

بنیادی شماریات

BASIC STATISTICS

- ◀ تعددی تقسیم
- ◀ مجموعی تعدد
- ◀ مرکزی رجحان کی پیمائش
- ◀ انتشار کی پیمائش

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- ◀ کہ گروہی / جماعتی تعددی جدول کیسے تیار کیے جاتے ہیں۔
- ◀ کہ برابر اور نابرابر جماعتی وقفہ کے ساتھ ہسٹوگرام کیسے تیار ہوتے ہیں۔
- ◀ کہ تعددی کثیر الاضلاع کیسے بنتی ہے۔
- ◀ کہ مجموعی تعدد والی جدول کیسے بنتا ہے۔
- ◀ کہ مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کیسے بنتی ہے۔
- ◀ کہ گروہی اور غیر گروہی مواد کیسے حاصل ہوتا ہے۔
- کہ تعریف کے مطابق حسابی اوسط فرضی اوسط سے انحراف کا استعمال کیسے ہوتا ہے۔
- کہ وسطانیہ، اعادہ، حسابی اوسط اور ہم آہنگ اوسط کیسے حل کرتے ہیں۔
- ◀ کہ حسابی وسط کی خصوصیات کیا ہیں۔
- ◀ کہ اوزانی اوسط، وسط اور متحرک اوسط کیسے نکالے جاتے ہیں۔
- ◀ کہ وسطانیہ، چوتھائیوں اور اعادہ کا بذریعہ گراف تخمینہ کیسے لگاتے ہیں۔
- ◀ کہ وسعت، تغیریت اور معیاری انحراف کی پیمائش کیسے کرتے ہیں۔

10.1 تعددی پھیلاؤ FREQUENCY DISTRIBUTION

تعدد Frequency

جتنی مرتبہ دیے گئے مواد میں کوئی قدر پائی جاتی ہے۔ وہی اس کا تعدد یا فریکوینسی کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر 10% سے 20% نمبر حاصل کرنے والے طلباء 3 ہوں تو 3 اس گروہ کا تعدد کہلاتا ہے۔ اگر 5 طلباء 20% تا 30% نمبر حاصل کرنے والے ہوں تو اس گروہ کا تعدد 5 ہوگا۔

تعدد جدول Frequency Table

ایسا جدول جس میں ہر سکور/قدر کا تعدد دیا گیا ہو تعددی جدول کہلاتا ہے۔

10.1.1 گروہی تعددی جدول Grouped Frequency Table

مقامی محکمہ صحت 5 سال کی عمر کے اپنے علاقے کے بچوں کے قد کے متعلق معلومات حاصل کرنا چاہتا ہے۔ اپنے پہلے دورے میں ٹیم 90 بچوں کے قدوں کا ریکارڈ سینٹی میٹر میں دیئے گئے جدول کے مطابق حاصل کرتی ہے۔

99	107	102	98	115	95	106	110	108	105
118	102	114	108	94	104	113	102	105	95
105	110	109	101	106	108	107	107	101	109
108	105	116	109	114	110	97	110	113	116
112	101	92	105	104	115	111	103	110	99
93	104	103	113	107	94	102	117	116	104
99	114	106	114	98	109	107	104	106	107
109	113	112	100	109	113	118	104	94	114
107	96	108	103	112	106	115	111	115	101

اس جدول میں بچوں کے قد کسی ترتیب کے بغیر لکھے گئے ہیں یعنی جیسے جیسے جو بچہ میڈیکل چیکنگ کے لیے آتا گیا اس کا قد ریکارڈ کر لیا گیا۔ ہمیں واضح نتائج کی خاطر اس ڈیٹا کو خاص ترتیب میں لکھنا ہے۔ ہم قدوں کو کچھ اس طرح گروہوں میں لکھتے ہیں۔

100; سینٹی میٹر تا 104 سینٹی میٹر; 95; سینٹی میٹر تا 99 سینٹی میٹر; 90; سینٹی میٹر تا 94 سینٹی میٹر

115 سینٹی میٹر تا 119 سینٹی میٹر; 110; سینٹی میٹر تا 114 سینٹی میٹر; 105; سینٹی میٹر تا 109 سینٹی میٹر

قدوں کو ان کی عددی قیمت کے مطابق ترتیب دیا گیا ہے۔ ہر ایک گروہ میں قدوں کی تعداد گن کر درج ذیل جدول میں لکھا گیا ہے۔

قد سینٹی میٹر میں	موازنہ	تعداد
90 - 94		5
95 - 99		9
100 - 104		17
105 - 109		28
110 - 114		21
115 - 119		10
		90: کل میزان

10.1.2 کالمی نقشہ Histogram

جب ہم کالمی نقشہ اس طرح بناتے ہیں کہ ہر کالم کا رقبہ اس گروہ کے تعدد کے راست متناسب ہو تو ایسے نقشہ کو کالمی نقشہ (Histogram) کہتے ہیں۔

Histogram with equal class intervals مساوی جماعتی وقفوں کے لیے کالمی نقشہ

درج ذیل مثالوں پر غور کیجئے۔

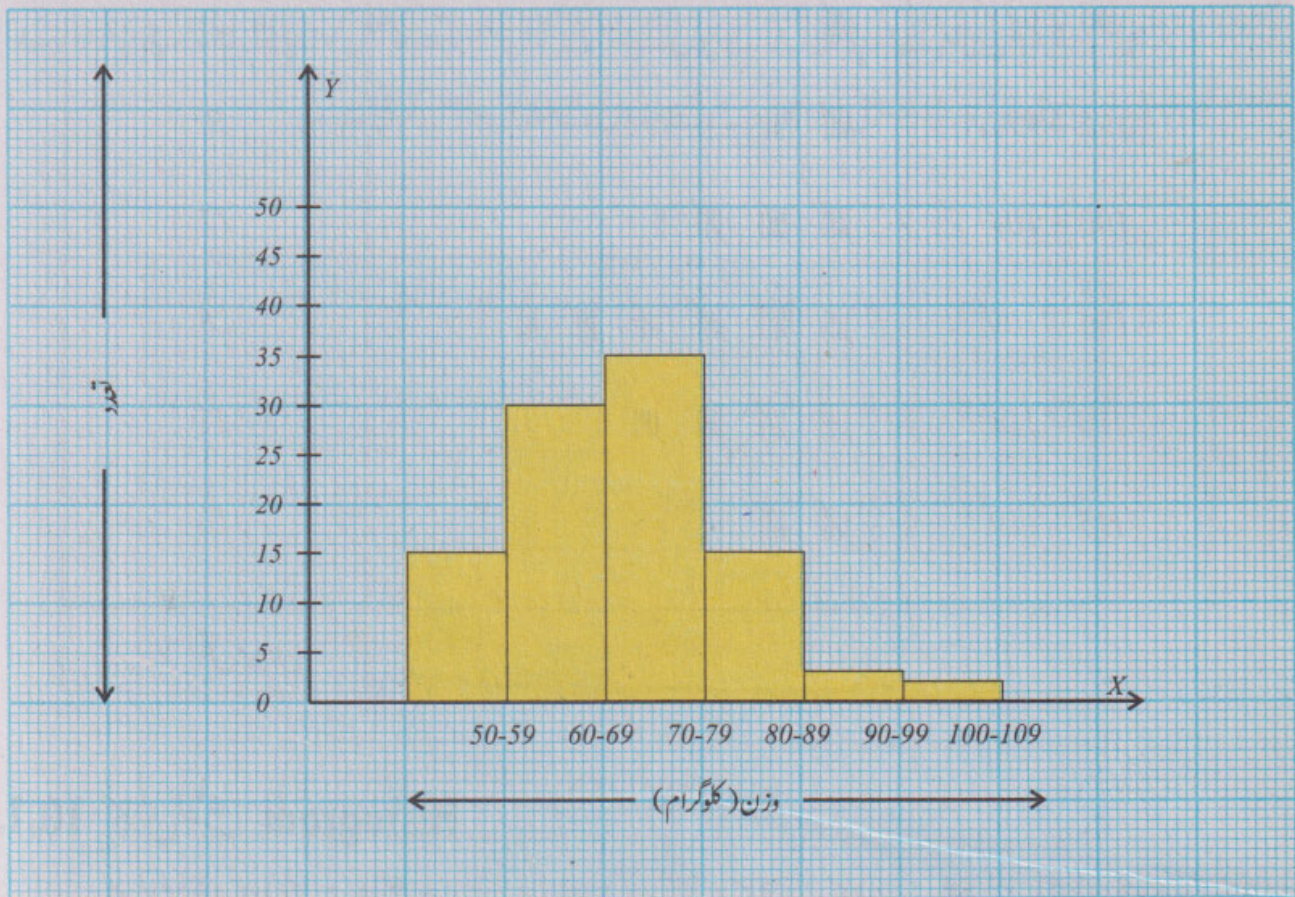
مثال :- مندرجہ ذیل مساوی جماعتی وقفوں کی جدول کا کالمی نقشہ تیار کیجئے۔

اوزان (کلوگرام میں)	50 - 59	60 - 69	70 - 79	80 - 89	90 - 99	100 - 109
تعداد	15	30	35	15	3	2
کل تعداد : 100						

حل :- مندرجہ ذیل کالمی نقشہ تعدوی جدول کی وضاحت کرتا ہے۔

(i) اوزان (کلوگرام میں) X -محور پر مبداء 'O' کی دائیں جانب۔ جبکہ تعداد X -محور کے اوپر Y -محور کے ساتھ لیا گیا ہے۔

(ii) X -محور پر ایک بڑا مربع = 10 کلوگرام وزن۔ جبکہ Y -محور پر ایک بڑا مربع = 10 تعدد۔



ہر کالم کا رقبہ اس جماعت کے تعدد کے راست متناسب ہے۔

شکل ایک مساوی کالمی نقشہ ہے۔ ہر جماعت کا جماعتی وقفہ یکساں ہے لہذا ہر کالم کی چوڑائی یکساں ہے۔ لہذا ہر کالم کا رقبہ اس

جماعت کے ارکان کی تعداد کے متناسب ہے۔

غیر مساوی جماعتی وقفوں کے لیے کالمی نقشہ Histogram with unequal class intervals

مثال :-

درج ذیل تعددی جدول میں 100 آدمیوں کی ماہانہ تنخواہ کا جائزہ پیش کیا گیا۔

تنخواہ روپوں میں	0 - 1999	2000 - 3999	4000 - 5999	6000 - 9999	10000 - 19999
تعدد	20	36	25	14	5

حل :- جماعتی وقفے مساوی نہیں ہیں۔

پہلی تین جماعتوں میں وقفہ 2000 روپے کا ہے۔
چوتھی جماعت کا وقفہ 4000 روپے کا ہے جو کہ پہلی تین کے وقفے کا دو گنا ہے۔
پانچویں جماعت کا وقفہ 10,000 روپے ہے۔ جو کہ پہلی تین کے وقفے سے پانچ گنا ہے۔
اس گروہی تقسیم کو ہسٹوگرام پر ظاہر کرنے کے لئے ہم پہلے تین کالموں کی چوڑائی یکساں رکھتے ہیں۔

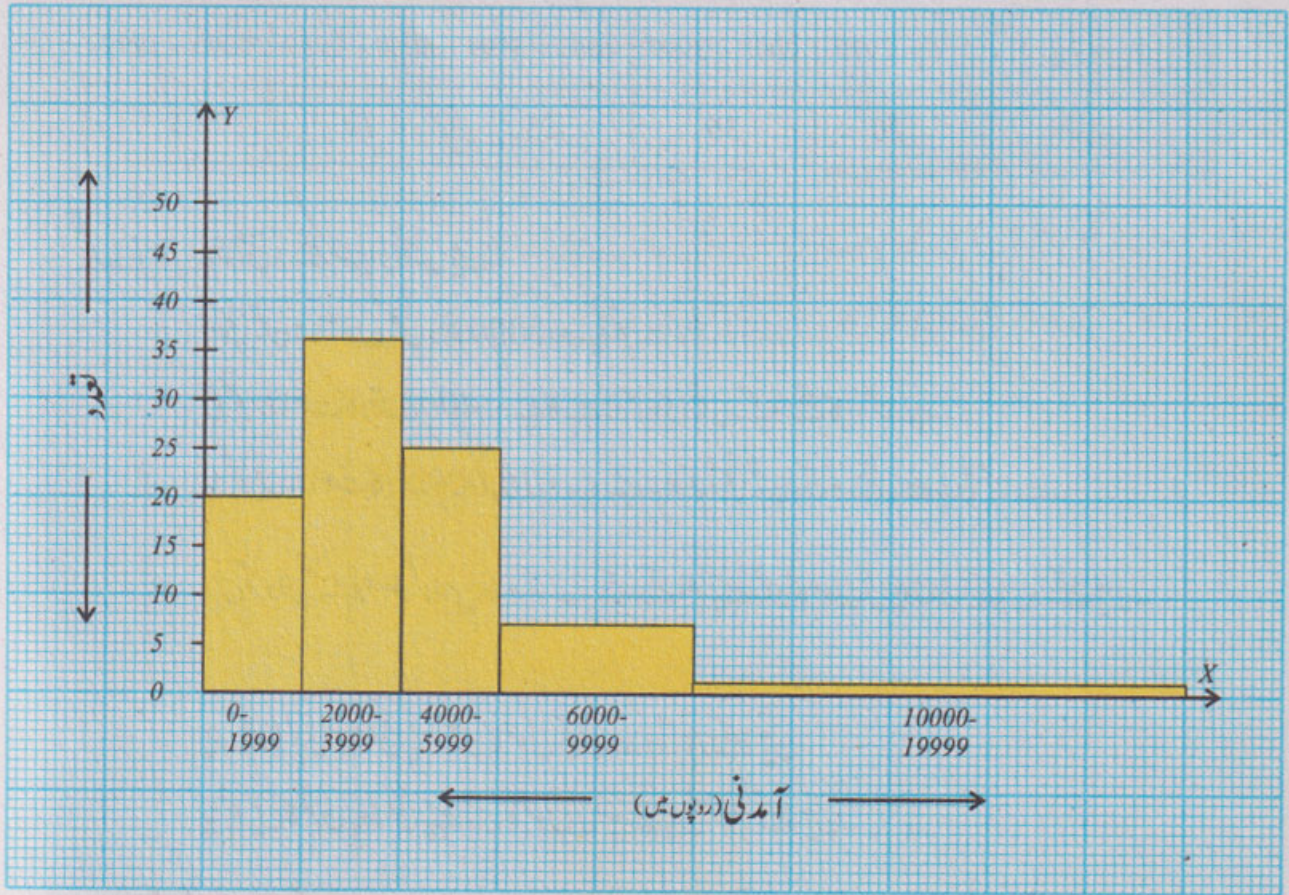
چوتھے کالم کی چوڑائی پہلے تین کالموں کی نسبت دو گنا رکھتے ہیں۔
پانچویں کالم کی چوڑائی پہلے تین کالموں کی نسبت پانچ گنا رکھتے ہیں۔

اب 14 تعدد کو لیجئے جو کہ گروپ 6000 روپے تا 9999 روپے میں واقع ہے۔ اگر ہم فرض کر لیں کہ تنخواہیں یکساں طور پر بڑھتی ہیں تو اس سے مراد یہ ہے کہ

سات افراد کی تنخواہ 6000 روپے سے 7999 روپے کے درمیان ہے۔
اور مزید سات افراد کی تنخواہ 8000 روپے سے 9999 روپے کے درمیان ہے۔

لہذا چوتھا کالم باقی تمام کالموں کے بالمقابل 7 یونٹس اونچا ہے۔ کیونکہ اس کالم کی چوڑائی دوسرے گروپ کے مقابلے میں دو گنا ہے۔ اس کا رقبہ اس کے تعدد کے متناسب بنتا ہے۔

اگر ہم یہ بھی تصور کریں کہ پانچویں گروپ میں آمدنی کو گروپ میں یکساں طور پر پھیلا یا گیا ہے تب تو ہر ذیلی گروپ میں صرف ایک آدی 2000 روپے والے وقفہ میں آتا ہے۔ اس لیے پانچواں کالم تمام گروپ سے ایک یونٹ اونچا بنتا ہے۔ پانچویں کالم کا رقبہ اس کے تعدد کے متناسب ہوگا۔



نوٹ۔ ہم عمودی محور کو تعدد کے اظہار کے لئے استعمال نہیں کرتے کیونکہ کالم کا رقبہ جو کہ تعدد کو ظاہر کرتا ہے نہ کہ اس کی بلندی۔

10.1.3 تعددی کثیر الاضلاع Frequency Polygon

تعددی کثیر الاضلاع بہت سارے اضلاع سے مل کر بننے والی بند شکل ہوتی ہے جسے بنانے کے لیے ہر گروہ کے کلاس مارک (کلاس/گروپ کا وسطی نقطہ) تعدد کے بالمقابل رکھ کر گراف پیپر پر نقاط لگائے جاتے ہیں۔ پھر ان نقاط کو سیدھی لائنوں سے ملا دیا جاتا ہے۔ تعددی کثیر الاضلاع ہسٹوگرام کی مستطیلوں کے اوپر کے اضلاع کے وسطی نقاط کو بھی ملانے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال :- تعددی جدول میں مواد وزن گھٹاؤ پر وگرام میں 40 شرکاء کا وزن دیا گیا ہے۔

دیئے گئے ڈیٹا کو استعمال کر کے ظاہر کیجئے۔

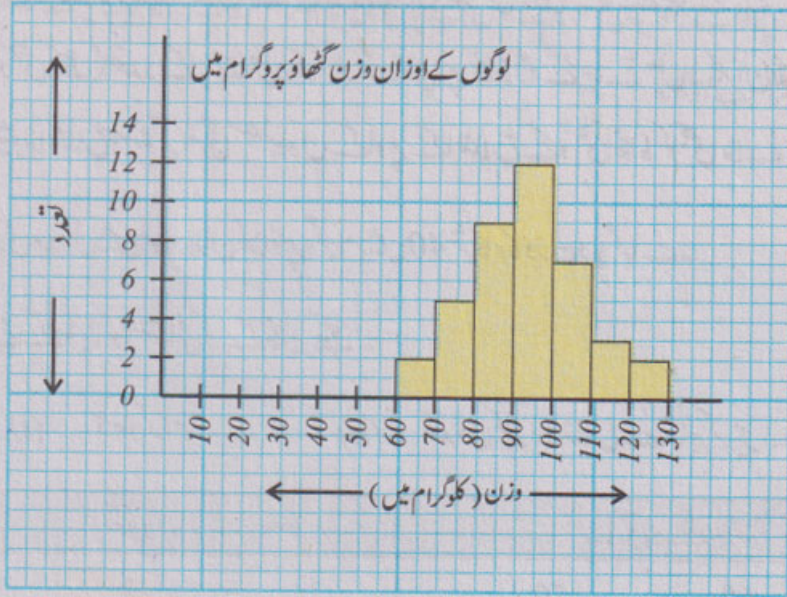
(i) ہسٹوگرام (ii) تعددی کثیر الاضلاع سے ظاہر کریں۔

جماعتی وقفے	تعدد
60 — 70	2
70 — 80	5
80 — 90	9
90 — 100	12
100 — 110	7
110 — 120	3
120 — 130	2
40 : میزان	

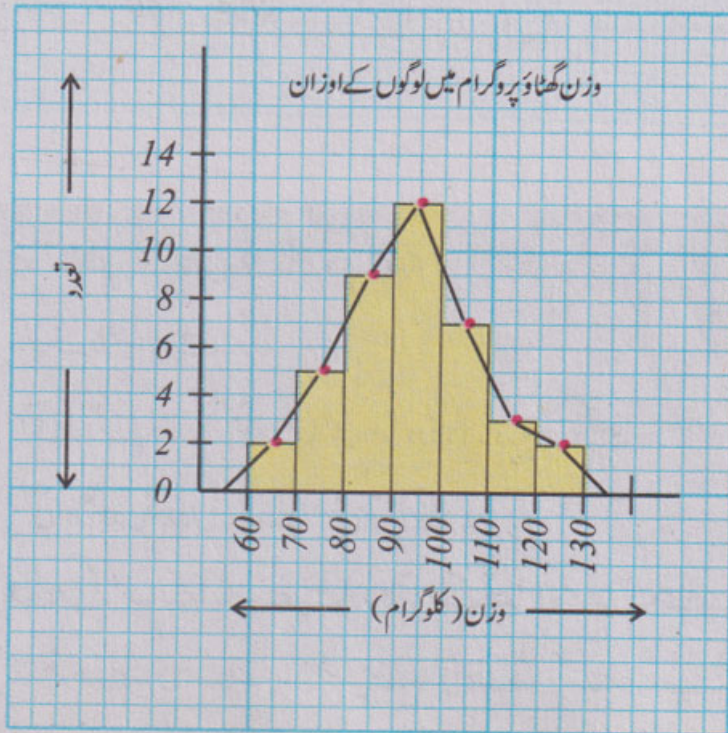
حل :-

- (i) گراف پیپر پر محور بنائیے (x-محور، y-محور)
- (ii) گراف کا عنوان لکھئے۔
- (iii) افقی x-محور پر وزن (کلوگرام) میں اور عمودی y-محور پر تعدد لکھئے
- (iv) افقی اور عمودی محوروں کے لیے سکیل مقرر کیجئے۔
- (v) x-محور پر گراف کے آغاز سے پہلے اور اختتام کے بعد کم از کم جماعتی وقفے سے آدھی لمبائی چھوڑ دیجئے۔
- (vi) 2 افراد کی بلندی تک بلند پہلا کالم پہلے جماعتی وقفہ کو ظاہر کرتا ہوا بنائیے۔

جز (iii) کو ایک جماعتی وقفہ کے لیے دہرائیے۔



(ii) مندرجہ بالا ہسٹوگرام A کی تمام مستطیلوں کے اوپر والے اضلاع کے وسطی نقاط کی نشاندہی کیجئے۔ ان وسطی نقاط کو سیدھے خطوط سے اس طرح ملا کر پہلے کالم سے پہلے والے کالم کے وسطی نقطہ اور کالم کے وسطی نقطہ کو x-محور پر جا ملائیں اور یوں ایک بند کثیرالاضلاع حاصل ہوتی ہے۔



مشق 10.1

1- ایک جوئیر سکول کے 50 طلباء نے سکول کمپیوٹر کلب میں شمولیت اختیار کی۔ ان کی عمروں کا بنایا گیا ریکارڈ درج ذیل ہے۔

10	8	9	10	7	8	8	11	10	9
7	8	9	9	10	11	11	10	9	8
8	7	9	7	10	7	10	8	9	11
10	11	8	10	9	8	9	7	11	10
9	10	10	11	10	11	7	11	10	9

تعددی جدول بنائیے جو کہ ہر عمر کے عدد کو ظاہر کرے۔ اس معلومات کو کالم چارٹ سے ظاہر کیجئے۔

2- مقامی مچھلی اور چپس کی دوکان پر ایک ہفتہ کی شام 56 گاہک آئے۔ انہوں نے دی گئی رقم خرچ کیں۔

270	110	45	96	250	490	325	45
382	136	125	450	420	380	150	250
85	250	320	525	218	210	216	120
155	430	250	40	510	150	510	245
320	120	316	150	260	45	180	310
273	280	85	280	318	45	210	282
462	316	218	316	325	45	560	315

گروپوں 0-99 روپے، 100-199 روپے، 200-299 روپے، 300-399 روپے، 400-499 روپے، 500-599 روپے کو استعمال کرتے ہوئے تعددی جدول تیار کیجئے اور مواد کو کالم / بار چارٹ میں ظاہر کیجئے۔

3- ایک میلے میں فروخت کیے گئے 30 پاپ کارن کے بیگوں کے اوزان گرام میں دیئے گئے ہیں۔

69	83	75	65	68	68	73	70	80	79
70	76	63	86	69	65	66	74	86	68
70	60	67	74	65	65	67	88	81	63

بار چارٹ بنا کر مواد کو ظاہر کیجئے۔

10.2 مجموعی تعدد CUMULATIVE FREQUENCY

مجموعی تعدد (Cumulative Frequency) کسی بھی قدر سے پہلی قدروں کے تعددات کے مجموعے کو ظاہر کرتا ہے۔ اس کی وضاحت درج ذیل مثال سے ہوتی ہے۔

مثال 1:-

نویں جماعت کے تمام طلباء نے ریاضی کا امتحان دیا۔ یہاں ان کے فیصد نمبر دئے گئے ہیں جو کہ 10 جماعتی وقفوں میں منقسم ہیں۔ ان کے مجموعی تعددات معلوم کریں۔

فیصد نمبر	تعدد
1 - 10	3
11 - 20	6
21 - 30	11
31 - 40	13
41 - 50	18
51 - 60	24
61 - 70	14
71 - 80	6
81 - 90	3
91 - 100	2
100 : میزان تعدد	

- (i) کتنے طلباء نے 10% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (ii) کتنے طلباء نے 20% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (iii) کتنے طلباء نے 30% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (iv) کتنے طلباء نے 40% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (v) کتنے طلباء نے 50% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (vi) کتنے طلباء نے 60% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (vii) کتنے طلباء نے 70% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (viii) کتنے طلباء نے 80% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (ix) کتنے طلباء نے 90% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (x) کتنے طلباء نے 100% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟

حل:-

درج ذیل جدول اجتماعی تعددات کو ظاہر کرتا ہے۔

فیصد نمبر	مجموعی تعدد
10% یا کم	3
20% یا کم	3 + 6 = 9
30% یا کم	9 + 11 = 20
40% یا کم	20 + 13 = 33
50% یا کم	33 + 18 = 51
60% یا کم	51 + 24 = 75
70% یا کم	75 + 14 = 89
80% یا کم	89 + 6 = 95
90% یا کم	95 + 3 = 98
100% یا کم	98 + 2 = 100

مثال 2:- سائنس کے ٹیسٹ میں حاصل کردہ نمبروں کا جدول دیا گیا ہے۔ مجموعی تعدد مکمل کیجئے۔

نمبر	تعدد	نمبرز	مجموعی تعدد
1 - 10	5	10 یا کم	
11 - 20	6	20 یا کم	
21 - 30	8	30 یا کم	
31 - 40	16	40 یا کم	
41 - 50	23	50 یا کم	
51 - 60	18	60 یا کم	
61 - 70	12	70 یا کم	
71 - 80	10	80 یا کم	
81 - 90	2	90 یا کم	
91 - 100	0	100 یا کم	

حل :-

نمبروں کا وقفہ	تعداد	حاصل کردہ نمبر	مجموعی تعداد
1 - 10	5	10 یا کم	5
11 - 20	6	20 یا کم	11
21 - 30	8	30 یا کم	19
31 - 40	16	40 یا کم	35
41 - 50	23	50 یا کم	58
51 - 60	18	60 یا کم	76
61 - 70	12	70 یا کم	88
71 - 80	10	80 یا کم	98
81 - 90	2	90 یا کم	100
91 - 100	0	100 یا کم	100

10.2.2 مجموعی تعداد والی کثیر الاضلاع Cumulative Frequency Polygon

جب مجموعی تعداد کو آخری نقاط کے متعلقہ جماعتی وقفوں کے خلاف پلاٹ کیا جاتا ہے اور انہیں آپس میں ملایا جاتا ہے تو نتیجہ میں حاصل ہونے والے گراف کو مجموعی تعداد والا گراف یا (Ogive) کہتے ہیں۔

پس اوگو کو ہم مجموعی تعداد سے حاصل کردہ خطی گراف کہہ سکتے ہیں۔

مثال :-

پکڑی گئی مچھلیوں کا جماعتی وقفہ	تعداد
0 — 5	3
5 — 10	5
10 — 15	6
15 — 20	8
20 — 25	4
25 — 30	2
28: میزان	

جدول میں دیا گیا مواد مچھلیاں پکڑنے والے

28 شرکاء کی پکڑی گئی مچھلیوں کی تعداد کو

ظاہر کرتا ہے۔

اس مواد کے لیے مجموعی تعداد والی کثیر الاضلاع یعنی

(ogive) تیار کیجئے۔

حل :-

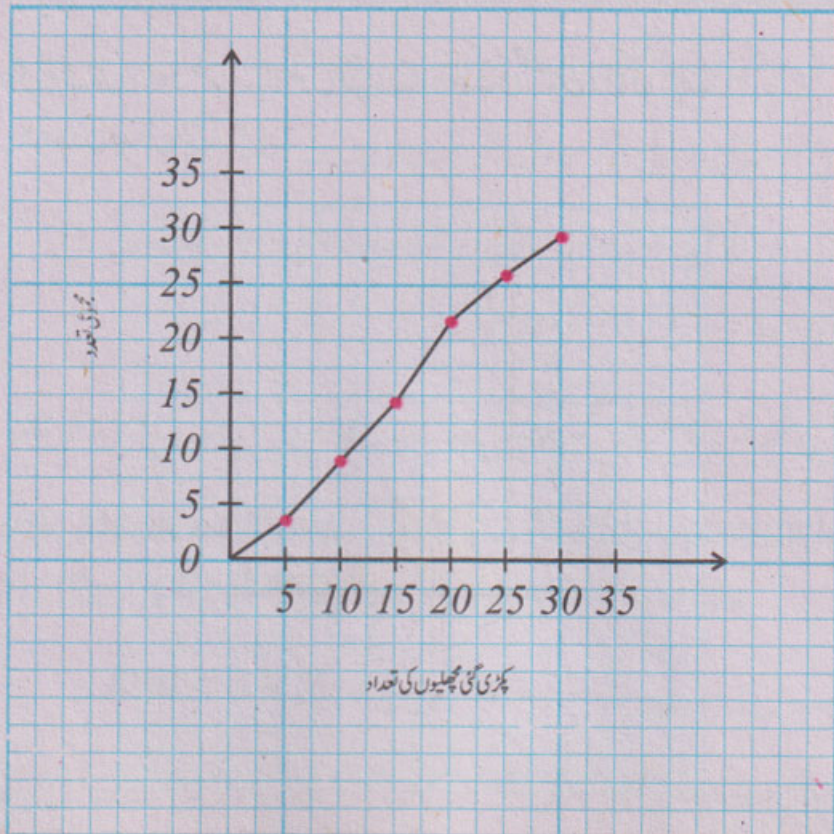
مجموعی تعددات معلوم کیجئے۔ گراف پیپر پر دونوں محور کھینچیں۔ افقی محور پر مچھلیوں کی تعداد اور عمودی محور پر مجموعی تعددات ظاہر کیجئے۔

پکڑی گئی مچھلیوں کا جماعتی وقفہ	تعدد	مجموعی تعدد
0 — 5	3	3
5 — 10	5	3 + 5 = 8
10 — 15	6	8 + 6 = 14
15 — 20	8	14 + 8 = 22
20 — 25	4	22 + 4 = 26
25 — 30	2	26 + 2 = 28
میزان	$\Sigma f = 28$	

ہر مجموعی تعدد کے آخری نقاط کو اپنے متعلقہ جماعتی وقفہ کے انتہائی قیمت کے سامنے گراف پر ظاہر کیجئے۔

ابتدائی جماعتی وقفہ کے لئے اوگو (ogive) کی پہلی مجموعی تعدد کی قیمت صفر ہوگی لہذا اوگو کا پہلا نقطہ (0, 0) ہوگا۔

اگلا نقطہ (5, 3) جس کے بعد (10, 8) وغیرہ وغیرہ۔ ان نقاط کو سیدھے قطعہ خط سے ملائیے۔



مشق 10.2

1- درج ذیل میں سے ہر ایک کے لئے تعددی جدول کو ظاہر کرنے کے لئے کالمی نقشہ بنائیے۔

(i) درج ذیل جدول میں سکول فنکشن میں حصہ لینے والے 100 لوگوں کی عمریں دی گئی ہیں۔

عمر (سالوں میں)	0-19	20-39	40-59	60-79	80-89
تعداد	43	24	17	10	6

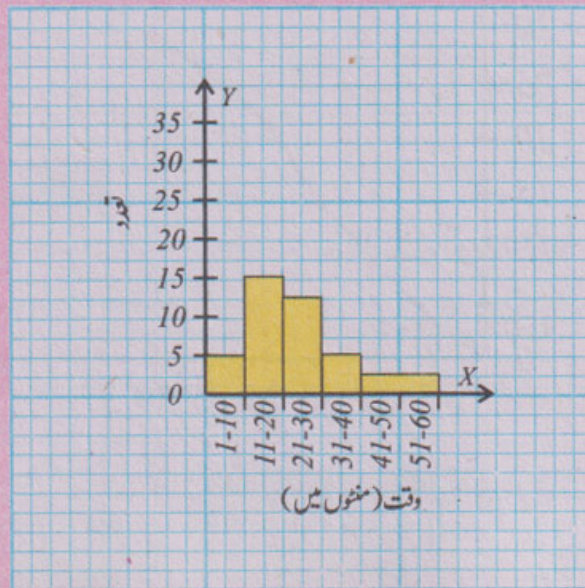
(ii) درج ذیل جدول میں 16 سالہ 100 لڑکوں کی ہفتہ وار آمدن دی گئی ہیں۔

ہفتہ وار آمدن	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
تعداد	45	10	11	21	10	3

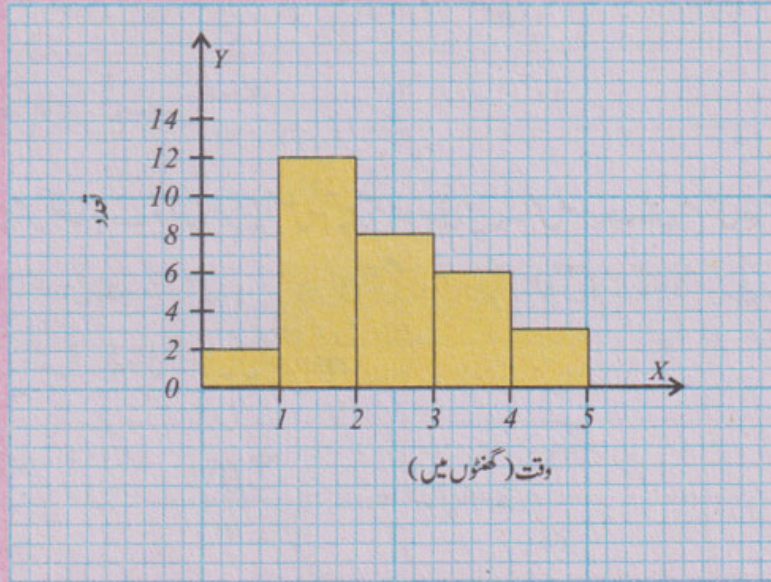
(iii) درج ذیل جدول میں 40 بچوں کے اوسط نمبروں کی تفصیل جو کہ انہوں نے سال کے آخر میں حاصل کئے درج ہے۔

اوسط حاصل کردہ نمبر	1-20	21-40	41-60	61-80	81-100
تعداد	2	4	19	12	3

2- درج ذیل کالمی نقشہ میں 500 طلباء کے سکول پہنچنے کے اوقات کی تفصیل دی گئی ہے۔ اس سے اس کا تعددی جدول تیار کریں۔



3- دیا گیا کالمی نقشہ 30 طلباء کے اس وقت (گھنٹوں میں) کی بنیاد پر بنایا گیا ہے جو انہوں نے ایک خاص ہفتہ کو ٹیلی ویژن دیکھتے ہوئے گزارا۔ اس کالمی نقشہ سے تعددی جدول بنائیے۔



MEASURES OF CENTRAL TENDENCY

10.3 مرکزی رجحان کی پیمائش

مرکزی رجحان کی پیمائش (Measures of Central Tendency) دراصل کسی دیے گئے مواد کی درمیانی (مرکزی) قیمت کا پتہ چلانا ہے۔ جس کی تین قسمیں زیادہ اہم ہوتی ہیں۔

(i) حسابی اوسط: جو کہ مواد کی وسطی قیمت ہوتی ہے۔

(ii) وسطانیہ: جو کہ مواد کی قیمتوں کو ترتیب سے لکھنے پر درمیانی قیمت ہوتی ہے۔

(iii) عادہ: وہ قیمت جس کی مواد میں سب سے زیادہ تکرار ہو۔

10.3.1 کسی گروہی / غیر گروہی مواد سے حسابی اوسط، وسطانیہ، عادہ، ضربی اوسط اور آہنگ اوسط معلوم کرنا

To find Arithmetic Mean or Mean, Median, Mode, Geometric Mean, Harmonic Mean from Grouped/Ungrouped Data

حسابی اوسط تعریف کی رو سے Arithmetic Mean by definition

کسی غیر گروہی مواد کو حسابی اوسط کی تمام قیمتوں کو جمع کر کے ان قیمتوں کی تعداد پر تقسیم کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

$$\text{تمام قیمتوں کا مجموعہ} \\ \text{حسابی اوسط} = \frac{\text{قیمتوں کی تعداد}}{\text{}}$$

$$\text{علامتی طور پر اسے } \bar{x} = \frac{\sum x}{n} \text{ لکھتے ہیں۔}$$

جبکہ "Σ" مجموعہ کو ظاہر کرتی ہے۔

جب مواد کو گروہوں میں لکھا جائے تو اس طرح اصل قیمتیں ضم ہو جاتی ہیں۔ اس صورت میں ہم کسی خاص گروہ کی درمیانی / وسطی قیمت کو اس گروہ کی نمائندہ قیمت لیتے ہیں۔ اگر 'x' کسی بھی گروہی وسط (جماعتی وسط) کو ظاہر کرتی ہے جبکہ f اس کا تعدد ہو اور (n = Σf) تمام مشاہدہ میں آنے والی قیمتوں کی تعداد ہو تو

$$\text{حسابی اوسط} = \bar{x} = \frac{\sum (fx)}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} \quad \text{یا}$$

مثال 1:-

آٹھ آدمیوں کی انفرادی آمدنی 3000 روپے، 4000 روپے، 3500 روپے، 4500 روپے، 3800 روپے، 4200 روپے، 3600 روپے اور 5400 روپے ہے۔ ان کا حسابی اوسط معلوم کیجئے۔

$$x_1 = 3000, \quad x_2 = 4000, \quad x_3 = 3500, \quad x_4 = 4500,$$

$$x_5 = 3800, \quad x_6 = 4200, \quad x_7 = 3600, \quad x_8 = 5400,$$

حل:-

$$\text{حسابی اوسط} = \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8}$$

$$= \frac{3000 + 4000 + 3500 + 4500 + 3800 + 4200 + 3600 + 5400}{8}$$

$$= \frac{32000}{8}$$

$$\bar{x} = 4000 \text{ روپے}$$

مثال 2:-

مندرجہ ذیل جدول میں 50 طلباء کے سالانہ امتحان میں حاصل کردہ نمبروں کی تفصیل دی گئی ہے۔ اس کا حسابی اوسط معلوم کیجئے۔

نمبر	20 - 24	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49	50 - 54
تعداد	1	4	8	11	15	9	2

حل:-

نمبر	تعداد (f)	جماعتی نمائندہ قیمت (x)	fx
20 - 24	1	22	22
25 - 29	4	27	108
30 - 34	8	32	256
35 - 39	11	37	407
40 - 44	15	42	630
45 - 49	9	47	423
50 - 54	2	52	104

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum (fx)}{n} = \frac{22 + 108 + 256 + 407 + 630 + 423 + 104}{50} \\ &= \frac{1950}{50} \\ &= 39 \end{aligned}$$

فرضی اوسط سے انحراف کے استعمال سے حسابی اوسط معلوم کرنا

Arithmetic Mean using Deviation from Assumed Means

حسابی اوسط کے لیے فارمولا $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$ کا استعمال اسی صورت میں آسان ہوتا ہے جب x اور f کی قیمتیں بہت بڑی نہ ہوں۔ اگر x اور f کی قیمتیں بہت زیادہ ہوں تو ہم فرضی اوسط لیکر بہت سارے وقت کی بچت کر سکتے ہیں۔ اگر 'A' ایک فرضی اوسط ہو (جو کہ کوئی بھی قیمت ہو سکتی ہے) اور D_i اور X_i قیمت کا فرضی اوسط 'A' سے انحراف ظاہر کرے۔

$$D_i = X_i - A \quad \text{تب} \quad X_i = D_i + A, \quad \text{یعنی کہ}$$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^k D_i}{n} \quad \text{ہم لکھ سکتے ہیں کہ}$$

$$= A + \frac{\sum_{i=1}^k D}{n} \quad \text{(غیر گروہی مواد)}$$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^k f_i D_i}{\sum f_i} \quad \text{اور}$$

$$= A + \frac{\sum f D}{\sum f} \quad \text{یا (گروہی مواد)}$$

مثال 1:- کلیہ $\bar{X} = A + \frac{\sum D}{n}$ کی مدد سے دی گئی قیمتوں کا حسابی اوسط معلوم کیجئے۔

184, 191, 172, 168, 187, 189, 196, 186, 193, 195.

حل:- فرضی اوسط $A = 180$ سے ہمیں انحراف حاصل ہوتے ہیں۔

$$D = 184 - 180, 191 - 180, 172 - 180, 168 - 180, 187 - 180, 189 - 180, \\ 196 - 180, 189 - 180, 193 - 180, 195 - 180$$

$$= 4, 11, -8, -12, 7, 9, 16, 9, 13, 15$$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum D}{n} = 180 + \frac{4+11-8-12+7+9+16+9+13+15}{10}$$

$$= 180 + \frac{64}{10}$$

$$= 180 + 6.4$$

$$= 186.4$$

مثال 2:-

جدول میں دیے گئے 120 طلباء کے اوزان کی تفصیل کا کلیہ $\bar{X} = A + \frac{\Sigma f D}{\Sigma f}$ کے تحت اوسط وزن معلوم کیجئے۔

وزن (پونڈ)	جماعتی وسط (X)	تعداد (f)	$D = X - 144.5$	fD
110 - 119	114.5	1	- 30	- 30
120 - 129	124.5	4	- 20	- 80
130 - 139	134.5	17	- 10	- 170
140 - 149	144.5 ← A	28	0	0
150 - 159	154.5	25	10	250
160 - 169	164.5	18	20	360
170 - 179	174.5	13	30	390
180 - 189	184.5	6	40	240
190 - 199	194.5	5	50	250
200 - 209	204.5	2	60	120
210 - 219	214.5	1	70	70
		$n = \Sigma f = 120$	$\Sigma f D = 1680 - 280 = 1400$	

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma f D}{\Sigma f}$$

حل:-

$$= 144.5 + \frac{1400}{120}$$

$$= 144.5 + 11.67$$

$$= 156.17 \text{ پونڈ}$$

وسطانیه (غیر گروہی مواد) Median (ungrouped data)

وسطانیه کسی مواد کو عددی ترتیب میں لکھے جانے کے بعد اس کی وسطی قیمت ہوتی ہے اگر قیمتوں کی تعداد n ہو تو ترتیب وار لکھے گئے مواد کے $\frac{n+1}{2}$ کی جگہ والی قیمت وسطانیه کہلاتی ہے جبکہ n طاق ہو۔ اور اگر n جفت ہو تو دو درمیان والی جگہوں کی قیمتوں کا اوسط وسطانیه کہلاتی ہے۔

- اگر قیمتوں کی تعداد طاق ہو تو درمیانی قیمت وسطانیه کہلاتی ہے۔
- اگر قیمتوں کی تعداد جفت ہو تو دو درمیانی قیمتوں کے حسابی اوسط کو وسطانیه کہتے ہیں۔

مثال :- مواد کے سیٹ 5, 4, 5, 4, 3, 4, 2, 6 کا وسطانیه معلوم کیجئے۔

حل :-

2 3 4 4 4 5 5 6

مواد کو ترتیب سے لکھنے سے

2 3 4 4 4 5 5 6

$\frac{n+1}{2}$ کے اصول کے مطابق وسطانیه کا تعین کیجئے۔ یہ 4.5 ہے یعنی چوتھے عدد اور پانچویں عدد کا حسابی اوسط۔

$$\text{وسطانیه} = \frac{4+4}{2}$$

$$= \frac{8}{2}$$

$$= 4$$

پس وسطانیه 4 ہے۔

وسطانیه (گروہی مواد) Median (grouped data)

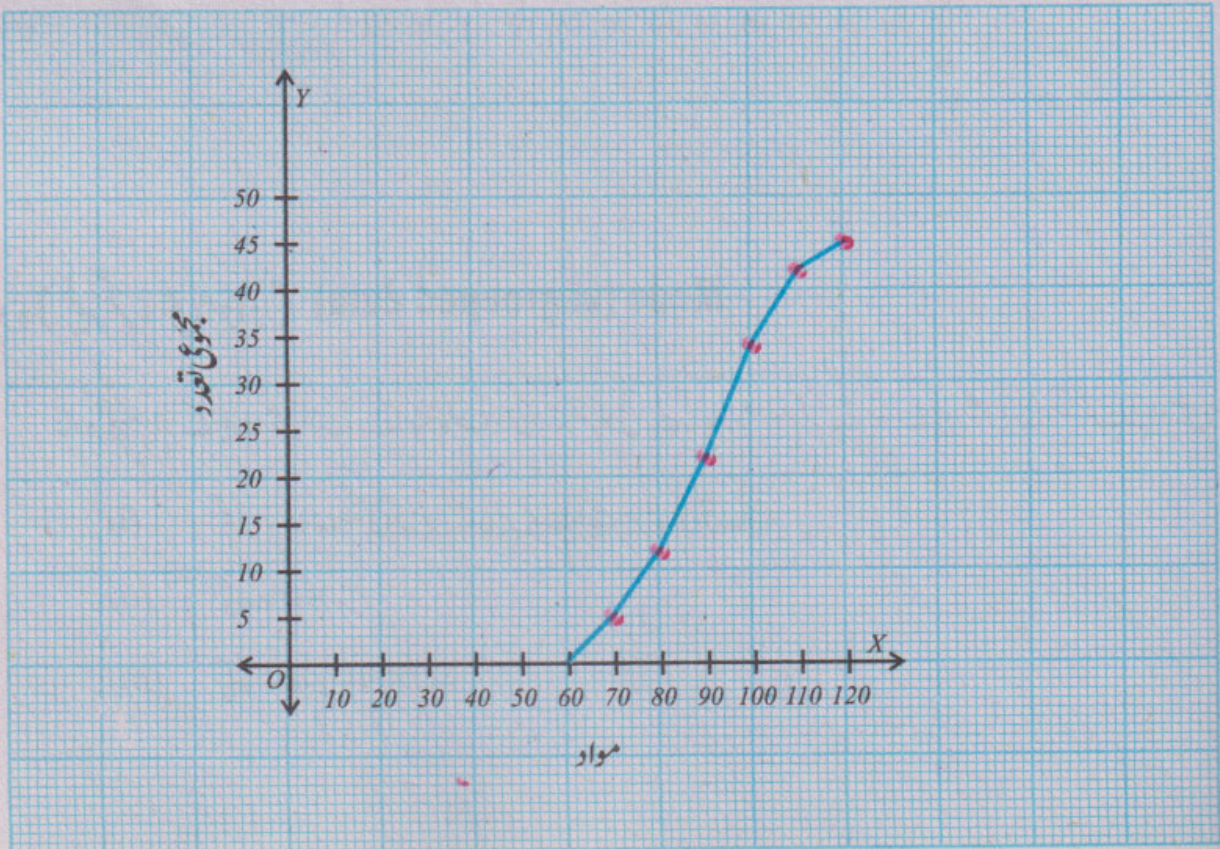
وسطانیه مواد کا (ogive) کھینچ کر حاصل کیا جاتا ہے اور 50 فیصد مواد کے بعد والی قیمت بطور وسطانیه لی جاتی ہے۔

مثال :- دیئے گئے مواد کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔

جماعتی وقفہ	تعداد (f)	مجموعی تعداد (Cf)
60 - 70	5	5
70 - 80	7	12
80 - 90	10	22
90 - 100	12	34
100 - 110	8	42
110 - 120	3	45
میزان	45	

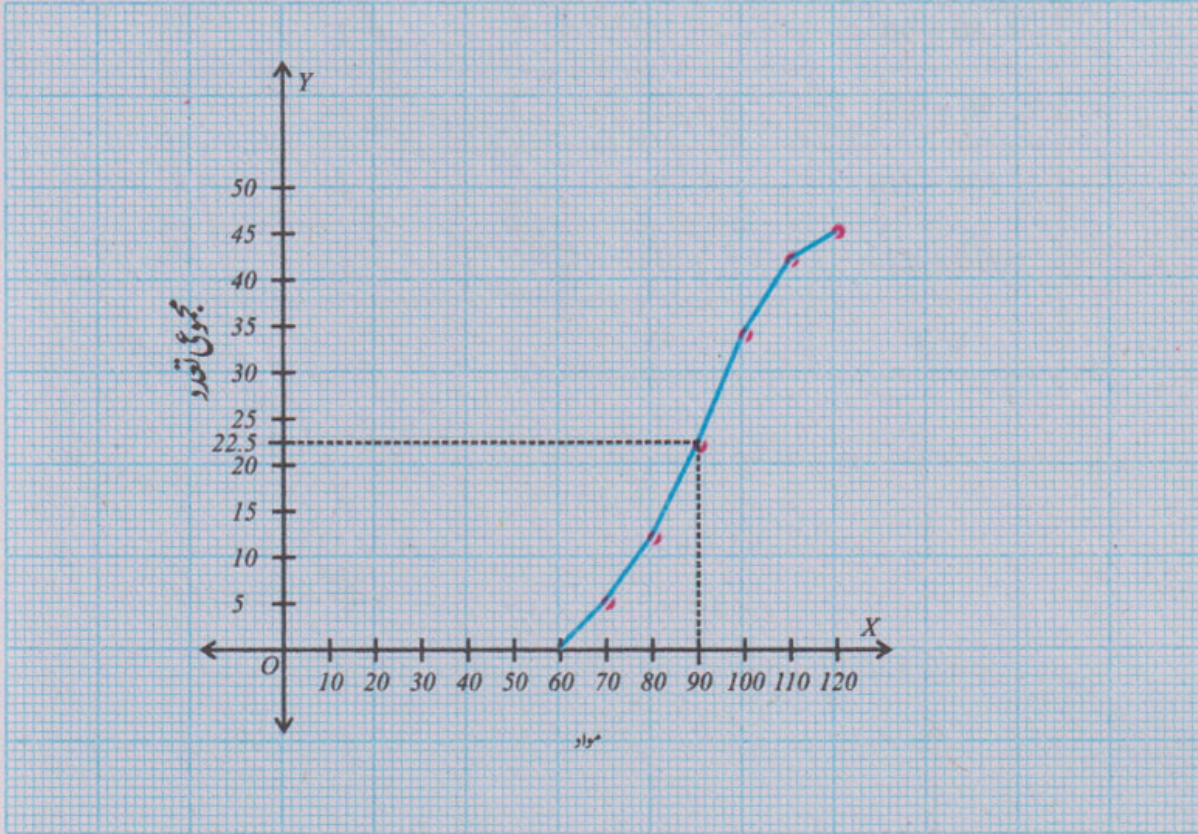
حل :-

اوگو (ogive) کھینچئے۔



تعدادی محور پر وسطی نقطہ لیجئے جو کہ 22.5 ہے اس کو نمایاں کیجئے۔

اس نقطہ سے اوگیو (ogive) تک افقی لائن اور پھر وہاں سے عموداً، افقی خط پر لائن کھینچئے۔ X-محور پر دیئے گئے مواد کا وسطانیہ جو تقریباً 90 ہے کو نوٹ کیجئے۔



عادہ (غیر گروہی مواد) Mode (ungrouped data)

عادہ کسی مواد کے سیٹ میں سب سے زیادہ تعدد والی مقدار ہوتی ہے۔ عادہ معلوم کرتے ہوئے یاد رکھیں کہ ہو سکتا ہے مواد میں:

(i) کوئی عادہ نہ ہو یعنی کہ مواد میں ہر قیمت ایک مرتبہ ہی آئے۔

(ii) ایک عادہ ہو۔

(iii) ایک سے زیادہ عادہ ہوں۔

مثال :- مواد کے سیٹ 6, 2, 4, 3, 4, 5, 4, 5 کا عادی معلوم کیجئے۔

حل :-

هم مواد كے سیٹ كا بغور جائزہ لیتے ہیں اور معلوم كرتے ہیں كہ كوںی قیمت سب سے زیادہ مرتبہ آئی ہے۔

2 3 4 4 4 5 5 6
 ↑ ↑ ↑ ↓ ↓

چونکہ عدد 4 کی تکرار زیادہ یعنی تین مرتبہ ہے پس عادی 4 ہے۔

عادی (گروہی مواد) Mode (grouped data)

گروہی مواد میں ہم عادی صحیح طریقہ سے تو معلوم نہیں کر سکتے کیونکہ اصل قیمتیں جماعتی وقفوں (Class Intervals) میں ضم ہو جاتی ہے۔ تاہم ایسے جماعتی وقفہ کا تعین کرتے ہیں۔ جس کا تعدد سب سے زیادہ ہوتا ہے۔ اسے عادی جماعت (Model Class) کہتے ہیں۔

مثال :- درج ذیل جدول میں عادی جماعت کا تعین کیجئے۔

جماعتی وقفہ	تعدد
60 - 70	5
70 - 80	7
80 - 90	10
90 - 100	12
100 - 110	8
110 - 120	3
میزان	45

حل :-

عادی جماعت اس مواد میں سب سے زیادہ تعدد 12 والی جماعت (90-100) ہے۔

ضربنی اوسط (غیر گروہی مواد) Geometric Mean (ungrouped data)

ضربنی اوسط 'G'، n قیمتوں والے سیٹ x_1, x_2, \dots, x_n کے لیے ان n قیمتوں کے حاصل ضرب کے n ویں جذر کے برابر ہوتا ہے۔

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n}$$

$$= (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

مثال :-

2، 4 اور 8 کا ضربنی اوسط معلوم کیجئے۔

$$G = \sqrt[3]{2 \times 4 \times 8} = \sqrt[3]{64}$$

$$= [(4)^3]^{\frac{1}{3}}$$

$$= 4$$

حل :-

ضربنی اوسط (گروہی مواد) Geometric Mean (grouped data)

فرض کریں کہ x_1, x_2, \dots, x_k ان جماعتی وقفوں کی نمائندہ قیمتیں ہیں جن کے تعدد بالترتیب f_1, f_2, \dots, f_k ہیں۔

(جبکہ $n = \sum f = f_1 + f_2 + \dots + f_k$) چونکہ x_1 مواد میں f_1 مرتبہ دہرایا جاتا ہے۔

اسی طرح x_1 مرتبہ پایا جاتا وغیرہ بالآخر x_k مرتبہ پایا جاتا ہے۔

$$\underbrace{x_1 \cdot x_1 \dots x_1}_{f_1 \text{ times}} \quad \underbrace{x_2 \cdot x_2 \dots x_2}_{f_2 \text{ times}} \quad \dots \quad \underbrace{x_k \cdot x_k \dots x_k}_{f_k \text{ times}}$$

ان سب کا حاصل ضرب ہوگا۔ $x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \dots x_k^{f_k}$ اس طرح ضربنی اوسط یہ ہوا۔

$$G = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \dots x_k^{f_k}}$$

$$= (x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \dots x_k^{f_k})^{1/n}$$

بعض اوقات یہ اوزانی ضربی اوسط کہلاتی ہے۔ جبکہ f_1, f_2, \dots, f_k متعلقہ اوزان کہلاتے ہیں۔

مثال :- درج ذیل تعددی مواد کا ضربی اوسط معلوم کیجئے۔

x	1	2	3	4
f	2	3	4	1

حل :-

$$\Sigma f = 2 + 3 + 4 + 1 = 10$$

یہاں

$$G = \left(x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \dots x_k^{f_k} \right)^{1/n}$$

$$= \left((1)^2 \cdot (2)^3 \cdot (3)^4 \cdot (4)^1 \right)^{1/10}$$

$$= (1 \times 8 \times 81 \times 4)^{1/10}$$

$$= (2592)^{1/10} = 2.1946$$

ہارمونک اوسط (غیر گروہی مواد) (Harmonic Mean (ungrouped data)

ان قیمتوں x_1, x_2, \dots, x_n والے گروہ کا ہارمونک اوسط (Harmonic Mean) ان قیمتوں کے ضربی معکوسوں کے

حسابی اوسط کا ضربی معکوس (reciprocal) ہوتا ہے۔

$$\text{ہارمونک اوسط} = H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} \right)} = \frac{n}{\sum \left(\frac{1}{x} \right)}$$

مثال :-

3، 4 اور 8 کا ہارمونک اوسط معلوم کیجئے۔

$$H = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{3}{\frac{4+2+1}{8}} = \frac{3}{\frac{7}{8}} = \frac{3 \times 8}{7} = \frac{24}{7} = 3.43$$

حل :-

ہارمونک اوسط (گروہی مواد) The Harmonic Mean (grouped data)

فرض کیا x_1, x_2, \dots, x_k گروہوں کی نمائندہ قیمتیں جبکہ ان گروہوں کا تعداد بالترتیب f_1, f_2, \dots, f_k ہیں۔

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_k = \sum f_i = n)$$

ان گروہی نمائندہ قیمتوں کے ضربی معکوس $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_k}$ ہیں۔ چونکہ ان قیمتوں کے تعداد بالترتیب

f_1, f_2, \dots, f_k ہیں۔

$$\frac{f_1}{x_1} \text{ یا } f_1 \left(\frac{1}{x_1} \right) \text{ قیمتوں کا مجموعہ}$$

اسی طرح بالترتیب تمام قیمتوں کے مجموعے $\frac{f_2}{x_2}, \frac{f_3}{x_3}, \dots, \frac{f_k}{x_k}$ ہوں گے۔

$$\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \dots + \frac{f_k}{x_k} = \sum_{i=1}^k \frac{f_i}{x_i} = \sum \frac{f_k}{x_k} = \sum f \left(\frac{1}{x} \right)$$

ہارمونک اوسط کی تعریف کی رو سے

$$H = \frac{\sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^k f_i \left(\frac{1}{x_i} \right)} = \frac{\sum f}{\sum f \left(\frac{1}{x} \right)} = \frac{n}{\sum f \left(\frac{1}{x} \right)}$$

بعض اوقات اسے اوزانی ہارمونک اوسط کہتے ہیں جن کے اوزان بالترتیب f_1, f_2, \dots, f_k ہیں۔

10.3.2 حسابی اوسط کی خصوصیات Properties of Arithmetic Mean

حسابی اوسط کی خصوصیات درج ذیل ہیں۔

(i) کسی مواد کی قیمتوں کے حسابی اوسط سے ان قیمتوں کے فرق کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

$$\sum (x_i - \bar{X}) = 0 \quad \text{یا} \quad \sum f_i (x_i - \bar{X}) = 0$$

(ii) اگر n_1 قیمتوں کا حسابی اوسط \bar{x}_1 ، n_2 قیمتوں کا حسابی اوسط \bar{x}_2 اور اسی طرح n_k

قیمتوں کا حسابی اوسط \bar{x}_k ہو تو ان تمام قیمتوں کا حسابی اوسط:

$$\bar{X} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2 + \dots + n_k \bar{X}_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^k n_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{\sum n \bar{X}}{\sum n}$$

(iii) کسی مواد کی قیمتوں کے کسی قیمت 'a' سے فرق کے مربعوں کا مجموعہ سب سے کم ہوگا اگر $a = \bar{X}$ علامتی طور پر

$$a = \bar{X} \text{ کی قیمت سب سے کم ہوگی اگر } \sum (x_i - a)^2$$

10.3.3 وزنی اوسط اور متغیر اوسط Weighted Mean and Moving Average

اگر کسی مواد میں x_1, x_2, \dots, x_k قیمتوں کے اوزان بالترتیب w_1, w_2, \dots, w_k ہوں تو وزنی حسابی اوسط \bar{x}_w

کو یوں بیان کیا جاتا ہے۔

$$\bar{X}_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_k x_k}{w_1 + w_2 + \dots + w_k}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^k w_i x_i}{\sum_{i=1}^k w_i} = \frac{\sum w x}{\sum w}$$

متحرک اوسط Moving Average

کسی مشاہدہ میں آنے والی n متواتر قیمتوں کے سلسلے کو استعمال کرتے ہوئے اوسط نکالنا متحرک اوسط کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر ہمیں 3 سالہ متحرک اوسط نکالنا ہو تو ہم اس سیریز کی پہلی تین قیمتیں لیتے ہیں۔ ان کا اوسط لے کر ہم ان قیمتوں کی وسطی قیمت کے سامنے لکھ لیتے ہیں۔ پھر ہم ان تینوں قیمتوں میں سے پہلے چھوڑ کر چوتھی قیمت شامل کرتے ہیں اور ان تینوں کی اوسط لے کر ان کی وسطی قیمت کے سامنے لکھتے ہیں۔ اس کی الجبری شکل یہ ہے۔

$$a_1 = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

$$a_2 = \frac{1}{3}(y_2 + y_3 + y_4) \text{ وغیرہ وغیرہ}$$

ربعی قاطع Quartiles

ہم جانتے ہیں کسی مواد کو ترتیب میں لکھنے کے بعد اس کا وسطانیہ (Median) اس مواد کی وسطی قیمت ہوتا ہے (جو کہ مجموعی تعداد طاق ہونے کی صورت میں درمیانی قیمت اور جفت کی صورت میں اس کی دو وسطی قیمتوں کا اوسط ہوتا ہے) یہ وسطانیہ اس مواد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اسی طرح مواد کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرنے والی قیمتوں کو ربعی قاطع کہتے ہیں۔ اس طرح تین قیمتیں جو مترتب مواد کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہیں ربعی قاطع کہلاتی ہیں انہیں Q_1, Q_2 اور Q_3 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

پہلے ربعی قاطع کو زیریں ربعی قاطع (Lower Quartile) جبکہ تیسرے ربعی قاطع کو بالائی ربعی قاطع (Upper Quartile) کہتے ہیں۔

$$Q_1 = \text{کے مقام پر آنے والی قیمت} \left(\frac{n+1}{4} \right)$$

$$Q_2 = \text{کے مقام پر آنے والی قیمت} \left(\frac{n+1}{2} \right) \text{ یا } 2 \left(\frac{n+1}{4} \right)$$

$$Q_3 = \text{کے مقام پر آنے والی قیمت} \frac{3(n+1)}{4}$$

مثال :-

درج ذیل مواد میں 20 طلباء کے شماریات کے ٹیسٹ میں حاصل کردہ نمبروں کے تمام ربعی قاطع معلوم کیجئے۔

53 74 82 42 39 20 81 68 58 28
67 54 93 70 30 55 36 37 29 61

حل :-

$n=20$ ، طلباء کے نمبروں کو ترتیب صعودی میں لکھنے سے:

20 28 29 30 36 37 39 42 53 54
55 58 61 67 68 70 74 81 82 93

$$Q_1 = \text{نیچے سے } \left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ ویں یا } \left(\frac{20+1}{4}\right) \text{ ویں یعنی } 5.25 \text{ ویں نمبر پر آنے والی قیمت}$$

چونکہ 5 ویں نمبر پر آنے والی قیمت 36 اور 6 ویں نمبر پر آنے والی قیمت 37 ہے۔ لہذا پہلا ربعی قاطع نمبر 5 اور نمبر 6 کی قیمتوں کے درمیان پانچویں قیمت سے آگے 0.25 کے فاصلے پر ہوگا۔ پس

$$Q_1 = 36.25$$

$$Q_2 = \text{نیچے سے } 2\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ یا } \frac{2(20+1)}{4} \text{ یا } \frac{21}{2} \text{ یا } 10.5 \text{th ویں قیمت ہوگا۔ } Q_2 \text{ (وسطانیہ)}$$

10 ویں نمبر پر آنے والی قیمت 54 ہے جو کہ 11 ویں کے 0.5 فاصلے پر ہوگا یعنی کہ 55 ہے۔ لہذا دوسرا ربعی قاطع 10 ویں اور 11 ویں کے درمیان ہوگا۔ یعنی کہ 54.5 ہے۔

$$Q_2 = 54.5 \quad \text{پس}$$

$$Q_3 = \text{نیچے سے } \frac{3(n+1)}{4} \text{ یا } \frac{3(20+1)}{4} \text{ یا } \frac{3 \times 21}{4} \text{ یا } \frac{63}{4} \text{ یا } 15.75 \text{ قیمت ویں}$$

15 ویں نمبر پر 68 جبکہ 16 ویں نمبر پر 70 ہے لہذا 68 سے آگے 70 تک کے فاصلے کا 0.75 حصہ طے کرنے پر تیسرا ربعی قاطع حاصل ہوگا۔

$$Q_3 = 68 + 0.75(70 - 68) \quad \text{پس}$$

$$Q_3 = 69.5$$

مثال :-

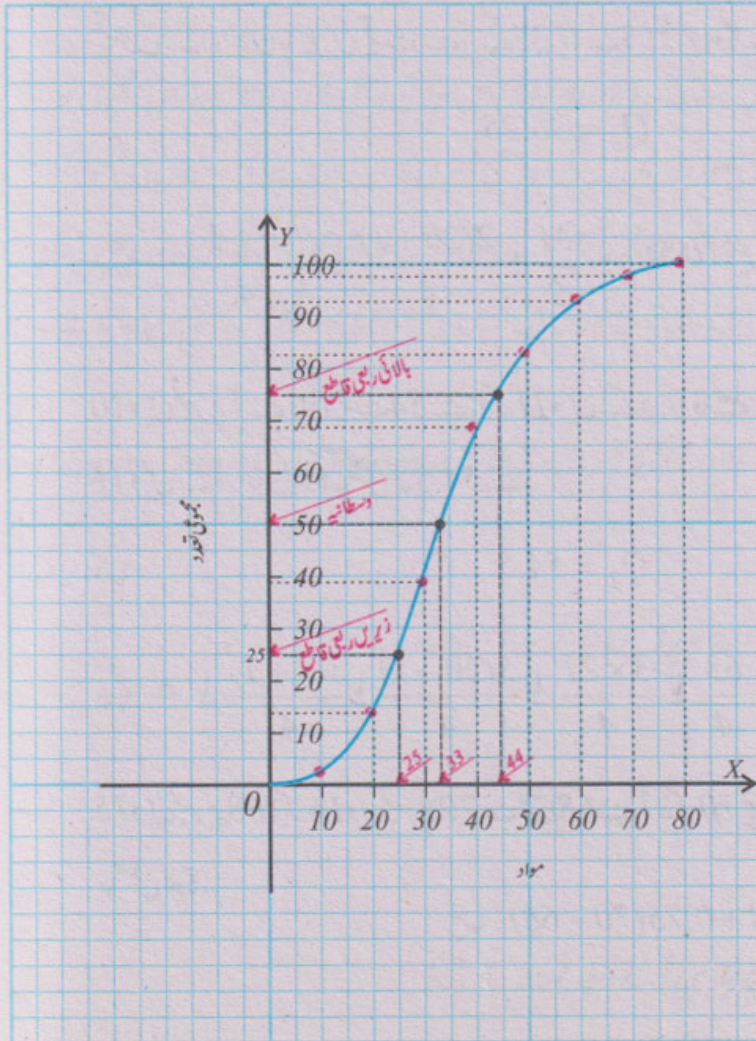
100 طلباء کے امتحان میں حاصل کردہ نمبر درج ذیل جدول میں دیے گئے ہیں۔

مجموعی تعدد	تعداد طلباء	حاصل کردہ نمبر
2	2	1 — 10
14	12	11 — 20
39	25	21 — 30
68	29	31 — 40
83	15	41 — 50
93	10	51 — 60
97	4	61 — 70
100	3	71 — 80

اوگو کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل ربعی قاطع کا تخمینہ لگائیے۔

(i) بالائی ربعی قاطع

(ii) زیریں ربعی قاطع



$$75 = \frac{3}{4} \times 100 = \frac{3}{4} \text{ مجموعی تعدد کا } \quad (i)$$

اوگو میں ہمیں 75 دیں تعدد کے متناظرہ مواد کی قیمت 44 حاصل ہوتی ہے۔ لہذا بالائی ربعی قاطع = 44

$$25 = \frac{1}{4} \times 100 = \frac{1}{4} \text{ مجموعی تعدد کا } \quad (ii)$$

اوگو میں ہمیں 25 تعدد کے متناظرہ مواد کی قیمت 25 حاصل ہوتی ہے۔ لہذا زیریں ربعی قاطع = 25

$$50 = \frac{1}{2} \times 100 = \frac{1}{2} \text{ مجموعی تعدد کا } \quad (iii)$$

اوگو میں 50 تعدد کے سامنے مواد کی قیمت 33 حاصل ہوتی ہے۔ لہذا وسطانیہ = 33

X-محور پر 2 چھوٹے مربع = 10 فنٹ

Y-محور پر 2 چھوٹے مربع = 10 فنٹ

10.3.4 ترسیم کی مدد سے وسطانیہ، ربعی قاطع اور عادیہ کا تخمینہ لگانا

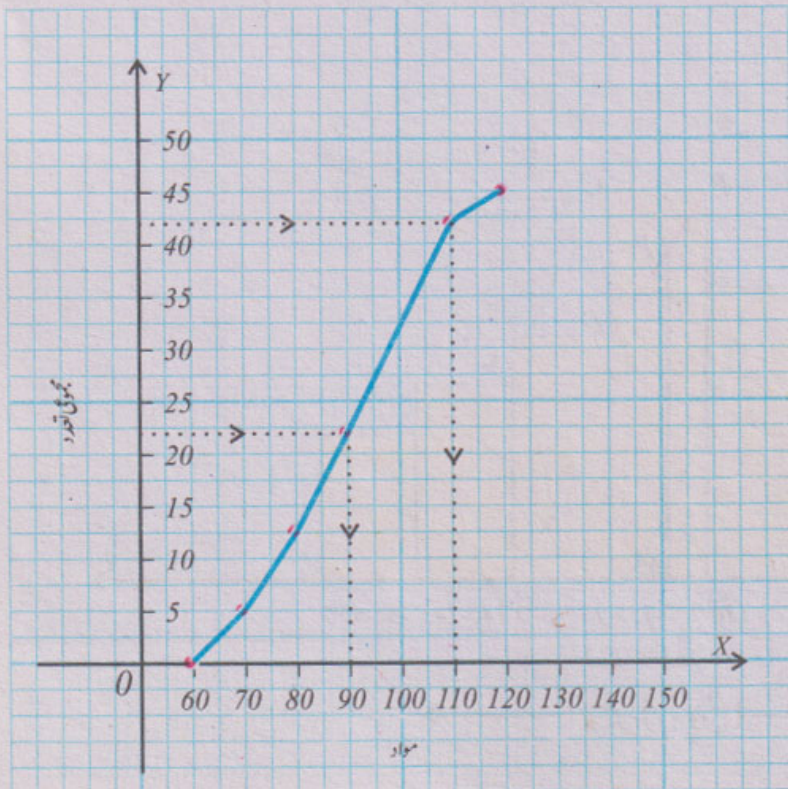
Estimate Median, Quartile and Mode Graphically, Graphic Location of Median

وسطانیہ کا ترسیمی تعین

وسطانیہ کی تخمینی قیمت کا تعین اوگو (Ogive) سے بھی کیا جاسکتا ہے۔ (جو کہ مجموعی تعدد والی کثیر الاضلاع ہوتی ہے) وسطانیہ اوگو میں $\frac{n}{2}$ کے مقابل X کی قیمت ہوتی ہے۔ پس وسطانیہ معلوم کرنے کے لیے ہم Y -محور پر $\frac{n}{2}$ کی قیمت لے کر اس مقام پر Y -محور پر عمود اٹھا کر اوگو کو کاٹنا ہوا کھینچتے ہیں۔ پھر اس نقطہ سے X -محور پر عمود گراتے ہیں اس مقام پر جو قیمت x کی نکلتی ہے وہ وسطانیہ کہلاتی ہے۔

جماعتی وقفے	تعدد	مجموعی تعدد
60 — 70	5	5
70 — 80	7	12
80 — 90	10	22
90 — 100	12	34
100 — 110	8	42
110 — 120	3	45
	45	—

جدول میں دیئے گئے مواد کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔



(i) اوگو (ogive) تیار کیجئے۔

(ii) Y -محور پر مجموعی تعدد کا نصف معلوم کریں۔
جو کہ 22.5 ہے اسے لیبل کیجئے۔

(iii) اس مقام سے X -محور کے متوازی افقی خط اوگو (ogive) تک کھینچئے اور پھر وہاں سے X -محور پر عمود گرایئے اور پھر وہاں سے X -محور پر عمود گرایئے

(iv) یہاں سے وسطانیہ کی قیمت جو کہ تقریباً 90 ہے حاصل کیجئے۔

مثال :-

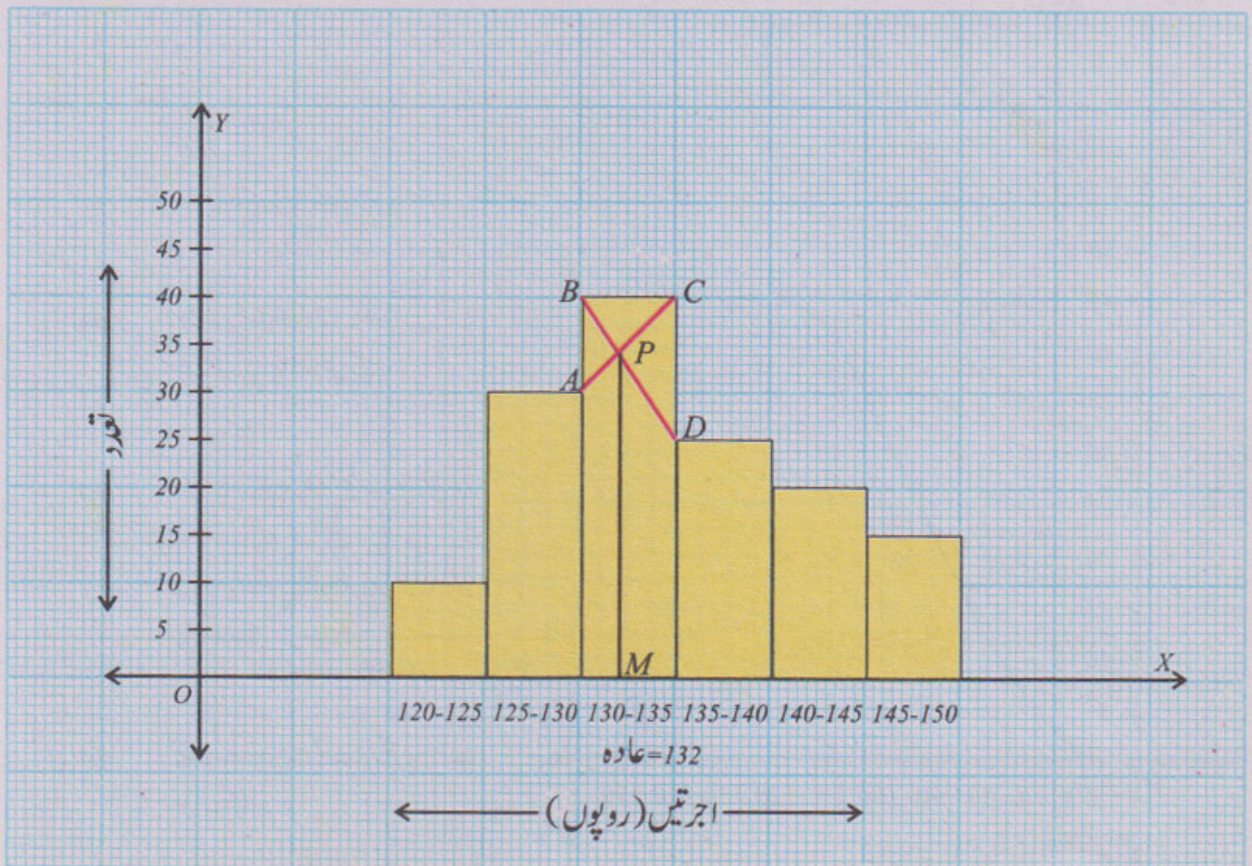
دیئے گئے مواد سے تریسی طریقے سے عادی (Mode) معلوم کیجئے۔

اجرتیں (روپوں)	120 - 125	125 - 130	130 - 135	135 - 140	140 - 145	145 - 150
f تعدد	10	30	40	25	20	15

حل :-

اجرتیں (روپوں) میں X-محور پر لی گئیں جبکہ تعدد Y-محور پر لیے گئے ہیں۔ ایک بڑا مربع X-محور پر 15 کائیوں اور Y-محور پر 10 کائیوں کو ظاہر کرتا ہے۔ ہم زیادہ تعدد والے کالموں کے سب سے بلند سروں کو ملاتے ہیں۔ کناروں کو ملانے والے قطعات AC اور BD ایک دوسرے کو نقطہ P پر کاٹتے ہیں۔ ہم X-محور پر عمود گراتے ہیں جو کہ اسے M پر ملتا ہے۔ یہاں پر M کی قیمت 132 بنتی ہے۔

پس (Mode) = 132 عادی



رہی قاطع ترسیم کے ذریعے معلوم کرنا Graphic Location of Quartiles

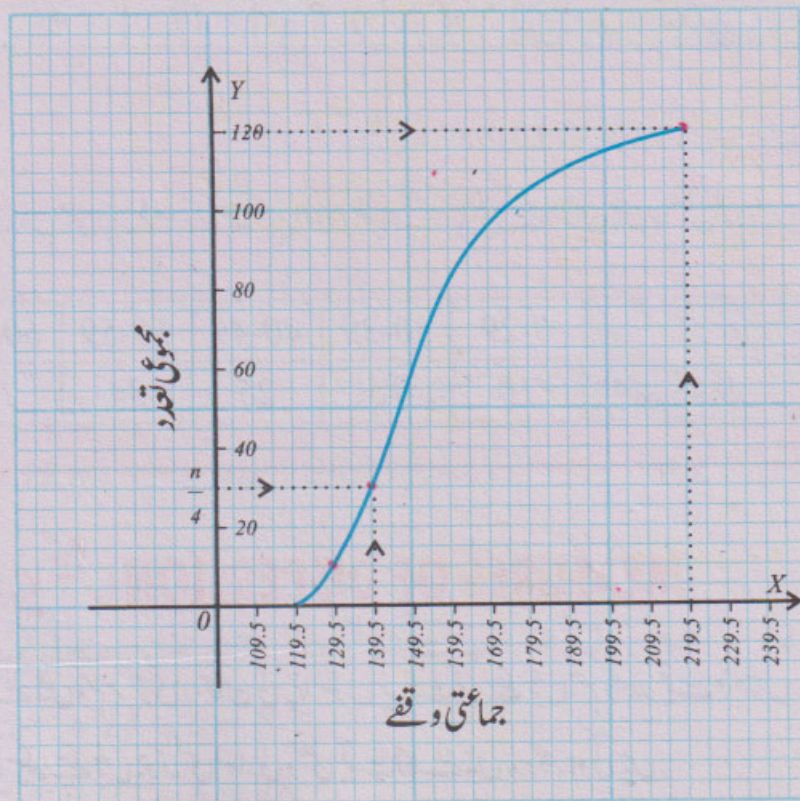
مثال :- درج ذیل جدول ریاضی کے سالانہ امتحان میں گریڈ کی تعددی تفصیل کو ظاہر کرتا ہے۔ ترسیم کی ذریعے پہلے ربعی قاطع کی نشاندہی کیجئے۔

گریڈ	90-99	80-89	70-79	60-69	50-59	40-49	30-39
طلباء کی تعداد	9	32	43	21	11	3	1

حل :-

ترسیمی نشاندہی کے لئے طلباء کی تفصیل کو ہم اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

گریڈ	طلباء کی تعداد (f)	جماعتی وقفے	مجموعی تعدد
30-39	1	29.5 - 39.5	1
40-49	3	39.5 - 49.5	4
50-59	11	49.5 - 59.5	15
60-69	21	59.5 - 69.5	36
70-79	43	69.5 - 79.5	79
80-89	32	79.5 - 89.5	111
90-99	9	89.5 - 99.5	120



مشق 10.3

1- درج ذیل مواد کی تعددی کثیر الاضلاع بنائیے۔

(i) کسی امتحان میں 30 طلباء کی تفصیل جدول میں دی گئی ہے۔

نمبر	0-39	40-49	60-79	80-99
تعدد	8	8	10	4

(ii) 40 طلباء کی رکاوٹی دوڑ کے وقت (سیکنڈوں میں) کی تفصیل جدول میں دی گئی ہے۔

(سیکنڈ) وقت	1-40	41-50	51-60	61-70
تعدد	8	15	7	10

(iii) کسی فٹس اینڈ چپس شاپ میں چپس کے 30 پیکیٹوں کے اوزان کی تفصیل جدول میں درج ہے۔

(گرام) اوزان	1-50	51-60	61-70	71-80
تعدد	4	8	14	4

(iv) دیئے گئے جدول میں ایک ٹرم کے اختتام پر 100 طلباء کے ریاضی کے امتحان میں حاصل کردہ نمبروں کی تفصیل درج ہے۔

نمبر	0-29	30-39	40-49	50-59	60-99
تعدد	10	15	25	34	16

10.4 انتشاری پیمائش MEASURES OF DISPERSION

اس سے پچھلے حصے میں ہم مرکزی رجحان کی پیمائشوں پر بحث کر چکے ہیں ہم واحد قیمت (مثال کے طور پر اوسط، وسطانیہ اور عادیہ) معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں جو کہ کسی مواد کی وسطی قیمت نکالنے میں مددگار ہوتی ہیں۔

اس مقصد کے لئے ہم درج ذیل تفصیل کو لیتے ہیں۔

1.	63, 63, 63, 63, 63, 63, 63, 63	$\bar{X} = 63$
2.	62, 62, 62, 63, 63, 64, 64, 64	$\bar{X} = 63$
3.	48, 49, 57, 63, 69, 68, 74, 78	$\bar{X} = 63$
4.	40, 41, 47, 52, 62, 87, 88, 94	$\bar{X} = 63$

درج بالا تفصیل کی اوسط یکساں یعنی 63 ہے، لیکن یہ تفصیل اپنی انتشار میں بہت مختلف ہیں یعنی کہ اپنی اوسط قیمت سے پھیلاؤ میں۔

چونکہ قیمتوں کے انتشار میں بہت فرق ہے۔ اس کے باوجود یہ ایک ہی اوسط یعنی 63 سے بیان ہوتی ہیں۔ تاہم ہمیں ایک پیمانے کی ضرورت ہے جو اس بات کا تعین کر سکے کہ مواد کتنا پھیلا ہوا ہے۔

اس مقصد کے لیے استعمال کی جانے والی پیمائشوں کو انتشاری پیمائش کہتے ہیں۔

سعت Range

انتشار کی سادہ ترین پیمائش سعت ہے۔ سعت مواد کی سب سے بڑی قیمت کا سب سے چھوٹی قیمت سے فرق ہوتی ہے۔ اگر سب سے چھوٹی قیمت X_o ہو اور سب سے بڑی قیمت X_m ہو تو سعت R کو یوں ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$R = X_m - X_o$$

مثلاً قیمتوں کے سیٹ 6, 8, 13, 11, 18, 27, 23 کے لیے

$$R = 27 - 6 = 21$$

مثال :-

درج ذیل مواد کی سعت معلوم کیجئے۔

(i) 2, 9, 3, 6, 12, 8

(ii) 6, 8, 10, 14, 13, 12

(iii) 10, 18, 9, 6, 22

حل :-

(i) سب سے بڑی قیمت = 12، سب سے چھوٹی قیمت = 2، سعت = 12 - 2 = 10

(ii) سعت = 14 - 6 = 8

(iii) سعت = 22 - 6 = 16

تغیریت Variance

تغیریت معیاری انحراف کا مربع کہلاتی ہے۔ یعنی مواد کی اوسط سے انحراف کے مربعوں کی اوسط کے برابر ہے۔

$$\text{تغیریت} = \frac{\sum (x - \bar{X})^2}{n} \quad (\text{غیر گروہی مواد})$$

$$\text{تغیریت} = \frac{\sum f(x - \bar{X})^2}{\sum f} \quad (\text{گروہی مواد})$$

Standard Deviation معیاری انحراف

یہ دیئے گئے مواد کے اوسط فرق کے مربعوں کی اوسط کا مثبت جذر ہوتی ہے۔

n قیمتوں x_1, x_2, \dots, x_n کے معیاری فرق کو S سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{X})^2}{n}} \quad (\text{غیر گروہی مواد})$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum f(x - \bar{X})^2}{\sum f}} \quad (\text{گروہی مواد})$$

$$n = f_1 + f_2 + \dots + f_k = \sum f \quad \text{جبکہ}$$

مثال 1:- مواد 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11 کے لیے معیاری فرق اور تغیریت معلوم کیجئے۔

$$\bar{X} = \frac{1+2+3+4+6+8+11}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

حل:-

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{X})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-5)^2 + (2-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2 + (11-5)^2}{7}}$$

$$= \sqrt{\frac{16+9+4+1+1+9+36}{7}} = \sqrt{\frac{76}{7}}$$

$$= \sqrt{10.86}$$

$$= 3.2955$$

$$\text{معیاری فرق} = S = 3.2955$$

$$\begin{aligned} \text{تغیریت} &= \frac{\Sigma(x - \bar{X})^2}{n} = \frac{76}{7} \\ &= 10.86 \end{aligned}$$

مثال 2:- انگریزی کے کسی امتحان میں 50 طلباء کے حاصل کردہ نمبروں کی تعددی تفصیل کا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔
نیز اس کی تغیریت بھی معلوم کیجئے۔

نمبر	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54
تعدد	1	4	8	11	15	9	2

حل:-

نمبر	تعدد (f)	جماعتی نمائندہ قیمت	fx	x - \bar{X}	(x - \bar{X}) ²	f(x - \bar{X}) ²
20-24	1	22	22	- 17	289	289
25-29	4	27	108	- 12	144	576
30-34	8	32	256	- 7	49	392
35-39	11	37	407	- 2	4	44
40-44	15	42	630	3	9	135
45-49	9	47	423	8	64	576
50-54	2	52	104	13	169	338
$n = \Sigma f = 50$		$\Sigma f = 259$	$\Sigma fx = 1950$	$\Sigma f(x - \bar{x})^2 = 2350$		

$$\bar{X} = \frac{\Sigma f x}{\Sigma f} = \frac{1950}{50} = \text{نمبر } 39$$

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma f(x - \bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{2350}{50}} = \sqrt{47}$$

$$\text{معیاری فرق} = S = 6.85$$

$$\begin{aligned} \text{تغیریت} &= \frac{\Sigma f(x - \bar{X})^2}{n} = (\sqrt{47})^2 \\ &= 47 \end{aligned}$$

پس
اور

مشق 10.4

1- دیئے گئے مواد کا مجموعی تعددی کثیر الاضلاع (یعنی اوگو) بنائیے۔

(i) جدول میں 10 سالہ عمر کے 60 بچوں کے اوزان (کلوگرام میں) کی تفصیل دی گئی ہے۔

وزن (کلوگرام)	31-36	37-39	40-42	43-45	46-54
تعدد	8	10	18	12	12

(ii) جدول میں 50 طلباء جن کی عمریں 5 سال ہیں کارات کے کھانا کھانے کے اوقات (منٹوں) میں تفصیل دی گئی ہے۔

وقت (منٹوں میں)	4-5	6-7	8-9	10-11	12-15	16-19	20-29
تعدد	5	4	10	9	6	6	10

(iii) جدول میں 08:30 تا 09:30 کے دوران صبح کے اوقات میں مختلف عمر کے لوگوں کی بس شاپ پر بس میں سوار ہونے کی تفصیل درج ہے۔

عمر (سالوں میں)	0-9	10-19	20-29	30-39	40-69
تعدد	10	20	30	20	15

جماعتیں	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
تعدد	10	15	20	30	15

(v) جدول میں 100 لوگوں کے اوزان کی تعددی تفصیل درج ہے۔

اوزان (کلوگرام میں)	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99	100-109
تعدد	15	30	35	15	3	2

جائزہ مشق 10

صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

-1

(i) جب کوئی کالمی نقشہ اس طرح سے تیار کیا جائے کہ ہر کالم کا رقبہ اس میں موجود گروہ کے تعدد کے متناسب ہو تو یہ کہلاتا ہے۔

- (a) منحنی (b) اوگو (c) کالمی نقشہ (d) بار چارٹ

(ii) کسی مواد کا شماریاتی اختصار جو وسط (مرکز) کی پیمائش کرتا ہے، کہلاتا ہے۔

- (a) اوسط (b) عادہ (c) وسطانیہ (d) سب کے سب

(iii) اگر کسی مواد کی قیمتوں کو جمع کر کے مجموعہ کو ان کی کل تعداد پر تقسیم کیا جائے تو یہ کہلاتا ہے۔

- (a) اوسط (b) عادہ (c) وسطانیہ (d) اوزانی اوسط

(iv) کسی مترتب مواد میں وسطی عددی قیمت کہلاتی ہے۔

- (a) عادہ (b) وسطانیہ (c) اوسط (d) ضربی اوسط

(v) وہ قیمت جو کسی مواد میں سب سے زیادہ مرتبہ آئے، کہلاتی ہے۔

- (a) عادہ (b) اوسط (c) وسطانیہ (d) ضربی اوسط

(vi) $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$ کہلاتا ہے۔

- (a) x_1, x_2, \dots, x_n کا اوسط (b) حسابی اوسط
(c) ضربی اوسط (d) اوزانی اوسط

(vii) $H = \frac{n}{\sum \left(\frac{1}{x} \right)}$ کہلاتا ہے۔

- (a) ہارمونک اوسط (b) عادہ (c) اوسط (d) حسابی اوسط

(viii) $\bar{X}_w = \frac{\sum wx}{\sum w}$ کہلاتا ہے۔

- (a) حسابی اوسط (b) اوزانی اوسط
(c) ضربی اوسط (d) اوسط

(ix) $\sum (x_i - \bar{X}) = 0$ کو خاصیت کہا جاتا ہے۔

- (a) حسابی اوسط (b) ضربی اوسط
(c) ہارمونک اوسط (d) عادہ

2- خالی جگہ پر کیجئے۔

(i) کوئی کالمی نقشہ اس طرح سے تعمیر کیا جائے کہ ہر کالم کا رقبہ اس میں موجود گروہ کے تعدد کے متناسب ہو تو وہ _____ کہلاتا ہے۔

(ii) شماراتی اختصار جو کہ کسی مواد کی درمیانی (وسطی) قیمت کی نمائندہ ہو _____ کہلاتا ہے۔

(iii) اگر کسی مواد کی تمام عددی قیمتوں کو جمع کر کے ان کی تعداد پر تقسیم کیا جائے تو یہ _____ کہلاتا ہے۔

(iv) عددی قیمت کے لحاظ سے کسی مترتب مواد کی وسطی قیمت _____ کہلاتی ہے۔

(v) وہ عددی قیمت جو کسی مواد میں سب سے زیادہ مرتبہ آئے _____ کہلاتی ہے۔

(vi) _____ کہلاتا ہے
$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

(vii) n قیمتوں والے سیٹ کے حاصل ضرب کا n th جذر _____ کہلاتا ہے۔

(viii) _____ کہلاتا ہے۔
$$H = \frac{n}{\sum \left(\frac{1}{x} \right)}$$

(ix) _____ کہلاتا ہے۔
$$\bar{X}_w = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

(x) $\sum (x_i - \bar{X}) = 0$ کی ایک خاصیت ہے۔

3- 2, 3, 6, 8, 11 کا معیاری انحراف معلوم کریں۔

4- غیر گروہی مواد جس میں $n = 15$ اور $\sum x = 48$ ہو تو اس غیر گروہی مواد کا معیاری انحراف اور تغیریت معلوم کیجئے۔

5- مواد 3, 5, 6, 8, 8, 9, 10 کا (i) اوسط (ii) وسطانیہ (iii) عادی معلوم کیجئے۔

6- درج ذیل قیمتوں کے سیٹ

4, 6, 7, 4, 8, 9, 7, 10 کا اوسط، وسطانیہ اور عادی معلوم کیجئے۔

خلاصہ

- ✦ کالمی نقشہ جس کے ہر کالم کا رقبہ اس میں موجود گروہ کی قیمتوں کی تعداد کے متناسب ہو اس مواد کا کالمی نقشہ کہلاتا ہے۔
- ✦ مجموعی تعداد، کسی بھی قدر سے پہلی قدروں کے تعدادات کے مجموعہ کو کہتے ہیں۔
- ✦ جب مجموعی تعداد کو بالمقابل جماعتی وقفوں کی انتہائی قیمت کے بالمقابل رکھ کر گراف پیپر پر نقاط لگائے جائیں۔ پھر ان نقاط کو ملانے سے حاصل شدہ گراف کو مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کہتے ہیں۔
- ✦ شماریاتی اختصار کسی مواد کی وسطی (مرکز) کا تعین کرتا ہے۔
- ✦ کسی مواد کا اوسط حاصل کرنے کے لئے اس کی تمام قیمتوں کو جمع کر کے اس کی تعداد پر تقسیم کیا جاتا ہے۔
- ✦ کسی مواد کی عددی ترتیب میں درمیانی قیمت وسطانیہ کہلاتی ہے۔
- ✦ عاڈہ کسی مواد میں سب سے زیادہ بار آنے والی قیمت ہوتی ہے۔
- ✦ کسی غیر گروہی مواد کا حسابی اوسط اس کی تمام عددی قیمتوں کو جمع کر کے ان کی کل تعداد سے تقسیم کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔
- ✦ وسطانیہ کسی مواد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے جبکہ کچھ اور قیمتیں مواد کے سیٹ کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہیں جو کہ پہلا، دوسرا اور تیسرا ربعی قاطع کہلاتے ہیں۔
- ✦ n مثبت قیمتوں x_1, x_2, \dots, x_n کا ضربی اوسط "G" ان کے حاصل ضرب کا n واں مثبت جذر ہوتا ہے۔

✦ n قیمتوں x_1, x_2, \dots, x_n کا ہارمونک اوسط "H" ان قیمتوں کے ضربی معکوس قیمتوں کے حسابی اوسط کا ضربی معکوس قیمت ہوتا ہے۔

✦ تغیریت، معیاری انحراف کا مربع ہوتی ہے۔ یعنی کہ حسابی اوسط سے مواد کی قیمتوں کے فرق کے مربعوں کے اوسط کے برابر ہوتی ہے۔

✦ انتشار کی سادہ ترین پیمائش سعت (Range) ہے۔ سعت کسی مواد کی سب سے بڑی قیمت کا سب سے چھوٹی قیمت سے فرق ہوتی ہے۔

✦ معیاری فرق تمام قیمتوں کے حسابی اوسط کے مواد کی قیمتوں کے فرق کے مربعوں کی اوسط کا مثبت جذر ہوتا ہے۔ n قیمتوں x_1, x_2, \dots, x_n کا معیاری انحراف 'S' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

✦ اگر مواد میں x_1, x_2, \dots, x_k قیمتوں کے اوزران (Weight) بالترتیب w_1, w_2, \dots, w_k ہوں تو اوزانی حسابی اوسط جو کہ \bar{x}_w سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\bar{x}_w = \frac{\sum w x}{\sum w}$$