یونٹ

9

خطی گراف
LINEAR GRAPHS

- کارتیسی مستوی اور خطی گراف
- گراف مبادلہ

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- کہ حقیقی اعداد کے جوڑے کو مترتب جوڑے کے طور پر لے سکتے ہیں۔
- مترتب جوڑے کی پہچان کیا ہے مثلاً مترتب جوڑے $(2,3)$ کو کسی امتحانی مرکز میں لگی سیٹنگ پلان میں سیٹ کا تعین دوسری قطار اور تیسرے کالم کی صورت میں کر سکیں۔
- کہ کسی مستطیلی یا کارتیسی مستوی پر ایک دوسرے پر متقاطع محددی خطوط جو نقطہ پر قطع کرتے ہوں کو ظاہر کرتے ہیں۔
- کہ مبداء (O) اور محددی محوروں کی پہچان بطور $X\text{-}axis$ محور اور $Y\text{-}axis$ محور کیا ہے۔
- کہ کسی مترتب جوڑے (a,b) کو محددی مستوی پر ظاہر کیسے کرتے ہیں۔
  - $'a'$ کو x- محدد یا $(Abscisa)$
  - $'b'$ کو y محدد یا $(Ordinate)$
- کہ دیے گئے نقاط کے سیٹ کو ملا کر جیومیٹری کی مختلف اشکال مثلاً خط۔ مثلث۔ یا مستطیل وغیرہ کیسے بنتے ہیں۔
- کہ دو متغیرات میں دی گئی مساواتوں کی ان متغیرات کی مساوات پر پورا اترنے والی جوڑا قیمتوں کا جدول بنانا۔
- کہ ریاضی کے کسی فقرہ کو ان جوڑوں کی مدد سے گراف میں ظاہر کیسے کرتے ہیں۔
- کہ مناسب سکیل کا تعین کر کے گراف کیسے بناتے ہیں۔
- گراف بنانا درج ذیل مساواتوں کی صورت میں۔
  - $y = c$
  - $x = a$
  - $y = mx$
  - $y = mx + c$
- کہ کسی جدول میں دی گئی عددی قیمتوں سے گراف کیسے بنتا ہے۔
- کہ گراف کی مدد سے کسی فنکشن (تفاعل) کی ڈومن اور رینج کا تعین کیسے ہوتا ہے۔
- کہ راست تناسب میں دی گئی دو مقداروں کے باہمی تعلق کو گراف کی مدد سے واضح کیسے کیا جاتا ہے۔
- کہ گراف کی مدد سے ایک مقدار کا دوسری مقدار سے موازنہ کیسے بنتا ہے۔
- کہ گراف کی مدد سے مقداروں میں باہمی تبدیلی کا مطالعہ کیسے کیا جاتا ہے۔
  - میل اور کلومیٹر کا
  - ایکڑ اور ہیکڑ کا
  - سینٹی گریڈ سے فارن ہیٹ ڈگری کا
  - پاکستانی کرنسی سے کسی دوسرے ملک کی کرنسی میں تبادلہ

9.1 کارتیسی مستوی اور خطی گراف CARTESIAN PLANE AND LINEAR GRAPHS

9.1.1 دو حقیقی اعداد کا جوڑا بطور مترتب جوڑا Pair of Real Numbers as an Ordered Pair

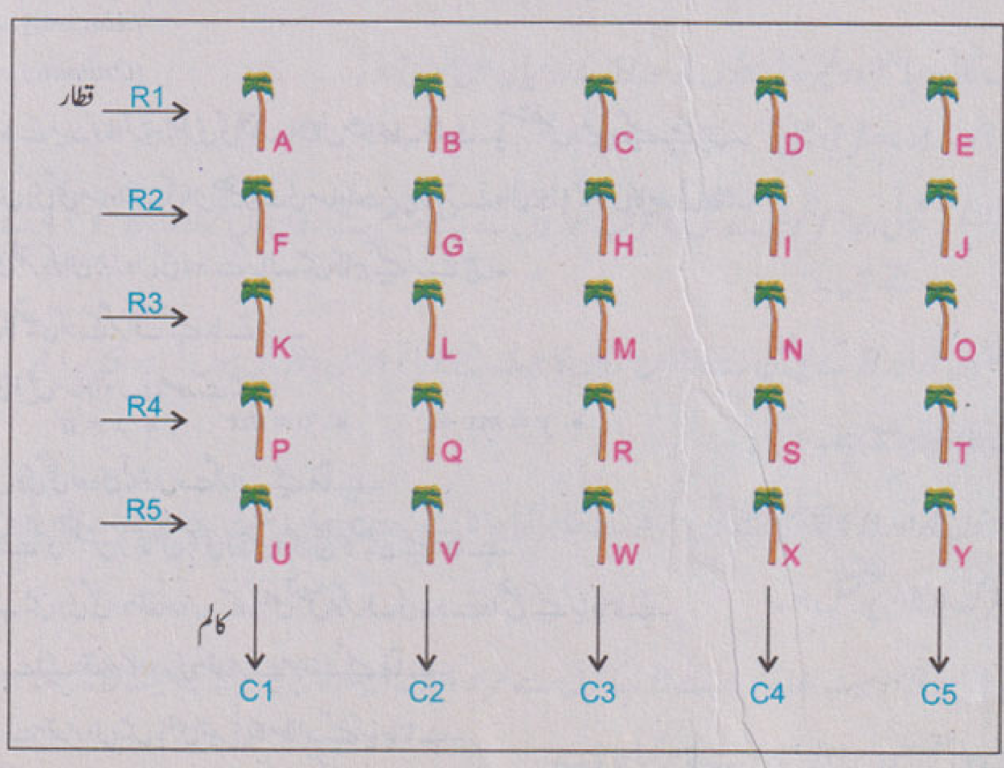
دو مساوی سیٹوں کی تعریف کی رو سے کسی بھی دو ارکان 'a' اور 'b' کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں $\{a,b\} = \{b,a\}$

تاہم اگر ہم ارکان کی ترتیب جس میں یہ رکن لکھے گئے ہوں کو اپنے ذہن میں رکھیں تو دو ارکان کا جوڑا جو ایک مخصوص ترتیب مین ہو مترتب جوڑا کہلاتا ہے اور اسے (a,b) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ پس اگر 'a' اور 'b' دو مختلف رکن ہوں تو $(a,b) \neq (b,a)$

$(a_1,b_1) = (a_2,b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ اور $b_1 = b_2$ عموماً اگر ہم مستوی پر کسی نقطہ کو (x,y) سے ظاہر کرتے ہیں۔

9.1.2 مترتب جوڑے Ordered Pairs

کسی باغ کا مالی ایک مربع کھیت میں درختوں کو ترتیب دیتا ہے۔ درختوں کی عددوں سے نشاندہی کرتا ہے۔ کسی درخت کی نشاندہی کو زیادہ سہل بنانے کے لئے وہ اس درخت کو قطار نمبر اور کالم نمبر جس میں وہ موجود ہے سے نسبت دیتا ہے۔ درخت H، دوسری قطار اور تیسرے کالم میں موجود ہے جبکہ درخت R قطار نمبر 4 اور کالم نمبر 3 میں موجود ہے۔



مالی درخت کے نمبر کے سامنے ان عددی جوڑوں کو اس طرح لکھ سکتا ہے۔

$A(1,1)$,	$B(1,2)$,	$C(1,3)$,	$D(1,4)$,	$E(1,5)$
$F(2,1)$,	$G(2,2)$,	$H(2,3)$,	$I(2,4)$,	$J(2,5)$
$K(3,1)$,	$L(3,2)$,	$M(3,3)$,	$N(3,4)$,	$O(3,5)$
$P(4,1)$,	$Q(4,2)$,	$R(4,3)$,	$S(4,4)$,	$T(4,5)$
$U(5,1)$,	$V(5,2)$,	$W(5,3)$,	$X(5,4)$,	$Y(5,5)$

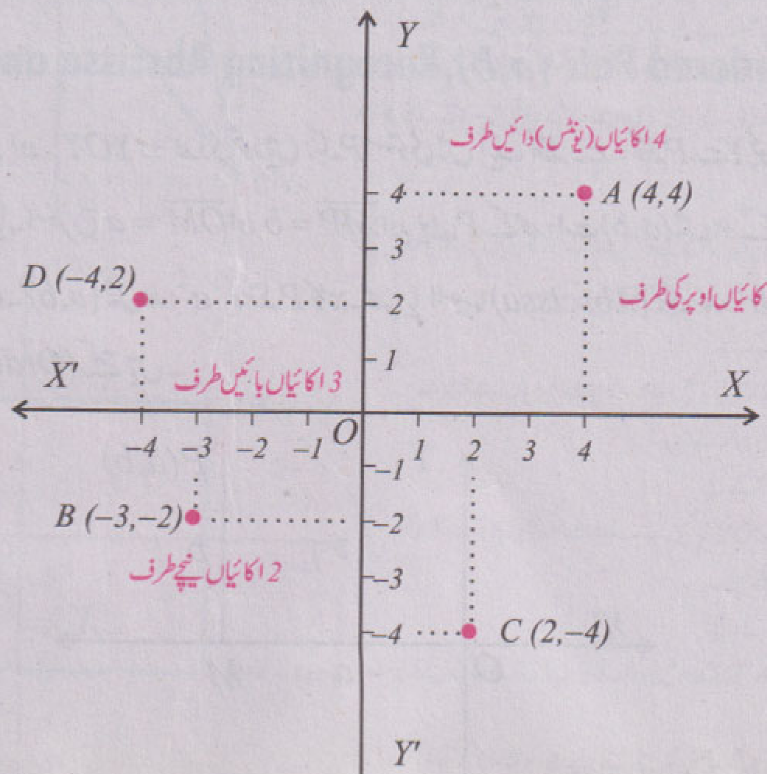
کیا ہم درخت نمبر F, G, H, K اور M کو اِن عددی جوڑوں سے لکھ سکتے ہیں۔

ہاں یہ بالترتیب $F(2,1)$, $G(2,2)$, $H(2,3)$, $I(2,4)$, $K(3,1)$ اور $M(3,3)$ ہیں۔

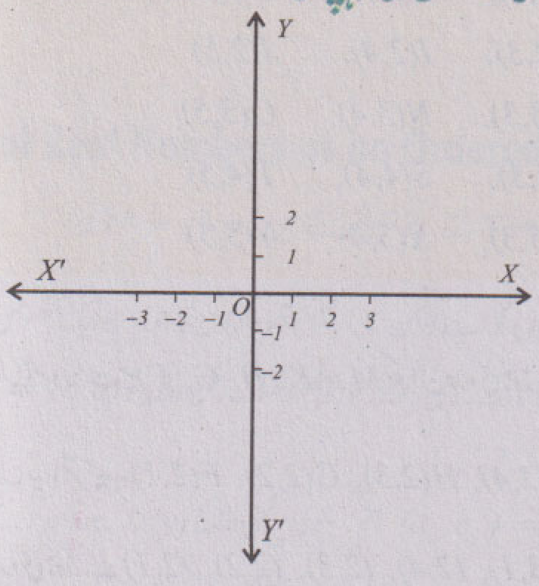
عددی جوڑے $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,1)$ $(3,3)$ وغیرہ وغیرہ مترتب جوڑوں کی مثالیں ہیں۔

9.1.3 مستطیلی یا کارتیسی مستوی Rectangular or Cartesian Plane

دی گئی تصویر میں ایک مستطیلی یا کارتیسی مستوی کو ظاہر کیا گیا ہے جو کہ نقطہ 'O' پر دو متقاطع محددی خطوط 'XOX' اور 'YOY' پر مشتمل ہے۔



9.1.4 مستطیلی مستوی میں مبداء (O) اور محددی محوروں کی پہچان



کسی بھی کارتیسی مستوی میں XOX' اور YOY' آپس میں نقطہ O پر عموداً متقاطع ہوتے ہیں، محددی محور کہلاتے ہیں۔ ہم O کو مبداء کہتے ہیں۔

افقی خط XOX' کو X۔محور اور عمودی خط YOY' کو Y۔محور کہتے ہیں۔

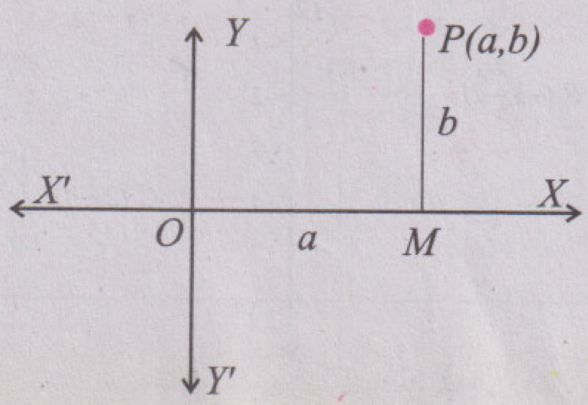
ہم لمبائی کی مناسب اکائی مقرر کر لیتے ہیں اور مبداء O کا تعین کر لیتے ہیں۔

اب ہم O کے دونوں جانب X۔محور پر اور Y۔محور پر برابر برابر نشان (جو کہ لمبائی کی مقررہ اکائی کے برابر ہوتے ہیں) لگاتے ہیں۔ $\overrightarrow{OX}$ اور $\overrightarrow{OY}$ کی جانب پیائش کو مثبت جبکہ $\overrightarrow{OX'}$ اور $\overrightarrow{OY'}$ پیائش کو منفی لیا جاتا ہے۔

9.1.5 مترتب جوڑا (a,b) کو دکھانا، ابسیسا اور آرڈینیٹ کو پہچاننا

Locating an Ordered Pair (a,b), Recognizing Abscissa and Ordinate

فرض کیا XOX' اور YOY' دو محددی محور ہیں جبکہ P مستوی میں ایک نقطہ ہے۔ نقطہ P سے Y محور کے متوازی XOX' پر عمود $\overline{MP}$ گرایا۔ اسطرح $\overline{OM} = a$ اور $\overline{MP} = b$ اور یوں P کے محددات (a,b) میں ہوئے۔ ہم اس نقطہ کو $P(a,b)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ (a,b) میں عدد 'a' کو نقطہ P کا x۔محدد یا ابسیسا (Abscissa) جبکہ عدد 'b' کو نقطہ P کا y۔ محدد یا آرڈینیٹ (Ordinate) کہتے ہیں۔



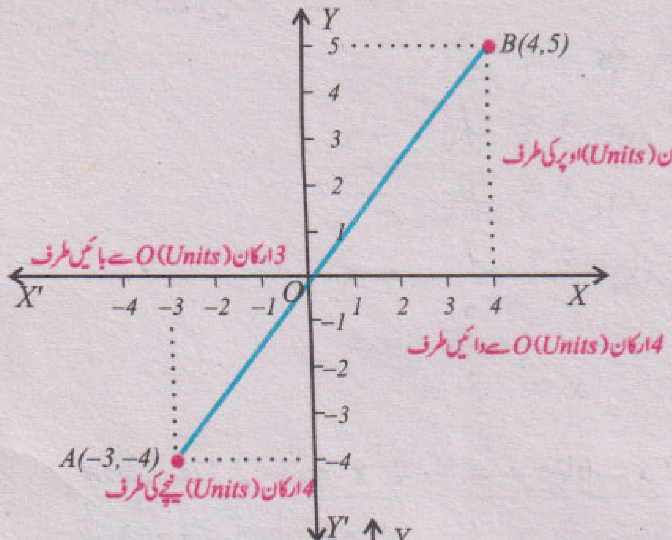
9.1.6 دیئے گئے نقاط کے سیٹ کو ملانے سے جیومیٹریکل اشکال بنانا
Geometrical Shapes by Joining a Set of Given Points

مثالیں:- دیے گئے نقاط کی مدد سے قطعہ خط، مثلث اور مستطیل بنانا

(i) $A(-3,-4),\ B(4,5),$

(ii) $A(2,3),\ B(-3,4),\ C(4,-5)$, (iii) $A(4,3),\ B(-4,3),\ C(-4,-3),\ D(4,-3)$

حل:-



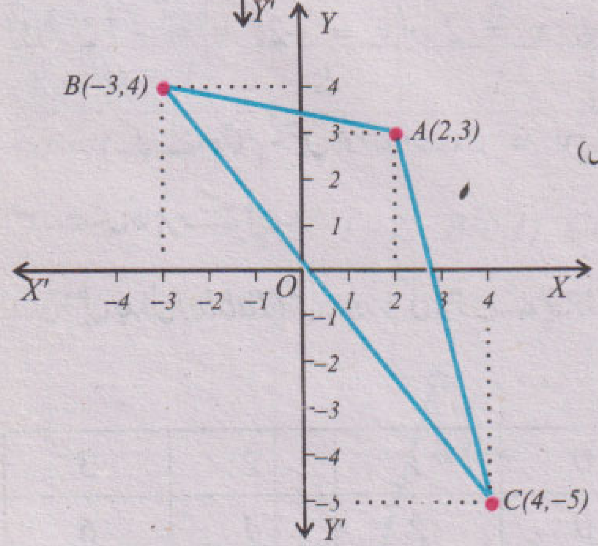
(i) مترتب جوڑے $A(-3,-4),\ B(4,5)$ ہیں۔

نقطہ $A(-3,-4)$ کے لیے

ہم O سے X محور پر بائیں جانب 3 اکائیاں اور پھر وہاں سے Y۔محور کے متوازی X۔محور کے نیچے 4 اکائیاں چلتے ہیں۔

نقطہ $B(4,5)$ کے لیے

مبداء O سے ہم X۔محور پر دائیں جانب 4 اکائیاں چلتے ہیں اور پھر وہاں سے محور کے متوازی X۔محور کے اوپر 5 اکائیاں چلتے ہیں A اور B کو ملا کر AB قطعہ خط حاصل کریں۔



(ii) $A(2,3), B(-3,4), C(4,-5)$ دیے گئے مترتب جوڑے ہیں۔

نقطہ $A(2,3)$ کے لیے

X۔محور کے ساتھ مبداء 'O' کی دائیں جانب 2 یونٹ چلئے اور پھر 3 یونٹ X۔محور کے اوپر Y۔محور کے متوازی چلئے۔

نقطہ $B(-3,4)$ کے لیے

ہم X۔محور پر مبداء 'O' کی بائیں جانب 3 یونٹس اور پھر وہاں سے 4 یونٹ (اکائیاں) X۔محور کے اوپر Y۔محور کے متوازی چلتے ہیں۔

نقطہ $B(4,-5)$ کے لیے

ہم مبداء 'O' سے X۔محور پر دائیں جانب 4 یونٹ اور وہاں سے Y۔محور کے متوازی X۔محور پر عمود نیچے کی جانب 5 یونٹ چلتے ہیں۔ ہم مثلث ABC کے لیے A کو B سے، B کو C سے اور C کو A سے ملاتے ہیں۔

(iii) مترتب جوڑے $A(4,3),\ B(-4,3),\ C(-4,-3)\ D(4,-3)$ دیئے گئے ہیں۔

نقطہ $A(4,3)$ کے لیے

ہم 4 یونٹ X۔محور پر مبداء 'O' سے دائیں جانب اور پھر وہاں سے 3 یونٹ Y۔محور کے متوازی X۔محور سے اوپر چلتے ہیں۔

نقطہ $B(-4,3)$ کے لیے

ہم X۔محور پر مبداء 'O' کی بائیں جانب 4 یونٹ اور وہاں سے 3 یونٹ X۔محور کے اوپر حرکت کرتے ہیں۔

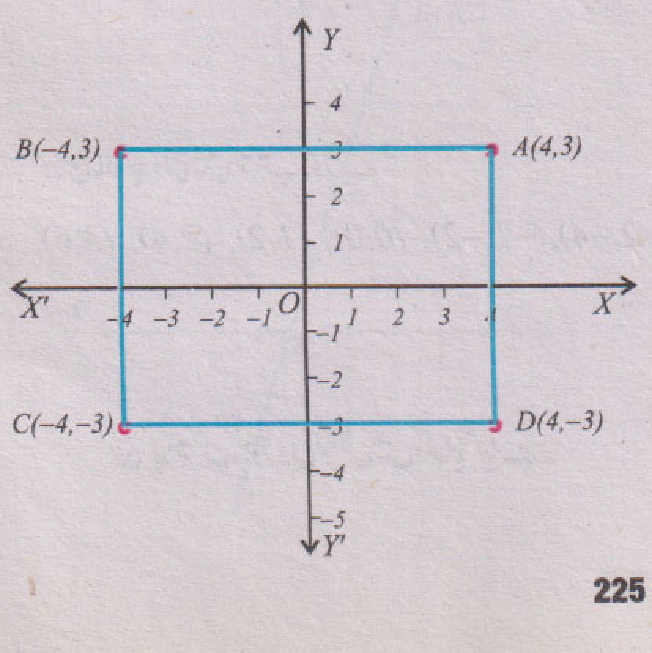
نقطہ $C(-4,-3)$ کے لیے

ہم X۔محور پر مبداء 'O' کی بائیں جانب 4 یونٹ اور پھر وہاں سے X۔محور کے نیچے 3 یونٹ چلتے ہیں۔

نقطہ $D(4,-3)$ کے لیے

ہم X۔محور پر مبداء 'O' کے دائیں جانب 4 یونٹ پھر X۔محور کے نیچے 3 یونٹ چلتے ہیں۔

ہم چکور ABCD کو حاصل کرنے کے لیے A کو B، B کو C، C کو D اور D کو A سے ملاتے ہیں۔



9.1.7 دو متغیرات میں یک درجی مساوات پر پورا اترنے والے مترتب جوڑوں کا جدول
Table for Pairs of Values Satisfying a Linear Equation in two Variables

آیئے مساوات $y = 2x$ کو دیکھیں۔ ہم وہ تمام عددوں کے جوڑے بناتے ہیں جو کہ مساوات $y = 2x$ پر پورا اترتے ہیں۔

جب

$x = -2$ ہو تو $y = 2(-2) = -4$

$x = -1$ ‏ $y = 2(-1) = -2$

$x = 0$ ‏ $y = 2(0) = 0$

$x = 1$ ‏ $y = 2(1) = 2$

$x = 2$ ‏ $y = 2(2) = 4$

$x = 3$ ‏ $y = 2(3) = 6$

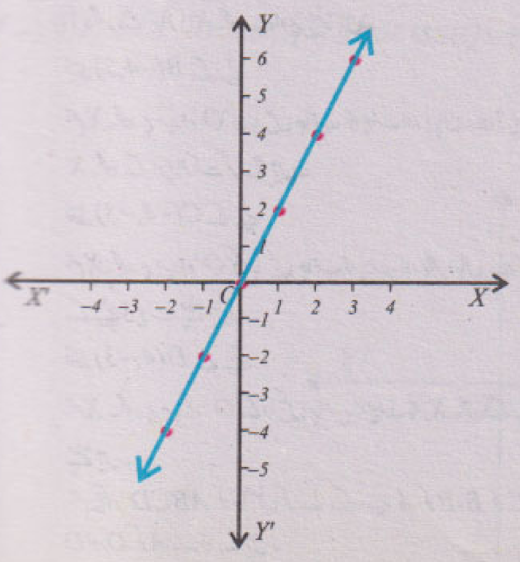
عددوں کا جوڑا $x = -2$, $y = -4$ مساوات $y = 2x$ پر پورا اترتا ہے۔

اسی طرح $x = -1$; $y = -2$ اور $x = 2$, $y = 4$ وغیرہ مساوات $y = 2x$ پر پورا اترتے ہیں۔

ہم x اور y کے لئے وہ تمام قیمتیں جو مساوات $y = 2x$ پر پورا اتریں لکھ تو نہیں سکتے مگر ان تمام قیمتوں کو گراف کی صورت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

درج ذیل جدول (Table) میں x اور y کی قیمتوں کے چھ جوڑے مساوات $y = 2x$ پر پورا اترتے ہوئے لکھے گئے ہیں۔

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x$	-4	-2	0	2	4	6



درج بالا جدول میں مترتب جوڑے

$(-2,-4), (-1,-2), (0,0), (1,2), (2,4), (3,6)$

اِن چھ مترتب جوڑوں کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

9.1.8 دیے گئے جُملہ کا گراف اس کے نقاط کے جوڑوں کو ظاہر کر کے حاصل کرنا
Plot the Pairs of Points to Obtain the Graph of a given Expression

مساوات $y = 3x + 1$ کو لیجئے۔

ہم x اور y کیلئے اعداد کے ایسے جوڑوں کو دیکھتے ہیں جو اس مساوات $y = 3x + 1$ پر پورا اترتے ہیں۔

جب

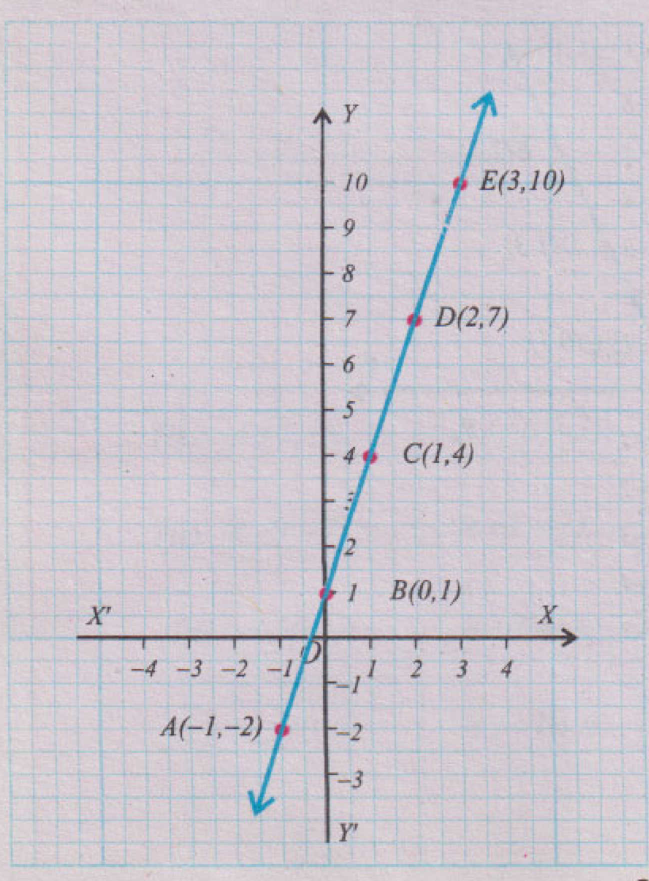
$$x = -1 \Rightarrow y = 3(-1) + 1 = -2$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 3(0) + 1 = 1$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 3(1) + 1 = 4$$
$$x = 2 \Rightarrow y = 3(2) + 1 = 7$$
$$x = 3 \Rightarrow y = 3(3) + 1 = 10$$

نیچے جدول میں x اور y کی قیمتوں کے پانچ جوڑے درج ہیں۔

x	-1	0	1	2	3
$y = 3x + 1$	-2	1	4	7	10

پانچ مترتب جوڑے

$A(-1,-2)$, $B(0,1)$, $C(1,4)$, $D(2,7)$, $E(3,10)$ ہیں۔



اب ہم اِن نقاط کے جوڑوں کو گراف پر ظاہر کرتے ہیں۔

نقطہ $A(-1,-2)$ کے لیے

ہم مبداء 'O' سے X-محور پر بائیں جانب 1 یونٹ اور پھر وہاں سے Y-محور کے متوازی 2 یونٹس X-محور کے نیچے حرکت کرتے ہیں۔

نقطہ $B(0,1)$ کے لیے

ہم مبداء 'O' سے Y-محور پر X-محور سے اوپر 1 یونٹ حرکت کرتے ہیں۔

نقطہ $C(1,4)$ کے لیے

ہم مبداء 'O' سے X-محور پر دائیں جانب 1 یونٹ پھر وہاں سے Y-محور کے متوازی X-محور سے اوپر عموداً 4 یونٹ حرکت کرتے ہیں۔

نقطہ $D(2,7)$ کے لیے

ہم مبداء 'O' سے X-محور پر دائیں جانب 2 یونٹس پھر وہاں سے Y-محور کے متوازی عموداً X-محور سے اوپر 7 یونٹس حرکت کرتے ہیں۔

نقطہ $E(3,10)$ کے لیے

ہم مبداء 'O' سے X-محور پر دائیں 3 یونٹس پھر وہاں سے Y-محور کے متوازی عموداً X-محور پر اوپر 10 یونٹس حرکت کرتے ہیں۔

پھر ہم A کو E سے ملا کر لائن AE کھینچتے ہیں۔

9.1.9 گراف کھینچنے کے لئے مناسب سکیل کا انتخاب

Choosing an Appropriate Scale to Draw a Graph

مساوات $y = 2x + 1$ کو لیتے ہیں۔

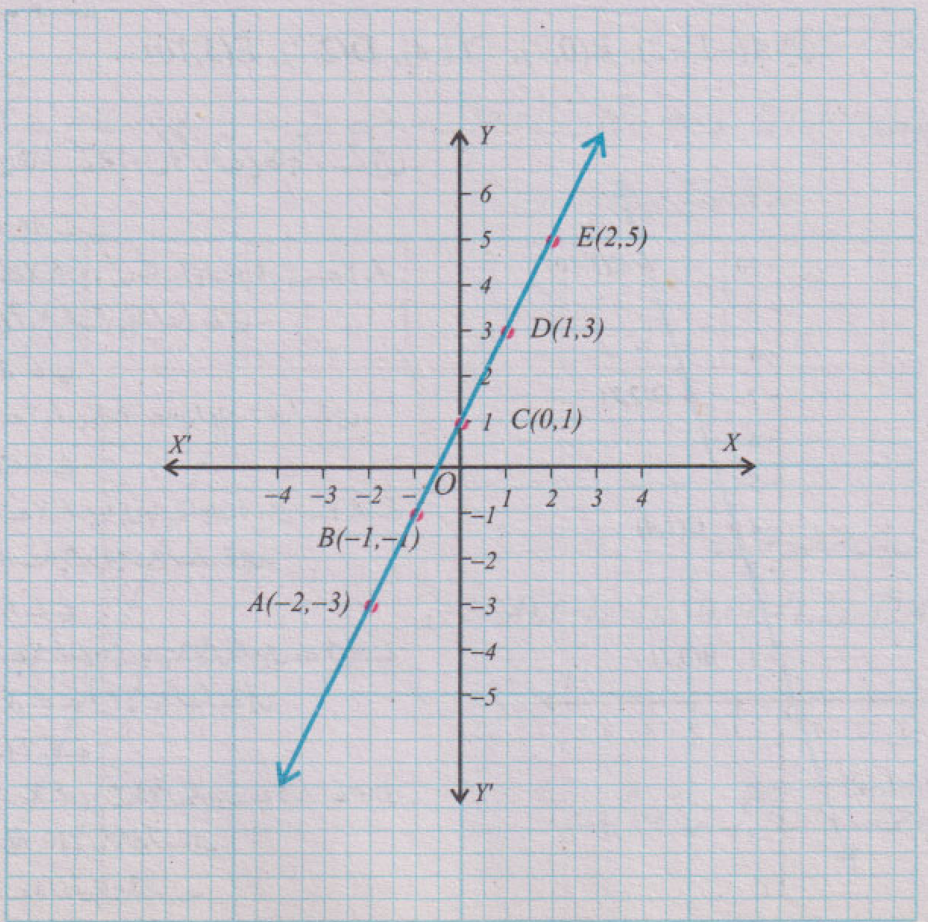
جب

$$x = -2, \quad y = 2(-2) + 1 = -3$$
$$x = -1, \quad y = 2(-1) + 1 = -1$$
$$x = 0, \quad y = 2(0) + 1 = 1$$
$$x = 1, \quad y = 2(1) + 1 = 3$$
$$x = 2, \quad y = 2(2) + 1 = 5$$

درج بالا x اور y کی قیمتوں کے 5 جوڑوں کی جدول نیچے بنائی جاتی ہے۔

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x + 1$	-3	-1	1	3	5

X-محور اور Y-محور دونوں پر ہم 1 بڑا مربع = 1 یونٹ سکیل استعمال کرتے ہیں۔



مشق 9.1

-1 نیچے درج کیے گئے نقاط کو گراف پر ظاہر کیجئے۔

(i) $A(2,-4)$ (ii) $B(3,2)$

(iii) $C(-5,-1)$ (iv) $D(6,-3)$

(v) $E(4,4)$ (vi) $F(-3,7)$

(vii) $G(0,7)$ (viii) $H(5,0)$

-2 نیچے دیئے گئے نقاط کے محددات لکھیے۔

(i) مبداء۔

(ii) ایسا نقطہ x۔محور پر بائیں جانب جو مبداء سے 5 یونٹس کے فاصلہ پر ہو۔

(iii) ایسا نقطہ x۔محور پر دائیں جانب جو مبداء سے 3 یونٹس کے فاصلہ پر ہو۔

(iv) ایسا نقطہ y۔محور پر x۔محور سے اوپر 4 یونٹس ہو۔

(v) ایسا نقطہ y۔محور پر x۔محور سے نیچے 6 یونٹس ہو۔

-3 درج ذیل نقاط کو گراف پیپر پر بنا کر اور ان کو ملا کر اشکال بنائیے۔

(i) $A(7,2)$, $B(-6,-3)$, $C(5,3)$

(ii) $A(0,-7)$, $B(3,-2)$, $C(4,0)$, $D(5,6)$, $E(7,8)$

(iii) $A(4,0)$, $B(0,4)$, $C(-4,0)$, $D(0,-4)$

(iv) $A(10,6)$, $B(-10,6)$, $C(-10,-6)$, $D(10,-6)$,

9.1.10 یک درجی مساوات $y = c$ کی شکل کا گراف
Graphs of Linear Equations of the form $y = c$

$y = c$ کا گراف کھینچنے کے لئے ہم $y = c$ کو $0 . x + y = c$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ گراف کھینچنے کا عمل مندرجہ ذیل مثال سے واضح کیا جاتا ہے۔

مثال :- مساوات $y = 5$ کا گراف کھینچئے۔

حل :-

مساوات $y = 5$ کو $y = 0 \times x + 5$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات میں $x = 0$ رکھنے سے ہمیں مساوات $y = 5$ حاصل ہوتی ہے۔

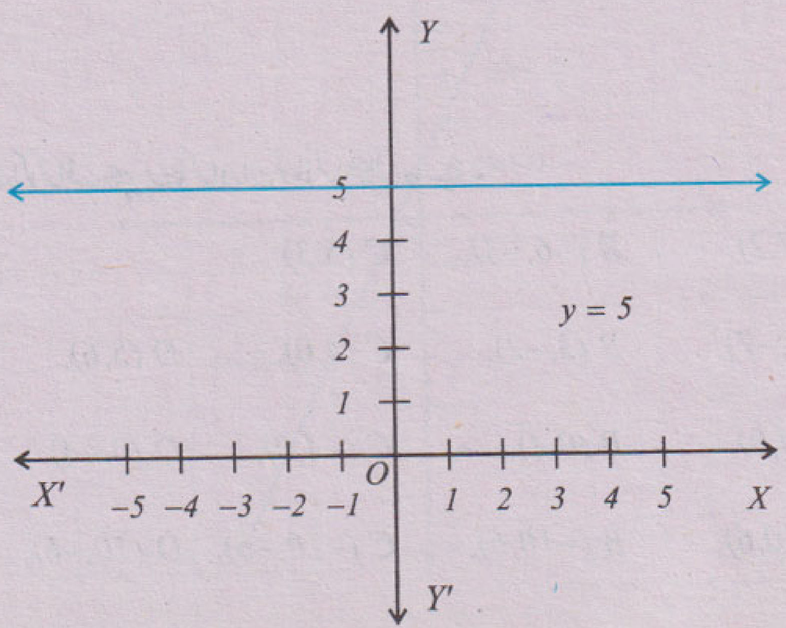
اسی طرح $y = 0.x + 5$ میں $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ رکھنے

سے بھی ہمیں $y = 5$ حاصل ہوتی ہے۔ x کی تمام قیمتوں کے لیے

$y = 5$ یعنی y کی قیمت مستقل ہی رہتی ہے۔

x اور y قیمتوں کا جدول کچھ یوں ہے۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	5	5	5	5	5	5



یک درجی مساوات $x = a$ کی شکل کا گراف

Graph of a Linear Equation of the form $x = a$

$x = a$ کا گراف کھینچنے کے لئے ہم $x = a$ کو $x + 0 \,.\, y = a$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔گراف کھینچنے کی وضاحت درج ذیل مثال سے کرتے ہیں۔

مثال:- $x = -2$ کا گراف کھینچیے۔

حل:-

مساوات $x = -2$ کو $x + 0 \,.\, y = -2$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

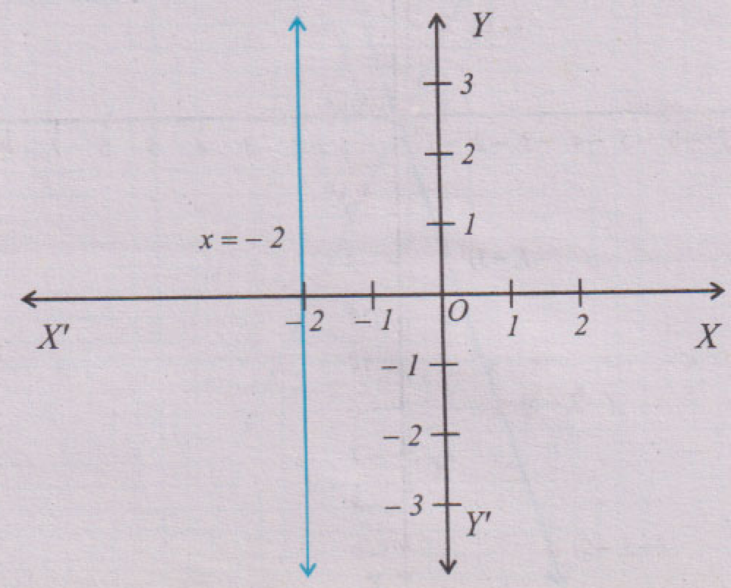
اگر ہم مساوات میں $y = 0$ رکھیں تو ہمیں $x = -2$ حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح مساوات $x + 0 \,.\, y = -2$ میں $y = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ رکھنے سے $x = -2$ ہی حاصل ہوتا ہے۔

y کی تمام قیمتوں کے لیے ہمیں $x = -2$ حاصل ہوتا ہے یعنی کہ x کی قیمت مستقل ہے۔

x اور y کی قیمتوں کا جدول درج ذیل ہے۔

x	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
y	-3	-2	-1	0	1	2	3



Graph of a Linear Equation $y = mx$ یک درجی مساوات $y = mx$ کا گراف

$y = mx$ کا گراف کھینچنے کے لیے ہم مندرجہ ذیل مثال دیکھتے ہیں۔

مثال :- $y = 3x$ کا ترسیم (گراف) کھینچیے۔

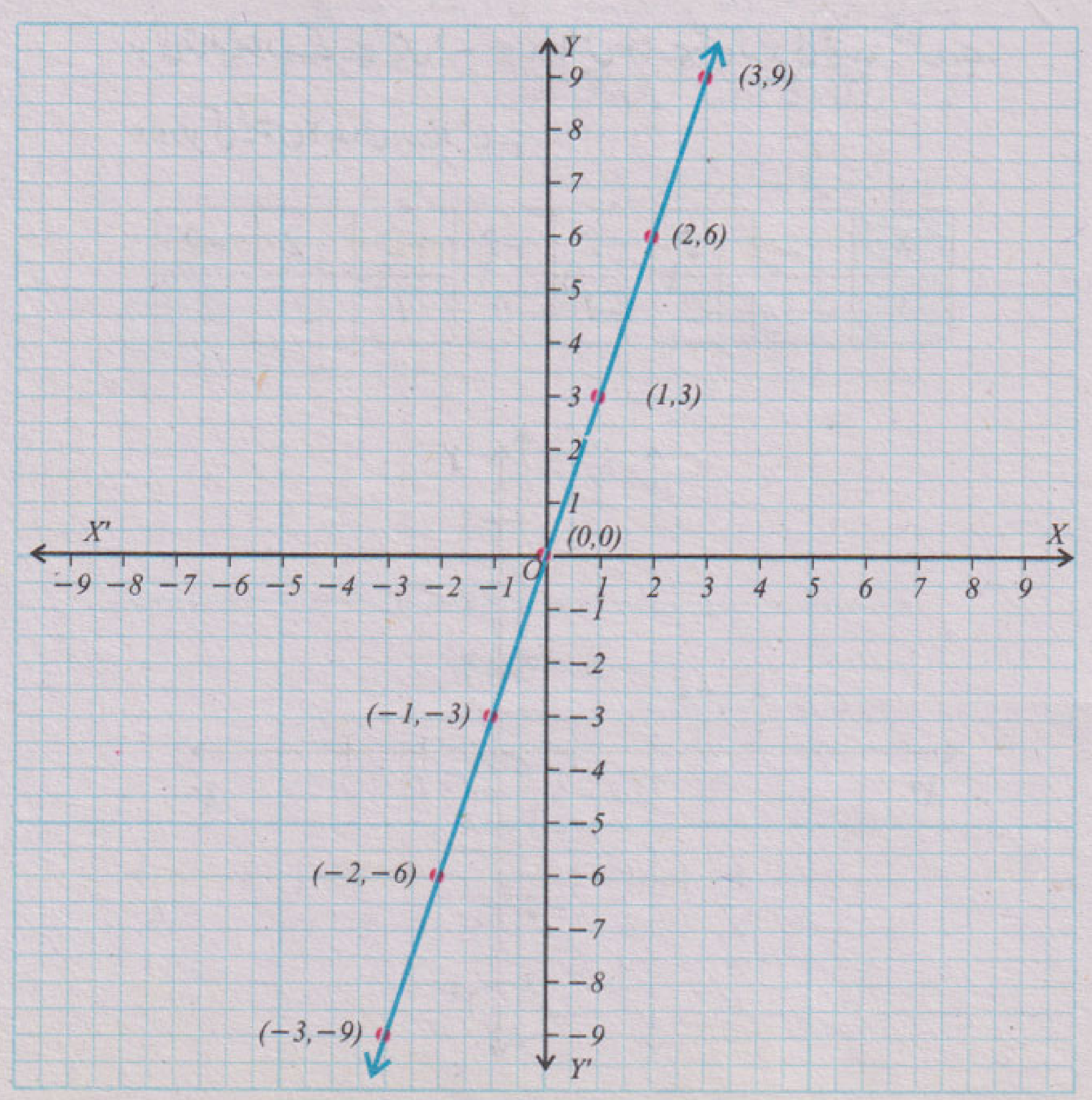
حل :-

مساوات $y = 3x$ میں $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ رکھنے سے ہمیں

$y = \pm 3,\ \ y = \pm 6,\ \ y = \pm 9, \ldots$ حاصل ہوتا

x اور y کی قیمتوں کا جدول اور گراف نیچے یوں ہے۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-6	-3	0	3	6	9



Graph of an Equation $y = mx + c$ یک درجی مساوات $y = mx + c$ کا گراف

$y = mx + c$ کا گراف کھینچنے کے لیے ہم درج ذیل مثال کو لیتے ہیں۔

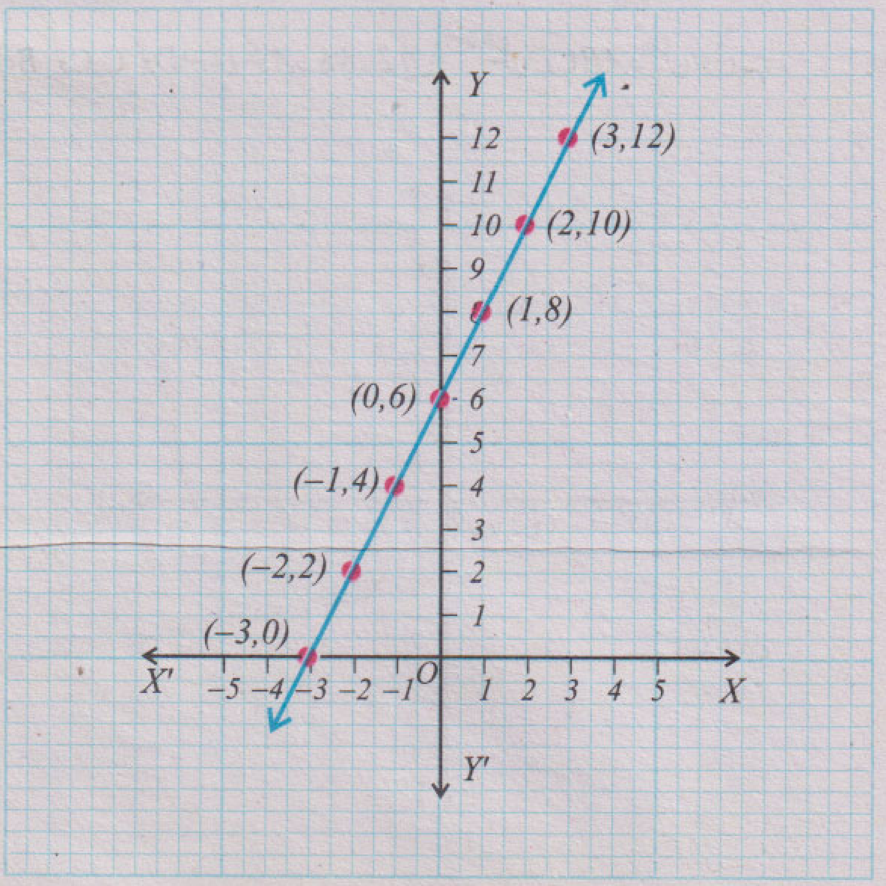
مثال :- $y = 2x + 6$ کا گراف کھینچیے۔

حل :-

اس مساوات کا گراف کھینچنے کے لیے ہم اس x-محور پر قاطع اور y-محور پر قاطع دیکھتے ہیں۔ x-محور پر قاطع کے لیے $y = 0$ رکھنے سے ہمیں $x = 3$ لہٰذا x-محور پر قاطع نقطہ $(3,0)$ اور y-محور پر قاطع کے لیے $x = 0$ رکھنے سے $y = 6$ یعنی قاطع نقطہ $(0,6)$ حاصل ہوتے ہیں۔

اسی طرح $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ رکھنے سے ہمیں y کی قیمتیں درج ذیل جدول کے مطابق حاصل ہوتی ہیں۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	2	4	6	8	10	12



9.1.11 دِی گئی جدول کی ترسیم (گراف) کھینچنا Draw a Graph from a given Table

ہم نیچے دِی گئی جدول کے نقاط کا گراف پیپر پر ترسیم (گراف) بناتے ہیں۔

x	6	−6	−6	6
y	4	4	−4	−4

جدول سے ہمیں چار مترتب جوڑے

$A(6,4)$، $B(-6,4)$، $C(-6,-4)$ اور $D(6,-4)$ ملتے ہیں۔

نقطہ $A(6,4)$ کے لیے

ہم x-محور پر مبداء 'O' سے دائیں جانب 6 یونٹس اور پھر y-محور کے متوازی x-محور کے عموداً اوپر 4 یونٹس چلتے ہیں۔

نقطہ $B(-6,4)$ کے لیے

ہم x-محور پر مبداء 'O' کے بائیں جانب 6 یونٹس اور پھر y-محور کے متوازی x-محور کے نیچے عموداً 4 یونٹس اوپر کی جانب چلتے ہیں۔

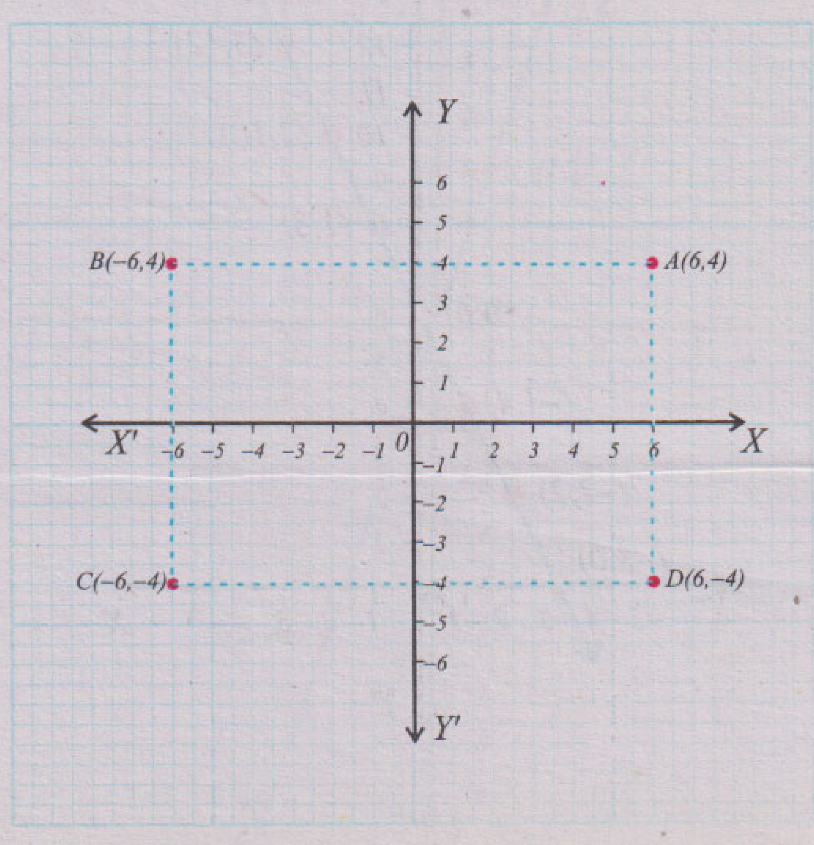
نقطہ $C(-6,-4)$ کے لیے

ہم x-محور پر مبداء 'O' کے بائیں جانب 6 یونٹس اور پھر y-محور کے متوازی x-محور کے نیچے عموداً 4 یونٹس چلتے ہیں۔

نقطہ $D(6,-4)$ کے لیے

ہم x-محور پر مبداء 'O' کے دائیں 6 یونٹس پھر وہاں سے عموداً x-محور کے نیچے 4 یونٹس چلتے ہیں۔

ہم A کو B، B کو C، C کو D اور D کو A سے ملاتے ہیں تو مستطیل $ABCD$ حاصل ہوتی ہے۔



9.1.12 تفاعل (فنکشن) کی ڈومین اور رینج کی بذریعہ گراف نشاندہی

Identification of Domain and Range of a Function Through Graph

شکل میں فنکشن $y = 2x + 1$ کا گراف دِکھایا گیا ہے۔ یہ گراف درج ذیل مترتب جوڑوں کی مدد سے بنایا گیا ہے۔

$A(-2,-3)$, $B(-1,-1)$, $C(0,1)$, $D(1,3)$ اور $E(2,5)$

ہم ان مترتب جوڑوں سے x اور y کی قیمتوں پر مشتمل جدول تیار کرتے ہیں۔

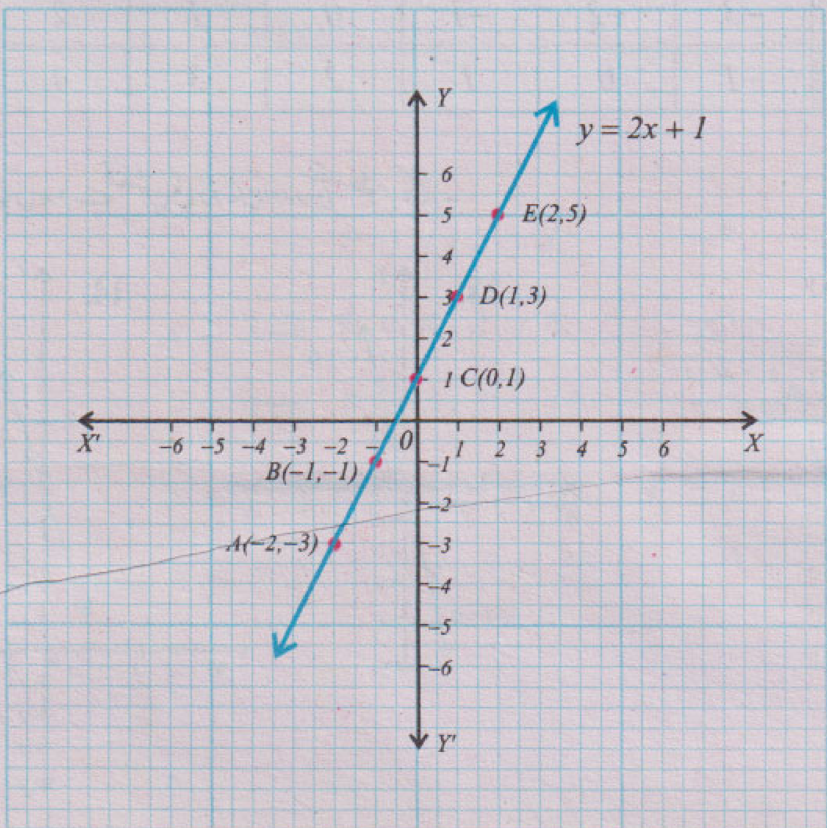
x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3	5

فنکشن $y = 2x + 1$ میں x کی قیمتوں کا سیٹ ڈومین جبکہ y کی قیمتوں پر مشتمل سیٹ اس فنکشن کی رینج کہلاتا ہے۔

پس فنکشن $y = 2x + 1$ کے لیے

فنکشن کی ڈومین کا سیٹ $\{-2,-1,0,1,2\}$

فنکشن کی رینج کا سیٹ $\{-3,-1,1,3,5\}$



مشق 9.2

مندرجہ ذیل کے گراف کھینچئے۔

1. $y = 3x$
2. $y = x + 7$
3. $y = 2x - 3$
4. $y = 4x + 1$
5. $y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$
6. $y = x - 1$
7. $y = 2x - 3$
8. $y = 3x + 5$
9. $y = \frac{x}{2}$

-10 نقاط $A(1,0)$, $B(7,0)$, $C(1,8)$ کے گراف کھینچئے۔

-11 دیئے گئے جدولوں کے گراف کھینچئے۔

(i)

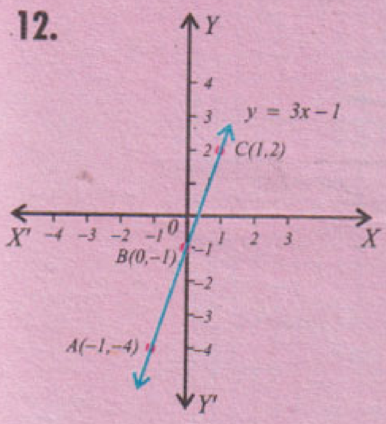
x	3	2	1	0	−1	−2	−3
y	−5	−3	−1	1	3	5	7

(ii)

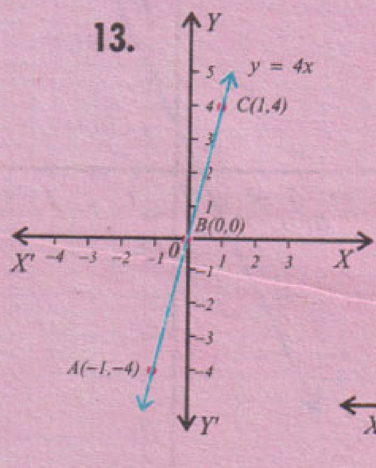
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−1	0	1	2	3	4	5

دیئے گئے گراف کی مدد سے فنکشن کی ڈومین اور رینج معلوم کیجئے۔

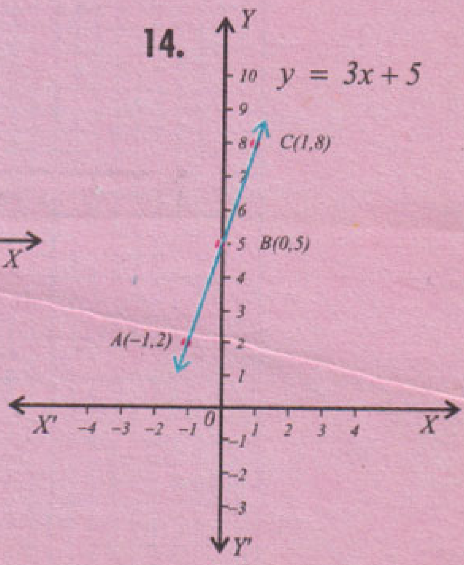
12.



13.



14.



9.2 تحویلی گراف CONVERSION GRAPHS

اگر ہمیں چھٹیوں میں لندن جانا ہو تو ممکن ہے کہ ہمیں اشیاء کی پونڈوں ($\pounds$ Pounds) اور پنس (Pence) میں قیمتیں جاننا ذرا مشکل ہوں۔ مگر اگر ہمیں کرنسی کی شرح تبدیلی کا علم ہو تو ہم دیئے گئے روپوں کو پونڈوں میں اور دیے گئے پونڈوں کو روپوں میں تحویل کرنے کے لئے ایک سادہ سا خطی گراف استعمال کر سکتے ہیں۔

سیدھا خط جو اس مقصد کے لئے استعمال ہوتا ہے تحویلی گراف کہلاتا ہے۔

9.2.1 تحویلی گراف بطور خطی گراف Conversion Graph as a Linear Graph

کسی مربع کا احاطہ کا فارمولا $P = 4s$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جس میں P یونٹ (اکائیاں) احاطہ اور 's' اکائیاں ایک ضلع کی لمبائی ہوتی ہے۔ یہ ایک راست تناسب کی مثال ہے۔ کیونکہ اِس میں ایک مقدار میں اضافہ سے دوسری مقدار میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔

مثلاً

جب $s = 1 \Rightarrow P = 4 \times 1 = 4,$

جب $s = 2 \Rightarrow P = 4 \times 2 = 8,$

جب $s = 3 \Rightarrow P = 4 \times 3 = 12,$

جب $s = 4 \Rightarrow P = 4 \times 4 = 16,$

جب $s = 5 \Rightarrow P = 4 \times 5 = 20$

9.2.2 ایک مقدار سے دوسری مقدار میں تبدیلی کا بذریعہ گراف مطالعہ کرنا

Read a given Graph to Know One Quantity Corresponding to Another

آیئے مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کیجئے۔

مثال:-

نیچے دیا گیا گراف مختلف رقوم کی مقداروں کے لئے ڈالروں سے پونڈوں میں منتقلی کو ظاہر کرتا ہے۔

$	50	100	200	250
£	35	70	140	175

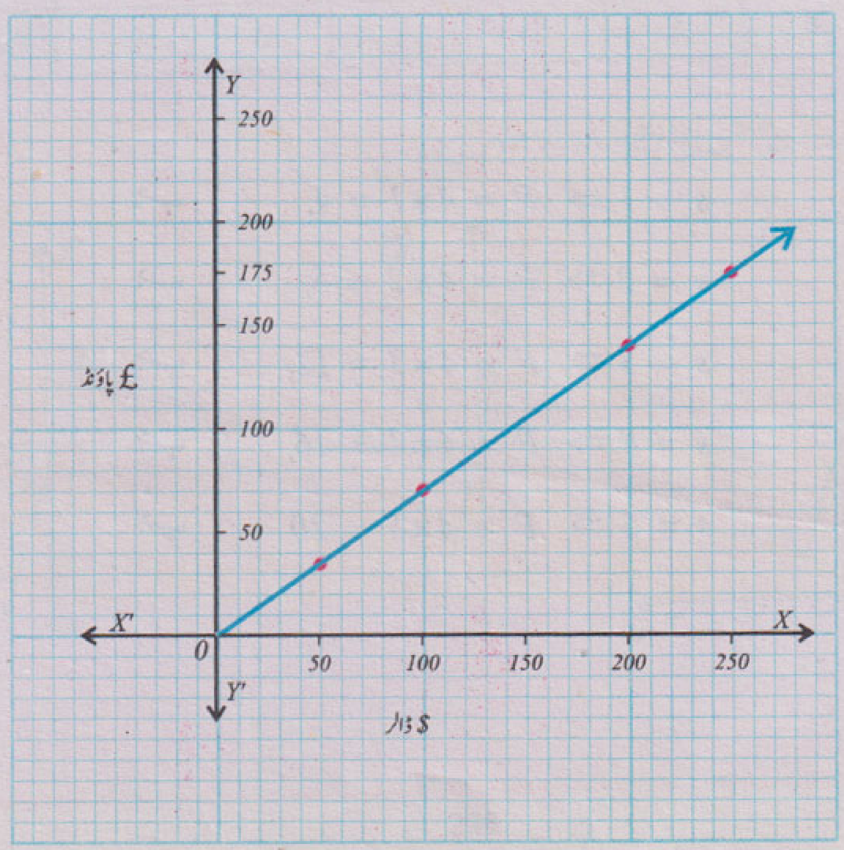
حل:-

(i) 50 ڈالر، 35 پونڈ میں تبدیل ہوتے ہیں۔

(ii) 100 ڈالر، 70 پونڈ میں تبدیل ہوتے ہیں۔

(iii) 150 ڈالر، 105 پونڈ میں تبدیل ہوتے ہیں۔

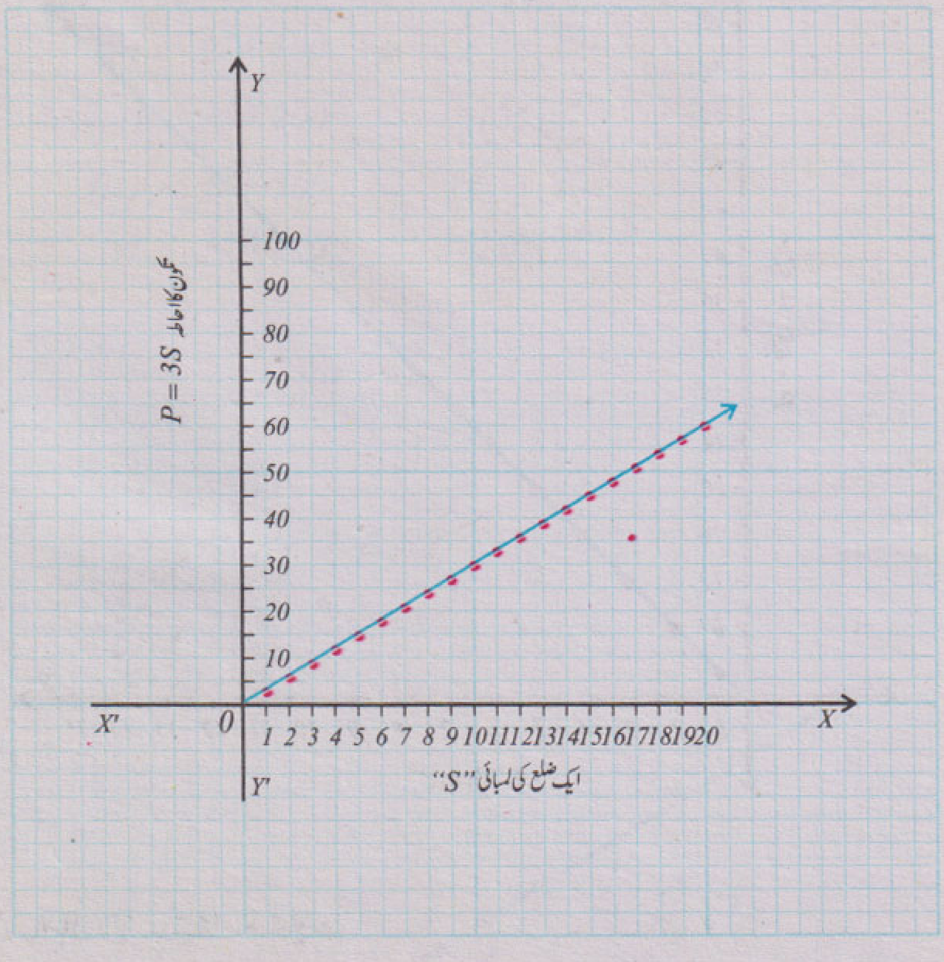
(iv) 250 ڈالر، 175 پونڈ میں تبدیل ہوتے ہیں۔



مثال 2:-

درج ذیل گراف مساوی الاضلاع مثلث کے احاطہ اور اضلاع کے درمیان تعلق $P = 3S$ دکھایا گیا ہے۔
جبکہ 'S' کی قیمتیں 1 تا 20 ہیں۔

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$P = 3S$	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60



(i) ضلع کی لمبائی 1 یونٹ ہو تو احاطہ 3 یونٹ

(ii) ضلع کی لمبائی 3 یونٹ ہو تو احاطہ 9 یونٹ

(iii) $S = 4$ ، $P = 12$

(iv) $S = 6$ ، $P = 18$

(v) $S = 9$ ، $P = 27$

(vi) $S = 11$ ، $P = 33$

(vii) $S = 14$ ، $P = 42$

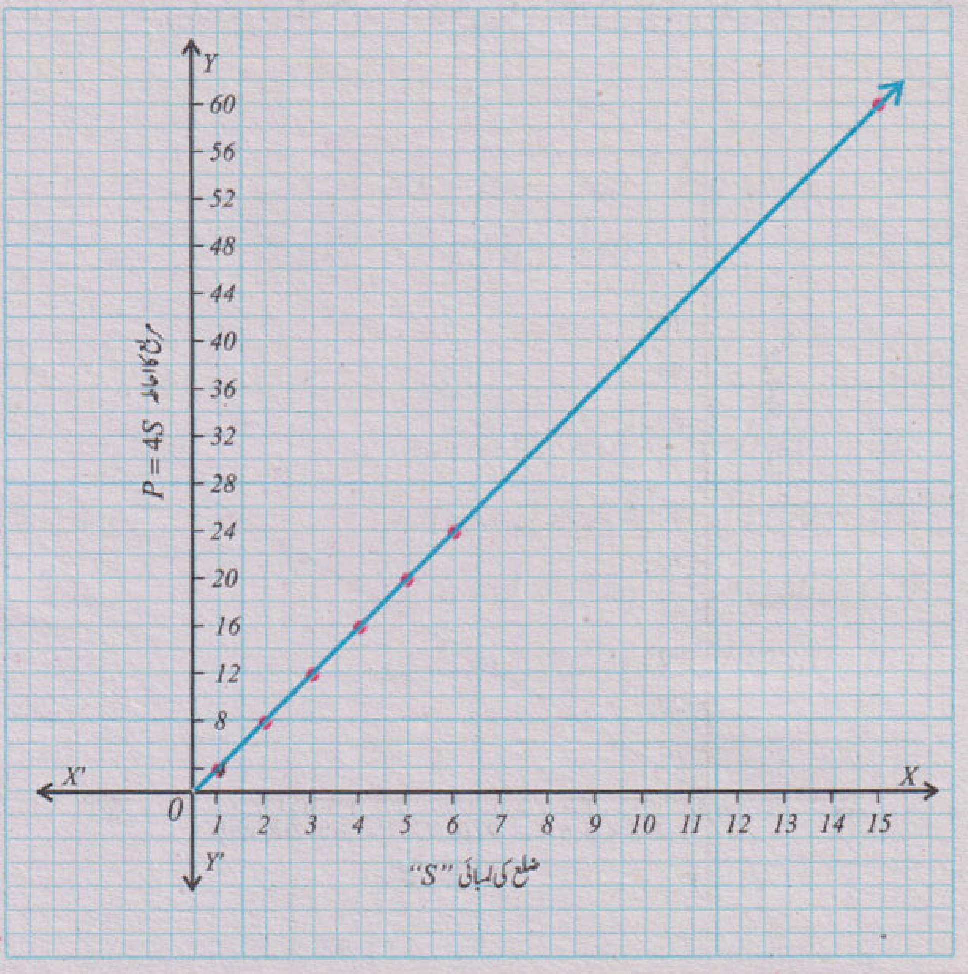
(viii) $S = 16$ ، $P = 48$

(ix) $S = 20$ ، $P = 60$

مثال 3:-

مربع کے ضلع S اور احاطہ P کی لمبائیوں میں گراف فارمولا $P = 4S$ میں دکھایا گیا ہے۔ جبکہ 'S' کی قیمتیں 1 تا 15 ہیں۔

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P = 4S$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60



(i) ضلع کی لمبائی 1 یونٹ کیلئے احاطہ 4 یونٹ

(ii) ضلع کی لمبائی 2 یونٹ ہو تو احاطہ 8 یونٹ

(iii) $P = 12$، $S = 3$

(iv) $P = 16$، $S = 4$

(v) $P = 20$، $S = 5$

(vi) $P = 24$، $S = 6$

(vii) $P = 28$، $S = 7$

(viii) $P = 32$، $S = 8$

(ix) $P = 36$، $S = 9$

(x) $P = 40$، $S = 10$

(xi) $P = 44$، $S = 11$

(xii) $P = 48$، $S = 12$

(xiii) $P = 52$، $S = 13$

(xiv) $P = 56$، $S = 14$

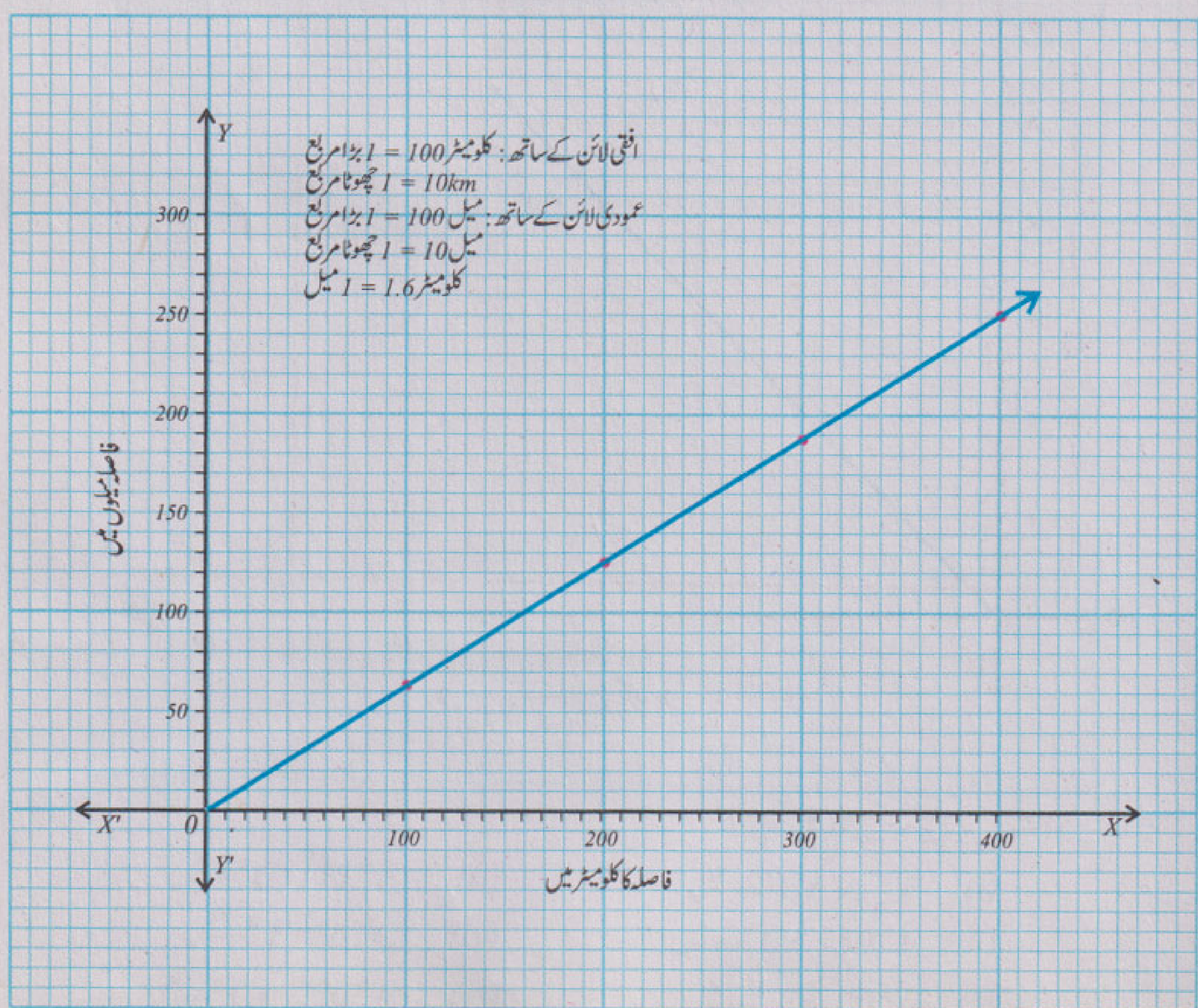
(xv) $P = 60$، $S = 15$

9.2.3 تحویلی گراف کا مطالعہ کرنا Read the Graph for Conversion

میل اور کلومیٹر

تحویلی گراف کا مطالعہ کیجئے۔

تحویلی	1 میل	=	1.6 کلومیٹر
	0 میل	=	0 کلومیٹر (i)
	62.5 میل	=	100 کلومیٹر (ii)
	125 میل	=	200 کلومیٹر (iii)
	187.5 میل	=	300 کلومیٹر (iv)
	250 میل	=	400 کلومیٹر (v)

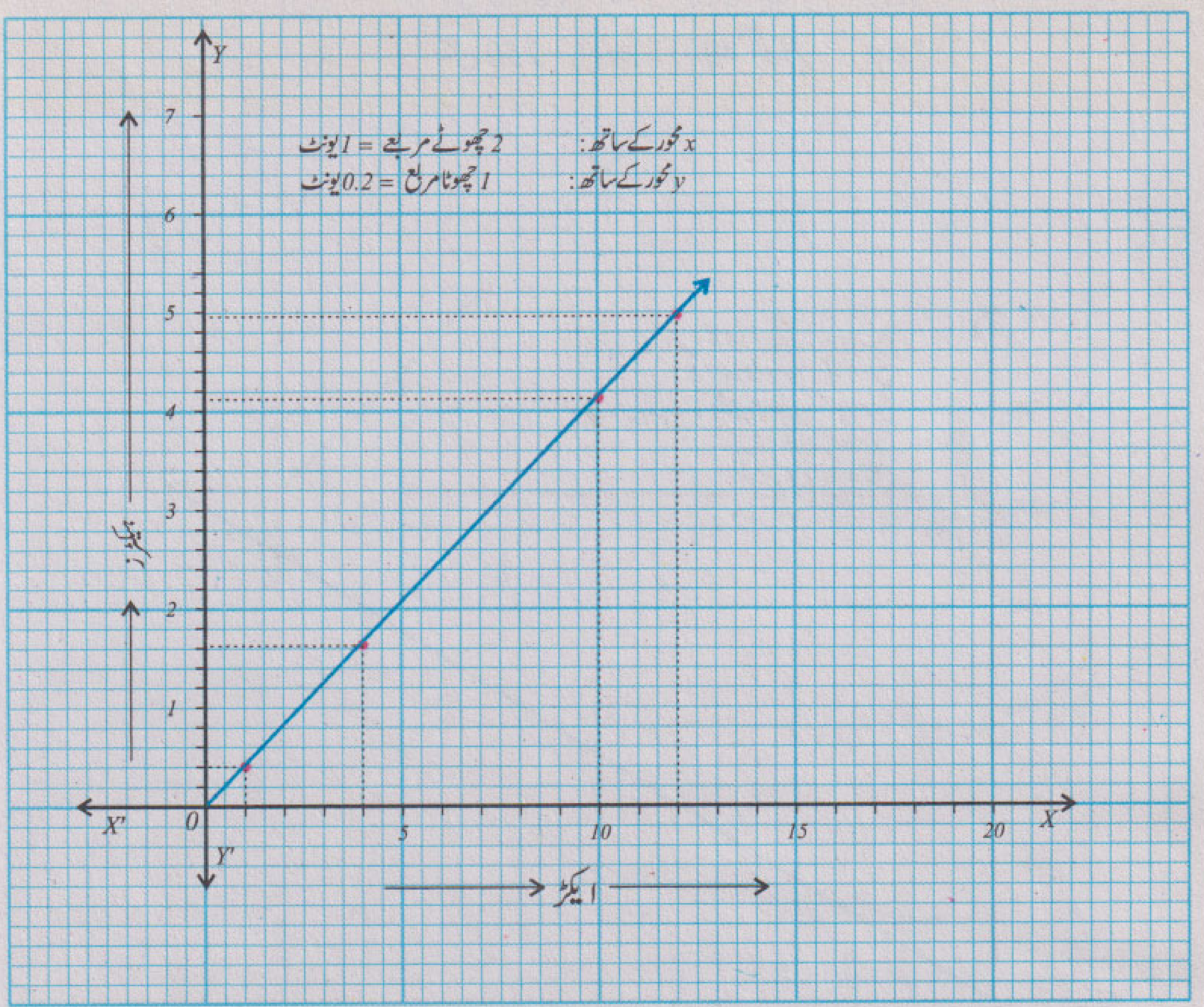


اَیکڑاورہیکٹر Acres and Hacters

جدول رقبہ کی مقداریں ایکڑوں سے ہیکٹروں میں تبدیلی کو ظاہر کرتا ہے۔

ایکڑ	1	4	10	12
ہیکٹر	0.4046	1.6187	4.0468	4.8562

اِن نقاط کے گراف کو گراف پیپر پر ایکڑ کی قیمتوں 0 تا 30 اور ہیکٹروں 0 تا 12.1405 تک ظاہر کیا گیا۔ فرض کیا X۔محور پر 2 چھوٹے مربع ایک اکائی کو ظاہر کرتے ہیں۔ جبکہ Y محور پر 1 چھوٹا مربع 0.2 یونٹس کو ظاہر کرتا ہے۔



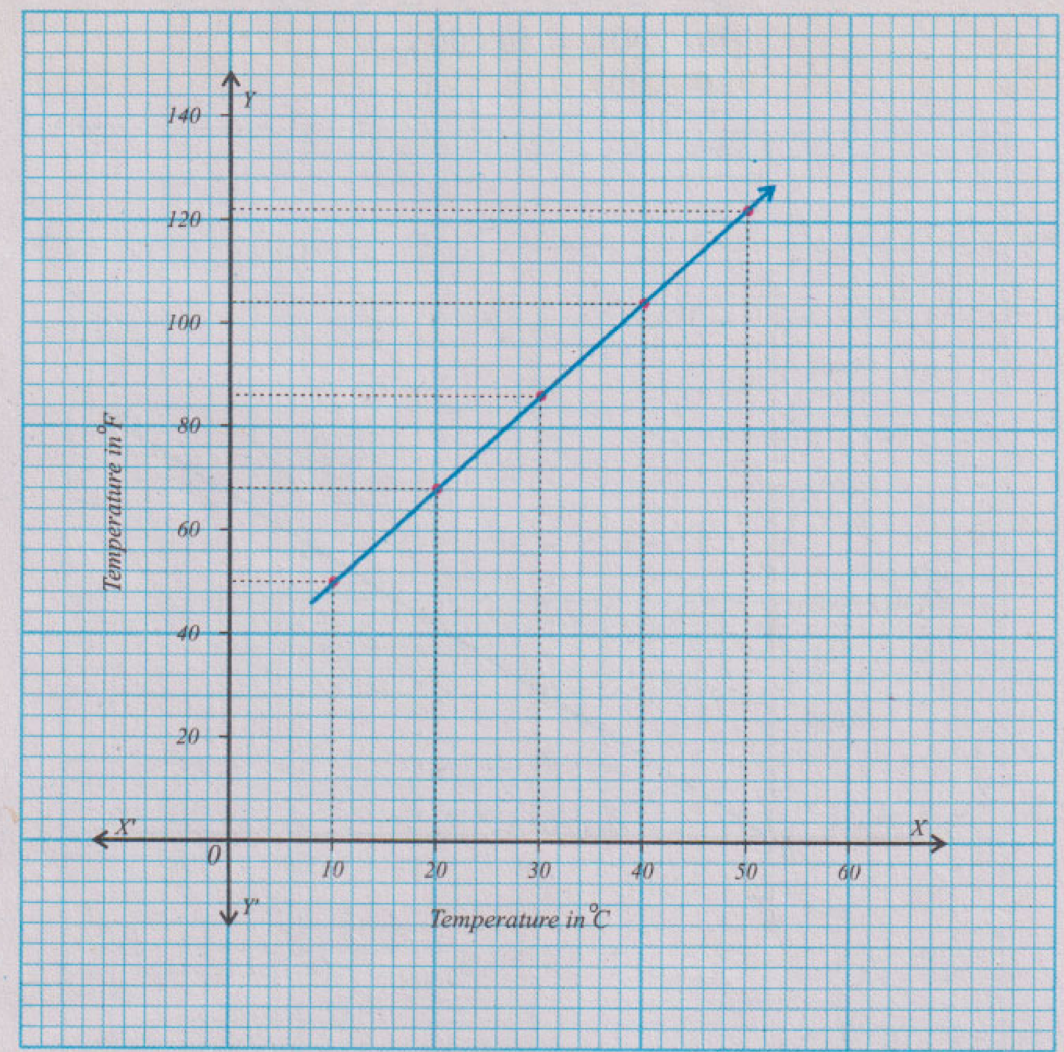
درجہ حرارت سینٹی گریڈ اور فارن ہائیٹ کی باہمی تبدیلی

Degrees Celsius and Degrees Fahrenheit

دیا گیا گراف درجہ فارن ہائیٹ $(^{\circ}F)$ کی تحویلی قیمت کو درجہ سینٹی گریڈ میں ظاہر کرتا ہے۔ گراف کا احتیاط کے ساتھ مطالعہ کیجئے اور سوالوں کے جوابات دیجئے۔

افقی محور یعنی X۔محور پر سینٹی گریڈ کو $10^{\circ}C$ کو 5 چھوٹے مربع کے برابر لے کر 0 درجہ تا 50 درجہ جبکہ عمودی محور یعنی Y۔محور پر فارن ہائیٹ $20^{\circ}F$ کو 5 چھوٹے مربع کے برابر رکھ کر گراف بنایا گیا۔

تبدیلی (کنورژن) $^{\circ}F = \left(\frac{9}{5} \times {^{\circ}C}\right) + 32$, $^{\circ}C = \frac{5}{9}(^{\circ}F - 32)$



گراف کا استعمال کرتے ہوئے تبدیل کیجئے۔

(i) $95\,^{\circ}F$ کو ... $^{\circ}C$ میں
(ii) $113\,^{\circ}F$ کو ... $^{\circ}C$ میں
(iii) $150\,^{\circ}F$ کو ... $^{\circ}C$ میں
(iv) $86\,^{\circ}C$ کو ... $^{\circ}F$ میں
(v) $20\,^{\circ}C$ کو ... $^{\circ}F$ میں
(vi) $220\,^{\circ}F$ کو ... $^{\circ}C$ میں

پاکستانی کرنسی کی دوسرے ملک کی کرنسی میں تبدیلی

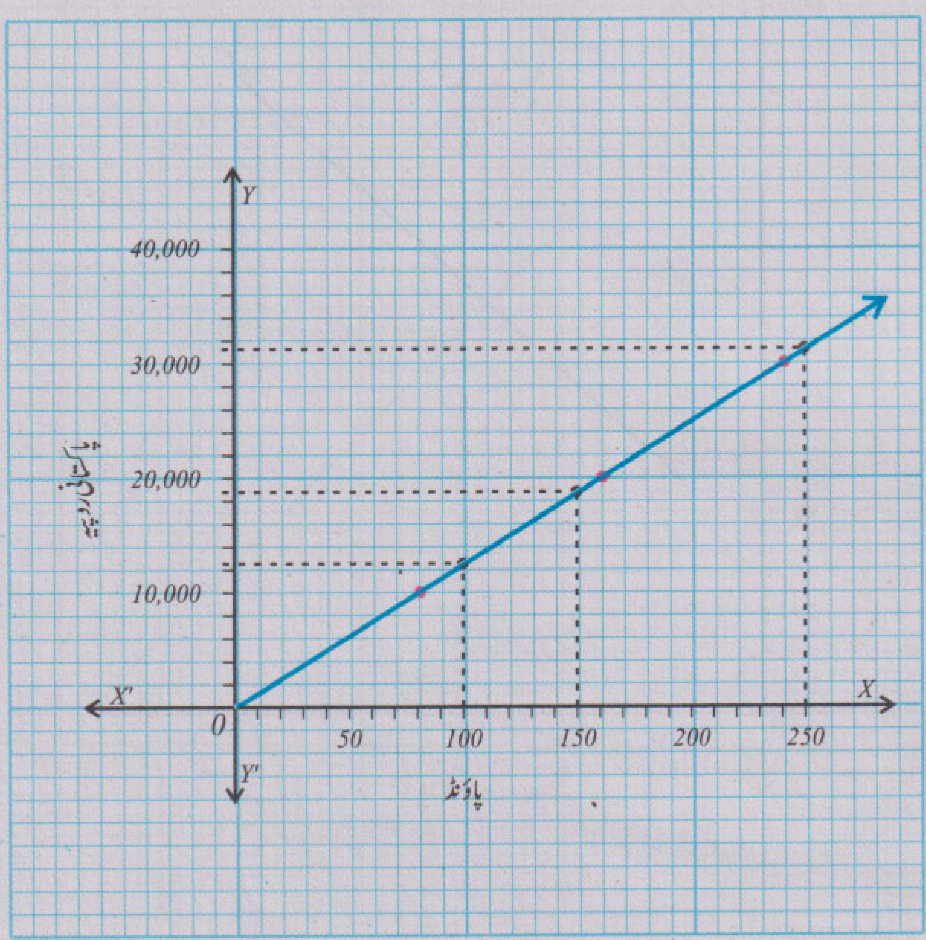
Pakistani Currency and another Currency

دیا گیا گراف برطانوی پونڈ کی مختلف قیمتوں کے برابر پاکستانی روپوں کی قدروں کو ظاہر کرتا ہے۔

افقی محور پر 5 چھوٹے مربع = £50 اور عمودی محور پر 5 چھوٹے مربع = 10,000 روپے اور 125 روپے = £1

گراف سے:

(i) 80£ = 10,000 روپے
(ii) 160£ = 20,000 روپے
(iii) 240£ = 30,000 روپے



گراف کا مطالعہ کر کے بتائیے کہ

(iv) 250£ = ____ روپے (v) 150£ = ____ روپے (vi) 100£ = ____ روپے

(vii) 5000 روپے = £ ____ (viii) 8000 روپے = £ ____

مشق 9.3

-1 جدول میں فارن ہائیٹ F^o اور اس کے متساوی سینٹی گریڈ میں قیمتیں درج ہیں۔

درجہ حرارت فارن ہائیٹ	^oF	57	126	158	194
درجہ حرارت سینٹی گریڈ	^oC	14	52	70	90

اِن نقاط کو 0^o تا 100^o اور فارن ہائیٹ سکیل 0^o تا 220^o گراف پیپر پر ظاہر کیجئے۔ جبکہ دونوں محوروں پر یونٹس $20 = 5^o$ چھوٹے مربع رکھیں۔ اپنے گراف کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی تبدیلی معلوم کیجئے۔

(a) $97\,^oF$ کو ^oC میں (b) $127\,^oF$ کو ^oC میں (c) $25\,^oC$ کو ^oF میں (d) $80\,^oC$ کو ^oF میں

-2 دی گئی جدول مختلف رقوم کے لئے امریکی ڈالروں (\$) سے پونڈوں (£) میں تبدیلی کو ظاہر کرتی ہے۔

\$	50	100	200
£	35	70	140

اِن نقاط کو گراف پیپر پر ظاہر کر کے اِن کو لکھ کر ایک سیدھا خط حاصل کیجئے۔ دونوں محوروں پر یونٹس $50 = 5$ چھوٹے مربع لے کر گراف مکمل کیجئے۔ اپنے گراف کو درج ذیل تبدیلی کیلئے استعمال کیجئے۔

(a) $\$160 = £\ ...$ (b) $\$160 = £\ ...$

(c) $£160 = \$\ ...$ (d) $£160 = \$\ ...$

-3 نیچے دیئے گئے جدول میں کلومیٹر کی مختلف قدروں کی متساوی میل میں قدریں دی گئی ہیں۔

کلومیٹر	0	100	200	300
میل	0	62.5	125	187.5

اِن قدروں کو گراف پیپر پر ظاہر کیجئے۔ x-محور پر 10 چھوٹے مربع = 100 کلومیٹر جبکہ y-محور پر 10 چھوٹے مربع = 100 میل رکھئے۔ اپنے گراف کو مندرجہ ذیل تبدیلیوں کے لئے استعمال کیجئے۔

(a) میل ... = 140 کلومیٹر (b) میل ... = 175 کلومیٹر

(c) کلومیٹر ... = 50 میل (d) کلومیٹر ... = 100 میل

-4 صفحہ نمبر 241 پر 9.2.3 آرٹیکل میں دیئے گئے گراف کو مندرجہ ذیل تبدیلیوں میں لکھنے کے لئے استعمال کیجئے۔

(a) ہیکٹر ... = 16 ایکڑ (b) ہیکٹر ... = 18 ایکڑ

(c) ایکڑ ... = 6.0702 ہیکٹر (d) ہیکٹر ... = 24 ایکڑ

(e) ایکڑ ... = 11.3311 ہیکٹر

جائزہ مشق 9

-1 صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) مبداء کے محددات کیا ہوتے ہیں؟

(a) $(1,1)$ (b) $(0,1)$ (c) $(0,0)$ (d) $(1,0)$

(ii) کسی نقطہ کا Y۔محور سے عمودی فاصلہ کیا کہلاتا ہے؟

(a) افقی لائن (b) مبداء (c) عمودی لائن (d) محور

(iii) کسی نقطہ کا X۔محور سے عمودی فاصلہ کیا کہلاتا ہے؟

(a) افقی لائن (b) مبداء (c) ایبسا (d) آرڈینیٹ

(iv) $2x + y = 6$ میں $x = 1$ رکھنے سے $y = ?$

(a) -4 (b) -8 (c) 4 (d) 8

(v) $2x - y = 6$ میں $y = 2$ رکھنے سے $x = ?$

(a) -2 (b) 2 (c) -4 (d) 4

(vi) مساوات $y = c$ کی شکل میں گراف پر y محدد کیا ہوتا ہے؟

(a) -1 (b) 0 (c) c (d) 1

(vii) مساوات $y = a$ کے گراف پر x محدد کیا ہوتا ہے؟

(a) c (b) 1 (c) متغیر (d) a

(viii) $f(x) = \frac{x}{2}, 4 \le x \le 12, x$ جبکہ x ایک جفت عدد ہو تو $f(x)$ کی ڈومین کیا ہے؟

(a) $\{2,3,4,5,6\}$ (b) $\{4,6,8,10\}$ (c) $\{6,8,10\}$ (d) $\{4,6,8,10,12\}$

(ix) $f(x) = \frac{x}{2}$، $4 \le x \le 12$ جبکہ x ایک جفت عدد ہو تو $f(x)$ کی رینج کیا ہے؟

(a) $\{3,4,5,6\}$ (b) $\{3,4,5\}$ (c) $\{2,3,4,5,6\}$ (d) $\{4,6,8,10,12\}$

(x) اگر $y = 3x$ میں $x = 2$ رکھیں تو $y = ?$

(a) 2 (b) -3 (c) 6 (d) 0

-2 خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i) مستوی سطح جس میں ایک دوسرے کے عموداً نقطہ O پر متقاطع خطوط XOX', YOY' ______ کہلاتی ہے۔

(ii) Y ۔محور سے عموداً فاصلہ ______ کہلاتا ہے۔

(iii) X ۔محور سے عموداً فاصلہ ______ کہلاتا ہے۔

(iv) عددوں کا جوڑا $(2,3)$ ______ کہلاتا ہے۔

(v) افقی خط XOX' ______ کہلاتا ہے۔

(vi) عموداً خط YOY' ______ کہلاتا ہے۔

(vii) نقطہ $(-1,-2)$ کے اظہار کے لئے ہم مبداء O سے X۔محور پر بائیں جانب '1' یونٹ اور '2' یونٹ ______

(viii) مبداء کے محددات ______ ہوتے ہیں۔

(ix) خط کی مساوات جس میں y پایا جاتا ہو ______ کہلاتی ہے۔

(x) مساوات $2x + y = 6$ کے گراف میں X۔محور کا نقطہ قاطع ______ ہے۔

-3 مندرجہ ذیل نقاط کو گراف پیپر پر ظاہر کیجئے۔

(i) $A(5,2)$, $B(-6,-3)$ اور $C(3,5)$

(ii) $A(0,-5)$, $B(3,-2)$, $C(3,0)$ اور $D(6,7)$

(iii) $A(8,4)$, $B(-6,3)$, $C(-5,-3)$ اور $D(10,-6)$

-4 مندرجہ ذیل کا گراف بنائے۔

(i) $y = 3x + 2$

(ii) $y = 2x + 1$

(iii) $y = x + 1$

(iv) $y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{2}$

(v) $y = 3x + 4$

-5 نقاط $A(2,0)$, $B(7,0)$ اور $C(1,8)$ کا گراف بنائیے۔

-6 اگر $f(x) = \dfrac{x}{2}, 4 \le x \le 12$ ہو تو $f(x)$ کی ڈومین اور رینج لکھیے۔

خلاصہ

- سیٹوں کی برابری کی تعریف کی رو سے کسی بھی دو عناصر 'a' اور 'b' کے لئے $\{a,b\} = \{b,a\}$

- اعداد کے جوڑے $(3,2)$، $(3,1)$، $(2,4)$، $(2,3)$، $(2,2)$، $(2,1)$ وغیرہ وغیرہ مترتب جوڑوں کی مثالیں ہیں۔

- ہم ایک خطی گراف کو دی گئی مقدار میں روپوں کو پونڈوں میں پونڈوں کو روپوں میں تبدیل کرنے کے لئے استعمال کر سکتے ہیں۔