^{n-1} ہوگی۔ پس ضربی سلسلہ کی نمائندہ رقم یوں ہوگی $a_n = ar^{n-1}$

مثال 1:- اس ضربی سلسلہ کی 5 ویں رقم معلوم کیجئے۔ جس میں $a = 2$ اور $r = 3$ ہو۔

حل:- جیسا کہ معلوم ہے کہ $a = 2, r = 3, n = 5, a_5 = ?$
چونکہ $a_n = ar^{n-1}$

$$a_5 = ar^{5-1}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= 2(3)^4 \\ &= 2 \times 81 \\ &= 162 \end{aligned}$$

$$\boxed{a_5 = 162}$$

مثال 2:- اگر کسی ضربی سلسلہ میں $a_4 = \frac{8}{27}$ ، $a_7 = \frac{-64}{729}$ ہو تو a_{10} معلوم کیجئے۔

حل:- چونکہ

$$a_4 = \frac{8}{27}, a_7 = \frac{-64}{729}$$

یہاں پہلے ہم a اور r کی قیمتیں معلوم کریں گے۔

$$a_n = ar^{n-1} \quad \text{چونکہ}$$

$$a_4 = ar^{4-1} \quad \text{لہذا}$$

$$\frac{8}{27} = ar^3$$

$$ar^3 = \frac{8}{27} \quad \dots\dots(i)$$

$$a_7 = ar^{7-1}$$

اور

$$\frac{-64}{729} = ar^6$$

$$ar^6 = -\frac{64}{729} \quad \dots\dots(ii)$$

$$\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{-64}{729} \times \frac{27}{8}$$

اب مساوات (ii) کو (i) پر تقسیم کرنے سے

$$r^3 = \frac{-64 \times 27}{729 \times 8} = -\frac{8}{27} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

$$r = -\frac{2}{3}$$

مساوات (i) میں $r = -\frac{2}{3}$ رکھنے سے

$$a \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow a \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$a = -1$$

$$a_{10} = ar^{10-1}$$

پس

$$= (-1) \left(\frac{2}{3}\right)^9 = -\left(\frac{2}{3}\right)^9$$

مشق 7.4

- 1- ضربی سلسلہ ... 2, 8, 32, ... میں 7 ویں رقم لکھیے۔
- 2- ضربی سلسلہ ... 2, 6, 18, ... کی 11 ویں رقم معلوم کیجئے۔
- 3- ضربی سلسلہ ... $-\frac{3}{2}, 3, -6, \dots$ کی 6 ویں رقم معلوم کیجئے۔
- 4- ضربی سلسلہ ... 4, -12, 36, ... کی 5 ویں رقم معلوم کیجئے۔
- 5- دیئے گئے ضربی سلسلہ کی a, a_n, n اور r میں سے نامعلوم کی قیمت معلوم کیجئے۔
 (i) $r = 10, a_n = 100, a = 1$ (ii) $a_n = 400, r = 2, a = 25$
 (iii) $a = 128, r = \frac{1}{2}, a_n = \frac{1}{4}$
- 6- ایسے ضربی سلسلہ کی 11 ویں رقم معلوم کیجئے جس کی 5 ویں رقم کی قیمت 9 اور مشترک نسبت 2 ہے۔
- 7- ایسے ضربی سلسلہ کی 13 ویں رقم کیا ہوگی جس میں 7 ویں رقم 25 اور مشترک نسبت 3 ہے۔
- 8- اگر a, b, c, d ایک ضربی سلسلہ میں ہوں تو ثابت کیجئے کہ $a - b, b - c, c - d$ بھی ضربی سلسلہ میں ہیں۔
- 9- اگر $\frac{a_5}{a_3} = \frac{4}{9}$ اور $a_2 = \frac{4}{9}$ ہو تو ضربی سلسلہ کی n ویں رقم کیا ہوگی؟
- 10- ضربی سلسلہ میں تین یکے بعد دیگرے اعداد معلوم کیجئے جن کا مجموعہ 26 اور حاصل ضرب 216 ہو۔
- 11- $x, 1, \frac{1}{x}, \dots$ ضربی سلسلہ کی 30 ویں رقم معلوم کیجئے۔
- 12- x, x^3, x^5, \dots ضربی سلسلہ کی P ویں رقم معلوم کیجئے۔

7.5 ضربی وسط (G.M) Geometric Mean

دو اعداد 'a' اور 'b' کے درمیان 'G' ضربی وسط کہلاتا ہے اگر a, G, b ایک ضربی سلسلہ میں ہوں۔

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G} \quad \text{یعنی}$$

$$G^2 = ab$$

$$G = \pm \sqrt{ab}$$

جبکہ a, b کے درمیان مثبت ضربی وسط \sqrt{ab} ہے۔

مثال 1:- 3 اور 27 کے درمیان ضربی وسط معلوم کیجئے۔

حل:- چونکہ $a = 3, b = 27$

$$G = \pm \sqrt{ab} \quad \text{لہذا}$$

$$= \pm \sqrt{3 \times 27}$$

$$= \pm \sqrt{81}$$

$$= \pm 9$$

مثال 2:- $2x^2$ اور $8y^4$ کے درمیان ضربی وسط معلوم کیجئے۔

حل:- چونکہ $a = 2x^2, b = 8y^4$

$$G = \pm \sqrt{ab} \quad \text{اس لیے}$$

$$= \pm \sqrt{2x^2 \times 8y^4}$$

$$= \pm \sqrt{16x^2 y^4}$$

$$= \pm \sqrt{(4xy^2)^2}$$

$$= \pm 4xy^2$$

7.5.1 دو اعداد کے درمیان 'n' ضربی وسط

'n' Geometric Means Between Two Numbers

فرض کیا دو اعداد 'a' اور 'b' کے درمیان $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$ مطلوبہ n ضربی سلسلہ ہیں۔

اس طرح $a, G_1, G_2, G_3, \dots, G_n, b$ ایک ضربی سلسلہ میں ہیں۔

اب اس ضربی سلسلہ میں رقوم کی تعداد $n + 2$ بنتی ہے۔

جس میں $a_{n+2} = b, a_1 = a$

تو $a_n = ar^{n-1}$

میں n کی قیمت $n + 2$ رکھنے سے

$$a_{n+2} = ar^{n+2-1}$$

$$b = ar^{n+1}$$

$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

$$r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$G_1 = a \times r = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$G_2 = G_1 \times r = ar^2 = a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$G_3 = G_2 \times r = ar^3 = a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$G_n = G_{n-1} \times r = ar^n = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

مثال 1:- 4 اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان دو ضربی وسط معلوم کیجئے۔

حل:- فرض کیا 4 اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان G_1, G_2 دو مطلوبہ ضربی وسط معلوم کیجئے۔

$$a = 4, n = 4, a_4 = \frac{1}{2}, \text{ یہاں}$$

$$a_n = ar^{n-1} \quad \text{چونکہ}$$

$$a_4 = ar^{4-1} \quad \text{اس لیے}$$

$$\frac{1}{2} = ar^3$$

$$ar^3 = \frac{1}{2}$$

$$4r^3 = \frac{1}{2}$$

$$r^3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$$

$$r^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$G_1 = a \times r = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \quad \text{پس}$$

$$G_2 = G_1 \times r = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

مشق 7.5

1- ضربی وسط معلوم کیجئے۔ (i) 9 اور 5 میں (ii) 4 اور 9 میں (iii) 2 اور 8 میں

2- دو ضربی وسط لکھیے۔ (i) 1 اور 8 کے درمیان (ii) 3 اور 81 کے درمیان

3- تین ضربی وسط لکھیے۔ (i) 1 اور 16 کے درمیان (ii) 2 اور 32 کے درمیان

4- 3 اور 96 کے درمیان چار حقیقی ضربی وسط لکھیے۔

5- دو اعداد کا جمعی وسط 5 ہے جبکہ ان کا مثبت ضربی وسط 4 ہے۔ اعداد معلوم کیجئے۔

6- دو اعداد کا مثبت ضربی وسط 6 ہے اور ان کا جمعی وسط 10 ہے۔ اعداد معلوم کیجئے۔

7- ثابت کیجئے کہ دو اعداد 4 اور 8 کا جمعی وسط ان کے ضربی وسط سے بڑا ہے۔

8- 160 اور 5 کے درمیان چار ضربی وسط لکھیے۔

9- 486 اور 6 کے درمیان تین ضربی وسط لکھیے۔

10- $\frac{1}{8}$ اور 128 کے درمیان چار ضربی وسط لکھیے۔

11- 56 اور $\frac{7}{16}$ کے درمیان چھ ضربی وسط لکھیے۔

12- $\frac{32}{81}$ اور $\frac{9}{2}$ کے درمیان پانچ ضربی وسط لکھیے۔

جائزہ مشق 7

-1 صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) $a_n = n + 3$ کی تیسری رقم کیا ہے؟

- (a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) 0

(ii) $a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$ کی چوتھی رقم کیا ہے؟

- (a) $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{1}{49}$ (c) $\frac{1}{81}$ (d) 0

(iii) $2, 6, 11, 17, \dots$ میں a_5 کی قیمت کیا ہے؟

- (a) 24 (b) 30 (c) 21 (d) 22

(iv) $12, 16, 21, 27$ میں اگلی رقم کیا ہے؟

- (a) 34 (b) 30 (c) 31 (d) 32

(v) $3, 7, 11, \dots$ کی a_6 کیا ہے؟

- (a) 3 (b) 19 (c) 23 (d) 20

(vi) $\sqrt{3}$ اور $3\sqrt{3}$ میں جمعی وسط کیا ہے؟

- (a) $2\sqrt{3}$ (b) $5\sqrt{3}$ (c) $9\sqrt{3}$ (d) $4\sqrt{3}$

(vii) $2\sqrt{5}$ اور $6\sqrt{5}$ میں جمعی وسط کیا ہے؟

- (a) $4\sqrt{5}$ (b) $3\sqrt{5}$ (c) $5\sqrt{5}$ (d) $7\sqrt{5}$

(viii) $2, 6, 18, \dots$ میں a_5 کی قیمت کیا ہے؟

- (a) 160 (b) 161 (c) 162 (d) 30

(ix) -3 اور -12 کے درمیان ضربی وسط کیا ہے؟

- (a) ± 6 (b) ± 9 (c) ± 36 (d) ± 3

(x) 1 اور 8 کے درمیان ضربی وسط کیا ہے؟

- (a) $2\sqrt{2}$ (b) $\pm 2\sqrt{2}$ (c) $-2\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2}$

2- خالی جگہ پر کیجئے۔

(i) کسی سلسلہ کی جنرل ٹرم یا n ویں رقم کو _____ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(ii) اگر $a_n = 2n + 3$ ہو تو $a =$ _____

(iii) کسی $A.P$ میں $a_n = a + (n-1)d$ کہلاتی ہے _____

(iv) 5 اور 15 کے درمیان _____ = جمعی وسط

(v) اگر a, A, b ایک جمعی سلسلہ میں ہو تو $A =$ _____

(vi) ایک ضربی سلسلہ میں "r" _____ کہلاتا ہے۔

(vii) کسی ضربی سلسلہ میں $a_n =$ _____

(viii) اگر a, G, b ایک ضربی سلسلہ میں ہوں تو $G =$ _____

(ix) 3 اور 2 کا مثبت ضربی وسط _____ ہے۔

(x) $A.P$ $a_{n-5} = 3n + 9$ کی n ویں رقم کو _____ ہے۔

3- اس جمعی سلسلہ کی n ویں رقم اور 18 ویں رقم معلوم کیجئے جس کی پہلی رقم 3 اور مشترکہ قدر 2 ہو۔

4- جمعی سلسلہ $\dots + \left(\frac{3}{9}\right)^3 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^3$ کی n ویں رقم معلوم کیجئے۔

5- اگر a اور 16 کا جمعی وسط 24 ہو تو 'a' کی قیمت معلوم کیجئے۔

6- ایسی 15 ویں رقم کا ضربی سلسلہ معلوم کیجئے جس کی 7 ویں رقم 27 اور مشترکہ نسبت 3 ہے۔

7- $\frac{1}{2}$ اور 16 کے درمیان چار ضربی وسط لکھیے۔

8- ضربی سلسلہ کی تین ایسی متواتر رقم لکھیے جن کا مجموعہ 26 اور حاصل ضرب 216 ہو۔

خلاصہ

✦ اعداد کی ایسی ترتیب جس میں ہر اگلی رقم خاص قاعدہ کے اطلاق سے حاصل کی گئی ہو اور یہ قاعدہ اس رقم کے مقام کا تعین بھی کرتا ہو۔ یعنی کہ اس ترتیب کے تمام اراکین سلسلہ وار مخصوص ترتیب میں ہوں۔ اعداد کی ایسی ترتیب کو سلسلہ (Sequence) کہتے ہیں۔

✦ ایسا سلسلہ جس میں ہر اگلی رقم، پچھلی رقم میں ایک مقررہ عدد (مشترکہ قدر) جمع کر کے حاصل کی گئی ہو۔
جمعی سلسلہ *Arithmetic Sequence* کہلاتی ہے۔

✦ کوئی عدد 'A' دو اعداد 'a'، 'b' کے درمیان جمعی وسط کہلاتا ہے اگر a, A, b ایک جمعی سلسلہ میں ہوں۔

✦ ایک سلسلہ جس میں ہر اگلی رقم، پچھلی رقم کو ایک مشترکہ نسبت سے ضرب دے کر حاصل کی ہو۔
ضربی سلسلہ کہلاتی ہے۔

✦ "G" دو اعداد 'a' اور 'b' کے درمیان ضربی وسط کہلاتا ہے اگر a, G, b ایک ضربی سلسلہ میں ہوں۔