

# فی صد۔ نسبت اور تناسب

## PERCENTAGE, RATIO AND PROPORTION

- ◀ فی صد
- ◀ نسبت
- ◀ تناسب
- ◀ مرکب تناسب

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

◀ فی صد بطور کسر (نسب نما 100 کے ساتھ)

◀ تبدیلی:

- فی صد کی کسر میں تبدیلی بلحاظ نسب نما 100 کے ساتھ
- کسر کو 100 فی صد سے ضرب دے کر فی صد میں تبدیل کرنا
- فی صد کو اعشاریہ اور اعشاریہ کو فی صد میں تبدیل کرنا

◀ روزمرہ زندگی میں فی صد کا استعمال

◀ نسبت

- اینٹی سی ڈینٹ اور کانسٹی کوئٹ
- نسبت کی کوئی اکائی نہیں ہوتی
- نسبت کا آرڈر

◀ نسبت میں جب ایک عدد کو بڑھایا یا کم کیا جائے تو کیا ہوتا ہے۔

◀ روزمرہ زندگی میں تناسب کے مسائل

◀ تناسب

◀ تناسب (راست اور معکوس)

◀ روزمرہ زندگی سے تناسب کے مسائل

◀ مرکب تناسب

◀ مرکب تناسب سے متعلقہ مسائل

## 1.1- فی صد Percent

لفظ پرسنٹ (Percent) لاطینی لفظ پر سنٹم کی مختصر شکل ہے۔ فی صد عربی زبان کا لفظ ہے جس کا مطلب ”سو میں سے“ یا ”سو پر“ ہے۔ فی صد کے لیے علامت % استعمال ہوتی ہے۔

### 1.1- فی صد بطور کسر (نسب نما 100 کے ساتھ)

$$40\% \text{ کا مطلب } 100 \text{ میں سے } 40 = \frac{40}{100}$$

$$60\% \text{ کا مطلب } 100 \text{ میں سے } 60 = \frac{60}{100}$$

$$85\% \text{ کا مطلب } 100 \text{ میں سے } 85 = \frac{85}{100}$$

### 1.1.2- فی صد کی کسر میں تبدیلی بلحاظ نسب نما 100

ہم فی صد کو کسر میں نسب نما 100 کے ساتھ تبدیل کرنے کا طریقہ درج ذیل مثالوں سے دیکھتے ہیں۔

$$30\% \text{ کا مطلب } 100 \text{ میں سے } 30 = \frac{30}{100}$$

$$55\% \text{ کا مطلب } 100 \text{ میں سے } 55 = \frac{55}{100}$$

**مثال :-**  $45\frac{1}{2}\%$  اور  $22\frac{1}{2}\%$ ،  $70\%$  کو بطور کسر آسان شکل میں واضح کریں۔

$$70\% = \frac{70}{100} \quad \text{حل :-}$$

$$= \frac{7}{10}$$

$$22\frac{1}{2}\% = \frac{45}{2 \times 100}$$

$$= \frac{9}{2 \times 20}$$

$$= \frac{9}{40}$$

$$45\frac{1}{2}\% = \frac{91}{2 \times 100}$$

$$= \frac{91}{200}$$

کسر کو 100% سے ضرب دے کرنی صد میں تبدیل کرنا۔

کسر کو 100% سے ضرب دے کرنی صد میں تبدیل کرنے کے لیے ہم درج ذیل مثالوں کو دیکھتے ہیں۔

**مثال :-** دی گئی کسروں کو فی صد میں تبدیل کیجئے۔

(i)  $\frac{7}{20}$

(ii)  $\frac{9}{20}$

(iii)  $\frac{7}{5}$

(iv)  $\frac{1}{3}$

**حل :-**

$$(i) \frac{7}{20} = \frac{7}{20} \times 100\%$$

$$= 7 \times 5\%$$

$$= 35\%$$

$$(ii) \frac{9}{20} = \frac{9}{20} \times 100\%$$

$$= 9 \times 5\%$$

$$= 45\%$$

$$(iii) \frac{7}{5} = \frac{7}{5} \times 100\%$$

$$= 7 \times 20\%$$

$$= 140\%$$

$$(iv) \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 100\%$$

$$= \frac{100}{3}\%$$

$$= 33\frac{1}{3}\%$$

فی صد کو اعشاریہ اور اعشاریہ کو فی صد میں تبدیل کرنا۔  
فی صد کو اعشاریہ میں تبدیل کرنے کے لیے ہم درج ذیل مثالوں کو دیکھتے ہیں۔

**مثال 1:-** اعشاریہ میں تبدیل کیجئے۔

$$(i) 54\% \quad (ii) 16\frac{1}{2}\% \quad (iii) 27\frac{1}{3}\%$$

$$(i) 54\% = \frac{54}{100}$$

$$= 0.54$$

$$(ii) 16\frac{1}{2}\% = \frac{16.5}{100}$$

$$= \frac{165}{1000}$$

$$= 0.165$$

$$(iii) 27\frac{1}{3}\% = \frac{82}{3 \times 100}$$

$$= \frac{27.3}{100}$$

$$= \frac{273}{1000}$$

$$= 0.273$$

**حل:-**

سطح زمین کا 71% پانی ہے۔



سطح زمین پر خشکی کتنے فی صد ہے؟

**مثال 2:-** اسلم نے انگلش میں 50 میں سے 35 نمبر حاصل کئے، اردو میں 75 میں سے 60 اور مطالعہ پاکستان

میں 75 میں سے 72 نمبر حاصل کئے۔ اس کی کس مضمون میں کارکردگی بہتر رہی۔

$$\text{انگلش میں حاصل کردہ نمبر فی صد میں} = \frac{35}{50} \times 100\%$$

$$= 35 \times 2\%$$

$$= 70\%$$

**حل:-**

$$\begin{aligned} \text{اردو میں حاصل کردہ نمبر فی صد میں} &= \frac{60}{75} \times 100\% \\ &= 20 \times 4\% \\ &= 80\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مطالعہ پاکستان میں حاصل کردہ نمبر فی صد} &= \frac{72}{75} \times 100\% \\ &= 24 \times 4\% \\ &= 96\% \end{aligned}$$

پس اسلم کی بہترین کارکردگی مطالعہ پاکستان کے مضمون میں رہی۔

**مثال 3:-** درج ذیل کو فی صد کی شکل میں واضح کیجئے۔

$$(i) 0.7 \quad (ii) 0.13 \quad (iii) 1.26$$

$$\begin{aligned} (i) 0.7 &= 0.7 \times 100\% \\ &= \frac{7}{10} \times 100\% \\ &= 7 \times 10\% \\ &= 70\% \end{aligned}$$

حل :-

$$\begin{aligned} (ii) 0.13 &= 0.13 \times 100\% \\ &= \frac{13}{100} \times 100\% \\ &= 13\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) 1.26 &= 1.26 \times 100\% \\ &= \frac{126}{100} \times 100\% \\ &= 126\% \end{aligned}$$

## 1.1 مشق

1- درج ذیل فی صد کو کسروں کی آسان شکل میں واضح کیجئے۔

- (i) 95% (ii) 65% (iii) 75% (iv) 25% (v) 56% (vi) 48%  
 (vii) 8% (viii)  $33\frac{1}{2}\%$  (ix)  $37\frac{1}{2}\%$  (x)  $87\frac{1}{2}\%$  (xi)  $5\frac{1}{4}\%$  (xii)  $42\frac{1}{2}\%$

2- درج ذیل کسور کو فی صد کی شکل میں لکھئے اور جہاں ضروری ہو جواب ایک درجہ اعشاریہ تک درست ہو لکھیے۔

- (i)  $\frac{3}{4}$  (ii)  $\frac{3}{5}$  (iii)  $\frac{4}{25}$  (iv)  $\frac{13}{20}$  (v)  $\frac{31}{25}$  (vi)  $\frac{21}{40}$   
 (vii)  $\frac{23}{60}$  (viii)  $\frac{8}{3}$  (ix)  $\frac{8}{5}$  (x)  $\frac{7}{8}$  (xi)  $\frac{5}{8}$  (xii)  $\frac{3}{8}$

3- دی گئی فی صد کو اعشاریہ میں تبدیل کیجئے جبکہ جواب تین درجہ اعشاریہ تک درست ہو۔

- (i) 47% (ii) 58% (iii) 92% (iv) 8% (v) 12% (vi) 120%  
 (vii) 180% (viii) 145% (ix)  $5\frac{1}{2}\%$  (x)  $5\frac{1}{3}\%$  (xi)  $48\frac{2}{3}\%$  (xii)  $58\frac{1}{3}\%$

4- درج ذیل اعشاریہ کو فی صد میں تبدیل کیجئے۔

- (i) 0.5 (ii) 0.9 (iii) 1.25 (iv) 1.39 (v) 1.72 (vi) 0.22  
 (vii) 2.64 (viii) 3.41 (ix) 0.845 (x) 1.78 (xi) 1.58 (xii) 0.065

5- درج ذیل جدول کو مکمل کیجئے۔

کسر	فی صد	اعشاریہ
I. $\frac{3}{4}$	75%	0.75
II. $\frac{4}{5}$		0.8
III.	40%	
IV.		0.62
V.	44%	

## 1.1.3- روزمرہ زندگی میں فی صد کا استعمال

درج ذیل روزمرہ زندگی کی مثالوں پر غور کیجئے جن میں فی صد کو استعمال کیا گیا ہے۔

**مثال 1:-** اگر ایک کارپارکنگ میں 800 کاریں ہوں اور ان میں سے 80% کاریں پاکستان میں بنی ہوئی ہوں تو پاکستانی کاروں کی تعداد معلوم کیجئے۔

**حل:-**

$$\begin{aligned} \text{کارپارکنگ میں کاروں کی کل تعداد} &= 800 \\ 80 \text{ فی صد} &= \frac{80}{100} \\ \text{پاکستانی کاروں کی تعداد} &= \frac{80}{100} \times 800 \\ &= 640 \end{aligned}$$

**مثال 2:-** اگر ایک اسکول میں کل طلبہ کا  $\frac{4}{5}$  چھٹی پرہوں تو ہر سو میں کتنے طلبہ چھٹی پر تھے۔

**حل:-**

$$\begin{aligned} \text{ہر سو میں چھٹی پر طلبہ کی تعداد} &= \frac{4}{5} \times 100 \\ &= 4 \times 20 \\ &= 80 \end{aligned}$$

پس ہر سو میں سے 80 طلبہ چھٹی پر تھے۔

**مثال 3:-** اگر ایک کالونی کے 56% گھروں میں سے ہر گھر میں ایک کار موجود ہو تو کالونی کے کتنے فی صد گھروں میں کار نہیں ہوگی۔

**حل:-**

$$56 \% = \text{گھروں کی تعداد فی صد میں جن میں کار موجود ہے۔}$$

$$\begin{aligned} \% (100 - 56) &= \text{گھروں کی تعداد فی صد میں جن میں کار موجود نہیں ہے۔} \\ &= 44 \% \end{aligned}$$

پس 44% گھروں میں کار موجود نہیں ہے۔

اگر دو اشیا کی فیصد میں سے ایک کی فیصد دی گئی ہو تو ہم دوسری کی فی صد معلوم کر سکتے ہیں۔

## مشق 1.2

- 1- اگر ایک اسکول کے طلبہ میں سے 45% لڑکیاں ہوں تو لڑکوں کی تعداد فی صد میں کیا ہوگی؟
- 2- اگر 82% گھروں میں ٹیلی وژن ہوں تو کتنے فی صد گھروں میں ٹیلی وژن نہیں ہوگا؟
- 3- ایک ہاکی ٹیم نے کھیلے گئے میچوں میں سے 62% جیتے جبکہ 26% برابر رہے۔ ہاکی ٹیم نے کل کتنے فی صد میچ ہارے؟
- 4- ایک ہوائی جہاز میں 400 مسافر سوار تھے جن میں سے 52% مسافر پاکستانی، 17% چائیز، 12% ایرانی اور بقیہ برطانیہ سے تھے۔  
(i) ہر ملک سے کتنے مسافر جہاز میں سوار تھے؟  
(ii) برطانیہ کے مسافر کتنے فی صد تھے؟
- 5- آمنہ نے ریاضی کے امتحان میں 50 میں سے 46 نمبر حاصل کئے جبکہ کیسٹری میں 75 میں سے 64 اور فزکس میں 80 میں سے 72 نمبر حاصل کئے۔ اس نے کس مضمون میں بہترین کارکردگی دکھائی؟
- 6- ایک ترکھان کی ایک میز بنانے پر 720 روپے لاگت آئی۔ اگر اس نے یہ میز 920 روپے میں بیچی ہو تو اس کا منافع فیصد میں بتائیے۔
- 7- اگر کسی کتاب کا 84% حصہ 420 صفحات پر مشتمل ہو تو کتاب میں کل کتنے صفحات ہوں گے؟
- 8- حمزہ اپنی کل آمدنی میں سے 20% مکان کے کرایہ پر خرچ کرتا ہے اور بقیہ میں سے 70% گھریلو اخراجات پر۔ اگر اسے 1800 روپے کی بچت ہو تو اس کی کل آمدنی کیا ہوگی؟
- 9- راجیل کی آمدنی روؤف کی آمدنی سے 25% زیادہ ہے۔ روؤف کی آمدنی راجیل کی آمدنی سے کتنے فی صد کم ہے؟



## 1.2- نسبت

پچھلی جماعتوں میں ہم نسبت سے متعلق پڑھ چکے ہیں اور ان سے متعلق مسائل حل کر چکے ہیں۔ آئیے یاد دہانی کیجئے۔

ہماری روزمرہ زندگی میں ہمیں ہمیشہ اشیاء کی قیمتوں یا مقداروں کے موازنہ کی ضرورت رہتی ہے۔ مثال کے طور پر اگر ایک ٹوکری میں 6 انڈے اور دوسری ٹوکری میں 24 انڈے ہیں تب دونوں ٹوکریوں میں انڈوں کی تعداد کا موازنہ ہمیں نسبت کو سمجھنے میں راہنمائی کرتا ہے۔

اس لیے ایک جیسی اکائیوں والی ایک جیسی مقداروں کے موازنہ کو نسبت کہتے ہیں۔

نسبت کے لیے علامت ':' ہے۔

### 1.2.1- (i) نسبت بطور تعلق

ذیل میں 6 گیندیں ہیں۔



6 میں سے 2 گیندیں سرخ ہیں۔

$$\text{سرخ گیندوں کی کسر} = \frac{2}{6}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= 1 : 3$$

اوپر دکھائے گئے 6 گیندوں میں سے 2 سرخ اور 4 گیندیں نیلے رنگ کی ہیں۔

$$\text{سرخ گیندوں اور نیلی گیندوں کے درمیان نسبت} = 2 : 4$$

$$= 1 : 2$$

نسبت 1:2 ہمیں یہ ظاہر کرتی ہے کہ ایک سرخ گیند کے لیے 2 نیلی گیند ہیں۔

یہاں نسبت سرخ گیندوں کی تعداد اور نیلی گیندوں کی تعداد کا موازنہ کرتی ہے۔

اگر  $a$  اور  $b$  دو مقداروں کو ظاہر کرتے ہوں جبکہ  $b$  غیر صفر ہو تو  $a$  کی  $b$  سے نسبت کو  $a:b$  اور کسر کی شکل میں  $\frac{a}{b}$  لکھتے ہیں۔

اگر ایک مقدار 2 اور دوسری 3 ہو تو دونوں مقداروں میں نسبت 2:3 یا  $\frac{2}{3}$  ہوگی۔

اگر دو مقداریں جن کا موازنہ کیا جانا ہو ایک ہی اکائی میں نہ ہوں تو ان کے درمیان نسبت معلوم کرنے کے لیے پہلے ہم ان کو ایک ہی اکائی میں تبدیل کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر دو لمبائیاں 50 سینٹی میٹر اور 3 میٹر ہوں تو ان کے درمیان نسبت:

$$\left. \begin{array}{l} 50 : 300 \\ = 1 : 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 100 \text{ سینٹی میٹر} = 1 \text{ میٹر} \\ 300 \text{ سینٹی میٹر} = 3 \text{ میٹر} \end{array}$$

('1' کے علاوہ) اگر  $a$  اور  $b$  صحیح اعداد ہوں اور ان کے درمیان کوئی مشترک جز نہ ہوں تو نسبت  $a:b$  اپنی آسان ترین شکل کہلاتی ہے۔

**مثال 1:-** نسبت  $8:12$  کو آسان ترین شکل میں لکھئے۔

$$\begin{aligned} 8:12 &= \frac{8}{4} : \frac{12}{4} \\ &= 2:3 \end{aligned}$$

**مثال 2:-** نسبت  $24:12$  کو آسان ترین شکل میں لکھئے۔

$$\begin{aligned} 24:12 &= \frac{24}{12} : \frac{12}{12} \\ &= 2:1 \end{aligned}$$

### 1.2.1 (ii) اینٹی سی ڈینٹ اور کانسی کوئنٹ Antecedent and Consequent

نسبت  $a:b$  میں " $a$ " کو اینٹی سی ڈینٹ (پہلا یا پہلا آنے والا) کہتے ہیں اور " $b$ " کو کانسی کوئنٹ (بعد میں آنے والا) کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر  $2:5$  میں 2 اینٹی سی ڈینٹ ہے اور 5 کانسی کوئنٹ ہے۔

### 1.2.1 (iii) نسبت کی کوئی اکائی نہیں ہوتی

آئیے ایک جگہ اور ایک گلاس کو دیکھتے ہیں جن میں بالترتیب 1500 ملی لیٹر اور 200 ملی لیٹر جوس ہے۔

$$\text{ذواشیاء میں جوس کے حجم کا موازنہ} = \frac{\text{گلاس میں جوس کا حجم}}{\text{جگہ میں جوس کا حجم}} = \frac{200 \text{ ملی لیٹر}}{1500 \text{ ملی لیٹر}} = \frac{2}{15} \text{ یا } 2:15$$

ہم ان دونوں مقداروں کا موازنہ کر سکتے ہیں کیونکہ شمار کنندہ اور نسبت نما میں اکائیاں ایک جیسی ہیں۔ اس لیے نسبت 15 : 2 کی کوئی اکائی نہیں۔

### 1.2.1- (iv) نسبت کا آرڈر

اگر دو مقداروں کو  $a$  اور  $b$  سے ظاہر کیا جائے تو  $a$  سے  $b$  کی نسبت کو  $a : b$  لکھتے ہیں۔

ہم اس نسبت کو  $b : a$  نہیں لکھ سکتے، کیونکہ:  $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$  یا  $a : b \neq b : a$

اس لیے نسبت میں مقداروں کی ترتیب کو برقرار رکھنا ضروری ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر 5 : 2 اور 2 : 5 دو مختلف نسبتیں ہیں

کیونکہ:  $\frac{2}{5} \neq \frac{5}{2}$  یا  $2 : 5 \neq 5 : 2$

### 1.2.2- نسبت میں جب ایک عدد کو بڑھایا یا کم کیا جائے

اگر ایک سکول کی لائبریری میں ریاضی کی کتب کی تعداد کو 75 سے بڑھا کر 95 کیا جائے تو:

$$\begin{aligned} \text{پہلی کتب کی تعداد اور موجود کتب کی تعداد میں نسبت} &= 75 : 95 \\ &= 15 : 19 \end{aligned}$$

یعنی کتب کی تعداد میں اضافہ 15 : 19 کی نسبت میں ہے۔

**مثال 1:-** ایک طالب علم 70 روپے روزانہ خرچ کرتا ہے، لیکن اتوار کو وہ صرف 20 روپے خرچ کرتا ہے۔ اتوار اور ہر روز

خرچ کیے گئے روپوں کی تعداد میں نسبت معلوم کیجئے۔

$$\begin{aligned} \text{مطلوبہ نسبت} &= 20 : 70 \\ &= 2 : 7 \end{aligned}$$

**حل:-**

**مثال 2:-** 5 : 4 کی نسبت میں 40 کتب کا اضافہ کیا جائے تو اضافہ کی گئی کتب کی تعداد کیا ہوگی؟

$$\text{اضافہ کی گئی کتب کی تعداد} = 40$$

**حل:-**

$$\text{دی گئی نسبت} = 5 : 4 = \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{کتب کی تعداد میں اضافہ} &= 40 \times \frac{5}{4} \\ &= 10 \times 5 \\ &= 50 \end{aligned}$$

پس کتب کی تعداد میں 50 کتب کا اضافہ ہوگا۔

**مثال 3:-** کس نسبت میں 60 مربع میٹر کو 24 مربع میٹر کم کیا جاسکتا ہے؟

**حل:-**

پرانی مقدار : نئی مقدار = مطلوبہ نسبت

$$= 24 : 60$$

$$= \frac{24}{60}$$

$$= \frac{2}{5}$$

$$= 2 : 5$$

### مشق 1.3

1- پہلی مقدار کی دوسری مقدار سے آسان شکل میں نسبت معلوم کیجئے۔

(i) Rs. 24 , Rs. 6

(ii) 20 kg , 5 kg

(iii) 20cm , 80cm

(iv) 5m , 5m

(v) 1500 km , 1200 km

(vi) Rs. 150 , Rs. 275

2- درج ذیل میں سے ہر نسبت کو آسان شکل میں لکھیے۔

(i)  $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$

(ii)  $\frac{4}{5} : \frac{3}{4}$

(iii)  $\frac{5}{6} : \frac{7}{10}$

(iv)  $\frac{13}{40} : \frac{3}{20}$

(v)  $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$

(vi)  $\frac{4}{10} : 20$

(vii)  $\frac{15}{10} : 2$

(viii)  $\frac{12}{10} : \frac{28}{10}$

(ix)  $\frac{2}{5} : \frac{1}{3}$

3- ایک شہر میں 126 میڈیکل کے طلبہ نے درج ذیل جدول کے مطابق سفر کیا۔

کار	بس	ٹیکسی	رکشا
28	75	9	14

درج ذیل طلبہ کے درمیان جنہوں نے سفر کیا نسبت معلوم کیجئے۔

(i) رکشا سے ٹیکسی سے؟

(ii) ٹیکسی سے بس سے؟

(iii) ٹیکسی سے کار سے؟

4- اسکول کی لائبریری میں ریاضی کی 75 کتب، انگلش کی 115 کتب، کیمسٹری کی 85 کتب اور فزکس کی 60 کتب موجود ہیں۔ درج ذیل نسبت معلوم کیجئے۔

(i) ریاضی کی کتب کی تعداد اور انگلش کی کتب کی تعداد میں۔

(ii) انگلش کی کتب کی تعداد اور کیمسٹری کی کتب کی تعداد میں۔

(iii) انگلش کی کتب کی تعداد اور فزکس کی کتب کی تعداد میں۔

(iv) فزکس کی کتب کی تعداد اور کیمسٹری کی کتب کی تعداد میں۔

(v) فزکس کی کتب کی تعداد اور ریاضی کی کتب کی تعداد میں۔

(vi) کیمسٹری کی کتب کی تعداد اور ریاضی کی کتب کی تعداد میں۔

### 1.2.3- روزمرہ زندگی میں نسبت کا استعمال

ہماری روزمرہ زندگی میں نسبت سے متعلق چند مثالیں درج ذیل ہیں۔

**مثال 1:-** ایک اسکول میں 1029 طلبہ ہیں۔ جن میں سے 504 لڑکیاں ہیں۔ لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد کے درمیان کیا نسبت ہوگی؟

$$1029 = \text{طلبہ کی کل تعداد}$$

$$504 = \text{لڑکیوں کی تعداد}$$

$$1029 - 504 = \text{لڑکوں کی تعداد}$$

$$= 525$$

$$504 : 525 = \text{مطلوبہ نسبت}$$

**حل:-**

**مثال 2:-** ایک مستطیل کی لمبائی 6 سینٹی میٹر اور چوڑائی 4 سینٹی میٹر ہے۔ ایک دوسری مستطیل کی لمبائی 9 سینٹی میٹر اور چوڑائی 2 سینٹی میٹر ہے۔ درج ذیل نسبت معلوم کیجئے:

(i) دونوں مستطیلوں کی لمبائیوں کے درمیان۔ (ii) دونوں مستطیلوں کی چوڑائیوں کے درمیان۔

(iii) دونوں مستطیلوں کے احاطوں کے درمیان۔ (iv) دونوں مستطیلوں کے رقبوں کے درمیان۔

حل :-

$$\text{پہلی مستطیل کی لمبائی} = 6 \text{ سینٹی میٹر}$$

$$\text{پہلی مستطیل کی چوڑائی} = 4 \text{ سینٹی میٹر}$$

$$\text{پہلی مستطیل کا رقبہ} = 6 \times 4$$

$$= 24$$

$$\text{پہلی مستطیل کا احاطہ} = 2 \times (6 + 4)$$

$$= 20$$

$$\text{دوسری مستطیل کی لمبائی} = 9 \text{ سینٹی میٹر}$$

$$\text{دوسری مستطیل کی چوڑائی} = 2 \text{ سینٹی میٹر}$$

$$\text{دوسری مستطیل کا رقبہ} = 9 \times 2$$

$$= 18$$

$$\text{دوسری مستطیل کا احاطہ} = 2 \times (9 + 2)$$

$$= 22$$

$$(i) \text{ پہلی اور دوسری مستطیل کی لمبائیوں کے درمیان نسبت} = 6 : 9$$

$$= 2 : 3$$

$$(ii) \text{ پہلی اور دوسری مستطیل کی چوڑائیوں کے درمیان نسبت} = 4 : 2$$

$$= 2 : 1$$

$$(iii) \text{ پہلی اور دوسری مستطیل کے احاطوں کے درمیان نسبت} = 20 : 22$$

$$= 10 : 11$$

$$(iv) \text{ پہلی اور دوسری مستطیل کے رقبوں کے درمیان نسبت} = 24 : 18$$

$$= 4 : 3$$

**مثال 3:-** ایک خاندان میں 6 لڑکے اور 4 لڑکیاں ہوں تو درج ذیل نسبت معلوم کیجئے۔

(i) لڑکوں اور لڑکیوں کی تعداد میں

(ii) لڑکیوں اور لڑکوں کی تعداد میں

**حل:-** لڑکوں کی تعداد = 6

لڑکیوں کی تعداد = 4

لڑکیاں: لڑکے = 4 : 6

= 2 : 3

لڑکے: لڑکیاں = 6 : 4

= 3 : 2

**مثال 4:-** نسبت معلوم کیجئے۔

(i) ہر 8 روپے اور 72 روپے فی درجن کے درمیان۔

(ii) 36 روپے فی درجن اور ہر 6 روپے کے درمیان۔

**حل:-** (i)  $72 = \frac{72}{12}$  روپے فی درجن کا مطلب

= 6

اس لیے ہر 8 روپے اور 72 روپے فی درجن کے درمیان وہی نسبت ہے جو کہ ہر 8 روپے اور ہر 6 روپے کے درمیان یعنی:

8 : 6 = 4 : 3

پس مطلوبہ نسبت = 4 : 3

(ii)  $36 = \frac{36}{12}$  روپے فی درجن کا مطلب

= 3

اس لیے 36 روپے فی درجن اور ہر 6 روپے کے درمیان وہی نسبت ہے جو کہ 3 روپے اور ہر 6 روپے کے درمیان یعنی

3 : 6 = 1 : 2

پس مطلوبہ نسبت = 1 : 2

مثال 5:- اگر  $a : b = 2 : 3$  تو  $6a : 5b$  معلوم کیجئے۔

حل :- یعنی  $a : b = 2 : 3$

اس لیے  $6a : 5b = 6 \times 2 : 5 \times 3$

$$= 12 : 15$$

$$= \frac{12}{3} : \frac{15}{3}$$

$$= 4 : 5$$

$$6a : 5b = 4 : 5$$

پس

### مشق 1.4

- 1- ہر 6 روپے کے عوض 72 روپے فی درجن کے درمیان نسبت معلوم کیجئے۔
- 2- 160 روپے فی میٹر اور 150 روپے فی میٹر کے درمیان نسبت معلوم کیجئے۔
- 3- 72 روپے 24 کے لیے اور ہر ایک کے لیے 4 روپے کے درمیان نسبت معلوم کیجئے۔
- 4- اگر مربع 'A' کے ضلع کی لمبائی 2 سینٹی میٹر اور مربع 'B' کے ضلع کی لمبائی 6 سینٹی میٹر ہو تو درج ذیل نسبتیں معلوم کیجئے۔
  - (i) مربع 'A' کے ضلع کی لمبائی اور مربع 'B' کے ضلع کی لمبائی کے درمیان۔
  - (ii) مربع 'A' احاطہ اور مربع 'B' کے احاطہ کے درمیان۔
  - (iii) مربع 'A' کے رقبہ اور مربع 'B' کے رقبہ کے درمیان۔
- 5- اگر  $a : b = 2 : 3$  تو  $6a : 2b$  معلوم کیجئے۔
- 6- ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں 3 سینٹی میٹر، 4 سینٹی میٹر اور 6 سینٹی میٹر ہیں۔ مثلث کے اضلاع کے لمبائیوں کے درمیان نسبتیں معلوم کیجئے۔
- 7- ایک مثلث میں دو زاویے  $54^\circ$  اور  $72^\circ$  ہیں۔ تیسرے زاویے کی دیئے گئے دو زاویوں کی مقداروں کے مجموعہ کے درمیان نسبت معلوم کیجئے۔
- 8- علی کے والد کی ماہانہ تنخواہ 40000 روپے ہے جبکہ اس کے والد کا ماہانہ خرچ 35000 روپے ہے، نسبت معلوم کیجئے۔
  - (i) آمدنی اور اخراجات میں
  - (ii) اخراجات اور بچت میں
  - (iii) آمدنی اور بچت میں



9- اگر مربع 'A' کے ضلع کی لمبائی 6 سینٹی میٹر اور مربع 'B' کے ضلع کی لمبائی 8 سینٹی میٹر ہو تو درج ذیل میں نسبتیں معلوم کیجئے۔

(i) مربع 'A' کے ضلع کی لمبائی اور مربع 'B' کے ضلع کی لمبائی میں

(ii) مربع 'A' کے رقبہ اور مربع 'B' کے رقبہ کے درمیان

10- اگر ایک خاندان کے پاس 12 پرندے ہیں جن میں سے 6 طوطے، 2 چڑیاں اور بقیہ کبوتر ہوں تو:

(i) کبوتروں اور چڑیوں کی تعداد میں نسبت معلوم کیجئے۔

(ii) کبوتروں اور پرندوں کی مقدار میں نسبت معلوم کیجئے۔

## 1.3 - تناسب Proportion

دو نسبتوں کے درمیان برابری تناسب کہلاتی ہے۔ تناسب کے لیے علامت " :: " یا "=" ہے۔

### 1.3.1 - طرفین اور وسطین Extremes and Means

اگر  $a : b = c : d$  تب  $a : b :: c : d$  تناسب ہے ہم اسے اس طرح پڑھتے ہیں۔

$a$  سے  $b$  کو نسبت وہی ہے جو کہ  $c$  کو  $d$  سے۔

$a, b, c$  اور  $d$  تناسب کی رقوم کہلاتی ہے۔

پہلی اور آخری رقم یعنی  $a$  اور  $d$  کو طرفین (extremes) کہتے ہیں۔

دوسری اور تیسری رقم یعنی  $b$  اور  $c$  کو وسطین (mean) کہتے ہیں۔

$$\begin{array}{c}
 \text{طرفین} \\
 \curvearrowright \\
 a : b :: c : d \\
 \curvearrowleft \\
 \text{وسطین} \\
 ad = bc
 \end{array}$$

طرفین کا حاصل ضرب برابر ہوتا ہے وسطین کے حاصل ضرب کے

**مثال :-** تناسب  $15 : 60 :: 3 : x$  میں  $x$  کی قیمت معلوم کیجئے۔

**حل :-** تناسب  $15 : 60 :: 3 : x$  میں:

$$a = x, b = 3, c = 60 \text{ اور } d = 15$$

$$\text{طرفین کا حاصل ضرب} = ad$$

$$= x \times 15 = 15x$$

$$\text{وسطین کا حاصل ضرب} = cb$$

$$= 3 \times 60$$

$$= 180$$

$$\text{وسطین کا حاصل ضرب} = \text{طرفین کا حاصل ضرب}$$

$$15x = 180$$

$$x = \frac{180}{15}$$

$$= 12$$

$$x = 12$$

پس

### 1.3.2 - تناسب (راست اور معکوس)

#### تناسب راست Direct Proportion

دو نسبتوں کے درمیان تعلق جس میں ایک مقدار میں اضافہ دوسری مقدار میں اسی تناسب سے اضافہ کا باعث بنے یا ایک مقدار میں کمی دوسری مقدار میں اسی تناسب میں کمی کا باعث بنے "راست تناسب" کہلاتی ہے۔

#### تناسب معکوس Inverse proportion

دو نسبتوں کے درمیان تعلق جس میں ایک مقدار میں اضافہ اسی تناسب سے دوسری مقدار میں کمی کا باعث بنے یا ایک مقدار میں کمی اسی تناسب سے دوسری مقدار میں اضافہ کا باعث بنے "تناسب معکوس" کہلاتا ہے۔

### 1.3.3 - روزمرہ زندگی سے مسائل

مثال 1:- 20 قلم 2000 روپے کے ہوں تو ایسے 40 قلم کی کیا قیمت ہوگی؟

حل:- فرض کیا 40 قلم کی قیمت  $x$  روپے ہے۔ تب:

قلم	قیمت
20	2000
↓ 40	↓ $x$

اس لیے  $20 : 40 :: 2000 : x$

$$\frac{20}{40} = \frac{2000}{x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2000}{x}$$

$$x \times 1 = 2 \times 2000$$

$$x = 4000$$

پس 40 قلم کی قیمت 4000 روپے ہوگی۔

مثال 2:- 80 میضوں کی قیمت 22000 روپے ہو تو ایسی 30 میضوں کی کیا قیمت ہوگی؟

میض	قیمت
↑ 80	↑ 22000
↑ 30	↑ $x$

اس لیے  $80 : 30 :: 22000 : x$

$$\frac{80}{30} = \frac{22000}{x}$$

$$80x = 22000 \times 30$$

$$x = \frac{22000 \times 30}{80}$$

$$x = 8250$$

پس 30 میضوں کی قیمت 8250 روپے ہوگی۔

**مثال 3:-** ایک اسکول کے ہاسٹل میں 300 طلبہ ہیں جن کے لیے 30 دن کی خوراک کا ذخیرہ موجود ہے۔ بعد میں 50 طلبہ ہاسٹل چھوڑ گئے۔ بتائیے وہی ذخیرہ بقیہ طلبہ کے لیے کتنے دن نکالے گا؟

**حل:-**

$$\text{ہاسٹل میں طلبہ کی تعداد} = 300$$

$$\text{ہاسٹل چھوڑنے والے طلبہ کی تعداد} = 50$$

$$\text{بقیہ طلبہ کی تعداد} = 300 - 50$$

$$= 250$$

فرض کیا مطلوبہ دنوں کی تعداد  $x$  ہے۔

چونکہ طلبہ کی تعداد کم ہوگئی ہے اس لیے دنوں کی تعداد بڑھ جائے گی۔

طلبہ	دن
300	30
↓ 250	↑ x

$$\text{اس لیے } 300 : 250 :: x : 30$$

$$\frac{300}{250} = \frac{x}{30}$$

$$250 \times x = 300 \times 30$$

$$x = \frac{300 \times 30}{250}$$

$$x = 36$$

پس خوراک کا ذخیرہ 36 دن تک کے لیے کافی ہوگا۔

**مثال 4:-** 6 آدمی ایک کام کو 12 دن میں کرتے ہیں۔ اگر 2 آدمی مزید رکھ لیے جائیں تو وہی کام کتنے دنوں میں ہوگا؟

**حل:-**

$$\text{آدمیوں کی تعداد} = 6$$

$$\text{آدمیوں کی تعداد میں اضافہ} = 2$$

$$\text{آدمیوں کی کل تعداد} = 6 + 2$$

$$= 8$$

$$\text{دن } 12 = \text{کام جتنے دنوں میں مکمل ہوا}$$

اگر آدمیوں کی تعداد میں اضافہ کے بعد کام  $x$  دنوں میں مکمل ہو تو آدمیوں کی تعداد میں اضافہ کرنے سے کام کم دنوں میں

مکمل ہو جائے گا۔

$$\begin{array}{ccc} & \text{آدی} & \text{دن} \\ & \downarrow & \uparrow \\ & 8 & 12 \\ & 6 & x \end{array}$$

$$8 : 6 :: 12 : x$$

اس لیے

$$\frac{8}{6} = \frac{12}{x}$$

$$8x = 12 \times 6$$

$$x = \frac{72}{8} \Rightarrow x = 9$$

$$\text{مطلوبہ دنوں کی تعداد} = 9$$

پس

**مثال 5:-** 900 آدمیوں کی آرمی فارمیشن کے پاس خوراک کا ذخیرہ 30 دن کا ذخیرہ ہے۔ بعد میں 150 آدمی آرمی فارمیشن کو چھوڑ دیتے ہیں۔ بتائیے وہی خوراک کا ذخیرہ بقیہ آدمیوں کے لیے کتنے دن کے لیے کافی ہوگا؟

$$900 = \text{آدمیوں کی تعداد}$$

حل :-

$$150 = \text{آدمیوں کی تعداد جو آرمی فارمیشن چھوڑ گئے}$$

$$\begin{aligned} \text{بقیہ آدمیوں کی تعداد} &= 900 - 150 \\ &= 750 \end{aligned}$$

فرض کیا مطلوبہ دنوں کی تعداد  $x$  ہے تو:

$$\begin{array}{ccc} & \text{آدی} & \text{دن} \\ & \downarrow & \uparrow \\ & 900 & 30 \\ & 750 & x \end{array}$$

$$900 : 750 :: x : 30$$

اس لیے

$$\frac{900}{750} = \frac{x}{30} \Rightarrow x = \frac{90 \times 30}{75}$$

$$= 6 \times 6$$

$$= 36 \text{ دن}$$

$$\text{مطلوبہ دنوں کی تعداد} = 36$$

پس

## 1.4 - مرکب تناسب Compound Proportion

دو یا دو سے زیادہ تناسبوں کے درمیان تعلق کو مرکب تناسب کہتے ہیں۔ تفصیل کے لیے ہم درج ذیل مثالوں کو دیکھتے ہیں۔

**مثال 1:-** ایک دکاندار 5 آدمیوں کی مدد سے 8 گھنٹے روزانہ کی بنیاد پر 200 اشیاء تیار کرنے کا منصوبہ بناتا ہے۔

اگر 8 آدمی 6 گھنٹے روزانہ کی بنیاد پر کام کریں تو کتنی اشیاء تیار کی جاسکتی ہیں؟

**حل:-** فرض کیجئے مطلوبہ اشیاء کی تعداد  $x$  ہے۔

آدمی	روزانہ کے اوقات کار	اشیاء
5	8	200
8	6	$x$

اگر آدمیوں کی تعداد بڑھتی ہے تو اشیاء کی تعداد بھی بڑھتی ہے۔  
(تناسب راست)

اگر کام کرنے کے اوقات میں اضافہ ہوتا ہے تب اشیاء کی تعداد بڑھتی ہے۔  
(تناسب راست)

آدمی	روزانہ کے اوقات کار	اشیاء
5	8	200
8	6	$x$

$$\frac{x}{200} = \frac{6}{8} \times \frac{8}{5}$$

$$x = \frac{6}{8} \times \frac{8}{5} \times 200$$

$$= 6 \times 40$$

$$= 240$$

پس مطلوبہ اشیاء کی تعداد 240 ہوگی۔

**مثال 2:-** اگر 4 افراد کے ایک خاندان کے لیے 40 دن کے لیے 4000 روپے کافی ہوں تو 5 افراد کے خاندان کے لیے 15000 روپے کتنے دنوں کے لیے کافی ہوں گے؟

**حل:-** فرض کیجئے مطلوبہ دنوں کی تعداد  $x$  ہے۔  
دی گئی مقداروں کو جدول میں رکھنے سے:

روپے	افراد کی تعداد	دن
4000	4	40
15,000	5	$x$

چونکہ دنوں کی تعداد مطلوب ہے لہذا ہم جدول کے آخری کالم کا پہلے دو کالموں سے موازنہ کریں گے۔

اگر روپوں کی تعداد بڑھتی ہے تب دنوں کی تعداد بھی بڑھتی ہے۔  
(تناسب راستہ)

اگر افراد کی تعداد بڑھتی ہے تو دنوں کی تعداد کم ہو جاتی ہے۔  
(تناسب معکوس)

روپے	افراد کی تعداد	دن
↑ 4000	↓ 4	↑ 40
15000	5	$x$

تیر کے نشان کو استعمال کرتے ہوئے ہمارے پاس:

$$\frac{x}{40} = \frac{4}{5} \times \frac{15000}{4000}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{5} \times \frac{15000}{4000} \times 40$$

$$\Rightarrow x = 120$$

پس 15000 روپے 120 دن کے لیے کافی ہوں گے۔

## مشق 1.5

- 1-  $x : 8 :: 50 : 20$  کے تناسب میں  $x$  کی قیمت معلوم کیجئے۔
- 2- اگر کپڑے کے 15 جوڑوں کی قیمت 6750 روپے ہو تو 4050 روپوں میں کتنے جوڑے خریدے جاسکتے ہیں؟
- 3- اگر ایک موٹر سائیکل 2 لٹر پٹرول میں 90 کلومیٹر فاصلہ طے کرے تو 225 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے لیے کتنا پٹرول درکار ہوگا؟
- 4- ایک گاڑی کو ایک خاص سفر کے لیے 45 کلومیٹر فی گھنٹہ کے حساب سے 5 گھنٹے درکار ہیں، تین گھنٹوں میں اسی سفر کو مکمل کرنے کے لیے گاڑی کی رفتار کیا ہوگی؟
- 5- 6 آدمی ایک گھر کو چار دنوں میں رنگ کر سکتے ہیں۔ اگر تین آدمیوں کو رکھا جائے تو وہ کتنے عرصہ میں گھر کو رنگ کریں گے؟
- 6- ایک فیجر 25 آدمیوں کی مدد سے چار گھنٹے روزانہ کی بنیاد پر 100 بائیسکل بنانے کا منصوبہ بناتا ہے۔ اگر تین گھنٹے روزانہ کام کیا جائے تو 40 آدمی کتنے بائیسکل بنائیں گے؟
- 7- 20 مشینوں کی مدد سے ایک فیکٹری میں 7 دنوں میں 560 بچے بنتے ہیں۔ 18 مشینوں کی مدد سے 12 دنوں میں کتنے بچے بن سکیں گے؟
- 8- ایک فیکٹری میں 20 مشینوں پر 9 دنوں میں 600 سوٹ تیار ہوتے ہیں۔ 18 مشینوں کی مدد سے 12 دنوں میں کتنے سوٹ تیار ہوں گے؟
- 9- اگر ایک ہاسٹل میں 12 آدمیوں کا 28 دن رہنے کا خرچہ 6720 روپے ہو تو 8 آدمیوں کا 14 دن رہنے کے لیے کتنا خرچ آئے گا؟
- 10- اگر ایک ہوٹل میں 14 آدمیوں کا 8 دن رہنے کے لیے 22400 روپے خرچ آتا ہو تو 7 آدمیوں کا 13 دن کے لئے کتنا خرچ آئے گا؟
- 11- 14 گائے 63 کلوگرام چارا 18 دن میں کھاتی ہیں۔ 28 دن میں 770 کلوگرام چارا کتنی گائیں کھائیں گی؟
- 12- 15 کاریگر 8 گھنٹے روزانہ کام کرتے ہوئے 3000 بوتل جوس ایک دن میں تیار کرتے ہیں۔ 18 کاریگر 6 گھنٹے روزانہ کی بنیاد پر روزانہ جوس کی کتنی بوتلیں تیار کریں گے؟



# جائزہ مستحق 1

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i)  $600 = ?$  کا  $20\%$ :

- (a) 12 (b) 120 (c) 20 (d) 200

(ii)  $70\%$  کی کسری شکل:

- (a) 7 (b)  $\frac{7}{10}$  (c)  $\frac{10}{7}$  (d) 7

(iii)  $\frac{7}{20}$  فی صد کی شکل میں:

- (a)  $35\%$  (b) 35 (c) 20 (d)  $20\%$

(iv)  $\frac{1}{3}$  فی صد کی شکل میں:

- (a)  $3\%$  (b)  $1\%$  (c)  $33\%$  (d)  $33\frac{1}{3}\%$

(v)  $0.13 = ?$  فی صد کی شکل میں:

- (a) 13 (b) 30 (c)  $13\%$  (d)  $10\%$

(vi)  $a:b = ?$  کی نسبت میں "a" کو کیا کہتے ہیں؟

- (a) انتہائی (b) اینٹی سی ڈینٹ  
(c) کانسی کوئٹ (d) درمیان

(vii)  $a:b = ?$  کی نسبت میں "b" کو کیا کہتے ہیں؟

- (a) انتہائی (b) اینٹی سی ڈینٹ  
(c) درمیان (d) کانسی کوئٹ

(viii)  $a:b :: c:d = ?$  کی تناسب میں "a" اور "d" کو کیا کہتے ہیں؟

- (a) طرفین (b) وسطین  
(c) اینٹی سی ڈینٹ (d) کانسی کوئٹ

(ix)  $a:b :: c:d$  کی تناسب میں "b" اور "c" کو کیا کہتے ہیں؟

(a) وسطین

(b) طرفین

(c) کانسی کوئٹ

(d) اینٹی سی ڈینٹ

(x) 75: 95 کی آسان شکل کیا ہے؟

(a) 15 : 17

(b) 15 : 19

(c) 19 : 15

(d) 17 : 15

-2 خالی جگہ پر کیجئے۔

(i) 1500 کا 30% = \_\_\_\_\_

(ii) 15% کی کسری شکل = \_\_\_\_\_

(iii)  $\frac{7}{25}$  فی صد کی شکل میں = \_\_\_\_\_

(iv)  $\frac{2}{3}$  فی صد کی شکل میں = \_\_\_\_\_

(v) 0.29 فی صد کی شکل میں = \_\_\_\_\_

(vi)  $a:b$  کی نسبت میں "a" = \_\_\_\_\_

(vii)  $a:b$  کی نسبت میں "b" = \_\_\_\_\_

(viii)  $a:b::c:d$  کی تناسب میں a اور d = \_\_\_\_\_

(ix)  $a:b::c:d$  کی تناسب میں طرفین کا ضرب = \_\_\_\_\_

(x)  $\frac{2}{3}:\frac{3}{5}$  کی آسان شکل = \_\_\_\_\_

3- ایک ریل گاڑی میں 800 مسافر سوار ہو سکتے ہیں۔ اگر 55% مسافر مرد اور 15% بچے ہوں تو عورتیں کتنی فی صد ہوں گی؟

4- عظیم اپنی آمدنی کا 25% کرایہ مکان پر خرچ کرتا ہے جبکہ بقیہ رقم کا 60% گھریلو اخراجات پر، اگر اس کی بچت 2100 روپے ہو تو اس کی کل آمدنی بتائیے؟

5- ایک سکول میں 220 طلبہ کے لیے کرسیاں، 110 طلبہ کے لیے میزیں، 50 کرسیاں شاف کے لیے اور 30 میزیں شاف کے لیے ہوں تو درج ذیل میں نسبت معلوم کیجئے۔

(i) طلبہ کی کرسیوں اور طلبہ کی میزوں کی تعداد کے درمیان:

(ii) طلبہ کی کرسیوں اور شاف کی کرسیوں کی تعداد کے درمیان:

(iii) طلبہ کی میزوں اور شاف کی میزوں کی تعداد کے درمیان:

6- ایک مثلث میں دو زاویے  $48^\circ$  اور  $60^\circ$  ہوں تو تیسرے زاویے کی پہلے دو زاویوں کے مجموعہ کے درمیان نسبت معلوم کیجئے۔

7- 8 لوگ ایک کام کو 24 دنوں میں کرتے ہیں اگر 4 مزید لوگ شامل ہو جائیں تو وہی کام کتنے دنوں میں مکمل ہوگا؟

8- ایک ہاسٹل میں 18 طلبہ کا 36 دن رہنے کا خرچہ 58320 روپے ہے۔ 9 طلبہ کا 12 دن ہاسٹل میں رہنے کا خرچہ معلوم کیجئے۔

## خلاصہ

✦ فی صد کا مطلب ”سو میں سے“ ہے۔

✦ دو ایک جیسی چیزوں کے درمیان موازنہ کو نسبت کہتے ہیں۔

✦  $a : b$  میں "a" کو اینٹی سی ڈینٹ کہتے ہیں۔

✦  $a : b$  میں "b" کو کانسٹی کوئٹ کہتے ہیں۔

✦ دو نسبتوں کی برابری کو تناسب کہتے ہیں۔

✦  $a : b :: c : d$  میں "a" اور "d" کو طرفین اور "c" اور "b" کو وسطین کہتے ہیں۔

✦ دو نسبتوں کے تعلق میں اگر ایک کی مقدار میں اضافہ دوسری کی مقدار میں اسی تناسب میں اضافہ کا باعث ہو تو اسے ہم تناسب راست کہتے ہیں۔

✦ دو نسبتوں کے تعلق میں اگر ایک کی مقدار میں اضافہ دوسرے کی مقدار میں کمی یا ایک کی مقدار میں کمی دوسرے کی مقدار میں اضافہ کا باعث ہو تو اسے ہم تناسب معکوس کہتے ہیں۔

✦ دو یا دو سے زیادہ تناسبوں کے درمیان تعلق کو ”مرکب تناسب“ کہتے ہیں۔

# زکوٰۃ - عشر اور وراثت (ترکہ)

## ZAKAT, USHR AND INHERITANCE

زکوٰۃ ◀

عشر ◀

وراثت (ترکہ) ◀

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

◀ نصاب تولد اور گرام کے حوالے سے زکوٰۃ کس پر واجب ہے۔

◀ زکوٰۃ کی شرح۔

◀ کسی شخص کی جائیداد کی مالیت پر زکوٰۃ کی رقم کا تعین کرنا۔

◀ عشر کی شرح کا تعین جو زمین کی ملکیت اور پیداوار پر ہو۔

◀ عشر کی رقم کا تعین جو کسی زمین کی پیداوار پر ہو۔

◀ زکوٰۃ اور عشر کے حوالے سے روزمرہ زندگی کے مسائل کو حل کرنا۔

◀ کسی ترکہ یا وراثت میں ہر قانونی وارث کے حصے کا تعین کرنا۔

◀ ہر وارث کے حصے کی رقم کا تعین کرنا۔

## 2.1 زکوٰۃ ZAKAT

زکوٰۃ اسلام کے پانچ بنیادی ارکان میں سے ایک ہے۔ زکوٰۃ وہ رقم ہے جو کہ صاحب نصاب مسلمان دی گئی شرح پر غربا اور ضرورت مندوں میں بذات خود یا اسلامی ریاست کے ذریعے سال میں ایک بار ادا کرتے ہیں۔

### 2.1.1 نصاب Nisab

ایک مسلمان جو ایک سال تک اپنی ملکیت میں 7.5 تولہ (گرام 86.1562) سونا یا 52.5 تولہ (گرام 603) چاندی یا اس کے برابر روپیہ، پیسہ رکھتا/رکھتی ہو صاحب نصاب مسلمان کہلاتا/کہلاتی ہے۔ اسے چاہیے کہ قرآن اور حدیث میں دی گئی شرح کے حساب سے زکوٰۃ ادا کرے۔ زکوٰۃ دو قسم کی دولت پر ادا کی جاتی ہے۔

(i) *exposed wealth* (ظاہری دولت) (ii) *unexposed wealth* (غیر ظاہری دولت)

ظاہری دولت میں زرعی سامان، اونٹ، بھینٹیں، بکریاں، معدنیات اور کاروباری سامان وغیرہ شامل ہیں جبکہ غیر ظاہری دولت میں سونا، چاندی، روپیہ اور اثاثہ جات شامل ہیں۔

### 2.1.2 زکوٰۃ کی شرح Rate of Zakat

زکوٰۃ صاحب نصاب مسلم ظاہری اور غیر ظاہری دولت پر ادا کرتا/کرتی ہے۔ زکوٰۃ کی شرح 2.5 فی صد یا سامان یا روپیہ کا چالیس واں  $\frac{1}{40}$  حصہ ہے۔ تاہم زیر استعمال سامان جیسا کہ مشینی آلات، خام مال، کارخانہ کی عمارت وغیرہ پر زکوٰۃ لاگو نہیں ہوتی۔

**مثال 1:-** 5,00,000 روپے کی رقم پر زکوٰۃ معلوم کیجئے۔

**حل:-** روپے 5,00,000 = رقم

زکوٰۃ کی شرح = 2.5 %

$$= 2.5 \times \frac{1}{100} = \frac{25}{10} \times \frac{1}{100}$$

$$= \frac{25}{1000}$$

$$\text{زکوٰۃ کی رقم} = 5,00,000 \times \frac{25}{1000}$$

$$= 500 \times 25$$

$$= 12,500 \text{ روپے}$$

مثال 2:- 3,00,000 روپے کی رقم، 40 گرام سونا اور 500 گرام چاندی پر زکوٰۃ کی رقم نکالنے کے لیے جبکہ سونے کی قیمت 3500 روپے فی گرام اور چاندی کی قیمت 400 روپے فی گرام ہو۔

$$(i) \dots \text{روپے } 3,00,000 = \text{رقم}$$

حل:-

$$= 40 \text{ گرام سونے کا وزن}$$

$$= 3500 \text{ روپے سونے کی قیمت فی گرام}$$

$$= 3500 \times 40 \text{ روپے } 40 \text{ گرام سونے کی قیمت}$$

$$= 1,40,000 \text{ روپے } \dots (ii)$$

$$= 500 \text{ گرام چاندی کا وزن}$$

$$= 400 \text{ روپے چاندی کی قیمت فی گرام}$$

$$= 500 \times 400 \text{ گرام چاندی کی قیمت}$$

$$= 2,00,000 \text{ روپے } \dots (iii)$$

$$= 3,00,000 \text{ روپے } + 1,40,000 \text{ روپے } + 2,00,000 \text{ روپے زکوٰۃ کے لیے کل رقم}$$

$$= 6,40,000 \text{ روپے}$$

$$= 2.5 \% \text{ زکوٰۃ کی شرح}$$

$$= 6,40,000 \times 2.5\% \text{ روپے پر زکوٰۃ}$$

$$= 6,40,000 \times \frac{25}{100} \times \frac{1}{100}$$

$$= \frac{6,40,000 \times 25}{1000}$$

$$= 640 \times 25$$

$$= 16,000 \text{ روپے}$$

## 2.2 عشر USHR

قدرتی ذرائع سے زمین سے کاشت کی گئی زرعی پیداوار پر 10 فی صد کی شرح ادائیگی کو عشر کہتے ہیں۔ تاہم مصنوعی ذرائع سے زمین سے کاشت کی گئی زرعی پیداوار پر عشر کی ادائیگی کی شرح 5 فی صد ہے۔ مصنوعی ذرائع سے مراد نہروں اور ٹیوب ویل وغیرہ سے کاشت ہے۔

**مثال 1:-** اگر قدرتی ذرائع سے گندم کی فصل کی پیداوار 40000 کلوگرام ہو تو عشر کی رقم معلوم کیجئے، جبکہ گندم کی

قیمت 950 روپے فی 40 کلوگرام ہے۔

**حل:-**

$$\begin{aligned}
 \text{گندم کا وزن} &= 40,000 \text{ کلوگرام} \\
 40 \text{ کلوگرام گندم کی قیمت} &= 950 \text{ روپے} \\
 1 \text{ کلوگرام گندم کی قیمت} &= \frac{950}{40} \text{ روپے} \\
 40,000 \text{ کلوگرام گندم کی قیمت} &= \frac{950}{40} \times 40,000 \text{ روپے} \\
 &= 9,50,000 \text{ روپے} \\
 \text{عشر کی رقم} &= 9,50,000 \times 10\% \\
 &= 9,50,000 \times \frac{10}{100} \\
 &= 95,000 \text{ روپے}
 \end{aligned}$$

**مثال 2:-** مصنوعی ذرائع کی مدد سے پیدا کی گئی 3000 کلوگرام چاول کی فصل پر عشر کی رقم نکالیے جبکہ

40 کلوگرام چاول کی قیمت 2000 روپے ہے۔

**حل:-**

$$\begin{aligned}
 \text{چاول کی فصل کا وزن} &= 3000 \text{ کلوگرام} \\
 40 \text{ کلوگرام چاول کی قیمت} &= 2000 \text{ روپے} \\
 1 \text{ کلوگرام چاول کی قیمت} &= \frac{2000}{40} \text{ روپے} \\
 &= 50 \text{ روپے} \\
 3000 \text{ کلوگرام چاول کی قیمت} &= 3000 \times 50 \\
 &= 1,50,000 \text{ روپے} \\
 \text{عشر کی رقم} &= 1,50,000 \times 5\% \\
 &= 1,50,000 \times \frac{5}{100} \\
 &= 1500 \times 5 \\
 &= 7500 \text{ روپے}
 \end{aligned}$$



## 2.3 وراثت (ترکہ) INHERITANCE

جب ایک شخص وفات پا جاتا ہے تو اس کے چھوڑے ہوئے اثاثہ کو ورثہ یا ترکہ کہتے ہیں اور اس کو اس کے قانونی وارثوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ وراثت کی تقسیم کے قوانین کو اسلام میں بڑے واضح طریقے سے بیان کیا ہے۔ وارثوں میں ورثہ تقسیم کرنے سے پہلے درج ذیل رقم کی ادائیگی کرنی ہوتی ہے۔

- 1- کفن، دفن کے اخراجات کی ادائیگی
- 2- مرحوم یا مرحومہ کے ذمہ قرض کی ادائیگی
- 3- مرحوم یا مرحومہ کی وصیت پر عمل کرنا

### 2.3.1 جائیداد میں قانونی وارثوں کے حصوں کی نسبت

#### Ratio of Shares Among Legal Inheritors of a Property

یہاں ہم مرحوم یا مرحومہ کے رشتہ داروں میں سے ہر ایک کا / کی وراثت میں حصہ کا ذکر کریں گے۔

اسلام میں کل 12 رشتے ہیں جو کہ قانونی وارث ہوتے ہیں۔ ہم ان میں سے دس کا ذکر کرتے ہیں۔

1- اگر خاوند وفات پا جائے تو بیوی (بیوہ) کا حصہ اولاد یا والد سے رشتہ میں کسی اور اولاد کی عدم موجودگی میں  $\left(\frac{1}{4}\right)$  ہوگا۔

2- اولاد یا والد سے رشتہ میں کسی اور اولاد کی موجودگی میں بیوی (بیوہ) کا حصہ  $\left(\frac{1}{8}\right)$  ہوگا۔

3- دو یا دو سے زیادہ بیویاں اس حصہ کو برابر، برابر حاصل کریں گیں۔

4- ایک بیٹے کو دو بیٹیوں کے برابر حصہ ملے گا۔ یعنی بھائی کو بہن کے حصہ کا دو گنا ملے گا۔

5- پوتے کو پوتی سے دو گنا حصہ ملے گا۔

6- اگر دو یا دو سے زیادہ بیٹیاں ہی ہیں تو انہیں وراثت کا  $\left(\frac{2}{3}\right)$  حصہ ملے گا۔

7- اگر بیٹی ایک ہی ہے یا باپ میں رشتہ سے کوئی اور ایک پوتی ہے تو مختص حصہ  $\left(\frac{1}{2}\right)$  ہے۔

8- دو یا دو سے زیادہ بیٹیاں ہوں تو پوتی/نواسی کا حصہ نہیں ہوگا۔

9- اگر ایک بیٹی ہو اور باپ سے رشتہ میں ایک پوتی/نواسی ہو تو بیٹی کا حصہ  $\left(\frac{1}{2}\right)$  اور باپ سے رشتہ میں پوتی/نواسی کا بقیہ کا  $\left(\frac{1}{6}\right)$  ہوگا جو کہ میزان کو  $\left(\frac{2}{3}\right)$  بناتا ہے۔

10- اگر بیوی وفات پا جائے تو خاوند کو ورثہ کا  $\left(\frac{1}{2}\right)$  حصہ ملے گا۔

یاد رکھیں۔

جب ایک مسلمان وفات پا جاتا ہے تو اس کے ورثہ کو شریعت کے مطابق تقسیم کرنا چار ذمہ داریوں میں سے ایک ہے۔

## 2.3.2 ہر ایک قانونی وارث کا جائیداد میں حصہ معلوم کرنا

### Calculate Amount of Share of Each Legal Inheritor of a Property

آئیے ہر ایک وارث کے حصہ کو درج ذیل مثالوں کی مدد سے معلوم کریں۔

**مثال 1:-** ایک آدمی نے 24,00,000 روپے مالیت کی جائیداد چھوڑی۔ اس میں سے اس کی بیوی، ایک بیٹی اور ایک بیٹی کا حصہ معلوم کیجئے۔

روپے 24,00,000 = جائیداد کی مالیت

بیوی کا حصہ =  $\frac{1}{8}$

بیوی کے حصے کی مالیت =  $\frac{1}{8} \times 24,00,000$   
= 3,00,000 روپے

**مثال 4:-** اگر ایک شخص نے اپنے پیچھے ایک بیوہ، ایک بیٹا اور دو بیٹیاں چھوڑی ہوں تو ان میں سے ہر ایک کے حصہ کی جائیداد میں مالیت معلوم کیجئے۔ جبکہ چھوڑی گئی جائیداد کی مالیت 48,00,000 روپے ہے۔

**حل:-** روپے 48,00,000 = جائیداد کی کل مالیت

بیوہ کا حصہ =  $\frac{1}{8}$

بیوہ کے حصے کی مالیت =  $48,00,000 \times \frac{1}{8}$

= روپے 6,00,000

باقی مالیت = 48,00,000 - 6,00,000

= روپے 42,00,000

بیٹے اور بیٹیوں کے حصوں میں نسبت = 2 : 1 : 1

نسبتی مجموعہ = 2 + 1 + 1

= 4

بیٹے کے حصے کی مالیت =  $\frac{2}{4} \times 42,00,000$

= روپے 21,00,000

= روپے 21,00,000

ہر ایک بیٹی کے حصے کی مالیت =  $\frac{1}{4} \times 42,00,000$

= روپے 10,50,000

## مشق 2.1

1- اگر سونے کی مالیت 11,10,000 روپے ہو تو اس پر زکوٰۃ معلوم کیجئے۔

2- اگر چاندی کی مالیت 3,00,000 روپے ہو تو اس پر زکوٰۃ معلوم کیجئے۔

3- 10 تولہ سونا اور 40 تولہ چاندی پر زکوٰۃ کی رقم معلوم کیجئے جبکہ سونے کی قیمت 40,000 روپے فی تولہ اور چاندی کی قیمت 5000 روپے فی تولہ ہو۔

4- سونے کی مالیت 8,00,000 روپے، نقد رقم 4,00,000 روپے اور چاندی 50 تولہ (5000 روپے فی تولہ) پر زکوٰۃ معلوم کیجئے۔

5- قدرتی ذرائع سے پیدا شدہ چاول کی فصل مالیتی 6,00,000 روپے پر عشر معلوم کیجئے۔

- 6- مصنوعی ذرائع سے پیدا شدہ گندم کی فصل مالیتی 3,50,000 روپے پر عشر معلوم کیجئے۔
- 7- اگر ایک شخص نے 7,50,000 روپے مالیت کی جائیداد چھوڑی ہو تو اس کی ایک بیوہ، 2 بیٹوں اور ایک بیٹی میں ہر ایک کی جائیداد کی مالیت معلوم کیجئے۔
- 8- اگر ایک شخص نے اپنے پیچھے ایک بیوہ اور چار بیٹیاں چھوڑیں ہوں تو اس کی 4,00,000 روپے مالیتی وراثت میں ہر ایک کے حصہ کی مالیت معلوم کیجئے۔
- 9- اگر ایک شخص نے اپنے پیچھے ایک بیوہ اور 15,00,000 روپے مالیت کی جائیداد چھوڑی ہو تو اس کی بیوہ کے حصہ کی مالیت معلوم کیجئے۔
- 10- اگر ایک شخص نے اپنے پیچھے ایک بیوہ اور دو بیٹے چھوڑے ہوں تو اس کی وراثت مالیتی 20,00,000 روپے میں سے ہر ایک کے حصہ کی مالیت معلوم کیجئے۔
- 11- اصغر نے ایک جائیداد 4,80,000 روپے کی چھوڑی۔ اس نے اپنے پیچھے ایک بیوہ، تین بیٹے اور چار بیٹیاں چھوڑیں جائیداد میں سے ہر ایک کے حصہ کی مالیت معلوم کیجئے۔
- 12- نجیب نے 4,00,000 روپے اپنے ورثہ میں چھوڑے۔ اس نے اپنے پیچھے ایک بیوہ چھوڑی جبکہ ان کے ہاں کوئی بچہ نہ تھا۔ نجیب کی بیوہ کا حصہ معلوم کیجئے۔

## جائزہ مشق 2

- 1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔
- (i) زکوٰۃ کی کٹوتی کس شرح سے ہوتی ہے؟
- (a) 2.5 %      (b) 3.5 %      (c) 4.5 %      (d) 5.5 %
- (ii) قدرتی ذرائع سے کاشت کی گئی فصل پر عشر کی کٹوتی کی شرح کیا ہے؟
- (a) 2.5 %      (b) 5 %      (c) 10 %      (d) 20 %

(iii) مصنوعی ذرائع سے کاشت کی گئی فصل پر عشر کی کٹوتی کی شرح کیا ہے؟

- (a) 5 % (b) 10 % (c) 2.5 % (d) 25 %

(iv) 1,00,000 روپے پر زکوٰۃ کی کٹوتی کیا ہے؟

- (a) 2500 روپے (b) 25000 روپے (c) 2000 روپے (d) 15000 روپے

(v) قدرتی ذرائع سے پیدا کی گئی گندم کی فصل مالیتی 1,50,000 روپے پر عشر کی کٹوتی کیا ہے؟

- (a) 10,000 روپے (b) 5000 روپے (c) 15000 روپے (d) 20000 روپے

(vi) بیوہ کا وراثتی جائیداد میں حصہ (اولاد کی موجودگی میں) کتنا ہے؟

- (a)  $\frac{1}{4}$  (b)  $\frac{1}{8}$  (c)  $\frac{1}{3}$  (d)  $\frac{1}{2}$

(vii) بیوہ کا وراثت میں اولاد یا باپ کی طرف سے کسی اور اولاد کی غیر موجودگی میں کیا حصہ ہوگا؟

- (a)  $\frac{1}{4}$  (b)  $\frac{1}{8}$  (c)  $\frac{1}{2}$  (d)  $\frac{1}{6}$

(viii) صرف ایک پوتی/نواسی یا باپ کی طرف سے کسی اور ایک پوتی/نواسی کی موجودگی میں ان کا حصہ کیا ہوگا؟

- (a)  $\frac{1}{4}$  (b)  $\frac{1}{6}$  (c)  $\frac{1}{2}$  (d)  $\frac{1}{8}$

(ix) دو یا دو سے زیادہ پوتیاں/نواسیاں یا باپ کی طرف سے کسی اور ایک پوتی/نواسی کی موجودگی میں ان کا حصہ کیا ہوگا؟

- (a)  $\frac{2}{3}$  (b)  $\frac{1}{4}$  (c)  $\frac{1}{2}$  (d)  $\frac{1}{8}$

(x) ایک بیٹی اور پوتی کی موجودگی میں باپ کی جائیداد میں سے ان کا حصہ کیا ہوگا؟

- (a)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$  (b)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  (c)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  (d)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}$

2- خالی جگہ پُر کیجئے۔

- (i) زکوٰۃ کی کٹوتی کی شرح \_\_\_\_\_
- (ii) قدرتی ذرائع سے حاصل کی گئی فصل پر عشر کی شرح \_\_\_\_\_
- (iii) مصنوعی ذرائع سے حاصل کی گئی فصل پر عشر کی شرح \_\_\_\_\_
- (iv) 2,00,000 روپے مالیت پر زکوٰۃ کی کٹوتی \_\_\_\_\_
- (v) 1,00,000 روپے پر 10% کے حساب سے عشر کی مالیت \_\_\_\_\_
- (vi) ایک وراثتی جائیداد میں بیوہ کا حصہ (اولاد کی موجودگی میں) \_\_\_\_\_
- (vii) ایک وراثتی جائیداد میں اولاد کی عدم موجودگی میں بیوہ کا حصہ \_\_\_\_\_
- (viii) اگر صرف ایک ہی بیٹی ہو تو وراثت میں حصہ \_\_\_\_\_
- (ix) وراثت میں بیٹے اور بیٹی کے حصوں میں نسبت \_\_\_\_\_
- (x) دو یا دو سے زیادہ بیٹیوں کی موجودگی میں ان کا وراثت میں حصہ \_\_\_\_\_

3- 15,00,000 روپے مالیت کے سونے پر زکوٰۃ کی کٹوتی معلوم کیجئے۔

4- اگر مصنوعی ذرائع سے حاصل کی گئی چاول کی فصل مالیت 4,90,000 روپے ہو تو عشر معلوم کیجئے۔

5- ایک شخص نے اپنے پیچھے 45,00,000 روپے مالیت کی جائیداد چھوڑی۔ اس کی ایک بیوہ اور دو بیٹوں میں سے ہر ایک کا جائیداد میں حصہ معلوم کیجئے۔

6- اکرم نے 48,00,000 روپے مالیت کی جائیداد چھوڑی۔ اس نے اپنے پیچھے ایک بیوہ، تین بیٹے اور چار بیٹیاں چھوڑیں جائیداد میں ہر ایک کے حصہ کی مالیت معلوم کیجئے۔

## خلاصہ

✦ زکوٰۃ اسلام کے پانچ بنیادی ارکان میں سے ایک ہے۔ زکوٰۃ وہ رقم ہے جو کہ صاحب نصاب مسلمان دی گئی شرح پر غربا اور ضرورت مندوں میں بذاتِ خود یا اسلامی ریاست کے ذریعے سال میں ایک بار ادا کرتے ہیں۔

✦ ایک مسلمان جو ایک سال تک اپنی ملکیت میں 7.5 تولہ (گرام 86.1562) سونا یا 52.5 تولہ (گرام 603) چاندی یا اس کے برابر روپیہ، پیسہ رکھتا/رکھتی ہو صاحب نصاب مسلمان کہلاتا ہے۔ اسے چاہیے کہ قرآن اور حدیث میں دی گئی شرح کے حساب سے زکوٰۃ ادا کرے۔ زکوٰۃ دو قسم کی دولت پر ادا کی جاتی ہے۔  
(i) ظاہری دولت (ii) غیر ظاہری دولت

✦ ظاہری دولت میں زرعی سامان، اونٹ، بھیڑیں، بکریاں، معدنیات اور کاروباری سامان وغیرہ شامل ہیں۔

✦ غیر ظاہری دولت میں سونا، چاندی، روپیہ اور اثاثہ جات شامل ہیں۔

✦ زکوٰۃ صاحب نصاب مسلمان ظاہری اور غیر ظاہری دولت پر ادا کرتا/کرتی ہے۔ زکوٰۃ کی شرح 2.5 فی صد یا سامان یا روپیہ کا چالیسواں  $\left(\frac{1}{40}\right)$  حصہ ہے۔

✦ قدرتی ذرائع سے زمین سے کاشت کی گئی زرعی پیداوار پر 10 فی صد کی شرح ادا کی گئی کو عشر کہتے ہیں۔ تاہم مصنوعی ذرائع سے زمین سے کاشت کی گئی زرعی پیداوار پر عشر کی شرح 5 فی صد ہے۔

✦ جب ایک شخص وفات پا جاتا ہے تو اس کے چھوڑے ہوئے اثاثہ کو ورثہ یا ترکہ کہتے ہیں۔

# کاروباری حساب

## BUSINESS MATHEMATICS

- ◀ نفع اور نقصان
- ◀ رعایت
- ◀ کاروباری شراکت

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

◀ قیمت خرید کیا ہے۔

◀ قیمت فروخت کیا ہے۔

◀ منافع سے متعلق درج ذیل کی شناخت (جبکہ: قیمت خرید > قیمت فروخت)

- قیمت خرید + منافع = قیمت فروخت
- قیمت خرید - قیمت فروخت = منافع
- منافع - قیمت فروخت = قیمت خرید

$$\bullet \text{ منافع \%} = \frac{\text{منافع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$$

$$\bullet \text{ منافع \%} = \frac{\text{قیمت خرید} \times \text{منافع}}{100}$$

$$\bullet \text{ قیمت خرید} = \frac{100 \times \text{قیمت فروخت}}{100 + \text{منافع \%}}$$

$$\bullet \text{ قیمت فروخت} = \text{قیمت خرید} \times \left( \frac{100 + \text{منافع \%}}{100} \right)$$

◀ نقصان سے متعلق درج ذیل تعلقات کی شناخت (جبکہ: قیمت خرید < قیمت فروخت)

$$\bullet \text{ نقصان \%} = \frac{\text{نقصان}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$$

$$\bullet \text{ نقصان} = \frac{\text{قیمت خرید} \times \text{نقصان \%}}{100}$$

$$\bullet \text{ قیمت خرید} = \frac{100 \times \text{قیمت فروخت}}{100 - \text{نقصان \%}}$$

$$\bullet \text{ قیمت فروخت} = \text{قیمت خرید} \times \left( \frac{100 - \text{نقصان \%}}{100} \right)$$

◀ نفع اور نقصان سے متعلق روزمرہ کے مسائل کو حل کیسے کرتے ہیں۔

◀ کسی چیز کی مارکنڈ پرائس اور لسٹ پرائس کی شناخت کیسے کرتے ہیں۔

◀ رعایت سے متعلق درج ذیل تعلقات شناخت کیسے کرتے ہیں۔ قیمت فروخت - درج شدہ قیمت = رعایت

$$\bullet \text{ رعایت \%} = \frac{\text{رعایت}}{\text{درج شدہ قیمت}} \times 100$$

$$\bullet \text{ درج شدہ قیمت} = \frac{100 \times \text{قیمت فروخت}}{100 \times \text{رعایت \%}}$$

$$\bullet \text{ قیمت فروخت} = \text{درج شدہ قیمت} \times \left( \frac{100 - \text{رعایت \%}}{100} \right)$$



## 3.1 نفع اور نقصان PROFIT AND LOSS

تاجراشیاء خریدتے اور فروخت کرتے ہیں۔ انہیں تجارت میں نفع یا نقصان بھی ہو سکتا ہے۔

اپنی روزمرہ زندگی میں ہم لاگت، نفع اور نقصان معلوم کرنے کے لیے حساب کا استعمال کرتے ہیں۔ مختلف اشیاء کو مختلف دوکانوں سے خریدتے اور فروخت کرتے ہوئے ہمیں ان حالات کا سامنا کرنا پڑتا ہے۔

### 3.1.1 قیمت خرید اور قیمت فروخت Cost Price and Selling Price

وہ قیمت جس پر ایک دوکاندار کوئی چیز خریدتا ہے اسے چیز کی قیمت خرید کہتے ہیں۔

وہ قیمت جس پر ایک دوکاندار کوئی چیز گاہک کو فروخت کرتا ہے اسے چیز کی قیمت فروخت کہلاتی ہے۔

### 3.1.2 نفع Profit

اگر کسی چیز کی قیمت فروخت اس کی قیمت خرید سے زیادہ ہو تو نفع حاصل ہوتا ہے۔ نفع فی صد، قیمت فروخت اور قیمت خرید کے درمیان درج ذیل تعلقات ہیں۔

$$\text{قیمت خرید} - \text{قیمت فروخت} = \text{نفع}$$

$$\text{قیمت خرید} + \text{نفع} = \text{قیمت فروخت}$$

$$\% \text{ نفع} = \left( \frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100 \right) \Rightarrow \text{نفع} = \frac{\text{قیمت خرید} \times \% \text{ نفع}}{100}$$

$$\text{قیمت فروخت} = \text{قیمت خرید} + \text{نفع} \quad \text{چونکہ}$$

$$\text{قیمت فروخت} = \frac{\text{قیمت خرید} \times \% \text{ نفع}}{100} + \text{قیمت خرید} \quad \text{اس لئے}$$

$$\text{قیمت فروخت} = \left( \frac{\% \text{ نفع} + 100}{100} \right) \times \text{قیمت خرید} \quad \text{یا}$$

$$\text{قیمت خرید} = \left( \frac{100}{100 + \% \text{ نفع}} \right) \times \text{قیمت فروخت} \quad \text{اور}$$

**مثال 1:-** ایک بائیسکل 3450 روپے میں خریدا گیا اور 3850 روپے میں فروخت کیا گیا۔ نفع فی صد معلوم کیجئے۔

**حل:-**

$$\text{روپے } 3450 = \text{بائیسکل کی قیمت خرید}$$

$$\text{روپے } 3850 = \text{بائیسکل کی قیمت فروخت}$$

$$\text{اس لیے قیمت خرید} - \text{قیمت فروخت} = \text{نفع}$$

$$= 3850 - 3450$$

$$= 400 \text{ روپے}$$

$$\% \text{ نفع} = \left( \frac{100 \times \text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \right) \%$$

$$= \left( \frac{400 \times 100}{3450} \right) \%$$

$$= 11.59\% \approx 11.6\%$$

**مثال 2:-** ایک تاجر ایک کرسی کو 2700 روپے میں فروخت کر کے 20% نفع کماتا ہے۔ کرسی کی قیمت خرید معلوم کیجئے۔

**حل:-**

$$\text{روپے } 100 = \text{فرض کیا کرسی کی قیمت خرید}$$

$$\text{نفع} = 20\% \text{ (روپے } 20)$$

$$\text{چونکہ نفع} + \text{قیمت خرید} = \text{قیمت فروخت}$$

$$\text{اس لیے قیمت فروخت} = 100 + 20 = 120$$

$$\text{روپے } 100 = \text{اگر قیمت فروخت } 120 \text{ روپے ہو تو قیمت خرید}$$

$$\text{روپے } \frac{100}{120} = \text{اگر قیمت فروخت ایک روپیہ ہو تو قیمت خرید}$$

$$= \frac{5}{6} \text{ روپے}$$

$$\text{روپے } \left( 2700 \times \frac{5}{6} \right) = \text{اگر قیمت فروخت } 2700 \text{ روپے ہو تو قیمت خرید}$$

$$= \frac{13500}{6} \text{ روپے}$$

$$\text{روپے } 2250 = \text{پس قیمت خرید}$$

متبادل طریقہ:

ہمارے پاس قیمت خرید معلوم کرنے کے لیے یہ کلیہ ہے۔

$$\text{قیمت خرید} = \left( \frac{100}{100 + \% \text{ نفع}} \right) \times \text{قیمت فروخت}$$

$$= \left( \frac{100}{100 + 20} \right) \times 2700 \text{ روپے}$$

$$= \frac{100 \times 2700}{120} \text{ روپے}$$

$$= \frac{13500}{6} \text{ روپے}$$

$$\text{پس قیمت خرید} = 2250 \text{ روپے}$$

**مثال 3:-** اگر ایک ٹیلی ویژن 6590 روپے میں خرید کر 6850 روپے میں فروخت کیا ہو تو نفع فی صد معلوم کیجئے۔

**حل:-**

$$\text{قیمت خرید} = 6590 \text{ روپے}$$

$$\text{قیمت فروخت} = 6850 \text{ روپے}$$

$$\text{نفع} = 6850 - 6590$$

$$\text{نفع} = 260 \text{ روپے}$$

$$\% \text{ نفع} = \left( \frac{\text{نفع} \times 100}{\text{قیمت خرید}} \right) \%$$

$$= \left( \frac{260 \times 100}{6590} \right) \%$$

$$= 3.94\% \approx 4\%$$

**مثال 4:-** اگر 10 اشیاء کی قیمت فروخت 11 اشیاء کی قیمت خرید کے برابر ہو تو نفع فی صد معلوم کیجئے۔

**حل:-** فرض کیا      روپیہ 1 = ایک شے کی قیمت فروخت

تب      روپے 10 = 10 اشیاء کی قیمت فروخت

چونکہ      11 اشیاء کی قیمت خرید = 10 اشیاء کی قیمت فروخت

اس لیے      10 روپے = 11 اشیاء کی قیمت خرید

روپے 11 = 11 اشیاء کی قیمت فروخت

اس لیے      روپیہ 1 = 11 - 10 = نفع

$$\% \text{ نفع} = \left( \frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100 \right) \%$$

$$\% \text{ نفع} = \left( \frac{1}{10} \times 100 \right) \%$$

$$= 10 \%$$

**مثال 5:-** ایک خوانچہ فروش 100 مالٹے بیچے تو 20 مالٹوں کی قیمت فروخت حاصل کرتا ہے۔ نفع فی صد معلوم کیجئے۔

**حل:-** فرض کیا      روپیہ 1 = ایک مالٹے کی قیمت خرید

اب      نفع + 100 مالٹوں کی قیمت خرید = 100 مالٹوں کی قیمت فروخت  
= 100 مالٹوں کی قیمت خرید + 20 مالٹوں کی قیمت فروخت

اس لیے      100 مالٹوں کی قیمت خرید = 80 مالٹوں کی قیمت فروخت  
روپے 100 =

روپے 80 = 80 مالٹوں کی قیمت خرید

اس لیے      روپے 20 = 100 - 80 = نفع

$$\% \text{ نفع} = \left( \frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100 \right) \% = \left( \frac{20}{80} \times 100 \right) \%$$

$$= \left( \frac{1}{4} \times 100 \right) \%$$

$$= 25 \%$$

**مثال 6:-** ایک کتاب 30 فی صد منافع پر 650 روپے میں بیچ دی گئی۔ کتاب کی قیمت خرید معلوم کیجئے۔

**حل:-** اگر نفع 30% ہو تو قیمت خرید ہوگی۔

$$\text{قیمت خرید} = \frac{100 \times \text{قیمت فروخت}}{100 + \% \text{ نفع}}$$

$$= \frac{100 \times 650}{100 + 30}$$

$$= \frac{65000}{130} \text{ روپے}$$

$$= 500 \text{ روپے}$$

$$\text{روپے } 500 = \text{پس کتاب کی قیمت خرید}$$

**مثال 7:-** الیکٹرونکس کی ایک دوکان پر ایک دوکاندار قیمت خرید کا  $\frac{1}{6}$  نفع حاصل کرتے ہوئے ایک روم ہیئر 2100 روپے میں فروخت کرتا ہے۔ اس کا نفع فی صد معلوم کیجئے۔

**حل:-** فرض کیا

$$\text{قیمت خرید} = x \text{ روپے}$$

$$\text{نفع} = \frac{x}{6} \text{ روپے}$$

$$\text{نفع} + \text{قیمت خرید} = \text{قیمت فروخت}$$

$$= \left( \frac{x}{6} + x \right) \text{ روپے}$$

$$= \left( \frac{7x}{6} \right) \text{ روپے}$$

اس لیے

$$\frac{7x}{6} = 2100$$

اس لیے

$$x = \frac{2100}{7} \times 6$$

$$= 300 \times 6$$

$$= 1800 \text{ روپے}$$

اس لیے روپے 2100 = قیمت فروخت، روپے 1800 = قیمت خرید

$$\text{روپے نفع} = (2100 - 1800) = 300$$

$$\% \text{ نفع} = \left( \frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100 \right) \%$$

$$\% \text{ نفع} = \left( \frac{300}{1800} \times 100 \right) \%$$

$$= \left( \frac{1}{6} \times 100 \right) \%$$

$$= 16.666 \%$$

$$\% \text{ نفع} = 16.67 \%$$

پس

**مثال 8:-** ایک دوکاندار 40 روپے فی گیند کے حساب سے 100 ہاکی کی گیندیں خریدتا ہے۔ وہ 20 گیندیں 5 فی صد نفع پر فروخت کر دیتا ہے۔ اب وہ کتنے فی صد نفع پر باقی گیندیں فروخت کرے کہ اسے کل گیندوں پر 20 فی صد نفع حاصل ہو۔

$$20 \text{ ہاکی کی گیندوں کی قیمت خرید} = 40 \times 20$$

$$= 800 \text{ روپے}$$

$$20 \text{ گیندوں پر نفع} = 5 \%$$

$$20 \text{ گیندوں کی قیمت فروخت} = \left( \frac{105}{100} \times 800 \right) \text{ روپے}$$

$$= 840 \text{ روپے}$$

$$100 \text{ گیندوں کی قیمت خرید} = 40 \times 100$$

$$= 4000 \text{ روپے}$$

$$\text{درکار نفع} = 20 \%$$

$$\text{مطلوبہ قیمت فروخت} = \left( \frac{120}{100} \times 4000 \right) \text{ روپے}$$

$$= 4800 \text{ روپے}$$

اب

$$80 \text{ گیندوں کی مطلوبہ قیمت فروخت} = 4800 - 840$$

$$= 3960 \text{ روپے}$$

$$80 \text{ گیندوں کی قیمت خرید} = (40 \times 80)$$

$$= 3200 \text{ روپے}$$

$$80 \text{ گیندوں پر مطلوبہ نفع} = (3960 - 3200)$$

$$= 760 \text{ روپے}$$

$$\text{مطلوبہ نفع فی صد} = \left( \frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100 \right) \% = \left( \frac{760}{3200} \times 100 \right) \%$$

$$= \left( \frac{760}{32} \right) \%$$

$$= \left( \frac{190}{8} \right) \%$$

$$= 23.75 \%$$

### 3.1.3 نقصان Loss

اگر کسی چیز کی قیمت فروخت اُس کی قیمت خرید سے کم ہو تو ہمیشہ نقصان ہوگا۔ نقصان، قیمت فروخت، قیمت خرید اور نقصان فی صد میں درج ذیل حسابی تعلق ہے۔

$$\text{قیمت فروخت} - \text{قیمت خرید} = \text{نقصان}$$

$$\text{نقصان} - \text{قیمت خرید} = \text{قیمت فروخت}$$

$$\text{قیمت فروخت} + \text{نقصان} = \text{قیمت خرید}$$

$$\% \text{ نقصان} = \frac{\text{نقصان}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$$

$$\text{نقصان} = \frac{\text{قیمت خرید}}{100} \times \% \text{ نقصان}$$

$$\text{قیمت فروخت} = \text{قیمت خرید} \times \left( \frac{100 - \% \text{ نقصان}}{100} \right)$$

$$\% \text{ قیمت خرید} = \frac{100 \times \text{قیمت فروخت}}{100 - \% \text{ نقصان}}$$

**مثال 1:-** دانیال ایک روپیہ کی 6 ٹافیاں خریدتا ہے اور ایک روپیہ کی 8 ٹافیاں فروخت کرتا ہے۔ اُس کا نقصان فی صد میں معلوم کیجئے۔

**حل:-** 6 اور 8 کا ذواضعاف اقل 24 ہے۔  
فرض کیا۔ دانیال 24 ٹافیاں خریدتا ہے۔

$$\text{روپے 4} = \left( \frac{1}{6} \times 24 \right) = 24 \text{ ٹافیوں کی قیمت خرید}$$

$$\text{روپے 3} = \left( \frac{1}{8} \times 24 \right) = 24 \text{ ٹافیوں کی قیمت فروخت}$$

$$\begin{aligned} \text{نقصان} &= \text{قیمت فروخت} - \text{قیمت خرید} \\ &= (4 - 3) = 1 \text{ روپیہ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{پس } \% \text{ نقصان} &= \left( \frac{\text{نقصان} \times 100}{\text{قیمت خرید}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times 100 = 25\% \end{aligned}$$

**مثال 2:-** ایک دوکاندار 2 ریڈیو 1020 روپے فی ریڈیو کے حساب سے فروخت کرتا ہے۔ ایک ریڈیو پر وہ 20 فی صد نفع کماتا ہے اور دوسرے پر 20 فی صد نقصان اُسے دونوں ریڈیو کی فروخت پر کتنا نفع یا نقصان ہوا۔

**حل:-** پہلے ریڈیو کے سلسلہ میں:  $20\% \text{ نفع} = 1020 \text{ روپے}$  پہلے ریڈیو کی قیمت فروخت

$$\text{قیمت خرید} = \left( \frac{100}{120} \times 1020 \right)$$

$$= (10 \times 85) \text{ روپے}$$

$$= 850 \text{ روپے}$$

دوسرے ریڈیو کے سلسلہ میں:  $20\% \text{ نقصان} = 1020 \text{ روپے}$  دوسرے ریڈیو کی قیمت فروخت

$$\text{قیمت خرید} = \left( \frac{100}{80} \times 1020 \right)$$

$$= \left( \frac{5}{4} \times 1020 \right) \text{ روپے}$$

$$= (5 \times 255) \text{ روپے}$$

$$= 1275 \text{ روپے}$$



$$\begin{aligned}
 \text{دونوں ریڈیو کی کل قیمت خرید} &= 850 + 1275 \\
 &= 2125 \text{ روپے} \\
 \text{دونوں ریڈیو کی کل قیمت فروخت} &= (1020 \times 2) \\
 &= 2040 \text{ روپے} \\
 \text{دونوں ریڈیو کی فروخت میں کل نقصان} &= (2125 - 2040) \\
 &= 85 \text{ روپے}
 \end{aligned}$$

$$\% \text{ نقصان} = \left( \frac{85}{2125} \times 100 \right) \% \quad \text{پس}$$

$$= 4\%$$

$$\% \text{ نقصان} = 4\%$$

**مثال 3:-** ایک بائیسکل ڈیلر ایک بائیسکل 8 فی صد نفع پر فروخت کرتا ہے۔ اگر اُس نے اسے 75 روپے کم پر فروخت کیا ہوتا تو اُسے 2% نقصان ہوتا۔ بائیسکل کی قیمت خرید معلوم کیجئے۔

**حل:-** فرض کیا

$$\begin{aligned}
 \text{روپے } x &= \text{قیمت خرید} \\
 \text{قیمت خرید} &= \left( \frac{100 + \% \text{ نفع}}{100} \right) \times \text{قیمت فروخت}
 \end{aligned}$$

جب کہ (قیمت خرید > قیمت فروخت)

$$\text{روپے } \left( \frac{27}{25} x \right) = \left( \frac{108}{100} \times x \right) = \text{اس لیے } 8\% \text{ نفع پر قیمت فروخت}$$

جب کہ قیمت خرید < قیمت فروخت،  $\left( \frac{100 - \% \text{ نقصان}}{100} \right) \times \text{قیمت خرید} = \text{قیمت فروخت}$

$$\text{روپے } \left( \frac{98}{100} \times x \right) = \frac{49}{50} x = 2 \text{ فی صد نقصان پر قیمت فروخت}$$

$$\text{دونوں قیمت فروخت کے درمیان فرق} = \left( \frac{27}{25} x - \frac{49}{50} x \right)$$

$$= \left( \frac{54x - 49x}{50} \right) \text{ روپے}$$

$$= \frac{5x}{50} = \frac{x}{10} \text{ روپے}$$

$$\frac{x}{10} = 75 \quad \text{پس شرط سوال کے مطابق}$$

$$x = 75 \times 10$$

$$x = 750 \text{ روپے}$$

$$\text{پس بائیسکل کی قیمت خرید} = 750 \text{ روپے}$$

**مثال 4:-** ایک لڑکے نے ایک کتاب 575 روپے میں خریدی اور 320 روپے میں فروخت کی۔  
اس کا نقصان فی صد میں کیا ہے؟

**حل:-**

$$\begin{aligned}
 \text{روپے 575} &= \text{کتاب کی قیمت خرید} \\
 \text{روپے 320} &= \text{کتاب کی قیمت فروخت} \\
 \text{قیمت فروخت} - \text{قیمت خرید} &= \text{نقصان} \\
 &= (575 - 320) \text{ روپے} \\
 &= 255 \text{ روپے} \\
 \text{نقصان فی صد} &= \left( \frac{\text{نقصان} \times 100}{\text{قیمت خرید}} \right) \% \\
 &= \left( \frac{255}{575} \times 100 \right) \% \\
 &= \left( \frac{51}{115} \times 100 \right) \% \\
 &= \left( \frac{5100}{115} \right) \% = 44.34 \%
 \end{aligned}$$

### 3.1.4 روزمرہ زندگی کے مسائل Real Life Problems

اپنی روزمرہ زندگی میں جب ہم مختلف اشیاء مثلاً کتابیں، کپڑا، گھریلو سامان، سلے سلائے کپڑے، الیکٹرونکس وغیرہ خریدنے بازار جاتے ہیں تو ہمیں قیمت خرید، قیمت فروخت، نفع اور نقصان کا تجربہ ہوتا ہے۔

اس کے لیے ہم درج ذیل مثالوں کو دیکھتے ہیں۔

**مثال 1:-** ایک دوکاندار ایک پنکھا 1520 روپے میں خریدتا ہے۔ وہ اسے کس قیمت پر فروخت کرے کہ اسے

15 فی صد نفع حاصل ہو؟

**حل:-**

روپے 100 = فرض کیا قیمت خرید

تب 15 فی صد نفع کا مطلب قیمت فروخت (100 + 15 = 115) روپے ہوگی۔

جب روپے 100 = قیمت خرید، تب روپے 115 = قیمت فروخت

جب روپیہ 1 = قیمت خرید، تب روپے  $\frac{115}{100}$  = قیمت فروخت

جب روپے 1520 = قیمت خرید، تب  $\frac{115}{100} \times 1520$  = قیمت فروخت

روپے 1748 =  $23 \times 76$  روپے

**مثال 2:-** ایک دوکاندار ایک قیض کو 960 روپے میں فروخت کرے تو اس پر 20 فی صد نقصان اٹھاتا ہے۔ وہ اسے کس قیمت پر فروخت کرے کہ اسے 35 فی صد نفع حاصل ہو۔

**حل:-**

$$\text{فرض کیا} \quad \text{روپے } 100 = \text{قیمت خرید}$$

$$\text{روپے } 20 = \text{نقصان}$$

$$\text{قیمت فروخت} = (100 - 20)$$

$$= \text{روپے } 80$$

$$\text{روپے } 100 = \text{جب قیمت فروخت } 80 \text{ روپے ہو تو قیمت خرید}$$

$$\text{جب قیمت فروخت } 1 \text{ روپیہ ہو تو قیمت خرید} = \frac{100}{80}$$

$$\text{جب قیمت فروخت } 960 \text{ روپے ہو تو قیمت خرید} = \frac{100}{80} \times 960$$

$$= \text{روپے } 100 \times 12$$

$$= \text{روپے } 1200$$

$$\text{پس} \quad \text{روپے } 1200 = \text{قیض کی قیمت خرید}$$

$$= 100 = \text{دوبارہ، فرض کیا قیمت خرید}$$

$$\text{روپے } 135 = 35 \text{ فی صد منافع کا مطلب قیمت فروخت}$$

$$\text{جب روپیہ } 1 = \text{قیمت خرید، تب} \quad \text{روپے } \frac{135}{100} = \text{قیمت فروخت}$$

$$\text{جب روپے } 1200 = \text{قیمت خرید، تب} \quad \frac{135}{100} \times 1200 = \text{قیمت فروخت}$$

$$= \text{روپے } 1620$$

پس 35 فی صد نفع کے لیے قیض کو 1620 روپے میں فروخت کرنا ہوگا۔

### مشق 3.1

1- قیمت فروخت معلوم کیجئے جبکہ۔

- (i) نفع = 10 % ، روپے 950 = قیمت خرید  
(ii) نقصان = 5 % ، روپے 1540 = قیمت خرید  
(iii) نفع = 10 % ، روپے 9600 = قیمت خرید  
(iv) نقصان = 5 % ، روپے 126000 = قیمت خرید  
(v) نفع = 3 % ، روپے 480 = قیمت خرید  
(vi) نقصان = 4 % ، روپے 760 = قیمت خرید

2- حارث نے ایک کار 2,48,000 روپے میں خریدی اور 12000 روپے اس کی ڈیپنٹنگ اور پینٹنگ (رنگ) پر خرچ کیے۔ اُس نے اُسے 5 فی صد نفع پر فروخت کر دیا۔ گا ہک نے حارث کو کیا ادا کیا؟

3- قیمت خرید معلوم کیجئے جبکہ

- (i) نفع = 5 % ، روپے 672 = قیمت فروخت  
(ii) نقصان = 8 % ، روپے 851 = قیمت فروخت  
(iii) نفع =  $12\frac{1}{2}\%$  ، روپے 1755 = قیمت فروخت  
(iv) نقصان = 12% ، روپے 2640 = قیمت فروخت  
(v) نفع =  $33\frac{1}{2}\%$  ، روپے 100 = قیمت فروخت

4- ایک دوکاندار ایک ڈزریٹ کو 3852 روپے میں فروخت کر کے 7 فی صد نفع حاصل کرتا ہے۔

اگر وہ ڈزریٹ کو 4050 روپے میں فروخت کرے تو اس کا نفع فی صد میں معلوم کیجئے۔

5- 12 اشیاء کی قیمت فروخت 15 اشیاء کی قیمت خرید کے برابر ہے۔ نفع فی صد میں معلوم کیجئے۔

6- قیمت خرید کا  $\frac{1}{6}$  نفع حاصل کرنے کے لیے اگر ایک پچھلے کو 1470 روپے میں فروخت کیا جاتا ہے تو پچھلے کی قیمت خرید معلوم کیجئے۔

7- ایک آدمی نے ایک الماری  $7\frac{1}{2}$  فی صد نفع پر فروخت کی۔ اگر وہ اُسے 209 روپے میں فروخت کرتا تو اُسے 2 فی صد نقصان ہوتا۔ آدمی نے اُسے کتنے میں خریدا؟

8- تین کرسیاں 450 روپے فی کرسی کے حساب سے خریدی گئیں۔ ان میں سے ایک 10 فی صد نقصان پر فروخت کر دی گئی۔ باقی دو کرسیوں کو کس قیمت پر فروخت کیا جائے کہ کل فروخت پر نفع 20 فی صد حاصل ہو؟

## 3.2 چھوٹ DISCOUNT

خریدار کو فروخت کنندہ کی طرف سے اشیاء پر درج قیمت سے کم وصول کرنے کو قیمت میں چھوٹ (discount) کہتے ہیں۔

### 3.2.1 اشیاء پر درج قیمت اور فہرست میں درج قیمت

#### Marked Price (MP) and List Price

چٹ پر درج ہوئی قیمت یا اشیاء کے گرد لپٹے ہوئے کاغذ پر درج قیمت کو درج شدہ قیمت (Marked Price) کہتے ہیں۔ وہ قیمت جو اشیاء بنانے والے نے تاجر کو دی گئی فہرست میں درج کی ہوتی ہے وہ فہرست میں درج قیمت (List Price) کہلاتی ہے۔

$$\% \text{ چھوٹ} \times \text{چٹ پر درج قیمت یا قیمت فہرست} = \text{چھوٹ}$$

$$\text{قیمت فروخت} - \text{چٹ پر درج قیمت} = \text{چھوٹ}$$

$$\text{قیمت فروخت} - \text{قیمت فہرست} = \text{چھوٹ}$$

### 3.2.2 چھوٹ سے متعلق کلیات Relations Regarding Discount

$$\text{قیمت فروخت} - \text{چٹ پر درج قیمت} = \text{چھوٹ}$$

$$\text{چھوٹ} = \text{چٹ پر درج قیمت} - \text{قیمت فروخت}$$

$$\text{چھوٹ فی صد} = \frac{\text{چھوٹ}}{\text{چٹ پر درج قیمت}} \times 100$$

$$\text{قیمت فروخت} = \text{چٹ پر درج قیمت} \times \left( \frac{100 - \text{چھوٹ فی صد}}{100} \right)$$

$$\text{چٹ پر درج قیمت} = \frac{100 \times \text{قیمت فروخت}}{100 - \text{چھوٹ فی صد}}$$

### 3.2.3 روزمرہ زندگی کے مسائل Real Life Problems

**مثال 1:-** ایک کھلونے پر درج قیمت 750 روپے ہے اور نقد رقم کی ادائیگی پر 2 فی صد چھوٹ کی پیش کش ہے۔ کھلونے کے لیے کیا نقد رقم ادا کرنا ہوگی؟

**حل:-**  
روپے 750 = کھلونے پر درج قیمت

2 فی صد = چھوٹ

$$\text{روپے} = \left( \frac{2}{100} \times 750 \right) = \text{کھلونے پر درج قیمت} \times \% \text{ چھوٹ} = \text{چھوٹ}$$

$$= 15 \text{ روپے}$$

چھوٹ - کھلونے پر درج قیمت = قیمت فروخت

روپے 735 = (750 - 15) = قیمت فروخت

پس کھلونا خریدنے کے لیے 735 روپے ادا کرنا ہوں گے۔

**مثال 2:-** ایک چیز پر درج قیمت میں 7 فی صد چھوٹ دینے کے بعد 1000 روپے میں فروخت کر دی جاتی ہے۔ اس کی درج شدہ قیمت معلوم کیجئے۔

**حل:-** فرض کیا روپے 100 = چیز پر درج قیمت

7 فی صد = چھوٹ

$$= \frac{7}{100} \times 100$$

= 7 روپے

چھوٹ - چٹ پر درج قیمت = قیمت فروخت

روپے 93 = (100 - 7) = قیمت فروخت

روپے 100 = اگر قیمت فروخت 93 روپے ہو تو چیز پر درج قیمت

روپے  $\frac{100}{93}$  = اگر قیمت فروخت 1 روپیہ ہو تو چیز پر درج قیمت

روپے  $\left( \frac{100}{93} \times 1000 \right)$  = اگر قیمت فروخت 1000 روپے ہو تو چیز پر درج قیمت

= 1075.27 روپے

روپے 1075.27 = چیز پر درج قیمت

پس

**مثال 3:-** ٹیلی ویژن کے تاجر نے ٹیلی ویژن پر جو قیمت درج کی ہے وہ اس کی قیمت خرید سے 20 فی صد زیادہ ہے۔ وہ اس پر 10 فی صد چھوٹ دینے کے لیے تیار ہے۔ نفع فی صد معلوم کیجئے۔

**حل:-** فرض کیا      روپے 100 = قیمت خرید

$$\text{درج قیمت} = (100 + 20)$$

$$= 120 \text{ روپے}$$

$$120 \text{ روپے کا } 10 \text{ فی صد} = \frac{10}{100} \times 120$$

$$= 12 \text{ روپے چھوٹ}$$

$$\text{قیمت فروخت} = 120 - 12$$

$$= 108 \text{ روپے}$$

$$\% \text{ نفع فی صد} = (108 - 100) \% = (\text{قیمت خرید} - \text{قیمت فروخت})$$

$$= 8 \%$$

**مثال 4:-** ایک دوکاندار اشیاء پر درج قیمت پر 15 فی صد چھوٹ کی پیش کش کرتا ہے۔ اشیاء کی فروخت سے 19 فی صد نفع حاصل کرنے کے لیے اسے اشیاء پر قیمت خرید سے کتنے فی صد زیادہ قیمت درج کرنی چاہیے۔

**حل:-** فرض کیا      روپے 100 = قیمت خرید

$$100 \text{ روپے کا } 19 \text{ فی صد} = 19$$

$$\text{قیمت فروخت} = (100 + 19)$$

$$= 119 \text{ روپے}$$

$$100 - 15 = 85 = \text{جب چٹ پر درج قیمت } 100 \text{ روپے ہو تو قیمت فروخت}$$

$$100 = \text{روپے } 85 \text{ اگر قیمت فروخت } 85 \text{ روپے ہو تو چٹ پر درج قیمت}$$

$$\text{روپے } \left( \frac{100}{85} \right) = \text{اگر قیمت فروخت } 1 \text{ روپیہ ہو تو چٹ پر درج قیمت}$$

$$\text{روپے } \left( \frac{100}{85} \times 119 \right) = \text{اگر قیمت فروخت } 119 \text{ روپے ہو تو چٹ پر درج قیمت}$$

$$= 140 \text{ روپے}$$

پس دوکاندار کو اپنی اشیاء پر قیمت خرید سے 40 فی صد زیادہ قیمت درج کرنی چاہیے۔

**مثال 5:-** ایک ڈپارٹمنٹل سٹور جنوری کے مہینہ میں چیزوں پر درج قیمت پر 10 فی صد چھوٹ کی پیش کش کرتا ہے۔ ایک ڈزنیٹ کی قیمت خرید کیا ہوگی؟ اگر اس پر درج قیمت 8450 روپے ہو۔

**حل:-**  $10\% \times \text{ڈزنیٹ پر درج قیمت} = \text{ڈزنیٹ پر درج قیمت } 8450 \text{ روپے پر } 10 \text{ فی صد چھوٹ}$

$$= 8450 \times \frac{10}{100}$$

$$= 845 \text{ روپے}$$

$$\text{چھوٹ} - \text{چٹ پر درج قیمت} = \text{قیمت خرید}$$

$$= (8450 - 845) \text{ روپے}$$

$$= 7605 \text{ روپے}$$

**مثال 6:-** ایک بائیکل کا ڈیلر 10 فی صد چھوٹ کی پیش کش کے باوجود 26 فی صد نفع کماتا ہے۔ بائیکل کی اصل قیمت خرید کیا ہوگی؟ اگر اس کی چٹ پر درج قیمت 840 روپے ہو۔

**حل:-**  $840 \text{ روپے} = \text{بائیکل پر درج قیمت}$

$$\text{چھوٹ} = 10\% \times \text{بائیکل پر درج قیمت} = \left( \frac{10}{100} \times 840 \right) = 84 \text{ روپے}$$

$$\text{قیمت فروخت} = 840 - 84 = 756 \text{ روپے}$$

$$\text{نفع} = 26\%$$

$$\text{قیمت خرید} = \frac{100}{100 + \text{نفع فی صد}} \times \text{قیمت فروخت}$$

$$\text{قیمت خرید} = \left( \frac{100}{100 + 26} \times 756 \right) \text{ روپے}$$

$$= \left( \frac{100}{126} \times 756 \right) \text{ روپے}$$

$$= (100 \times 6) \text{ روپے}$$

$$= 600 \text{ روپے}$$



## مشق 3.2

1- قیمت فروخت معلوم کیجئے جبکہ:

- (i)  $6\% =$  چھوٹ، روپے 728 = درج شدہ قیمت  
(ii)  $5\% =$  چھوٹ، روپے 2760 = درج شدہ قیمت  
(iii)  $8\% =$  چھوٹ، روپے 395.75 = درج شدہ قیمت

2- درج شدہ قیمت معلوم کیجئے جبکہ:

- (i)  $8\% =$  چھوٹ، روپے 515.20 = قیمت فروخت  
(ii)  $12\% =$  چھوٹ، روپے 858 = قیمت فروخت  
(iii)  $4\% =$  چھوٹ، روپے 2400 = قیمت فروخت

3- ایک چھت والے پنکھے پر درج قیمت 720 روپے ہے۔ اس کو 684 روپے میں فروخت کر دیا جاتا ہے۔  
پنکھے کی قیمت فروخت پر کتنے فی صد چھوٹ کی اجازت دی گئی؟

4- ایک کپڑے دھونے والی مشین پر درج قیمت 3640 روپے ہے اس کو 3367 روپے میں فروخت کر دیا جاتا ہے۔  
مشین کی قیمت فروخت پر چھوٹ کتنے فی صد ہے؟

5- ایک کتاب پر درج شدہ قیمت 480 روپے ہے۔ دوکاندار اس پر 10 فی صد چھوٹ دینے کے باوجود 8 فی صد نفع حاصل کرتا ہے کتاب کی قیمت خرید معلوم کیجئے۔

6- ایک دوکاندار اشیاء پر ایسی قیمت درج کرتا ہے کہ 10 فی صد چھوٹ کے باوجود اسے 15 فی صد نفع حاصل ہوتا ہے۔  
اگر ایک چیز پر قیمت خرید 720 روپے ہو تو اس پر درج شدہ قیمت معلوم کیجئے۔

7- فہرست میں درج ایک ٹیلی ویژن کی قیمت 12600 روپے ہے۔ اس پر 5 فی صد چھوٹ کی اجازت ہے مزید نقد رقم کی ادائیگی پر دوسری مرتبہ 2 فی صد چھوٹ کی اجازت ہے۔ اسے خریدنے کے لیے کتنی نقد رقم کی ضرورت ہے؟

8- اگر ایک ہیئر پر درج قیمت 15 فی صد چھوٹ کی اجازت ہو جبکہ ابھی بھی 2 فی صد نفع ہو تو نفع فی صد کیا ہوگا؟  
اگر اسے درج شدہ قیمت پر بیچا جائے۔

### 3.3.1 کاروباری شراکت BUSINESS PARTNERSHIP

دو یا دو سے زیادہ اشخاص کے مل کر نفع کی غرض سے ایک کاروبار کو چلانے کو شراکت داری کہتے ہیں۔ شراکت داری کو دو اقسام میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ سادہ کاروباری شراکت۔ مرکب کاروباری شراکت۔ جب شراکت داروں کا سرمایہ یکساں مدت کے لیے لگایا جائے تو اس کو سادہ کاروباری شراکت کہتے ہیں۔ ان معاملات میں نفع یا نقصان کو ہر شراکت دار کی کاروبار میں لگائی گئی رقم کے لحاظ سے تقسیم کیا جاتا ہے۔

جب شراکت داروں کا سرمایہ جو کہ برابر یا برابر ہو کو مختلف مدت کے لیے لگایا جائے تو شراکت کو مرکب شراکت کہتے ہیں۔ ان معاملات میں نفع یا نقصان کو سرمایہ اور سرمایہ کی مدت پیداوار کے حاصل ضرب کے لحاظ سے تقسیم کیا جاتا ہے۔

### 3.3.2 شراکت داروں میں نفع Profit among the Partners

صحت ذیل مثالوں سے شراکت داروں میں نفع کی تقسیم کو واضح کیا جاتا ہے۔

**مثال 1:-** اسلم، انور اور اکرم نے ایک کاروبار سے 2,50,000 روپے نفع کمایا اگر کاروبار میں ان کی سرمایہ کاری میں نسبت بالترتیب 4:7:14 ہو تو ہر ایک کا نفع معلوم کیجئے۔

$$\text{دی گئی نسبتیں} = 4:7:14$$

$$\text{نسبتی مجموعہ} = 4+7+14 \\ = 25$$

$$\text{روپے کمایا گیا نفع} = 2,50,000$$

$$\text{روپے اسلم نے جتنا نفع کمایا} = \frac{4}{25} \times 2,50,000 = 40,000$$

$$\text{روپے انور نے جتنا نفع کمایا} = \frac{7}{25} \times 2,50,000 = 70,000$$

$$\text{روپے اکرم نے جتنا نفع کمایا} = \frac{14}{25} \times 2,50,000 = 1,40,000$$

**مثال 2:-** تین شراکت داروں کی ایک کاروبار میں نسبت 2:3:5 ہے۔ اگر انہیں کاروبار میں 10,00,000 روپے کا

نقصان ہوا ہو تو ہر ایک کا نقصان میں حصہ بتلائیے۔

$$\text{دی گئی نسبتیں} = 2:3:5$$

$$\text{نسبتی مجموعہ} = 2+3+5 \\ = 10$$

$$\text{کل نقصان} = 10,00,000 \text{ روپے}$$

$$\text{پہلے حصہ دار کا نقصان} = \frac{2}{10} \times 10,00,000 = 200,000 \text{ روپے}$$

$$\text{دوسرے حصہ دار کا نقصان} = \frac{3}{10} \times 10,00,000 = 300,000 \text{ روپے}$$

$$\text{تیسرے حصہ دار کا نقصان} = \frac{5}{10} \times 10,00,000 = 500,000 \text{ روپے}$$

**مثال 3:-** 3720 روپے تین حصے داروں میں اس طرح تقسیم کیجئے کہ پہلے حصے کا دو گنا، دوسرے حصے کا تین گنا اور تیسرے حصے کا پانچ گنا آپس میں برابر ہوں۔

**حل:-** فرض کیا پہلا، دوسرا اور تیسرا حصہ بالترتیب  $x, y$  اور  $z$  ہیں۔ تو سوال میں دی گئی شرط کے مطابق:

$$2x = 3y = 5z$$

$$\frac{2x}{30} = \frac{3y}{30} = \frac{5z}{30} \text{ سے } 2, 3, 5 \text{ کے ذواضعاف اقل سے تقسیم کرنے سے}$$

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6}$$

$$x : y : z = 15 : 10 : 6 \quad \text{اس لیے}$$

$$\begin{aligned} \text{نسبتی مجموعہ} &= 15 + 10 + 6 \\ &= 31 \end{aligned}$$

$$\text{پہلا حصہ} = 3720 \times \frac{15}{31} \text{ روپے}$$

$$= 120 \times 15 \text{ روپے}$$

$$= 1800 \text{ روپے}$$

$$\text{دوسرا حصہ} = 3720 \times \frac{10}{31} \text{ روپے}$$

$$= 120 \times 10 \text{ روپے}$$

$$= 1200 \text{ روپے}$$

$$\begin{aligned}
\text{تیسرا حصہ} &= 3720 \times \frac{6}{31} \text{ روپے} \\
&= 120 \times 6 \text{ روپے} \\
&= 720 \text{ روپے} \\
\text{چیک (پڑتال)} &= 3720 = 720 \text{ روپے} + 1200 \text{ روپے} + 1800 \text{ روپے}
\end{aligned}$$

**مثال 4:-** جمیلہ اور عالیہ ایک شراکت داری میں شامل ہوتی ہیں اور ان کے حصوں کی نسبت  $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$  ہے۔ چار ماہ بعد جمیلہ اپنا آدھا سرمایہ واپس لے لیتی ہے اور مزید 8 ماہ بعد 500 روپے نفع تقسیم کیا جاتا ہے۔ نفع میں جمیلہ کا حصہ کیا ہوگا؟

$$\text{نفع میں نسبت} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2$$

حل:-

انہیں اپنا سرمایہ اسی نسبت میں رکھنا ہوگا۔ اگر جمیلہ 300 روپے لگاتی ہے تو عالیہ 200 روپے لگائے گی۔ چار ماہ بعد جمیلہ اپنا آدھا سرمایہ واپس لے لیتی ہے۔

$$\text{روپے } 500 = 8 \text{ ماہ بعد حاصل کیا گیا نفع}$$

$$\begin{aligned}
\text{روپے } 300 \times 4 &= \text{چار ماہ کے لیے جمیلہ کی لگائی گئی رقم} \\
&= 1200 \text{ روپے}
\end{aligned}$$

$$\text{اگلے آٹھ ماہ کے لیے جمیلہ کی لگائی گئی رقم} = \frac{1}{2} \times (300) \times 8$$

$$= 150 \times 8 \text{ روپے}$$

$$= 1200 \text{ روپے}$$

$$\text{روپے } 1200 + 1200 = \text{جمیلہ کی ایک ماہ کے لیے لگائی گئی رقم}$$

$$= 2400 \text{ روپے}$$

$$\text{عالیہ کی ایک ماہ کے لیے لگائی گئی رقم} = 200 \times 12$$

$$= 2400 \text{ روپے}$$

چونکہ ہر ایک کے لیے لگائی گئی رقم ایک جیسی ہے۔ پس

$$500 \text{ روپے میں جمیلہ کا نفع} = \frac{1}{2} \times 500$$

$$= 250 \text{ روپے}$$

**مثال 5:-** عمر اور علی نے ایک پلاٹ بالترتیب 3,00,000 روپے اور 5,00,000 روپے کی سرمایہ کاری سے خریدا۔ پلاٹ کو فروخت کرنے پر انہیں 2,20,000 روپے نفع ہوا نفع میں ہر ایک کا حصہ معلوم کیجئے۔

$$\begin{array}{l} \text{علی کی سرمایہ کاری} \\ 5,00,000 \\ \text{عمر کی سرمایہ کاری} \\ 3,00,000 \end{array} : 5 : 3$$

**حل:-**

$$\text{نفع میں نسبت} = 3 : 5$$

$$\text{نسبتی مجموعہ} = 3 + 5 = 8$$

$$\text{کل نفع} = 2,20,000 \text{ روپے}$$

$$\text{نفع میں عمر کا حصہ} = \frac{2,20,000}{8} \times 3$$

$$= 27500 \times 3$$

$$= 82,500 \text{ روپے}$$

$$\text{نفع میں علی کا حصہ} = \frac{2,20,000}{8} \times 5$$

$$= 27500 \times 5$$

$$= 1,37,500 \text{ روپے}$$

### مشق 3.3

- 1- تین اشخاص میں 2,00,000 روپے نفع کو تقسیم کیجئے اگر ان کے حصوں میں نسبت 3:2:5 ہو۔
- 2- اگر علی، دانیال اور عبداللہ 7,50,000 روپے کی سرمایہ کاری پر 15 فی صد نفع حاصل کرتے ہوں تو نفع میں ہر ایک کا حصہ معلوم کیجئے اگر ان کے حصوں میں نسبت 2:3:5 ہو۔
- 3- تین اشخاص میں 720 روپے نفع کی رقم تقسیم کیجئے اگر ان کے حصوں میں نسبت 3:4:5 ہو۔
- 4- تین اشخاص نے ایک کاروبار میں 30,00,000 روپے کی سرمایہ کاری 2:3:7 کی نسبت سے کی۔ انہوں نے 6,00,000 روپے نفع حاصل کیا۔ اگر وہ اپنا کاروبار ختم کرنے میں دلچسپی رکھتے ہوں تو ہر حصہ دار کے حصہ میں کتنی رقم آئے گی۔
- 5- ایک فرم کے تین اشخاص 67,200 روپے نفع کو اپنے میں 2:3:7 کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔ نفع میں سب سے بڑا حصہ کیا ہوگا؟
- 6- تین اشخاص C اور B، A میں ایک رقم 10:7:5 کی نسبت میں تقسیم کی جاتی ہے۔ اگر B کو C کی نسبت 14 روپے اضافی ملتے ہوں تو A کو کتنے روپے ملیں گے اور رقم مجموعی طور پر کتنی ہوگی؟

### جائزہ مشق 3

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) نفع حاصل کیا جاتا ہے اگر:

- (a) قیمت خرید = قیمت فروخت  
 (b) قیمت خرید < قیمت فروخت  
 (c) قیمت خرید > قیمت فروخت  
 (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

(ii) نقصان ہوتا ہے اگر:

- (a) قیمت خرید = قیمت فروخت  
 (b) قیمت خرید > قیمت فروخت  
 (c) قیمت خرید < قیمت فروخت  
 (d) چٹ پر درج قیمت = قیمت فروخت

(iii) نفع % معلوم کیجئے اگر قیمت خرید > قیمت فروخت ہو تو:

- (a)  $\frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}}$   
 (b)  $\frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$   
 (c)  $\frac{\text{نفع} \times \text{قیمت خرید}}{100}$   
 (d)  $\frac{\text{قیمت فروخت} \times 100}{100 + \text{نفع فی صد}}$

(iv) قیمت فروخت معلوم کیجئے اگر قیمت فروخت < قیمت خرید سے ہو تو:

- (a) قیمت خرید - نفع  
 (b)  $\left( \frac{100 + \text{نفع فی صد}}{100} \right) \times \text{قیمت خرید}$   
 (c) نقصان - قیمت خرید  
 (d)  $\frac{\text{نفع فی صد} + \text{قیمت خرید}}{100}$

(v) قیمت خرید = ?

- (a)  $\frac{100 \times \text{قیمت فروخت}}{100 + \text{نفع فی صد}}$   
 (b) قیمت فروخت - نقصان  
 (c) چھوٹ + چٹ پر درج قیمت  
 (d)  $\frac{100 \times \text{چھوٹ}}{\text{چٹ پر درج قیمت}}$

2- خالی جگہ پُر کیجئے۔

- (i) اگر ایک چیز ایک قیمت پر خریدی جائے تو اُسے \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔  
(ii) وہ قیمت جس پر ایک چیز فروخت کی جائے اُسے \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔  
(iii) جب، قیمت خرید > قیمت فروخت تو، \_\_\_\_\_ - قیمت فروخت = قیمت خرید  
(iv) جب، قیمت خرید < قیمت فروخت تو، \_\_\_\_\_ = % نقصان  
(v) قیمت فروخت  $\times 100 =$  \_\_\_\_\_ کسی چیز پر درج قیمت

?

3- ایک دوکاندار ایک کپڑے دھونے والی مشین کو 12000 روپے میں فروخت کر کے 8 فی صد نفع حاصل کرتا ہے۔

اگر وہ اُسے 10,500 روپے میں فروخت کرے تو اُس کا % نقصان معلوم کیجئے۔

4- اگر ٹیلی ویژن پر درج قیمت پر چھوٹ 10 فی صد ہو تو پھر بھی نفع 5 فی صد ہوتا ہے اگر ٹیلی ویژن کو درج قیمت پر فروخت کیا جائے تو نفع فی صد کیا ہوگا؟

5- ایک کاروبار میں 33,000 روپے نفع کو تین اشخاص میں تقسیم کیجئے جبکہ ان کے حصوں میں نسبت 3:5:3 ہو۔

6- کسی فرم کے تین اشخاص نفع کی رقم 1,44,000 روپے آپس میں 3:4:5 کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔ بتائیے:

(i) نفع میں سب سے بڑی رقم کیا ہوگی؟

(ii) نفع میں سب سے کم رقم کیا ہوگی؟

### خلاصہ

- ✦ وہ قیمت جس پر کوئی چیز خریدی جائے قیمت خرید کہلاتی ہے۔
- ✦ وہ قیمت جس پر ایک چیز فروخت کی جائے قیمت فروخت کہلاتی ہے۔
- ✦ اگر کسی چیز کی قیمت فروخت اُسکی قیمت خرید سے زیادہ ہو تو ان دونوں قیمتوں کے فرق کو نفع کہتے ہیں۔
- ✦ اگر کسی چیز کی قیمت فروخت اُسکی قیمت خرید سے کم ہو تو ان دونوں قیمتوں کے فرق کو نقصان کہتے ہیں۔
- ✦ بعض اوقات کسی چیز کی قیمت فروخت پر رعایت دی جاتی ہے اس رعایت کو چھوٹ (discount) کہتے ہیں۔
- ✦ کسی دوکان میں رکھی ہوئی ہر چیز پر درج قیمت کو Marked Price کہتے ہیں اور اسے MP سے ظاہر کرتے ہیں۔

# مالیاتی ریاضی

## FINANCIAL MATHEMATICS

- ◀ کمرشل بینکنگ
- ◀ کرنسی کا تبادلہ
- ◀ منافع / مارک اپ
- ◀ انشورنس
- ◀ لیزنگ / فنانسنگ

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طالب علم اس قابل ہو جائے گا کہ وہ یہ جان سکے:

- ◀ کمرشل بینک ڈیپازٹ اور بینک اکاؤنٹس کی اقسام
- ◀ ٹیلیوٹی ایبل انشورمنٹس جیسا کہ چیک، ڈیمانڈ ڈرافٹ اور پیے آڈر
- ◀ آن لائن بینکنگ، اے ٹی ایم کے ذریعے لین دین، ڈیبٹ اور کریڈٹ کارڈز
- ◀ ایک ملک کی دی گئی کرنسی کو کسی دوسرے ملک کی کرنسی میں تبدیل کیسے کرتے ہیں۔
- ◀ منافع / مارک اپ
- ◀ اصل زر
- ◀ منافع / مارک اپ کی شرح
- ◀ کمرشل بینکنگ اور نیشنل سیونگ سکیم سے متعلق مسائل کا حل
- ◀ بیرونی اس کی سادہ شکل میں بیان کرنا
- ◀ بیرونی اور گاڑی کے متعلق
- ◀ بیرونی اور گاڑی سے متعلق حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کرنا
- ◀ لیزنگ / موٹرویکل کی فنانسنگ
- ◀ اصل قدر اور اون پیے منٹ
- ◀ موٹرویکل انشورنس
- ◀ پروسیسنگ کے اخراجات
- ◀ ماہانہ اقساط میں واپس ادائیگی
- ◀ لیزنگ / مختلف شرائط کے تحت موٹرویکل کی فنانسنگ سے متعلق مسائل کو حل کرنا



## 4.1 کمرشل بینکنگ COMMERCIAL BANKING

بینکنگ کا کاروبار جو رقم جمع کرنے، ایڈوانس قرضہ دینے اور اپنے کاروباروں کو اس کے علاوہ بھی خدمات دینے سے متعلق ہو کمرشل بینکنگ کہلاتا ہے۔ بینک لوگوں سے ان کی فالتو بچت کو حاصل کرتا ہے اور انہیں مختلف اکاؤنٹس کی شکل میں اپنی تحویل میں رکھتا ہے۔

### 4.1.1 بینک میں جمع رقم اور اکاؤنٹس کی اقسام Bank Deposit and Types of Accounts

امانتیں اور اضافی فنڈز کو بینک کی تحویل میں رکھنے کے لیے بینک میں تین قسم کے اکاؤنٹس ہوتے ہیں۔ ان کی وضاحت درج ذیل ہے۔

1- کرنٹ اکاؤنٹ: اونچے درجے کی انتقال پذیری کی وجہ سے بہت زیادہ مقبول ہے۔

2- سیونگ اکاؤنٹ: بینکوں کے لیے فنڈز کا بہت اہم ذریعہ

3- فلکسڈ اکاؤنٹ: لمبی مدت کے لیے لین دین کے لیے فنڈز کا پرکشش ذریعہ

### کرنٹ اکاؤنٹ Current Account

کرنٹ اکاؤنٹ یا ڈیمانڈ ڈیپازٹ ایک رننگ (Running) اکاؤنٹ ہے جو اپنی انتقال پذیری کی بناء پر مسلسل جاری رہتا ہے۔ اس میں گاہک کو رقم نکالنے یا منتقل کرنے کے لیے بینک کو پہلے نوٹس دینے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ اکاؤنٹ میں مطلوبہ رقم کی موجودگی کی صورت میں چیک کو ہر حالت میں پاس کرنے کا بینک پابند ہوتا ہے۔

پاکستان میں آپ کم سے کم رقم 1000 روپے سے 10,000 روپے تک کے ساتھ کرنٹ اکاؤنٹ کھول سکتے ہیں جس میں بینک کی طرف سے کم از کم رقم بینک اکاؤنٹ کھول سکتے ہیں جس میں بینک کی طرف سے کم از کم رقم بینک اکاؤنٹ میں موجود رہنے یا نہ رہنے کی شرائط ہو سکتی ہے۔ چونکہ اس اکاؤنٹ میں رکھے گئے فنڈز کی مدت بہت کم ہوتی ہے اس لیے بینک ان پر منافع ادا نہیں کرتا۔

### سیونگ اکاؤنٹ Saving Account

سیونگ اکاؤنٹ (Saving Account) جیسا کہ اس کے نام سے ظاہر ہے بچت کی حوصلہ افزائی کرتا ہے اور کم ذرائع والے اشخاص میں بچت کو فروغ دیتا ہے۔

ہر ماہ کے فنڈز کے حساب سے بینک 6 ماہ بعد برائے نام منافع ادا کرتا ہے۔ پیسہ جمع کروانے والے کو ایک خاص حد تک بغیر کسی نوٹس کے رقم نکوانے کی اجازت ہوتی ہے۔ لیکن اس اکاؤنٹ سے بڑی رقم نکوانے کے لیے بینک کو 7 سے 15 دن پہلے نوٹس دینا ہوتا ہے۔ بچتوں کو رواج دینے کے لیے اور گاہک کو سہولت پہنچانے کے لیے بینک عام طور پر نوٹس کے دوران یہ کو ختم کر دیتا ہے۔

رقم نکوانے کی سہولت کے پیش نظر، بینک کم سے کم رقم اپنے پاس رکھتا ہے تاکہ گاہک کی ضرورت کو پورا کیا جاسکے اور باقی فنڈز بینک کسی منافع کمانے والی سکیم میں قرض ایڈوانس کی صورت میں لگا دیتا ہے۔

## نفع نقصان شراکتی سیونگ اکاؤنٹ PLS Saving Account

پاکستان میں نفع اور نقصان میں شراکت کی بنیاد پر سیونگ اکاؤنٹ کو جنوری 1982 میں متعارف کرایا گیا۔ پی ایل ایس سیونگ اکاؤنٹ کو کم رقم کے ساتھ (عام طور پر 100 روپے سے کم نہ ہو) بھی کھولا جاسکتا ہے۔ بینک کے نفع اور نقصان میں شراکت کے لیے اکاؤنٹ میں 100 روپے ہونے چاہیے۔ پی ایل ایس اکاؤنٹ سے تھوڑی سی رقم نکوانے کی اجازت ہوتی ہے۔ جبکہ ساری رقم نکوانے کے لیے اگر بینک خواہش ظاہر کرے تو نوٹس دینا پڑتا ہے۔ 6 ماہ یا سال کے آخر میں طریقہ کار کے مطابق منافع یا نقصان کی صورت میں منافع پی ایل ایس اکاؤنٹ میں جمع ہو جاتا ہے یا نقصان کی رقم اکاؤنٹ سے منہا کر لی جاتی ہے۔

## فکسڈ / خاص مدت کے لیے اکاؤنٹ Fixed / Time Deposit Account

جیسا کہ نام سے ظاہر ہے فکسڈ یا خاص مدت کے لیے جو کہ 3 ماہ سے 5 سال تک ہے کے لیے بینک میں رقم جمع کرائی جاسکتی ہے۔ کسی خاص مدت کے لیے بینک اکاؤنٹ ہولڈر کو اصل زر کے ساتھ منافع کی رقم بھی ادا کرتا ہے۔ اس رقم کو کرنٹ اکاؤنٹ کی طرح ضرورت پڑنے پر استعمال نہیں کیا جاسکتا بلکہ صرف اسی صورت میں نکلوا جاسکتا ہے جب خاص مدت کا دورانیہ پورا ہو جائے جس کے لیے رقم جمع کرائی گئی تھی۔ سیونگ اکاؤنٹ میں جمع رقم کے مقابلہ میں خاص مدت کے لیے جمع کرائی گئی رقم پر منافع کی شرح زیادہ ہوتی ہے رقم جمع کرانے کا دورانیہ جتنا زیادہ ہوگا اتنی ہی منافع کی شرح زیادہ ہوگی۔ بینک ایک خاص مدت کے لیے جمع کرائی گئی رقم پر گاہک کو ایک رسید یا خاص طور پر پرنٹ کیا گیا فارم ثبوت کے طور پر جاری کرتا ہے۔

عام طور پر ایسی رقم جمع کروانے والے کو فنڈز کو نکوانے کے لیے چیک بک جاری نہیں کی جاتی۔ مقررہ مدت گزرنے کے بعد رقم جمع کرانے والا رسید پیش کرتا ہے جس پر فوراً کارروائی کے بعد گاہک نقد رقم (منافع کے ساتھ) وصول کر لیتا ہے یا یہ رقم اپنے بینک اکاؤنٹ میں منتقل کروا لیتا ہے۔ اگر رقم جمع کروانے والے کو مقررہ مدت گزرنے سے پہلے ہی رقم کی ضرورت پڑ جاتی ہے تو بینک عام طور پر اسے قابل ادا منافع رقم کے تناسب سے جزوی طور پر ادا کرتا ہے اور کبھی کبھار مکمل ادائیگی بھی کر دیتا ہے۔

رقم جمع کروانے والا عام طور پر برائے نام مارک اپ شرح جو کہ جمع رقم کی شرح کا 1% سے 2% ہوتی ہے بینک سے فنانسنگ کی سہولت بھی حاصل کر سکتا ہے جو کہ خاص مدت کے لیے جمع کرائی گئی رقم کی ہی سیکورٹی پر ہوتی ہے۔ ڈیمانڈ ڈپازٹس کی صورت میں رقم جمع کروانے والے کی ضروریات کو پورا کرنے کے لیے بینک اپنے پاس زیادہ رقم موجود رکھتا ہے۔ لیکن خاص مدت کے لیے جمع کروائی گئی رقم کے لیے یہ شرح بہت کم ہوتی ہے۔

## فارن کرنسی اکاؤنٹس Foreign Currency Accounts

فارن کرنسی اکاؤنٹ وہ اکاؤنٹ ہے جو بینک میں غیر ملکی کرنسی جیسا کہ ڈالرز، پاؤنڈز اور یورو وغیرہ کے لین دین کے لیے کھولا جاتا ہے۔ یہ اکاؤنٹس سٹیٹ بینک کی ہدایت کے مطابق برقرار رکھے اور استعمال کیے جاتے ہیں۔ تمام بینک یا اختیار ڈیلرز پاکستان یا پاکستان سے باہر رہنے والے پاکستانی شہری جن میں دوہری قومیت رکھنے والے بھی شامل ہیں کے فارن کرنسی اکاؤنٹ کسی اجازت کے بغیر کھول سکتے ہیں۔ تمام غیر ملکی افراد، فرمز اور کمپنیز جو پاکستان میں کام کر رہے ہیں یا جن میں غیر ملکی افراد شیئر ہولڈرز بھی ہیں اپنے فارن کرنسی اکاؤنٹس کھول سکتے ہیں۔ تاہم ایئر لائنز اور شپنگ کمپنیاں جو پاکستان میں یا پاکستان کے ذریعے کام کر رہے ہیں فارن کرنسی اکاؤنٹ نہیں کھول سکتیں۔

فارن کرنسی اکاؤنٹس، کرنٹ، سیونگ اور فلکسڈ اکاؤنٹس میں بھی کھولے جاسکتے ہیں۔ منافع کی شرح فارن کرنسی اکاؤنٹس میں مقامی کرنسی اکاؤنٹس کی نسبت بہت برائے نام ہوتی ہے۔ فارن کرنسی اکاؤنٹس کو باہر سے بھیجی گئی رقم اور ٹریولر چیک جو کہ پاکستان سے باہر جاری کئے گئے ہوں کے ذریعے چلائے جاسکتے ہیں۔ اکاؤنٹ ہولڈر اپنی پسند کے مطابق کسی بھی کرنسی میں لین دین کر سکتا ہے۔ کریڈٹ کارڈ ہولڈر اپنی جمع کرائی گئی رقم کے حساب سے پاکستان یا پاکستان سے باہر رقم کے حصول کے لیے کریڈٹ کارڈ کی سہولت استعمال کر سکتا ہے۔

بینک پاکستان یا پاکستان سے باہر بینکنگ کی سہولیات جیسا کہ کریڈٹ کارڈ، بینک گارنٹی، قرضہ / کریڈٹ وغیرہ کی سہولت حاصل کرنے کے لیے اکاؤنٹ ہولڈرز کے لیے لی ان (Lein) کی نشاندہی بھی کر سکتا ہے۔ فارن کرنسی اکاؤنٹس زکوٰۃ اور ٹیکسوں سے مستثنیٰ ہیں۔

## 4.1.2 نیگوشی ایبل انسٹرومنٹس Negotiable Instruments

لفظ نیگوشی ایبل (Negotiable) کا مطلب ”غور کے لیے تبادلہ“ جبکہ لفظ انسٹرومنٹ (Instrument) کا مطلب تحریری ثبوت جس سے حق ثابت ہو ہے۔ اس لیے نیگوشی ایبل انسٹرومنٹس کا مطلب لکھے گئے کاغذات ہیں جو کہ کسی شخص کے حق کو ثابت کرتے ہیں جس پر آزادانہ وصولی بھی کی جاسکتی ہے اور حق کی تصدیق کروائی جاسکتی ہے۔

نیگوشی ایبل انسٹرومنٹ سے مراد ایک اقرار نامہ یا ہنڈی، باہم تبادلہ کا بل یا چیک جو کہ تحریر کے مطابق یا حامل ہذا کو قابل ادائیگی ہوتا ہے۔

## باہم تبادلہ کا بل Bill of Exchange

باہم تبادلہ کا بل ایک ایسا تحریری انسٹرومنٹ ہے۔ جو غیر مشروط حکم پر مشتمل ہوتا ہے جسے بنانے والا دستخط کرتا ہے اور خاص شخص کو ہدایت کر رہا ہوتا ہے کہ وہ ایک خاص رقم اس شخص کو یا اس کی مرضی کے مطابق یا حامل ہذا کو ادا کر دے۔

## باہمی تبادلہ کی پارٹیاں Parties of Bill of Exchange

ڈراور (Drawer): وہ شخص جو کہ بل کی رقم ادا کرتا ہے۔

ڈرائی (Drawee): وہ شخص جس کے لیے رقم ادا کی جاتی ہے۔

پے ای (Payee): وہ شخص جس کو ادائیگی کی جاتی ہے۔

## چیک Cheque

تبادلہ کا بل جو ایک مخصوص بینکر سے حاصل کیا جاتا ہے اور اس وقت تک قابل ادا نہیں ہوتا جب تک مطالبہ نہ کیا جائے۔

## باہمی تبادلہ کی پارٹیاں

ڈراور

ڈرائی

پے ای

## پے آرڈر Pay Order

یہ بھی ایک چیک کی طرح ہوتا ہے جسے بینک اپنے گاہک کی درخواست پر جاری کرتا ہے یا ایک مخصوص شخص کو ایک مخصوص رقم کی ادائیگی اپنے اخراجات میں کرنے لیے کہتا ہے یا مخصوص آدمی کی ہدایت پر مخصوص رقم ادا کرنے کو کہتا ہے۔ پے آرڈر عام طور پر معاملہ میں شامل پوری رقم وصول ہونے پر جاری کیے جاتے ہیں۔ جس کا مطلب ہے کہ اسے پیسوں کی کمی کی بناء پر واپس نہیں کیا جائے گا۔ اسے بینکرز کا چیک یا کیشیر کا چیک بھی کہتے ہیں۔

## بینک ڈرافٹ Bank Draft

رقم کی ادائیگی کا ایک ہدایت نامہ جس میں بینک کی ایک برانچ اپنے ہی بینک کی دوسری برانچ سے پے ای (Payee) کو ادا کرنے کے لیے یا مطالبہ پر ادا کرنے کے لیے کہتی ہے۔ چیک کی بہ نسبت بینک ڈرافٹ کی اہمیت زیادہ ہے کیونکہ یہ فنڈ کی کمی کی بناء پر کبھی بھی ادائیگی کے بغیر واپس نہیں ہوتا کیونکہ اس کی ادائ شدہ رقم کی مصدقہ تحریر ہوتی ہے۔ ڈرافٹ ان برانچوں سے لیا جاتا ہے جو شہر سے باہر ہوتی ہیں۔ بینک ڈرافٹ تیار کرنے کے لیے بینک برائے نام فیس لیتا ہے۔ جبکہ پے آرڈر بہت سے بینک بغیر فیس کے جاری کر دیتے ہیں۔

### 4.1.3 آن لائن بینکنگ Online Banking

الیکٹرونک کی بنیاد پر بینک کی وہ خدمات جو کہ اے ٹی ایمز (ATMs)، پی او ایس (POSs)، آٹومیٹڈ کلیئرنگ ہاؤس، نیٹ ورک، انٹرنیٹ یا وائر (Wire) جیسے ذریعوں سے مہیا کی جاتی ہیں آن لائن بینکنگ کہلاتی ہیں۔ دوسرے الفاظ میں آن لائن بینکنگ ایک ایسا نظام ہے جو ہر وقت الیکٹرونک مواصلات اور کمپیوٹر اینیز ڈیٹا لنکس کے ذریعے بینک اور گاہک کے درمیان لین دین بذریعہ ٹیلی فون لائن یا سٹیٹیا میٹ یا اے ٹی ایم کے ذریعے بینک کو ہدایات نشر کرتا رہتا ہے۔

گاہک آن لائن بینکنگ نظام کے تحت کسی بھی مخصوص بینک میں اکاؤنٹ برقرار رکھ سکتا ہے اور اسی بینک کی کسی بھی برانچ سے رقم نکلا بھی سکتا ہے اور جمع بھی کروا سکتا ہے۔ اگر گاہک کو ڈیبٹ یا کریڈٹ کارڈ جاری کیا گیا ہے تو گاہک اے ٹی ایم جو کہ ایم نیٹ یا ون لنک بینک سے ملی ہوئی ہے کے ذریعے رقم نکلا یا منتقل کر سکتا ہے۔ آن لائن بینکنگ نظام کے تحت پیغام بھیجنے والے سے رقم واپس کرنے والے بینک اور رقم واپس کرنے والے بینک سے رقم ادا کرنے والے بینک کو ہدایت بذریعہ الیکٹرونکس مواصلات نشر کی جاتی ہیں۔ فنڈز کا حصول اور رقم کی ادائیگی بہت تھوڑے وقت میں ہو جاتی ہے۔

### ڈیبٹ کارڈ / اے ٹی ایم کارڈ Debit Card / ATM Card

ڈیبٹ کارڈ، کارڈ ہولڈر کو اس قابل بناتا ہے کہ اس کی خریدی گئی اشیاء پر براہ راست اس کے اکاؤنٹ میں موجود رقم سے کٹوتی کر لی جائے۔ اے ٹی ایم کارڈ ادائیگی کا کارڈ ہے جو ایک شخص کو جاری کیا جاتا ہے تاکہ وہ اے ٹی ایم مشین کو چلا کر اپنے فنڈز کو منتقل یا حاصل کر سکے۔ اکاؤنٹ ہولڈر کو لین دین ممکن بنانے کے لیے ایک پن کو ڈبھی الاٹ کیا جاتا ہے۔ اب ڈیبٹ کارڈ اور اے ٹی ایم کارڈز کی تقریباً ایک جیسی خوبیاں ہیں۔

### کریڈٹ کارڈ (ویزا اور ماسٹر کارڈ) Credit Card (Visa and Master Card)

یہ کارڈ ظاہر کرتا ہے کہ اس کارڈ ہولڈر کو قرض حاصل کرنے کی ایک حد دی گئی ہے۔ اس کارڈ کے ذریعے کارڈ ہولڈر خاص حد تک خریداری کر سکتا ہے یا نقد رقم وصول کر سکتا ہے۔ قرض دی گئی رقم مقررہ مدت کے اندر ادا کرنا ہوتی ہے یا حصوں میں بھی دی جاسکتی ہے جبکہ میزان یا قرض کی رقم جزوی طور پر ادا کرنے پر بقایا رقم کو اصل قرض سمجھا جاتا ہے اور اس پر بینک منافع وصول کرتا ہے۔ بعض اوقات کریڈٹ کارڈ کی سالانہ فیس بھی وصول کی جاتی ہے۔ ویزا کارڈ ہر گاہک کو جاری کیا جاتا ہے جبکہ ماسٹر کارڈ غیر معمولی گاہکوں کو جن کی بہت زیادہ قدر ہوتی ہے کو جاری کیا جاتا ہے اس کارڈ پر عام طور پر پرکشش قرض کی حدود ہوتی ہیں۔ ویزا اور ماسٹر دو مختلف کمپنیاں ہیں جن کے ذریعے بینک کریڈٹ کارڈز جاری کرنے کا انتظام کرتا ہے۔

## اے ٹی ایم (ATM (Automated Teller Machine)

بینک اپنے اکاؤنٹ ہولڈرز کو نقد رقم کی ادائیگی کے لیے اے ٹی ایم مشین نصب کرتا ہے۔ یہ کمپیوٹرائزڈ مشین ہے جو بینک کے ڈیٹا بیس سے جڑی ہوتی ہے۔ اس مشین کے ذریعے بینک کی طرف سے جاری کیے ہوئے مقناطیسی اشاراتی نظام والے اے ٹی ایم کارڈ کو گاہک اپنا مخصوص پین کوڈ نمبر کے ساتھ استعمال کرتے ہوئے 24 گھنٹے میں جب چاہے نقد رقم نکلا سکتا ہے۔ اے ٹی ایم کو گاہک رقوم کے نکوانے، فنڈز کے منتقل کرنے، بیلنس معلوم کرنے اور اکاؤنٹ کا مختصر ریکارڈ حاصل کرنے کے لیے بھی استعمال کر سکتا ہے۔ اے ٹی ایم کو آن لائن یا آف لائن کے ذریعے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔

مزید برآں دوسری بہت ساری بینک کی خدمات بہت سے عوامل پر مشتمل اے ٹی ایم مشین کے ذریعے مہیا کی جا رہی ہیں۔

## 4.2 کرنسیوں کا تبادلہ EXCHANGE OF CURRENCIES

لفظ فارن ایکسچینج کرنسیوں کے تبادلہ کے طریقہ کار سے متعلق ہے جس کے ذریعہ متعلقہ ادائیگیاں بین الاقوامی تجارت کے مطابق کی جاتی ہیں۔ یہ اس طریقہ کار پر مشتمل ہوتا ہے جس کے ذریعے ایک ملک کی کرنسی کو دوسرے ملک کی کرنسی میں تبدیل کیا جاتا ہے۔

مختلف ممالک کرنسی کی مختلف اقسام استعمال کرتے ہیں۔ ان کی کرنسیوں کے مختلف نام ہیں۔ برطانیہ پاؤنڈ سٹرلنگ استعمال کرتا ہے۔ امریکہ، امریکن ڈالر استعمال کرتا ہے۔ تھائی لینڈ بھاٹ (Bhat) استعمال کرتا ہے۔ ملائیشیا رنجیٹ (Ringgit) استعمال کرتا ہے۔ انڈونیشیا روپیہ (Rupiah) استعمال کرتا ہے فلپائن پیسو (Peso) اور سنگاپور سنگاپوری ڈالر استعمال کرتے ہیں۔ ہم کارن کرنسی کسی بھی بینک یا منی چینجر سے خرید سکتے ہیں۔

بعض نامور بینک مختلف کرنسیوں کے تبدیل کروانے کی قیمت مقرر کرتے ہیں۔ یہ ریٹس روزانہ کی بنیاد پر تبدیل ہوتے ہیں۔ جس کا تخمینہ مختلف کرنسیوں کی طلب اور رسد پر ہوتا ہے۔

درج ذیل جدول مختلف ممالک کی کرنسیوں کے تبادلہ ریٹ کو ظاہر کرتا ہے جو کہ ایک پرائیویٹ بینک نے لگایا ہے۔

کرنسی	فروخت ٹی ٹی اور او ڈی	خرید ٹی ٹی کلین	خرید او ڈی اٹی چیک
یو ایس ڈالر	84.100 روپے	83.800 روپے	83.5796 روپے
پاؤنڈ	129.7968 روپے	129.4542 روپے	129.1092 روپے
کینیڈین ڈالر	83.9412 روپے	83.7246 روپے	83.5781 روپے
آسٹریلین ڈالر	77.7588 روپے	77.5820 روپے	77.4379 روپے
ین	0.895236 روپے	0.893009 روپے	0.891447 روپے
ڈینش کرونی	15.1066 روپے	15.0598 روپے	15.0334 روپے
سعودی ریال	22.4000 روپے	22.3449 روپے	22.3058 روپے
سوس فرانک	78.3363 روپے	78.1133 روپے	77.9766 روپے
درہم	22.8702 روپے	22.8145 روپے	22.7746 روپے
ایچ کے ڈی	10.8193 روپے	10.7934 روپے	10.7745 روپے
سنگاپورین ڈالر	61.4529 روپے	61.2484 روپے	61.1412 روپے
سویڈش کرونی	11.7391 روپے	11.6948 روپے	11.6743 روپے
باتھ	2.6063 روپے	2.5976 روپے	2.5931 روپے
یورو	112.4088 روپے	112.0993 روپے	111.8057 روپے

• ٹی ٹی سے مراد ٹیلی گرافک ٹرانسفر ہے۔

• او ڈی سے مراد او ڈی ڈرافٹ ہے۔

• ٹی سی سے مراد ٹریولر چیک ہے۔

اوپر دیئے گئے جدول کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مثالوں کو حل کیجئے۔

**مثال 1:-** کسی ایک ملک کی دی گئی کرنسی کی قیمت کو دوسرے ملک کی کرنسی میں تبدیل کیجئے۔

(i) پاکستانی 5,00,000 روپے کو یورو میں۔ (ii) 50 پاؤنڈز کو یو ایس ڈالر میں۔

(iii) 250 یو ایس ڈالر کو پاؤنڈ سٹرلنگ میں۔ (iv) 5000 سعودی ریال کو پاکستانی روپوں میں

(i) روپے = 5,00,000 رقم

یورو کا ریٹ = 112.4088 روپے

یورو کی تعداد =  $\frac{500,000}{112.4088}$

= 4,448.05

حل:-

$$(ii) \quad \begin{aligned} \text{یو کے پاؤنڈ کاریٹ (خرید)} &= 129.4542 \text{ روپے} \\ 50 \text{ پاؤنڈ کی رقم} &= 50 \times 129.4542 \\ &= 6,472.71 \text{ روپے} \end{aligned}$$

$$\text{یو ایس ڈالر زکاریٹ (فروخت)} = 84.100 \text{ روپے}$$

$$\begin{aligned} 50 \text{ پاؤنڈ کے تبادلہ میں ڈالر ز} &= \frac{6,472.6}{84.100} \\ &= 76.9644\$ \end{aligned}$$

$$(iii) \quad \text{یو ایس ڈالر زکاریٹ (خرید)} = 83.800$$

$$250 \text{ ڈالر ز} = 250 \times 83.800 \text{ روپے} = 20,950$$

$$\text{پاؤنڈ سٹرنلنگ کاریٹ (فروخت)} = 129.7968$$

$$\begin{aligned} 250 \text{ ڈالر ز کے تبادلہ میں پاؤنڈ سٹرنلنگ} &= \frac{20950}{129.7968} \\ &= 161.406 \text{ پاؤنڈ ز} \end{aligned}$$

$$(iv) \quad \text{سعودی ریال کاریٹ} = 22.3449 \text{ روپے}$$

$$\begin{aligned} \text{پاکستانی روپوں میں رقم} &= 5,000 \times 22.3449 \\ &= 1,11,724.5 \text{ روپے} \end{aligned}$$

**مثال 2:-** سعودیہ میں ایک پاکستانی ملازم 3200 ریال ماہانہ کماتا ہے۔ وہ 2500 ریال ماہانہ خرچ کرتا ہے۔ بتائیے:

$$(i) \quad \text{اس کی ماہانہ بچت کیا ہوگی اگر: روپے 22.400 = ایک ریال}$$

(ii) وہ سال بعد اپنی بچت پاکستان واپس بھیجتا ہے۔ جب وہ بچت پاکستان بھیجتا ہے اس وقت 22.6203 روپے فی ریال کے ریٹ سے تبدیلی کی بنا پر اس کی سیونگ میں اضافہ بیان کیجئے۔

$$\text{ریال 3200} = \text{ماہانہ آمدنی}$$

$$\text{ریال 2500} = \text{ماہانہ اخراجات}$$

$$\text{ریال 700} = 3200 - 2500 = \text{ماہانہ بچت}$$

روپوں میں بچت اگر:

$$\text{روپے 22.400} = \text{ایک ریال}$$

$$\text{ریال 700} = 700 \times 22.400$$

$$= 15,680 \text{ روپے}$$



ریٹ میں اضافہ سے پہلے:

$$\text{ریٹ سال کی بچت} = 700 \times 12 = 8400$$

پرانے ریٹ پر سالانہ بچت

$$= 8400 \times 22.400$$

$$= 1,88,160 \text{ روپے}$$

ریٹ میں اضافہ کی بناء پر سالانہ بچت

$$= 8400 \times 22.6203 = 1,90,010$$

$$\text{بچت میں اضافہ} = 1,90,011 - 1,88,160$$

$$= 1851 \text{ روپے}$$

## مشق 4.1

- 1- 250 یو ایس ڈالرز کو پاؤنڈ سٹرلنگ میں تبدیل کیجئے۔
- 2- 5000 سعودی ریال کو پاکستانی روپوں میں تبدیل کیجئے۔
- 3- ایک امپورٹر ایک کار کو جاپان سے 5000 ین میں امپورٹ کرتا ہے۔ ڈیلیوری تین ماہ بعد دی جانی تھی۔ معاہدہ کے وقت ایک روپیہ 0.895236 ین کے برابر تھا۔ معاہدہ کے وقت ادائیگی کر دی گئی۔ ڈیلیوری کے وقت ایک روپیہ 0.892236 ین ہو گیا۔ امپورٹر کا نفع یا نقصان معلوم کیجئے۔
- 4- ایک گا ہک 150 امریکن ڈالرز کو روپوں میں تبدیل کرنا چاہتا ہے۔ وہ ایک منظور شدہ ڈیلر کے پاس جاتا ہے۔ وہ اسے تبادلہ کی شرح: روپے  $1 \text{ dollar} = 84.100$  پیش کش کرتا ہے۔ اگر وہ کسی منی چینجر سے تبدیل کرواتا ہے تو قیمت روپے  $1 \text{ dollar} = 83.4495$  ہے۔ روپے معلوم کیجئے۔ جبکہ
  - (i) اگر منظور شدہ ڈیلر سے تبدیل کروائے جائیں
  - (ii) منی چینجر سے تبدیل کروائے جائیں
  - (iii) منی چینجر سے تبدیل کروانے سے نقصان
- 5- پاکستان میں چائے کا ریٹ 2.1 روپے فی پاؤنڈ ہے۔ ریٹ فی کلوگرام معلوم کیجئے۔ جبکہ
  - (i) ایک پاؤنڈ = 0.4536 کلوگرام
  - (ii) اگر ایک سعودی ریال 22.400 روپے کے برابر ہو تو سعودی عرب میں کیا قیمت ہوگی؟

6- ایک ایکسپورٹر انگلستان کو 4000 پاؤنڈ سٹرلنگ کے کارڈس ایکسپورٹ کرتا ہے۔ اس موقع پر تبادلہ ریٹ ایک پاؤنڈ سٹرلنگ 129.4542 روپے کے برابر تھا۔ وہ اس وقت رقم وصول کرتا ہے۔ جب تبادلہ کارڈس ایک پاؤنڈ سٹرلنگ 129.0599 روپے کے برابر تھا۔ اس کو کتنا نقصان ہوا؟

7- سعودی عرب میں ایک پاکستانی رہائشی 4370 ریال ماہانہ کماتا ہے اس کے ماہانہ اخراجات 3450 ریال ہیں۔ وہ اپنی بچت ہر ماہ پاکستان واپس بھیجتا ہے۔ وہ ایک سال میں کتنی بچت کرتا ہے؟  
اگر تبادلہ کارڈس: روپے 1 = 22.400 سعودی ریال  
سال بعد تبادلہ کارڈس: روپے 1 = 22.3004 سعودی ریال  
ماہانہ رقم واپس بھجوانے پر نقصان بتائیے۔

8- رضوان سعودی عرب میں ایک کار 15000 ریال میں خریدتا ہے۔ ڈیوری 3 ماہ بعد ہونا تھی جبکہ ادائیگی بھی ڈیوری کے موقع پر کی جانی تھی۔ معاہدہ کے بعد تبادلہ کارڈس  
روپے 22.400 = ایک سعودی ریال  
جبکہ ڈیوری کے وقت تبادلہ کارڈس: روپے 22.0827 = ایک سعودی ریال  
ریٹ میں تبدیلی کی بناء پر نقصان معلوم کیجئے۔

9- علی کا ایک دوست سعودی عرب سے علی کو 450 ریال بھیجتا ہے۔ بینک تبادلہ کے دور میں کی پیشکش کرتا ہے۔  
(ٹی ٹی کے ذریعہ خرید) روپے 22.3449 = 1 سعودی ریال  
(ٹی سی کے ذریعہ خرید) روپے 22.2146 = 1 سعودی ریال  
کونسا ریٹ قابل عمل ہوگا؟ مزید یہ کہ رقم پاکستانی روپوں میں معلوم کیجئے۔

### 4.3 منافع / مارک اپ PROFIT/MARKUP

پاکستان میں اسلامی بینکنگ کے شروع ہونے سے نفع اور نقصان کی شراکت داری اور فنانسنگ کے اسلامی طریقوں کے تحت ”سود“ کا لفظ ”منافع“ یا ”مارک اپ“ سے تبدیل کر دیا گیا ہے۔

جب ہم بینک میں اپنی بچتوں کو جمع کراتے ہیں۔ تو بینک سے اپنی رقم استعمال کرنے کے عوض ہم کچھ اضافی رقم وصول کرتے ہیں۔ یہ اضافی رقم جو بینک ہماری رقم کے استعمال کے تبادلہ میں ہمیں دیتا ہے جمع کرائی گئی رقم پر منافع کہلاتا ہے۔ اس طرح دیا گیا منافع بینک کے لیے اخراجات میں شمار ہوتا ہے اور گاہک کے لیے نفع شمار ہوتا ہے۔

اسی طرح جب ہم بینک سے قرض حاصل کرتے ہیں تو ہم بینک کو اس کی دی ہوئی رقم کو استعمال کرنے کے عوض کچھ اضافی رقم دیتے ہیں۔ یہ زائد رقم جو ہم بینک کو ادا کرتے ہیں۔ مارک اپ کہلاتی ہے۔ یہ بینک کے لیے آمدنی جبکہ قرضدار یا گاہک کے لیے اخراجات ہوتی ہے۔

جمع شدہ رقم پر منافع یا قرض پر مارک اپ کو شرح فی صد کے حساب سے لیا جاتا ہے۔ اسے ریٹ کہتے ہیں۔ وہ رقم جو جمع کروائی لگائی جاتی ہے یا قرض لی جاتی ہے اصل زر کہلاتی ہے۔ منافع یا مارک اپ عام طور پر فلکسڈ سالانہ ریٹ پر لیا جاتا ہے۔ جس کو سالانہ ریٹ کہتے ہیں۔ بعض اوقات منافع کے ریٹ کو ششماہی، سہ ماہی، ماہانہ یا روزانہ کی بنیاد پر بھی نکالا جاتا ہے۔ منافع یا مارک اپ کی رقم جمع کروائی گئی یا ادھار لی گئی رقم کی مدت پر منحصر ہوتی ہے۔ اگر منافع یا قرض کو اصل زر پر نکالا جائے تو اسے سادہ منافع یا مارک اپ کہتے ہیں۔ جب پچھلے سال کے اصل زر میں نفع جمع کرنے کے بعد اگلے سال کا اصل زر سمجھا جائے اور اگلے سال کا نفع اس نئے اصل زر کے حساب سے حل کیا جائے تو اسے مرکب منافع کہتے ہیں۔ جس کا مطلب اصل زر کے ساتھ منافع پر منافع۔

ضروری اصطلاحات درج ذیل ہیں۔

- (i) رقم / سرمایہ جو قرض لیا گیا ہو یا دیا گیا ہو اصل زر کہلاتا ہے۔
- (ii) حاصل کیے گئے فی صد منافع کو شرح (Rate) کہتے ہیں۔
- (iii) قرض یا جمع کرائی گئی رقم کے دورانیہ کو مدت کہتے ہیں۔
- (iv) جب اصل زر میں منافع کو جمع کیا جاتا ہے تو کل رقم کو ماؤنٹ (Amount) کہتے ہیں۔

### 4.3.1 منافع معلوم کرنا Calculate Profit

گاہک جو رقم بینک میں برقرار رکھتا ہے۔ اس پر بینک جو اضافی رقم دیتا ہے اسے منافع کہتے ہیں۔ فی صد شرح منافع جمع کرائی گئی رقم کی مدت پر منحصر ہوتی ہے۔ منافع کی ادائیگی کا طریقہ کار ماہانہ، سہ ماہی، ششماہی یا سالانہ بھی ہو سکتا ہے۔ اصل زر پر شرح منافع کا دورانیہ عام طور پر ایک سال ہوتا ہے منافع کی شرح کا بینک ششماہی یا سالانہ کی بنیاد پر اعلان کرتا ہے۔ روایتی بینکنگ کے تحت جمع رقم پر سود کاریٹ پہلے سے طے شدہ بنیاد پر ہوتا ہے۔ اسلاک بینکنگ میں پہلے سے طے شدہ منافع کا کوئی تصور نہیں ہوتا۔ اس کی بجائے رقم جمع کرانے والا بینک کے نفع اور نقصان میں شراکت کرتا ہے۔ جمع رقم پر منافع بینک کا خرچہ ہوتا ہے اور اسے بینک کے اخراجات میں شامل کیا جاتا ہے۔

درج ذیل کلیہ کو جمع رقم یا بینک میں لگائی گئی رقم، مالی اداروں یا نیشنل سیونگ سنٹرز میں لگائی رقم پر نفع نکالنے کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{منافع (سادہ)} = \frac{\text{شرح} \times \text{مدت} \times \text{اصل زر}}{100}$$

درج بالا کلیہ سے سالانہ کی بنیاد پر منافع معلوم کیا جاتا ہے۔ روزانہ، ماہانہ، سہ ماہی، ششماہی کی بنیاد پر منافع معلوم کرنے کے لیے مدت کے دورانیہ کو ضرورت کے مطابق عدد سے تقسیم کر کے سالوں میں تبدیل کرتے ہیں۔ اگر بقیہ معلومات دی گئی ہوں تو درج بالا مساوات کو دوبارہ ترتیب دیتے ہوئے غیر موجود حصے کو معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\text{اصل زر} = \frac{100 \times \text{منافع کی رقم}}{\text{مدت} \times \text{شرح}}$$

(جبکہ نفع، مدت اور شرح دی گئی ہوں)

$$\text{اصل زر} = \frac{100 \times \text{کل رقم}}{100 + (\text{مدت} \times \text{شرح})}$$

(جبکہ رقم، مدت اور شرح دی گئی ہوں)

$$\text{شرح} = \frac{100 \times \text{منافع کی رقم}}{\text{اصل زر} \times \text{مدت}}$$

$$\text{مدت} = \frac{100 \times \text{منافع کی رقم}}{\text{اصل زر} \times \text{شرح}}$$

(جبکہ منافع، شرح اور اصل زر دی گئی ہوں)

کمپاؤنڈ منافع (منافع پر منافع) درج ذیل کلیہ سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{مدت} = \left( \frac{1 + \text{شرح}}{100} \right) \times \text{اصل زر} = \text{حتمی رقم}$$

$$\text{اصل رقم} - \text{حتمی رقم} = \text{منافع کمپاؤنڈ}$$

**مثال 1:-** اگر ہم 10% سالانہ کی شرح سے ایک سیونگ اکاؤنٹ میں 1000 روپے لگاتے ہیں تو ایک سال میں ہمیں کتنے پیسے ملیں گے؟

$$\text{روپے 100} = \frac{10}{100} \times 1000 = \text{منافع} \quad \text{حل:-}$$

$$\text{روپے 1100} = \text{روپے 100} + \text{روپے 1000} = \text{ایک سال بعد جو رقم ملے گی۔}$$

ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک سال کے 10 فی صد سالانہ شرح سے 1000 روپے لگانے سے 1100 روپے اگلے سال کے لیے (مستقبل میں) قیمت ہے۔

**مثال 2:-** علی نے 5% کی سالانہ شرح سے 2 سال کے لیے نیشنل بینک آف پاکستان میں اپنے سیونگ اکاؤنٹ میں 200 روپے جمع کرائے۔ 2 سال جمع کرانی گئی رقم پر منافع کی کیا رقم ہوگی؟

$$\text{روپے 2000} = \text{اصل زر} \quad \text{حل:-}$$

$$\text{شرح فی صد} = 5\%$$

$$\text{سال 2} = \text{مدت}$$

$$\text{ایک سال کا نفع} = \frac{\text{شرح فی صد} \times \text{اصل زر}}{100}$$

$$= \frac{2000 \times 5}{100} \text{ روپے} = 100 \text{ روپے}$$

$$\text{روپے 2100} = \text{روپے 100} + \text{روپے 2000} = \text{اصل زر (اگلے سال کے لیے)}$$

$$\text{دوسرے سال کا منافع} = \frac{2100 \times 5}{100} \text{ روپے} = 105 \text{ روپے}$$

$$205 = \text{روپے 105} + \text{روپے 100} = \text{2 سالوں کا منافع}$$

**مثال 3:-** اگر 640 روپے پر 12 سال کے لیے سادہ منافع 384 روپے ہو تو منافع کی شرح فی صد معلوم کیجئے۔

$$\text{روپے اصل زر} = 640$$

**حل:-**

$$\text{سادہ منافع} = 384 \text{ روپے}$$

$$\text{سال مدت} = 12$$

$$\text{شرح} = \frac{100 \times \text{منافع کی رقم}}{\text{مدت} \times \text{اصل زر}}$$

$$= \frac{384 \times 100}{640 \times 12} = 5\%$$

**مثال 4:-** اگر سرمایہ  $3\frac{2}{3}\%$  سالانہ سادہ شرح منافع سے لگایا جائے تو کتنے عرصہ میں 9400 روپے 10,951 روپے ہو جائیں گے۔

$$\text{اصل زر} = 9400 \text{ روپے}$$

$$\text{رقم (اماؤنٹ)} = 10,951 \text{ روپے}$$

$$\text{سادہ منافع} = 10951 \text{ روپے} - 9400 \text{ روپے} = 1551$$

$$\text{شرح} = 3\frac{2}{3}\% = \frac{11}{3}\%$$

$$\text{مدت} = \frac{100 \times \text{منافع کی رقم}}{\text{اصل زر} \times \text{شرح}}$$

$$= \frac{1551 \times 100 \times 3}{9400 \times 11} = \frac{9}{2} \text{ سال} = 4\frac{1}{2} \text{ سال}$$

**مثال 5:-** 3 سال کے لیے 5% سالانہ شرح پر 4000 روپے پر کمپاؤنڈ منافع معلوم کیجئے۔

$$\text{اصل زر} = 4000 \text{ روپے}$$

$$\text{شرح} = 5\%$$

$$\text{مدت} = 3 \text{ سال}$$

$$\text{حتمی رقم} = (4000) \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3$$

$$= 4000 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} = \frac{9261}{2} = 4630.50 \text{ روپے}$$

$$\text{کمپاؤنڈ منافع} = 4630.50 \text{ روپے} - 4000 \text{ روپے} = 630.50$$

**مثال 6:-** 4% سالانہ شرح سے 2 سال 6 ماہ کے لیے 5000 روپے پر کمپاؤنڈ منافع معلوم کیجئے۔

**حل:-**

$$\text{روپے اصل زر} = 5000$$

$$\text{شرح} = 4\%$$

$$\text{مدت} = 2\frac{1}{2} \text{ سال}$$

$$\text{حتمی رقم} = 5000 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{100}\right)$$

$$= 5000 \times \frac{104}{100} \times \frac{104}{100} \times \frac{102}{100} = \frac{137904}{25} = 5516.16 \text{ روپے}$$

$$\text{کمپاؤنڈ منافع} = 5516.160 \text{ روپے} - 5000 \text{ روپے} = 516.16 \text{ روپے}$$

**مثال 7:-** 1500 روپے پر 2 سال کے لیے 6% سالانہ کی شرح سے ششماہی ادائیگی کے لیے قابل ادا کمپاؤنڈ منافع معلوم کیجئے۔

**حل:-**

$$\text{روپے اصل زر} = 1500$$

$$\text{شرح} = \text{ششماہی } 3\% = \text{سالانہ } 6\%$$

$$\text{مدت} = \text{ششماہی } 4 \text{ یا } 2 \text{ سال}$$

$$\text{حتمی رقم} = 1500 \times \left(1 + \frac{3}{100}\right)^4$$

$$\text{حتمی رقم} = 1500 \times \frac{103}{100} \times \frac{103}{100} \times \frac{103}{100} \times \frac{103}{100} = 1688.26 \text{ روپے}$$

$$\text{کمپاؤنڈ منافع} = 1688.26 \text{ روپے} - 1500 \text{ روپے} = 188.26 \text{ روپے}$$

## مارک اپ معلوم کرنا Calculation of Markup

اسلامی مالیاتی طریقہ کار کے تحت بینک جو منافع حاصل کرتا ہے اسے مارک اپ کہتے ہیں۔ بینک مارک اپ کی شرح کو روزانہ کی بنیاد پر سٹیٹ بینک آف پاکستان کی طرف سے جاری کی گئی بیچ مارکڈ شرح کو مد نظر رکھتے ہوئے فکس کرتا ہے۔ اس بیچ مارکڈ شرح کو کراچی انٹربینک آفر ریٹ (KIBOR) کہتے ہیں۔ جسے SBP ایک ماہ، 3 ماہ، 6 ماہ، 9 ماہ اور 12 ماہ کی شرح کے لیے جاری کرتا ہے۔ بینک مارک اپ کی شرح اپنے شرح منافع کو KIBOR کی شرح میں جمع کر کے وصول کرتا ہے۔ اس شرح منافع کو عام طور پر سپریڈ (Spread) کہتے ہیں جو کہ قرض لینے اور قرض دینے کی شرح منافع کے درمیان فرق ہوتا ہے۔ کمرشل بینک کے لیے مارک اپ ایک بڑا ذریعہ آمدنی ہوتا ہے۔ اس کو گاہگوں سے حاصل کیا، یا دلایا جاسکتا ہے اور اسے بینک کی آمدنی اکاؤنٹ میں جمع کیا جاتا ہے۔ اسلامک بینکنگ میں پہلے سے طے شدہ مارک اپ کی شرح نہیں ہوتی اور فنائنگ اشیاء کی خرید و فروخت کے معاہدے کی بنیاد پر کی جاتی ہے اور بل جس کے تحت فروخت کی قیمت نکالی جاتی ہے۔ قیمت خرید میں مارک اپ جمع کیا جاتا ہے۔

قرض پر یا ادھار پر لی گئی رقم پر مارک اپ درج ذیل کلیوں کی مدد سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{مارک اپ (سالانہ)} = \frac{\text{شرح} \times \text{ادھار لی گئی رقم}}{100}$$

$$\text{مارک اپ (ماہانہ)} = \frac{\text{شرح} \times \text{ادھار لی گئی رقم}}{100 \times 12}$$

$$\text{مارک اپ (روزانہ)} = \frac{\text{شرح} \times \text{ادھار لی گئی رقم}}{100 \times 365}$$

**مثال :-** ایک آدمی 1,00,000 روپے 3 سال کے لیے 16% کی سالانہ شرح سے ادھار لیتا ہے۔ اسے کتنا مارک اپ ادا کرنا ہوگا؟

**حل :-** روپے 100,000 = اصل زر

$$100,000 \text{ روپے کا ایک سال کے لیے مارک اپ} = \frac{16}{100} \times 100,000$$

$$= 16000 \text{ روپے}$$

$$100,000 \text{ روپے کا 3 سال کے لیے مارک اپ} = 3 \times 16000$$

$$= 48,000 \text{ روپے}$$



## مشق 4.2

- 1- ایک مالی ادارہ نے 55 روپے سادہ منافع ایک رقم پر حاصل کیا جو کہ 5 ماہ کے لیے ادھار لی گئی تھی۔ اگر منافع کی شرح 12% سالانہ ہو تو رقم معلوم کیجئے۔
- 2- جاوید ایک سیونگ سکیم میں 800 روپے 6% سالانہ شرح کے حساب سے لگاتا ہے اور 1200 روپے 7% سالانہ شرح پر لگاتا ہے۔ ان کا ان دونوں رقم پر کل کتنا منافع ہوگا؟
- 3- 1,250 روپے کتنا عرصہ کے لیے 6% سالانہ شرح پر سادہ منافع 750 روپے حاصل کرنے کے لیے جمع کروائے جائیں؟
- 4- علی نے عابد کو 4800 روپے 7 ماہ کے لیے دیئے۔ اس دورانہ کے اختتام پر عابد نے علی کو 119 روپے منافع دینا ہوگا۔ منافع کی سالانہ شرح فی صد معلوم کیجئے۔
- 5- ایک سال کے دوران جاوید ایک پرائیویٹ بینک میں مارچ کے آخر میں 600 روپے اور جون کے آخر میں 400 روپے جمع کرواتا ہے۔ بینک اسے 3% سالانہ شرح کے حساب سے سادہ منافع تجویز کرتا ہے۔ جاوید نے اس سال دسمبر کے آخر میں جتنی رقم وصول کی وہ معلوم کیجئے۔
- 6- کس سالانہ شرح منافع پر ایک رقم 680 روپے سے بڑھ کر 3 سال 4 ماہ میں 850 روپے ہو جائے گی؟
- 7- اس یونٹ میں دیئے گئے کلیوں کی مدد سے درج ذیل جدول کی نقل بنائیے اور مکمل کیجئے۔

رقم	ساہ منافع	مدت	منافع کی شرح	اصل زر
		سال 7	8%	روپے 12,000
	روپے 220		11%	روپے 500
	روپے 108	سال 4	9%	
	روپے 1,200	سال 10		روپے 3,000
روپے 3,960	روپے 360	سال 2		
	روپے 189	سال 18		روپے 1,800
روپے 5,040		سال 2		روپے 4,500
روپے 1,290	روپے 90		5%	

8- ایک بینک نے سالانہ شرح منافع 3.5% سے 4% تک بڑھائی۔ بتائیے سعید کتنا اضافی منافع حاصل کرے گا اگر وہ 6400 روپے 6 ماہ کے لیے نئی منافع کی شرح پر جمع کرائے؟

9- جمشید کی بیوی نے 4000 روپے کسی بینک میں لگائے۔ جو اپنے سرمایہ کاروں کو  $7\frac{1}{4}\%$  سالانہ شرح سے سادہ منافع دیتا ہے۔ دو سال بعد شرح منافع بڑھ کر 8% ہو جاتی ہے۔ 7 سال بعد اس کے پاس کتنی رقم ہوگی؟

10- داؤد نے کسی بینک میں ایک خاص رقم جمع کرائی۔ اگر منافع کی شرح  $3\frac{3}{4}\%$  سالانہ سے کم ہو کر  $3\frac{1}{2}\%$  ہو جائے تو داؤد کا منافع ایک سال میں 50 روپے کم ہو جاتا ہے۔ اس نے کل کتنی رقم جمع کرائی؟

11- کمپاؤنڈ منافع معلوم کیجئے؟

- (i) 450 روپے 2 سال کے لیے 10% سالانہ شرح پر کمپاؤنڈ منافع
- (ii) 750 روپے 3 سال کے لیے 11% سالانہ شرح پر کمپاؤنڈ منافع
- (iii) 5000 روپے 2 سال کے لیے  $11\frac{3}{4}\%$  سالانہ شرح پر کمپاؤنڈ منافع
- (iv) 1200 روپے 3 سال کے لیے 4% سالانہ شرح پر کمپاؤنڈ منافع
- (v) 10000 روپے 3 سال کے لیے  $7\frac{1}{2}\%$  سالانہ شرح پر کمپاؤنڈ منافع

12- وسیم نے 5000 روپے  $5\frac{1}{4}\%$  سالانہ شرح پر کمپاؤنڈ منافع کے لیے لگائے۔ تیسرے سال کے اختتام پر رقم کیا ہوگی؟

13- جاوید نے 800 روپے  $12\frac{1}{2}\%$  سالانہ شرح سے کمپاؤنڈ منافع کے لیے ششما ہی کمپاؤنڈ کے حساب سے لگائے پہلے سال کے اختتام پر اسے کتنی رقم ملے گی؟

14- سلیم نے 9000 روپے 2% سالانہ شرح سے کمپاؤنڈ منافع کے لیے روزانہ کمپاؤنڈ کے حساب سے لگائے۔ تیسرے دن کے اختتام پر رقم کیا ہوگی؟

### 4.3.1 کمرشل بینکنگ اور نیشنل سیونگ سکیمز سے متعلقہ حل شدہ مثالیں

#### Solved Problems Related to Commercial Banking and National Saving Schemes.

**مثال 1:-** اگر چار سال کی مدت کے لیے 5% کی شرح سے مارک اپ 174 روپے ہو تو ایک شخص کو کتنی رقم ادھار لینا ہوگی؟

**حل:-** مارک اپ = 174 روپے

مدت = 4 سال

شرح = سالانہ 5%

$$\text{اصل زر} = \frac{174 \times 100}{5 \times 4} = 870 \text{ روپے}$$

**مثال 2:-** 18 مئی کو ادھار لی گئی رقم 6900 روپے پر مارک اپ معلوم کیجئے جبکہ یہ رقم 11 اکتوبر کو واپس کر دی گئی۔

اور اس پر شرح منافع  $3\frac{1}{2}$  فیصد سالانہ ہے۔

**حل:-** اصل زر = 6900 روپے

شرح =  $3\frac{1}{2}\%$

مدت = 146 دن یا  $\frac{146}{365}$  سال

(18 مئی تا 11 اکتوبر)

13 دن مئی

30 دن جون

31 دن جولائی

31 دن اگست

30 دن ستمبر

11 دن اکتوبر

146 دن ٹوٹل

$$\text{مارک اپ} = \frac{6900 \times 146 \times 7}{365 \times 2 \times 100} = 96.60 \text{ روپے}$$

$$\text{روپے} = 6996.60 = 6900 \text{ روپے} + 96.60 \text{ روپے}$$

**مثال 3:-** کتنی رقم 3 سال کی مدت میں 5% سالانہ شرح سے 630.50 روپے کمپاؤنڈ منافع دے گی؟

**حل:-**

$$\text{فرض کیا رقم} = 100 \text{ روپے}$$

$$\text{شرح} = 5\% \text{ سالانہ}$$

$$\text{مدت} = 3 \text{ سال}$$

$$\text{حتمی رقم} = 100 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3$$

$$= 100 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} = \frac{9261}{80} \text{ روپے}$$

$$\text{کمپاؤنڈ منافع} = \frac{9261}{80} - 100 = \frac{1261}{80}$$

$$\text{دیا گیا کمپاؤنڈ منافع} = 630.50 = \frac{1261}{2}$$

$$\text{اگر دیا گیا کمپاؤنڈ منافع} \frac{1261}{80} \text{ روپے ہو تو اصل زر} = 100 \text{ روپے}$$

$$\text{اگر کمپاؤنڈ منافع ایک روپیہ ہو تو اصل زر} = \frac{100 \times 80}{1261}$$

$$\text{اگر کمپاؤنڈ منافع} \frac{1261}{2} \text{ روپے ہو تو اصل زر} = \frac{100 \times 80 \times 1261}{1261 \times 2}$$

$$= 4000 \text{ روپے}$$

**مثال 4:-** 25000 روپے پر 4 سالہ مدت کے لیے 5% سالانہ شرح سے سادہ اور کمپاؤنڈ منافع میں فرق معلوم کیجئے۔

**حل:-**

$$\text{روپے اصل زر} = 25000$$

$$\text{سال مدت} = 4$$

$$\text{سالانہ 5\% شرح}$$

$$\text{سادہ منافع} = \frac{25000 \times 4 \times 5}{100} = 5000 \text{ روپے}$$

$$\text{حتمی رقم} = 25000 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)^4$$

$$= 25000 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} = 30,387.65 \text{ روپے}$$

$$\text{کمپاؤنڈ منافع} = 30387.65 \text{ روپے} - 25000 \text{ روپے} = 5387.65 \text{ روپے}$$

$$\text{سادہ منافع اور کمپاؤنڈ منافع میں فرق} = 5387.65 \text{ روپے} - 5000 \text{ روپے} = 387.65 \text{ روپے}$$

### مشق 4.3

1- ایک آدمی نے نیشنل بینک سے  $12\frac{1}{2}\%$  سالانہ شرح پر 3 مارچ کو 1460 روپے ادھار لیے۔ اسے یکم جولائی کو سچی رقم دینی ہوگی تاکہ قرض اتارا جاسکے۔

2- ایک دوکاندار نے UBL بینک سے 3540 روپے  $10\frac{3}{4}\%$  سالانہ شرح پر ادھار لیے اور اسی دن ساری رقم  $\frac{1}{2}\%$  سالانہ شرح پر ادھار میں دے دی۔ اسے 3 سال 4 ماہ بعد کتنا منافع ہوگا؟

3- 2 سال کے لیے  $6\%$  سالانہ شرح کے حساب سے الائیڈ بینک نے 8034 روپے منافع کے طور پر حاصل کیے۔ بینک نے کتنے روپے قرض دیا؟

4- ایک کمپنی نے  $8\%$  سالانہ شرح سادہ مارک اپ پر بینک الفلاح سے 6600 روپے قرض لیا۔ 11 ماہ بعد کمپنی کو بینک کو کیا دینا ہوگا؟

5- اسلامی بینک  $2.25\%$  ماہانہ شرح سادہ مارک اپ شخصی قرض پر حاصل کرتا ہے اگر علی 2 سال اور ایک مہینے کے لیے 6400 روپے قرض لیتا ہے۔ تو اسے کتنا مارک اپ ادا کرنا ہوگا؟

6- 2,50,000 روپے پر ایک سال کے لیے کمپاؤنڈ مارک اپ  $14\%$  سالانہ شرح کے حساب سے معلوم کیجئے۔

7- 600 روپے پر 4 سال کے لیے  $6\%$  سالانہ شرح سے کمپاؤنڈ منافع معلوم کیجئے۔

8- 50,000 روپے پر  $4\%$  سالانہ شرح سے  $1\frac{1}{2}$  سال کے لیے کمپاؤنڈ منافع معلوم کیجئے۔

9- 54000 روپے پر ایک سال کے لیے  $12\%$  سالانہ شرح سے کمپاؤنڈ منافع معلوم کیجئے۔

## 4.4 بیمہ INSURANCE

## 4.4.1 بیمہ پالیسی Insurance Policy

کاروباری لین دین اور معاملات میں خطرات سے بچنے کے لیے بیمہ پالیسی ایک اہم ذریعہ ہے۔ بیمہ یا انشورنس دو پارٹیوں کے درمیان ایک معاہدہ ہے جس میں ایک شخص یا پارٹی ایک رقم ماہانہ، سہ ماہی یا سالانہ اقساط کی صورت میں ایک خاص بیمہ کمپنی کو ادا کرنے پر تیار ہوتا ہے تاکہ زندگی، چوری اور نقصانات وغیرہ کو لاحق خطرات کے مقابلہ میں تحفظ مل سکے۔ اس معاہدہ کے تحت انشورنس کمپنی کو طے شدہ رقم یا نقصان کی اصل قیمت یا اچانک موت، خطرہ یا طے شدہ مدت کی تکمیل کی بناء پر واپس ادا کرنا ہوتی ہے۔

انشورنس میں استعمال ہونے والی بنیادی اصطلاحات درج ذیل ہیں۔

- (i) ایک بیمہ کمپنی یا ادارہ جو بہت سے خطرات کے خلاف انشورنس کرتا ہے / انشورنس مہیا کرتی ہے اور بیمہ پالیسی جاری کرتا ہے اسے بیمہ کمپنی (Insurer) کہتے ہیں۔
- (ii) ایک شخص جس کو انشورنس پالیسی جاری کی جاتی ہے جو کہ انشورنس کے معاہدہ میں فائدہ مند ہوتا ہے انشورڈ یا انشورینٹ (بیمہ دار / بیمہ شدہ) کہلاتا ہے۔
- (iii) دو پارٹیوں کے درمیان جو معاہدہ ہوتا ہے وہ انشورنس پالیسی کہلاتا ہے۔
- (iv) انشورڈ (بیمہ دار) کی طرف سے وقفہ وقفہ سے ادا کی گئی اقساط پر بیمہ کہلاتی ہیں۔
- (v) وہ مدت جس پر بیمہ دار اور بیمہ کمپنی دونوں راضی ہوں میچورٹی کہلاتا ہے۔
- (vi) معاہدہ کی کل رقم جسے میچورٹی یا راضی شدہ مدت کے اختتام پر واپس ادا کی جاتی ہے اس میں اصل رقم جو قسطوں میں ادا کی گئی ہو اور منافع شامل ہو بونس کہلاتا ہے۔

## 4.4.2 لائف انشورنس اور گاڑی کی انشورنس Life Insurance and Vehicle Insurance

عام طور پر انشورنس دو قسم کی ہوتی ہے۔

- i لائف انشورنس
- ii گاڑی اور جائیداد کی انشورنس

## لائف انشورنس Life Insurance

لائف انشورنس ایک معاہدہ ہے۔ جس میں فریقین کے درمیان اصل رقم اور منافع جسے بونس کہتے ہیں کی واپس ادائیگی کے لیے ایک میچورٹی مدت پر اتفاق ہو جاتا ہے۔ دوسری صورت میں بیمہ دار کی موت واقع ہونے پر یا کسی حادثہ وغیرہ پر (ان میں سے جو بھی پہلے واقع ہو) انشورنس ادا کی جاتی ہے۔ ایک شخص برہا پے یا کسی نااہلیت کے لیے بھی انشورنس پالیسی لے سکتا ہے جس کی رقم بیمہ دار کی آمدنی کا 10% سے 50% تک ہو سکتی ہے۔

یہاں ایک مثال میں زندگی کے بیمہ کی صورت میں سالانہ، ششماہی، سہ ماہی اور ماہانہ قسط (پریمیم) کو حل کیا جا رہا ہے۔ انشورنس کے وقت انشورنس کروانے والے کی عمر 30 سال ہے۔

پریمیم کی شرح پالیسی کی کل رقم کا 4.5% سالانہ ہے۔

ششماہی قسط کی شرح سالانہ پریمیم کا 52% ہے۔

سہ ماہی پریمیم کی شرح سالانہ پریمیم کا 27% ہے۔

ماہانہ پریمیم کی شرح سالانہ پریمیم کا 9% ہے۔

$$\text{روپے } 4,00,000 = \text{پالیسی کی کل رقم}$$

$$\text{روپے } 18,000 = \frac{4.5}{100} \times 4,00,000 = \text{4.5\% کی شرح سے پہلا پریمیم}$$

$$\text{روپے } 1000 = \frac{0.25}{100} \times 4,00,000 = \text{پالیسی فیس 0.25\% کی شرح سے}$$

$$\text{سالانہ پریمیم} = \text{پہلا پریمیم} + \text{پالیسی فیس}$$

$$= 18000 + 1000 = 19000 \text{ روپے}$$

اگر 0.25% پالیسی کی رقم، 1000 روپے سے زیادہ بنتی ہو تو صرف 1000 روپے پالیسی فیس کے طور پر لیے جائیں گے۔

$$\text{روپے } 18000 = \text{پہلا پریمیم}$$

اب

$$\text{ششماہی پریمیم} = \frac{52}{100} \times (\text{پہلا پریمیم} + \text{پالیسی فیس کا آدھا})$$

$$= \frac{52}{100} \times (18000 + 500)$$

$$= \frac{52}{100} \times 18500$$

$$= 52 \times 185 = 9620 \text{ روپے}$$

$$\text{سہ ماہی پر بیمہ} = \frac{27}{100} \times 18500$$

$$= 27 \times 185 \text{ روپے}$$

$$= 4995 \text{ روپے}$$

$$\text{ماہانہ پر بیمہ} = \frac{9}{100} \times 18500$$

$$= 9 \times 185 \text{ روپے}$$

$$= 1665 \text{ روپے}$$

یہ بات بڑی اہم اور توجہ طلب ہے کہ پالیسی پر بیمہ کی رقم اور میچورٹی کی مدت کمپنی قوانین کی تحت بیمہ دار کی عمر کے ساتھ مختص ہوتی ہے۔ عام طور پر بیمہ دار کی زیادہ عمر کے لحاظ سے میچورٹی کی مدت کم کی جاتی ہے۔ دوسرے الفاظ میں بیمہ دار کی جتنی زیادہ عمر ہوگی میچورٹی کی مدت اتنی ہی کم ہوگی۔

**مثال :-** پہلا، سہ ماہی اور ماہانہ پر بیمہ معلوم کیجئے اگر انشورڈ کی عمر 30 سال، پالیسی کی رقم 3,00,000 روپے، میچورٹی مدت 25 سال، پر بیمہ مقررہ شرح 3.5% اور پالیسی فیس کی شرح 0.25% ہو۔

$$\text{انشورنس کے وقت انشورڈ کی عمر} = 30 \text{ سال}$$

$$\text{پالیسی کی رقم} = 3,00,000 \text{ روپے}$$

$$\text{میچورٹی کی مدت} = 25 \text{ سال}$$

$$\text{پر بیمہ مقررہ شرح} = 3.5\%$$

$$\text{پالیسی فیس} = 0.25\%$$

$$\text{پہلا پر بیمہ} = \frac{3.5}{100} \times 3,00,000$$

$$= 35 \times 300$$

$$= 10,500 \text{ روپے}$$



$$\begin{aligned} \text{پالیسی فیس} &= \frac{0.25}{100} \times 3,00,000 \\ &= 25 \times 30 \\ &= 750 \text{ روپے} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{خاندان کی آمدنی کا معاہدہ } 0.5\% \text{ کی شرح سے} &= \frac{0.5}{100} \times 3,00,000 \\ &= 1500 \text{ روپے} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{کل ادا کی گئی رقم} &= \text{پہلا پریمیوم} + \text{پالیسی فیس} + \text{خاندانی آمدنی کا معاہدہ} \\ &= 10500 \text{ روپے} + 750 \text{ روپے} + 1500 \text{ روپے} \\ &= 12750 \text{ روپے} \end{aligned}$$

جب پالیسی میچور ہوتی ہے:

$$\text{پالیسی کی رقم} = 3,00,000 \text{ روپے} \dots\dots\dots (i)$$

$$\begin{aligned} 25 \text{ سال کے لیے } 4.5\% \text{ کی شرح سے بونس} &= \frac{4.5}{100} \times 3,00,000 \times 25 \\ &= 45 \times 300 \times 25 \\ &= 1125 \times 300 \\ &= 3,37,500 \text{ روپے} \dots\dots\dots (ii) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{میچورٹی بونس } 1.5\% \text{، } 20 \text{ سال کے لیے} &= \frac{1.5}{100} \times 3,00,000 \times 20 \\ &= 15 \times 6000 \text{ روپے} \\ &= 90,000 \text{ روپے} \dots\dots\dots (iii) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اختتامی بونس } 1.6\% &= \frac{1.6}{100} \times 3,00,000 \times 20 \\ &= 16 \times 6000 \text{ روپے} \\ &= 96000 \text{ روپے} \dots\dots\dots (iv) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{خاندان کی آمدنی پر بونس } 0.75\% &= \frac{0.75}{100} \times 3,00,000 \times 20 \\
 &= 600 \times 75 \text{ روپے} \\
 &= 45,000 \text{ روپے} \dots\dots\dots (v)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{کل رقم جو انشورڈ حاصل کرے گا} &= \boxed{i} + \boxed{ii} + \boxed{iii} + \boxed{iv} + \boxed{v} \\
 &= (3,00,000 + 3,37,500 + 90,000 + 96,000 + 45,000) \text{ روپے} \\
 &= \boxed{8,68,500 \text{ روپے}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{مہجورٹی مدت} \times \text{کل ادا کی گئی رقم} &= \text{ادا کیا گیا پریمیم} \\
 &= 12750 \times 25 \text{ روپے} \\
 &= \boxed{3,18,750 \text{ روپے}}
 \end{aligned}$$

اگر پالیسی حاصل کرنے کے بعد ایک سال کے دوران انشورڈ کی موت واقع ہو جاتی ہے تو اس کا خاندان، خاندانی آمدنی کے معاہدہ کے تحت درج ذیل فائدہ حاصل کرے گا۔

$$\begin{aligned}
 \text{روپے پالیسی کی رقم} &= 3,00,000 \\
 \text{بونس کی شرح } 4.2\% &= \frac{4.2}{100} \times 3,00,000 \\
 &= 42 \times 300 \text{ روپے} \\
 &= 12,600 \text{ روپے} \\
 \text{کل رقم} &= 300,000 \text{ روپے} + 12,600 \text{ روپے} = 312,600 \text{ روپے}
 \end{aligned}$$

درج بالا رقم کے علاوہ اضافی طور پر خاندان 30,000 روپے سالانہ (پالیسی رقم کا 10%) کے حساب سے 24 سال تک وصول کرے گا۔

پس کل رقم جو انشورڈ خاندان حاصل کرے گا:

$$\begin{aligned}
 &= 3,12,600 \text{ روپے} + 7,20,000 \text{ روپے} \\
 &= \boxed{10,32,600 \text{ روپے}}
 \end{aligned}$$

## گاڑی کی انشورنس Vehicle Insurance

بعض اوقات افراد یا کمپنیاں اپنی گاڑیوں یا جائیداد کے چوری ہونے، حادثات کا شکار ہونے یا آگ لگنے کے خطرہ کے پیش نظر انشورنس پالیساں حاصل کرتی ہیں۔ پالیسی کی رقم چیز کی کل قیمت یا جزوی قیمت ہوتی ہے۔ جبکہ پریمیم چیز کی اصل قیمت یا پالیسی کی کل رقم کا کچھ فیصد ہوتا ہے۔ اس کا کمپنی تو انین کے تحت مختلف مدتوں کے لیے مختلف شرح کے حساب سے فیصلہ کیا جاتا ہے۔ پہلا پریمیم عام طور پر ایک سال کی اقساط کی کل رقم ہوتا ہے۔

**مثال 1:-** ایک شخص نے اپنی کار کے لیے 3.5% کی شرح سے انشورنس پالیسی لی اور 14500 روپے پہلے سال کے پریمیم کے طور پر ادا کیے۔ اس کی کار کی قیمت بتائیے۔ جبکہ اس نے 500 روپے سروس چارجز کے ادا کیے۔

**حل:-** روپے  $x =$  فرض کیا کار کی کل قیمت

$$\text{روپے } 14500 = \text{اس نے کل رقم جو ادا کی}$$

$$\text{روپے } 500 = \text{سروس چارجز جو ادا کیے}$$

$$\text{پریمیم کی بقایا رقم} = 14500 - 500$$

$$= 14000 \text{ روپے}$$

$$\text{روپے } 14000 = x \text{ کا } 3.5\%$$

اب

$$\frac{3.5}{100} \times x = 14000 \text{ روپے}$$

$$x = \frac{14000 \times 100}{3.5} \text{ روپے}$$

$$x = \frac{14000 \times 100 \times 10}{35}$$

$$= 400 \times 100 \times 10$$

$$= 400 \times 1000$$

$$= 4,00,000 \text{ روپے}$$

$$\text{کار کی قیمت} = 4,00,000 \text{ روپے}$$

گاڑی کی انشورنس میں سالانہ پریمیم کم ہوتا رہتا ہے کیونکہ اتااشکی قیمت میں کمی واقع ہوتی ہے۔

اس لیے پریمیم کو اسی حساب سے لیا جاتا ہے۔

عام طور پر کچھ سروس چارجز پریمیم میں شامل ہوتے ہیں لیکن ہم یہاں بغیر سروس چارجز سوالات کو زیر بحث لائیں گے۔

**مثال 2:-** ایک شخص نے اپنی کار کے لیے 3.6% کی شرح سے انشورنس پالیسی حاصل کی۔ اس نے ایک سال کے لیے 12206 روپے پہلے ریٹیم کے طور پر ادا کیے۔ اس کی کار کی قیمت بتائیے جبکہ اس نے 200 روپے سروس چارجز کے دیئے ہوں۔

**حل:-**

$$\text{روپے } x = \text{فرض کیا کار کی کل قیمت}$$

$$\text{روپے } 12206 = \text{کل رقم جو ادا کی}$$

$$\text{روپے } 200 = \text{سروس چارجز جو ادا کیے}$$

$$\text{روپے } 12206 - 200 = \text{پرییم کی بقایا رقم}$$

$$= 12006 \text{ روپے}$$

$$x \text{ کا } 3.6\% = 12006 \text{ روپے}$$

$$\frac{3.6}{100} x = 12006 \text{ روپے}$$

$$x = \frac{12006 \times 100}{3.6} \text{ روپے}$$

$$= \frac{12006 \times 100 \times 10}{36} \text{ روپے}$$

$$\text{روپے } 333,500 = x = \text{کار کی قیمت}$$

آگ لگنے یا اس نوعیت کے نقصان کی صورت میں اثاثہ جات کی موجودہ قیمت پر پالیسی کی ادائیگی کی جاتی ہے۔

**مثال 3:-** ارسلان نے اپنی کار کے لیے کل کتنی انشورنس ادا کرنی ہوگی اگر کار کی قیمت 8,50,000 روپے مدت 5 سال اور انشورنس کی شرح 4.5% ہو انشورنس کو سالانہ کی بنیاد پر ادا کرنا ہوگا جبکہ آخری سال کی انشورنس 0% اور قیمت میں کمی 10% سالانہ ہوگی۔

**حل:-**

$$\text{روپے } 850,000 = \text{کار کی قیمت}$$

$$= 4.5\% = \text{انشورنس کی شرح}$$

$$= 5 \text{ سال} = \text{مدت}$$

$$\text{روپے } 38250 = \frac{4.5}{100} \times 850,000 = \text{پہلے سال انشورنس کی رقم}$$

$$\text{روپے } 85000 = \frac{10}{100} \times 8,50,000 = \text{قیمت میں کمی}$$

$$= 850,000 - 85000 = \text{کمی کے بعد کار کی قیمت}$$

$$= 765000 \text{ روپے}$$

$$\text{دوسرے سال کی انشورنس} = \frac{4.5}{100} \times 7,65,000 \text{ روپے}$$

$$= 34425 \text{ روپے}$$

$$\text{قیمت میں کمی} = \frac{10}{100} \times 7,65,000 \text{ روپے}$$

$$= 76,500 \text{ روپے}$$

$$\text{کمی کے بعد کار کی قیمت} = 7,65,000 - 76,500 \text{ روپے}$$

$$= 6,88,500 \text{ روپے}$$

$$\text{تیسرے سال کی انشورنس} = \frac{4.5}{100} \times 6,88,500 \text{ روپے}$$

$$= 30,982.50 \text{ روپے}$$

$$\text{قیمت میں کمی} = \frac{10}{100} \times 6,88,500 \text{ روپے}$$

$$= 68,850 \text{ روپے}$$

$$\text{کمی کے بعد کار کی قیمت} = 6,88,500 - 68,850 \text{ روپے}$$

$$= 6,19,650 \text{ روپے}$$

$$\text{چوتھے سال کی انشورنس} = \frac{4.5}{100} \times 6,19,650 \text{ روپے}$$

$$= 27,884.25 \text{ روپے}$$

$$\text{پانچویں سال کی انشورنس} = 0$$

پس انشورنس کی کل ادا کردہ رقم درج ذیل ہے۔

$$\text{پہلا سال} \quad 38,250 \text{ روپے}$$

$$\text{دوسرا سال} \quad 34,425 \text{ روپے}$$

$$\text{تیسرا سال} \quad 30,982 \text{ روپے}$$

$$\text{چوتھا سال} \quad 27,884 \text{ روپے}$$

$$\text{پانچواں سال} \quad 0 \text{ روپے}$$

$$\hline 1,31,541 \text{ روپے}$$

### 4.4.3 زندگی اور گاڑیوں کی انشورنس سے متعلق روزمرہ زندگی کے مسائل

#### Simple Real Life Problems Regarding Purchase of Life and Motor Vehicle Insurance.

دی گئی مثالوں سے زندگی اور گاڑیوں کی انشورنس کے متعلق اہمیت واضح ہوتی ہے۔

**مثال 1:-** ایک بیمہ دار شخص جس کی عمر اس کی قریب ترین سالگرہ پر 30 سال ہے۔ اس وقت پالیسی کی کل رقم پر پریمیم کی شرح 4.842% ہے۔ ششماہی اقساط کی شرح سالانہ پریمیم کا 52% ہے۔ سہ ماہی پریمیم کی شرح سالانہ پریمیم کا 27% ہے۔ ماہانہ پریمیم کی شرح سالانہ پریمیم کا 9% ہے۔ تمام میں پریمیم کی رقم معلوم کیجئے۔ اگر پالیسی کی کل رقم 1,00,000 روپے ہو۔

**حل:-** پالیسی کی کل رقم = 100,000 روپے

پہلا پریمیم 4.842% کی شرح سے =  $\frac{4.842}{100} \times 100,000 = 4842$  روپے

پالیسی فیس 0.25% کی شرح سے =  $\frac{0.25}{100} \times 100,000 = 250$  روپے

سالانہ پریمیم = 5,092 روپے

فرض کیا پالیسی فیس 250 روپے کی بجائے 200 روپے کر دی جاتی ہے۔

اس لیے پہلا پریمیم =  $4842 + 200 = 5,042$  روپے

ششماہی پریمیم =  $\frac{52}{100} \times 5,042 = 2,621.84$  روپے

= 2,622 روپے

سہ ماہی پریمیم =  $\frac{27}{100} \times 5,042 = 1,361.34$  روپے

= 1,361 روپے

ماہانہ پریمیم =  $\frac{9}{100} \times 5,042 = 453.78$  روپے

= 454 روپے

اگر پالیسی کی رقم 1,00,000 روپے ہو تو لائف انشورنس پالیسی یا پالیسی کی مدت پورا ہونے پر کتنی رقم ملے گی۔

پالیسی کی رقم = 100,000 روپے

25 سال کے لیے بونس کی شرح 4.2% =  $\frac{4.2}{100} \times 100,000 \times 25$  روپے

= 4,200 × 25 روپے

= 1,05,000 روپے

$$\begin{aligned} \text{مدت پورا ہونے پر بونس } 1.4\% \text{ کی شرح سے } 20 \text{ سال کے لیے} &= \frac{1.4}{100} \times 100,000 \times 20 \text{ روپے} \\ &= 28,000 \text{ روپے} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اختتامی بونس } 1.5\% \text{ کی شرح سے} &= \frac{1.5}{100} \times 100,000 \times 20 \text{ روپے} \\ &= 30,000 \text{ روپے} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{خاندان کی آمدنی پر بونس } 0.75\% \text{ کی شرح سے} &= \frac{0.75}{100} \times 100,000 \times 20 \text{ روپے} \\ &= 15,000 \text{ روپے} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{کل رقم جو انشورڈ حاصل کرے گا۔} &= (100000 + 105000 + 28000 + 30000 + 15000) \text{ روپے} \\ &= 278,000 \text{ روپے} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{کل ادا کردہ پریمیم} &= 4537 \times 25 \\ &= 113425 \text{ روپے} \end{aligned}$$

**مثال 2:-** ایک کار کی قیمت 12,50,000 روپے ہے جبکہ 5 سالہ مدت کے لیے پریمیم کی شرح 4.5% سالانہ ہے۔ انشورنس کی ادا کردہ کل رقم معلوم کیجئے۔ جبکہ قیمت میں کمی کی شرح 10% سالانہ ہے۔

**حل:-**

$$\begin{aligned} \text{کار کی قیمت} &= 12,50,000 \text{ روپے} \\ \text{پریمیم کی سالانہ شرح} &= 4.5\% \\ \text{سال مدت} &= 5 \end{aligned}$$

کار کی قیمت میں کمی کی شرح 10% سالانہ ہے۔

$$\text{پہلا پریمیم} = \frac{4.5}{100} \times 12,50,000 = \boxed{56250 \text{ روپے}}$$

$$\text{کار کی قیمت میں کمی} = \frac{10}{100} \times 12,50,000 = 1,25,000 \text{ روپے}$$

$$\begin{aligned} \text{کمی کے بعد کار کی قیمت} &= 12,50,000 - 1,25,000 \\ &= 11,25,000 \text{ روپے} \end{aligned}$$

$$\text{دوسرا پریمیوم} = \frac{4.5}{100} \times 11,25,000 = \boxed{50,605 \text{ روپے}}$$

$$\text{کارکی قیمت میں کمی} = \frac{10}{100} \times 11,25,000 = 1,12,500 \text{ روپے}$$

$$\begin{aligned} \text{کارکی قیمت کمی کے بعد} &= 11,25,000 - 1,12,500 \\ &= 10,12,500 \text{ روپے} \end{aligned}$$

$$\text{تیسرا پریمیوم} = \frac{4.5}{100} \times 10,12,500 = \boxed{45562.50 \text{ روپے}}$$

$$\text{کارکی قیمت میں کمی} = \frac{10}{100} \times 10,12,500 = 1,01,250 \text{ روپے}$$

$$\begin{aligned} \text{کمی کے بعد کارکی قیمت} &= 10,12,500 - 1,01,250 \\ &= 9,11,250 \text{ روپے} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{چوتھا پریمیوم} &= \frac{4.5}{100} \times 9,11,250 \text{ روپے} \\ &= \boxed{41,006.25 \text{ روپے}} \end{aligned}$$

$$\text{پانچواں پریمیوم} = \boxed{0}$$

انشورنس میں پریمیوم کی مکمل ادائیگی

پہلا سال	56250.00	روپے
دوسرا سال	50605.00	روپے
تیسرا سال	45562.50	روپے
چوتھا سال	41006.25	روپے
پانچواں سال	0	روپے

$$\boxed{193423.75 \text{ روپے}}$$

اگر مدت پوری ہونے پر انشورڈ کی طرف سے کوئی کلیم داخل نہیں کیا جاتا تو دونوں پارٹیوں کی پہلے سے طے شدہ کچھ رقم انشورڈ کو "نوکلیم بونس" کے طور پر ادا کی جاتی ہے۔



## مشق 4.4

1- اگر پریمیم کی رقم درج ذیل طریقہ سے نکالی جائے۔

پالیسی کی رقم  $0.25\%$  + پالیسی انکم کا  $4.5\%$  = سالانہ پریمیم

پالیسی فیس زیادہ سے زیادہ 200 روپے

ششماہی پریمیم جو کہ سالانہ پریمیم کا  $52\%$  ہو۔

سہ ماہی پریمیم جو کہ سالانہ پریمیم کا  $27\%$  ہو۔

ماہانہ پریمیم جو کہ سالانہ پریمیم کا  $9\%$  ہو۔

تب درج ذیل جدول کو پریمیم نکالنے کے لیے مکمل کیجئے۔ مزید کمپنی کو ادا کی گئی کل رقم بھی معلوم کیجئے۔

پالیسی کی رقم	سالانہ پریمیم	ششماہی پریمیم	سہ ماہی پریمیم	ماہانہ پریمیم
(i) 50,000				
(ii) 100,000				
(iii) 150,000				
(iv) 200,000				

2- اگر ایک انشورڈ، انشورنس پالیسی حاصل کرنے کے 2 سال بعد انتقال کر گیا ہو تو اس کے ورثا کو وصول ہونے والی رقم معلوم کیجئے جبکہ:

روپے  $50,000$  = پالیسی کی رقم

$4.2\%$  = پریمیم سالانہ کی شرح سے

$0.6\%$  = فیملی انکم معاہدہ

$4.5\%$  = بونس

$0.3\%$  = پالیسی فیس

سال  $22$  = میچورٹی کی مدت

روپے  $6000$  = سالانہ انکم جس کا کمپنی نے وعدہ کیا۔

3- احمد علی نے اپنے گھر جس کی قیمت  $75,00,000$  روپے تھی۔ 4 سالہ مدت کے لیے  $2\%$  کی شرح سے انشور کر لیا۔

اگر قیمت میں کمی کی شرح  $10\%$  سالانہ ہو تو اس نے 4 سال میں کمپنی کو کیا رقم ادا کی؟

4- ندیم اپنی دوکان کی 3 سال کے لیے 3% کی سالانہ شرح انشورنس دوکان کی قیمت میں کمی کی شرح 5% سالانہ ہے۔ اگر اس نے 21000 روپے پہلے پریمیم کے طور پر ادا کیے ہوں تو اس کی دوکان کی قیمت معلوم کیجئے۔ اگر اس نے 2 سال بعد 2,00,000 روپے کا کلیم کیا ہوا سے کیا فائدہ ہوا؟

5- عادل نے ایک چلتا ہوا کاروبار 10,00,000 روپے میں خریدا اور اس کی انشورنس 4 سال کے لیے 2.5% پریمیم کی شرح سے کرائی۔ 3 سال بعد اس نے اصل نقصان کا کلیم 5,00,000 روپے حاصل کیا۔ اس نے انشورنس کے ذریعے کتنا نقصان پورا کیا جبکہ کاروبار کی مالیت میں کمی کی شرح 10% سالانہ ہے۔

6- جاوید نے اپنی کار کے لیے 8,50,000 روپے کی انشورنس پالیسی 3 سال کے لیے 4.25% پریمیم پر خریدی۔ وہ کل کتنی رقم ادا کرے گا اگر اس نے اس مدت میں نقصان کا کلیم نہ کیا ہو؟ جبکہ قیمت میں کمی کی شرح 10% ہو۔

7- رحمان نے ایک گاڑی 7,50,000 روپے میں خریدی اور اسے 5 سال کے لیے 3.5% کی شرح سے انشور کرایا۔ اگر اس نے اس مدت میں 1,00,000 روپے نقصان کا کلیم حاصل کیا ہو تو اس نے خطرہ سے بچت کے لیے کتنی رقم ادا کی ہوگی؟ جبکہ قیمت میں کمی کی شرح 10% ہو۔

8- ماریہ نے اپنی کار کے لیے 3.25% کی شرح سے 3 سال کے لیے انشورنس پالیسی لی۔ جس کا پہلا پریمیم 26000 روپے ہے۔ کار کی قیمت بتائیے۔ نیز دوسرے اور تیسرے پریمیم کی رقم بھی معلوم کیجئے۔ جبکہ کار کی قیمت میں کمی کی شرح 10% سالانہ ہے۔

## 4.5 لیزنگ / فنانسنگ LEASING/FINANCING

### 4.5.1 لیزنگ / فنانسنگ Leasing/Financing

لیز (Lease) ایک معاہدہ ہے۔ جس میں اثاثہ کا مالک جسے لیسر (Lessor) کہتے ہیں اثاثہ کرایہ پر لینے والے کو ایک خاص مدت کے لیے کرایہ کی ادائیگی کے بدلے میں اثاثہ کو استعمال کرنے کی اجازت دیتا ہے۔ لیز پر دیئے گئے اثاثہ کی ملکیت لیز کے دورانیہ میں اثاثہ کے مالک کے پاس ہی رہتی ہے۔ اثاثہ جات جیسا کہ رینل اسٹیٹ، مشینری کے آلات یا دوسرے مستحکم اثاثہ جات کو لیز کے معاہدہ کے تحت لیز پر دیا جاتا ہے۔ قسط وار خرید (Hier Purchase) بھی اسی طرح کا پیسہ لگانے کا طریقہ کار ہے جیسا کہ وسیع پیمانہ پر مالی طور پر مستحکم اثاثہ جات کا۔

لیزنگ معاہدہ میں مشین اور آلات یا دوسرے مستحکم اثاثہ جات کے لیے عام طور پر سرمایہ کاری کا عنصر پایا جاتا ہے۔ اس طرح کرایہ دار بغیر قیمت ادا کیے اثاثہ کو استعمال کرنے کا حق حاصل کر لیتا ہے۔ اس لیے لیزنگ کی سہولیات فراہم کرنا بھی سرمایہ کا مترادف ہے۔

بینک اور لیزنگ کمپنیاں اپنے گاہکوں کو لیز کے معاہدہ کے تحت اثاثے مہیا کرتی ہیں۔ ان کا منافع اس فرق پر انحصار کرتا ہے جو کہ اثاثہ جات کو حاصل کرنے کے لیے لگائے گئے سرمایہ کے منافع اور کرایہ کی شکل میں کمائی کے درمیان ہوتا ہے۔ چونکہ ملکیت لیزنگ کمپنی کے پاس ہی رہتی ہے اس لیے اثاثہ جات کی قیمت میں کمی کی بنا پر ٹیکس میں فائدہ اٹھایا جاتا ہے۔ جبکہ لیسر (Lessee) کرایہ کی ادائیگی کو انکم ٹیکس کے گوشوارے میں بطور خرچہ ظاہر کرتا ہے۔ لیزنگ ایک اثاثہ کو خریدنے کے لیے متبادل راستہ مہیا کرتا ہے تاکہ بغیر براہ راست مستحکم قرضہ کے بوجھ کے اس کی خدمات حاصل کی جاسکیں۔

کاروباری فرمز کے لیے دو قسم کی لیزنگ سہولت ہوتی ہے۔

### (i) آپریشنل لیز Operational Lease

یہ کم مدت کے لیے لیز ہوتی ہے جو کہ اثاثے رکھنے والی فرم کی صوابدید پر قابل تینج ہوتی ہے۔ ایسی لیزیں عام طور پر کمپیوٹر ہارڈ ویئر، مشینری اور آلات وغیرہ جیسی اشیاء کی لیزنگ میں استعمال ہوتی ہیں۔

### (ii) فنانشل لیز Financial Lease

یہ لیز لمبی مدت کے لیے ہوتی ہے جو کہ لیسر کی طرف سے ناقابل تینج معاہدہ کی ذمہ داری ہوتی ہے تاکہ فرم جس کے اثاثے ہوتے ہیں جسے لیسر کہتے ہیں کو اثاثوں کے استعمال پر سلسلہ وار ادائیگی ہوتی رہے۔

### (i) 4.5.1 Leasing/Financing of Motor Vehicle / فنانسنگ / موٹر گاڑیوں کی لیزنگ

ذرائع آمدورفت کے لیے قرضہ یا کار فنانسنگ کنزیومر فنانس لینے کی بڑی قسم ہے۔ اس سہولت سے فائدہ اٹھاتے ہوئے ایک گاہک کار فنانسنگ کی شرائط پر بینک میں پیسے جمع کراتے ہوئے کار خرید سکتا ہے۔ گاہک کے لیے فنانس میں کمی بنک پورا کرتا ہے۔ جس کے بدلے میں بینک گاہک سے اقساط کی شکل میں فنانس اور مارک اپ (Mark up) وصول کرتا ہے۔

### (ii) 4.5.1 نقد ادائیگی Down Payment

گاہک کو درخواست فارم کے ساتھ بینک میں نقد ادائیگی کرنا ہوتی ہے۔ نقد ادائیگی کار کی 15% ایکوٹی کی قیمت (Equity value) انشورنس کی لاگت، ایک ماہ کی قسط اور پروسیسنگ فیس پر مشتمل ہوتی ہے۔

### (iii) 4.5.1 موٹر گاڑیوں کی انشورنس Motor Vehicle Insurance

بینک کے مفاد کو بہتر انداز میں محفوظ رکھنے کے لیے موٹر گاڑی جس کو بینک نے فنانس کیا ہوتا ہے کی جامع انشورنس کی جاتی ہے جو کہ گاڑی کے متعلق تمام خدشات کو دور کرتی ہے۔ تمام گاڑیوں کی بینک کی منظور شدہ انشورنس ایجنسی یا کمپنی سے انشورنس کرائی جاتی ہے۔ بینک انشورنس اور پریمیوم (Premium) کا انتظام کرتا ہے جس کو قرض دار سے وصول کیا جاتا ہے۔

### (iv) 4.5.1 پروسیسنگ اخراجات Processing Charges

کسی گاڑی کی فنانسنگ کے لیے دی گئی درخواست کو قابل عمل بنانے کے لیے بینک جو رقم وصول کرتا ہے۔ اسے پروسیسنگ کے اخراجات کہتے ہیں۔ یہ اخراجات عام طور پر بینک کے شیڈول میں لکھے ہوتے ہیں۔ عام طور پر یہ اخراجات 3000 روپے سے لے کر 5000 روپے تک ہوتے ہیں۔

### (v) 4.5.1 ماہانہ اقساط کی شکل میں رقم کی واپسی Repayment in Monthly Installments

اس کو امورٹائزیشن (Amortization) کا شیڈول بھی کہتے ہیں۔ یہ وہ شیڈول ہے جو قرض یا فنانس کی گئی رقم کی واپسی کو قرض کی واپسی کی مدت میں اصل زر اور منافع کی وقفوں میں ادائیگی کو ظاہر کرتا ہے۔

**مثال 1:-** علی نے ایک کارلیزنگ کمپنی سے 4,50,000 روپے لیز پر لی۔ اس میں 1,00,000 روپے ایکوٹی اور شرح منافع دو سال کے لیے 17% ہے۔ اسے کل کتنی ادائیگی کرنا ہوگی؟ نیز ہر ماہ کی ادائیگی بھی معلوم کیجئے۔

**حل:-** ایک لاکھ روپے ایکوٹی کی ادائیگی پر علی کو کارمل جائے گی مگر وہ اس کا مالک نہیں ہوگا۔ اس کو کار کی ملکیت تب ملے گی جب وہ باقی ماندہ رقم 3,50,000 روپے اور اس پر 17% کی شرح سے 2 سال کا مارک اپ برابر ماہانہ اقساط میں ادا کر دے گا۔

$$\text{روپے مارک اپ} = \frac{350,000 \times 17 \times 2}{100} = 119,000$$

$$\text{کل رقم جو ادا کرنا ہوگی} = 3,50,000 + 1,19,000 = 4,69,000 \text{ روپے}$$

$$\text{ماہانہ قسط کی رقم} = \frac{4,69,000}{24} = 19,542 \text{ روپے}$$

**مثال 2:-** ایک ٹرک 5,00,000 روپے میں خریدا گیا۔ اسے 15% ایکوٹی پر خریدا جاسکتا تھا۔ جبکہ مارک اپ کی شرح ماہانہ کی بنیاد پر 18% سالانہ ہو تو درج ذیل معلوم کیجئے۔

(i) ماہانہ قسط

(ii) ٹرک کی ابتدائی قیمت

(iii) اگر ٹرک 5,00,000 روپے نقد ادائیگی سے خریدا گیا ہو تو بچت کی رقم معلوم کیجئے۔

$$\text{ڈاؤن پے منٹ / ایکوٹی} = \frac{5,00,000 \times 15}{100} = 75,000 \text{ روپے}$$

$$\text{باقی رقم} = 5,00,000 - 75,000 = 4,25,000 \text{ روپے}$$

$$\text{دو سال کے لیے 4,25,000 روپے پر مارک اپ} = \frac{4,25,000 \times 18}{100} \times 2 = 1,53,000 \text{ روپے}$$

$$\text{روپے اضافی رقم جو 24 ماہانہ اقساط میں ادا کرنی ہے۔} = 4,25,000 + 1,53,000 = 5,78,000$$

$$\text{ماہانہ قسط} = \frac{5,78,000}{24} = 24,084 \text{ روپے}$$

$$\text{اضافی رقم} + \text{ڈاؤن پے منٹ} = \text{کل رقم}$$

$$= 7,5000 + 5,78,000$$

$$= 6,53,000 \text{ روپے}$$

$$\text{قرضہ لینے کی صورت میں اضافی رقم ادا کی} = 6,53,000 - 5,00,000$$

$$= 1,53,000 \text{ روپے}$$

$$\text{نقد ادا کی گئی پر جو رقم فی صد بچ سکتی ہے} = \frac{1,53,000}{5,00,000} \times 100 = 31\%$$

### 4.5.2 روزمرہ زندگی کے مسائل Real Life Problems

#### مثال 1:-

علی نے 2001 میں ایک مشینری قرضہ کی بنیاد پر خریدی۔ معاہدہ پر دستخط کے وقت 4000 روپے کی ڈاؤن پے منٹ کی گئی اور 4000 روپے سالانہ کی بنیاد پر تین سال کے لیے ادا کی گئی۔ مشینری کی نقد قیمت 14,900 روپے جبکہ مارک اپ کی شرح 5% ہے۔ اصل زر اور مارک اپ کی ادا گئی رقم معلوم کیجئے۔

#### حل:-

تاریخ	نقد رقم	اقساط	
		مارک اپ	اصل زر
1-1-2001 کو ڈاؤن پے منٹ مہیا کر کے جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	14,900 <u>4,000</u>		4,000
31-12-2001 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	10,900 <u>3,455</u>	545	3,455
31-12-2002 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	7,445 <u>3,628</u>	372	3,628
31-12-2003 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	3,817 <u>1,100</u>	183	3,817
		1,100	14,900

$$\text{پے} = 14900 + 1100 = 16000$$

تین سال کے قریب ترین روپے میں لکھا گیا ہے۔

## مثال 2:-

میسرز رحمان اینڈ کمپنی لمیٹڈ نے میسرز حق انجینئرنگ لمیٹڈ سے چار سالہ مدت میں کرایہ دارانہ خریداری نظام کے تحت ایک ویگن خریدی۔ پہلی جنوری 2000 کو ڈلیوری کے وقت 12000 روپے قابل ادا تھے۔ بقیہ رقم 12000 روپے سالانہ کی بنیاد پر ہر 31 دسمبر تک ادا کرنا تھے۔ حق انجینئرنگ نے 5% سالانہ کی بنیاد پر مارک اپ لیا۔ ڈلیوری کے وقت ویگن کی قیمت 54600 روپے تھے۔ مارک اپ اور اصل زر معلوم کیجئے۔

## حل:-

تاریخ	نقد رقم	اقساط	
		مارک اپ	اصل زر
	54,600		
1-1-2000 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	<u>12,000</u>		12,000
	42,600		
31-12-2000 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	<u>9,870</u>	2,130	9,870
31-12-2001 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	<u>32,730</u>	1,637	10,363

## مثال 3:-

احمد نے ایک ٹرک کرایہ دارانہ خریداری نظام کے تحت 56000 روپے میں خریدا۔ پے منٹ کی ادائیگی 15000 روپے ڈاؤن اور 15000 روپے کی تین سالانہ اقساط ادا کرنا طے پایا۔ 5% سالانہ مارک اپ وصول کیا گیا۔ مارک اپ اور اصل زر الگ الگ معلوم کیجئے۔

## حل:-

تاریخ	نقد رقم	اقساط	
		مارک اپ	اصل زر
	56,000		
یکم جنوری کو جتنی کم قیمت ادا کی گئی۔	<u>15,000</u>		15,000
	41,000		
31 دسمبر کو جتنی کم قیمت ادا کی گئی۔	<u>12,950</u>	2,050	12,950
	28,050		
31 دسمبر کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	<u>13,597</u>	1,403	13,597
آخری سال دسمبر میں جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	14,453	547	14,453
		<u>4,000</u>	<u>56,000</u>

## مثال 4:-

ایک پبلشنگ کمپنی نے یکم جنوری 2000ء کو ایک پرنٹنگ مشین خریدی۔ مشین کی نقد قیمت 27,300 روپے تھی۔ یہ مشین کرایہ دارانہ خریداری کی بنیاد پر لی گئی۔ 6000 روپے معاہدہ پر دستخط کے وقت ادا کیے گئے اور اس کے بعد چار سال کے لیے 6000 روپے سالانہ کی بنیاد پر ادا کئے گئے جبکہ مارک اپ 5% سالانہ تھا۔ جدول بنائیے جو اقساط اور اصل زر کو ظاہر کرے۔  
حل یہ بھی بتائیے کہ پبلشرز کو کل کتنی قیمت ادا کرنی تھی؟

حل:- اصل زر اور مارک اپ کی رقم ہر قسط کے لیے علیحدہ علیحدہ درج ذیل ہے۔

تاریخ	نقد رقم	اقساط	
		مارک اپ	اصل زر
	27,300		
1-1-2000 تک جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	<u>6,000</u>		6,000
	21,300		
31-12-2000 تک جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	<u>4,935</u>	1,065	4,935
	16,365		
31-12-2001 تک جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	<u>5,182</u>	818	5,182
	11,183		
31-12-2002 تک جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	<u>5,441</u>	559	5,441
	5,742		
31-12-2003 تک جتنی کم رقم ادا کی گئی۔		<u>258</u>	<u>5,742</u>
		2,700	27,300

$$\text{روپے } 30,000 = 27,300 + 2,700 = \text{کل قابل ادا رقم}$$



## مثال 5:-

ایک لمیٹڈ کمپنی کرایہ دارانہ خریداری نظام (Lease) کی بنیاد پر ایک مشین 4600 روپے میں خریدنے پر رضامند تھی۔ جب مشین یکم جنوری 2001 کو لی گئی تو اس وقت 600 روپے ادا کئے گئے اور بقیہ رقم 800 روپے سالانہ اقساط کی شکل میں اور 5% مارک اپ پر ادا کرنا طے ہوئی۔ مارک اپ کی کل رقم اور کل اصل زر معلوم کیجئے۔ جبکہ مارک اپ الگ سے ادا کیا جائے۔

حل:-

تاریخ	نقد رقم	اقساط	
		مارک اپ	اصل زر
1-1-2001 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	4,600 600		600
31-12-2001 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	4,000 800	200	800
31-12-2002 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	3,200 800	160	800
31-12-2003 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	2,400 800	120	800
31-12-2004 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	1,600 800	80	800
31-12-2005 کو جتنی کم رقم ادا کی گئی۔	800	40	800
		600	4,600

نوٹ: اس خرید میں ہر قسط 800 روپے بمعہ مارک اپ ادا کی گئی۔

## مشق 4.5

1- درج ذیل میں ہر ایک کے لیے:

- (i) آپ کو فنانسنگ کے ذریعے ادائیگی کے لیے کتنی اضافی رقم ادا کرنا ہوگی؟  
(ii) اضافی رقم جو کہ نقد رقم کی ایک خاص شرح سے لی گئی ہو کو بیان کیجئے۔

	نقد رقم (روپوں میں)	فنانسنگ کی شرائط		
		ڈاؤن پے منٹ (روپوں میں)	ماہانہ اقساط (روپوں میں)	اقساط کی تعداد
(a)	روپے 360	روپے 50	روپے 40	10
(b)	روپے 900	روپے 150	روپے 75	12
(c)	روپے 25000	روپے 10000	روپے 500	36

2- پرویز ایک کھڑکی میں لگانے والا ایئر کنڈیشنرز 900 روپے میں خریدتا ہے۔ وہ 20% ادائیگی کرتا ہے اور بقیہ رقم اور مارک اپ 48 ماہ میں ادا کرتا ہے۔ اگر مارک اپ کی شرح 10% سالانہ ہو تو درج ذیل معلوم کیجئے۔

- (i) ماہانہ قسط کی قیمت  
(ii) نقد رقم ادا کرتے ہوئے کتنی بچت ہوگی؟

3- درج ذیل میں ہر ایک کے لیے:

- (i) سامان کی فنانشل قیمت معلوم کیجئے۔  
(ii) نقد رقم ادا کر کے وہ بچت بتلائے جو نقد رقم پر شرح سود کے ساتھ ادا کرنا تھی۔

	آئیٹم	نقد رقم (روپوں میں)	جمع کرانے والی رقم کی شرح	اقساط کی تعداد	ماہانہ اقساط (روپوں میں)
(a)	کمپیوٹر	200 روپے	10%	24	9 روپے
(b)	پرنٹر	450 روپے	15%	18	25 روپے
(c)	سکینر	1600 روپے	25%	30	52 روپے

4- درج ذیل میں ہر ایک کے لیے معلوم کیجئے۔

(i) ماہانہ قسط

(ii) کرایہ دارانہ خریداری کی صورت میں قیمت اور نقد قیمت کے درمیان فرق، نقد قیمت کے فیصد کی صورت میں

	نقد رقم	کرایہ دارانہ خریداری کی شرائط
(a)	روپے 800	100 روپیہ جمع کروانے پر بقیہ %8 مارک اپ ایک سال کے لیے
(b)	روپے 8000	200 روپیہ جمع کروانے پر بقیہ %10 مارک اپ اڑھائی سال کے لیے
(c)	روپے 1200	200 روپیہ جمع کروانے پر بقیہ %15 مارک اپ $1\frac{1}{3}$ سال کے لیے

5- ایک کمپیوٹر پیکیج خریدنے کے لیے نقد قیمت 3200 روپے تھی۔ ڈاؤن پے منٹ کی ادائیگی %15 بقیہ رقم اور مارک اپ 24 ماہ میں ادا کیے گئے۔ مارک اپ کی شرح %9.5 تھی۔

(i) پیکیج کی قیمت معلوم کیجئے اگر اسے کرایہ دارانہ خریداری پر لیا گیا ہو۔

(ii) کرایہ دارانہ خرید اور نقد خرید کی صورت میں قیمتوں کے درمیان فرق معلوم کیجئے۔

(iii) نقد رقم کی شرح کے لحاظ سے حاصل کیے گئے فرق کو بیان کیجئے۔

## جائزہ مشق 4

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) چیک کی طرح کا انسٹرومنٹ جسے بینک نے گاہک کی درخواست پر جاری کیا ہوا ہے:

- |                         |                            |
|-------------------------|----------------------------|
| (a) پے آرڈر کہتے ہیں    | (b) چیک کہتے ہیں           |
| (c) بینک ڈرافٹ کہتے ہیں | (d) ایکسیچنگ کابل کہتے ہیں |

(ii) وہ شخص یا چیز جس کی انسٹورنس کی جانی ہو اسے:

- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| (a) انسورر کہتے ہیں | (b) انسورڈ کہتے ہیں |
| (c) ڈرار کہتے ہیں   | (d) لیزی کہتے ہیں   |

(iii) کمپنی جو انسٹورنس کے عمل کو آگے بڑھاتی ہے اسے:

- |                      |                             |
|----------------------|-----------------------------|
| (a) انسورر کہتے ہیں  | (b) انسورڈ کہتے ہیں         |
| (c) انسورنش کہتے ہیں | (d) انسورنش پالیسی کہتے ہیں |

(iv) انسورڈ کے ذریعے ادا کی گئی قسط کو:

- |                     |                      |
|---------------------|----------------------|
| (a) بونس کہتے ہیں   | (b) ڈسکاؤنٹ کہتے ہیں |
| (c) پریمیم کہتے ہیں | (d) مارک اپ کہتے ہیں |

(v) قرض دینے پر جو رقم بینک واپس حاصل کرتا ہے اسے:

- |                      |                     |
|----------------------|---------------------|
| (a) مارک اپ کہتے ہیں | (b) پریمیم کہتے ہیں |
| (c) بونس کہتے ہیں    | (d) منافع کہتے ہیں  |

(vi) جمع کرائی گئی رقم پر بینک جو رقم ادا کرتا ہے اسے:

- |                     |                      |
|---------------------|----------------------|
| (a) منافع کہتے ہیں  | (b) بونس کہتے ہیں    |
| (c) پریمیم کہتے ہیں | (d) مارک اپ کہتے ہیں |

(vii) منافع / مارک اپ کی وصول کی گئی شرح کو:

- |                  |                     |
|------------------|---------------------|
| (a) ریٹ کہتے ہیں | (b) ٹائم کہتے ہیں   |
| (c) سود کہتے ہیں | (d) اصل زر کہتے ہیں |

(viii) بینک میں لگائی گئی مشین جو نقد رقم کو گاہک کو ادا کرتی ہے:

- (a) کمپیوٹر کہلاتی ہے  
(b) سکیز کہلاتی ہے  
(c) اے ٹی ایم کہلاتی ہے  
(d) کارڈ ریڈر کہلاتی ہے

(ix) تبادلہ کا بل جو ایک مخصوص بینکر سے ڈرا کیا گیا ہو اور طلب کرنے پر قابل ادانہ بیان کیا گیا ہو:

- (a) چیک کہلاتا ہے  
(b) پے آرڈر کہلاتا ہے  
(c) تبادلہ کہلاتا ہے  
(d) بینک ڈرافٹ کہلاتا ہے

2- خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i) تبادلہ کا بل جو ایک مخصوص بینکر سے ڈرا کیا گیا ہو اور طلب کرنے پر ناقابل بیان کیا گیا ہو۔ \_\_\_\_\_ کہلاتا ہے۔

(ii) چیک کی طرح کا انشرومنٹ جسے بینک نے گاہک کی درخواست پر جاری کیا ہو۔ \_\_\_\_\_ کہلاتا ہے۔

(iii) بینک کی طرف سے لگائی گئی مشین جو گاہکوں کو نقد رقم ادا کرتی ہے۔ \_\_\_\_\_ کہلاتی ہے۔

(iv) گاہک کی طرف سے بینک میں جمع شدہ رقم پر بینک جو رقم گاہک کو ادا کرتا ہے اسے \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(v) حاصل کردہ فی صد نفع کو \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(vi) قرضہ یا جمع کرائی رقم کا دورانیہ۔ \_\_\_\_\_ کہلاتا ہے۔

(vii) بینک قرضہ پر وصول کی گئی رقم کو \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(viii) انشورڈ کی طرف سے ادا کی گئی قسط کو \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(ix) جو کمپنی انشورنس کے کاروبار کو چلاتی ہے۔ \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(x) وہ شخص یا چیز جس کی انشورنس کی جاتی ہے اسے \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

3- راجیل نے 75,00,000 روپے مالیت کے ایک گھر کی انشورنس کرائی جو کہ 2% شرح کے حساب سے 5 سال کے لیے تھی۔ 5 سال میں ادا کی گئی رقم معلوم کیجئے۔ اگر قیمت میں کمی کی شرح 10% سالانہ ہو۔

4- نعیم نے اپنی فیکٹری کی انشورنس 3% کی شرح سے 3 سال کے لیے کروائی۔ جبکہ قیمت میں کمی کا ریٹ 5% سالانہ تھا۔ اگر پہلا پریمیم 21,000 روپے ہو تو فیکٹری کی مالیت معلوم کریں۔ اگر اس نے 2,00,000 روپے کا مطالبہ دو سال بعد کیا ہو تو اس نے کتنا فائدہ حاصل کیا؟

5- میسرز رحیم پرنٹرز نے کرایہ دارانہ خریداری نظام کے تحت لاہور کمپنی سے یکم جنوری 2000 کو 10,000 روپے نقد ادائیگی پر اور 10,000 روپے اقساط پر جو کہ ہر 31 دسمبر کو ادا کرنا ہوگی ایک مشین خریدی۔ مشین کی نقد قیمت 37,250 روپے ہے۔ لاہور کمپنی مارک اپ 5% سالانہ کی شرح سے وصول کرتی ہے۔ جدول تیار کیجئے جو کہ سالانہ اقساط (اصل زر + مارک اپ) ظاہر کرے۔

## خلاصہ

✦ ایک جاری کھاتہ (Running Account) جو کہ اپنی انتقال پذیری کی وجہ سے مسلسل چلتا رہتا ہے کرنٹ اکاؤنٹ کہلاتا ہے۔

✦ سیونگ اکاؤنٹ کفایت شعاروں کی حوصلہ افزائی کے لیے ہے جو کہ کم ذرائع والے لوگوں میں بچت کے رجحان کو ترقی دیتا ہے۔ بینک ماہانہ کی بنیاد پر جمع رقم پر 6 ماہ بعد برائے نام منافع رقم جمع کروانے والوں کو ادا کرتا ہے۔

✦ نفع اور نقصان شراکت داری اکاؤنٹ کم رقم سے کھولا جاتا ہے۔ جبکہ نفع یا نقصان کو سال کے آخر میں یا چھ ماہ بعد ادائیگی کے طریقہ کار کے مطابق ادا کیا جاتا ہے۔

✦ کسی اکاؤنٹ میں ایک خاص دورانیہ جو کہ 3 ماہ سے 5 سال تک ہو کے لیے جمع کرائی گئی رقم کو مخصوص مدت کی اکاؤنٹ کہلاتا ہے۔

✦ غیر ملکی کرنسی جیسا کہ پاؤنڈ، ڈالر اور یورو وغیرہ میں رکھا گیا اکاؤنٹ غیر ملکی کرنسی اکاؤنٹ کہلاتا ہے۔

✦ نیگوشی ایبل انسٹرومنٹ کا مطلب پرومیزی نوٹ، تبادلہ کا بل یا قابل ادا چیک ہے چاہے اسے آرڈرڈ کیا جائے یا بیئرر (Bearer) ہو انسٹرومنٹس کے لیے۔

✦ ایک شخص یا چیز جس کی انشورنس کی جارہی ہو انشورڈ کہلاتا ہے۔

✦ کمپنی جو انشورنس کا کاروبار چلاتی ہے اسے انشورر (Insurer) کہتے ہیں۔

✦ ایک ایسا شخص جسے انشورنس پالیسی جاری کی جاتی ہے جو کہ پالیسی سے فائدہ اٹھاتا ہے اسے انشورڈ کہتے ہیں۔

✦ دو پارٹیوں کے درمیان طے پانے والے معاہدہ کو انشورنس پالیسی کہتے ہیں۔

✦ انشورڈ کی طرف سے مقررہ دورانیہ کے بعد ادا کی جانے والی قسط کو پریمیم کہتے ہیں۔

✦ وقت کا دورانیہ جس پر دونوں پارٹیاں (انشورڈ اور انشورر) رضامند ہوں میچورٹی (Maturity) کہلاتا ہے۔

✦ وہ رقم جس پر رضامندی ظاہر کی گئی ہو اسے میچورٹی یا مدت ختم ہونے پر واپس کیا جانا ہوتا ہے اور اس رقم میں قسطوں میں ادا کی گئی اصل رقم اور منافع شامل ہوتا ہے۔ اسے بونس کہتے ہیں۔

✦ چیک ایک تبادلہ کا بل ہے جسے ایک مخصوص بینکر سے حاصل کیا جاتا ہے۔ جس پر رقم کا اندراج نہیں ہوتا ہے اور ضرورت کے مطابق اس پر رقم لکھی جاتی ہے۔

✦ پے آرڈر چیک کی طرح ہوتا ہے جسے بینک گاہک کی درخواست پر جاری کرتا ہے۔

✦ بینک ڈرافٹ رقم دینے کا ایک آرڈر ہے جسے بینک کی ایک شاخ اپنے ہی بینک کی دوسری شاخ کو رقم کا مطالبہ کرنے والے کو ادا کرنے کا پابند بناتا ہے۔

✦ آن لائن بینکنگ ایک نظام ہے جس میں کمپیوٹر سسٹم کو براہ راست تعلق سے ملایا جاتا ہے تاکہ ٹرانزیکشن کو بااختیار اور ممکن بنایا جاسکے۔

✦ اے ٹی ایم کارڈ ایک ادائیگی کا کارڈ ہے جسے ایک شخص کو کمپیوٹر پر مبنی اے ٹی ایم مشین کو استعمال میں لانے کے لیے جاری کیا جاتا ہے تاکہ گاہک اس سے رقم حاصل کر سکے۔

✦ ایک کارڈ جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ کارڈ رکھنے والے کو ایک کریڈٹ لائن دی گئی ہے جس سے کارڈ رکھنے والا چیزیں خرید سکتا ہے یا نقد رقم نکلا سکتا ہے۔

✦ اے ٹی ایم مشین کو بینک میں لگایا جاتا ہے تاکہ وہ گاہکوں کو نقد رقم دے۔



✦ گا بک جو رقم بینک میں برقرار رکھتا ہے اس رقم پر جو رقم بینک گا بک کو دیتا ہے اسے منافع کہتے ہیں۔

✦ رقم / ادھار لی گئی یا دی گئی رقم اصل زر کہلاتی ہے۔

✦ منافع کی حاصل کی گئی شرح کو ریٹ کہتے ہیں۔

✦ قرض یا جمع کرائی گئی رقم کے دوران یہ کو مدت کہتے ہیں۔

✦ جب منافع / مارک اپ کو اصل زر میں شامل کیا جائے تو اسے (Amount) کہتے ہیں۔

✦ بینک کے ذریعے واپس حاصل کی گئی رقم کو مارک اپ کہتے ہیں۔

✦ لیزنگ ایک معاہدہ ہے جسے اثاثہ کا مالک لیسر کو لیز پر حق دیتا ہے کہ وہ اس کے اثاثہ کو ایک خاص مدت کے لیے کرایہ کی ادائیگی کے تبادلہ میں استعمال کرے۔

✦ وہ رقم جو گا بک کو درخواست کے ساتھ بینک میں جمع کروانی ہوتی ہے۔ ڈاؤن پے منٹ کہلاتی ہے۔

# صارفین کی ریاضی

## CONSUMER MATHEMATICS

- ◀ ٹیکسز
- ◀ یوٹیلیٹی بلز
- ◀ ذاتی آمدنی

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- ◀ ٹیکس (براہ راست اور بالواسطہ) کیا ہے۔
- ◀ درج ذیل کو سادہ ترین ممکن طریقے سے کیسے واضح کیا جاتا ہے۔
  - سیلز ٹیکس
  - ایکسائز ڈیوٹی
  - پراپرٹی ٹیکس
  - انکم ٹیکس
- ◀ درج ذیل کا حساب کیسے کرتے ہیں۔
  - مختلف اشیاء پر لگایا گیا سیلز ٹیکس
  - مختلف اشیاء پر لگائی گئی ایکسائز ڈیوٹی
  - پراپرٹی ٹیکس جو کہ پراپرٹی پر لگایا گیا ہو
  - انکم ٹیکس جو انفرادی طور پر خاص آمدنی پر لگایا گیا ہو
- ◀ درج ذیل بلوں کی رقوم کا حساب کیسے کرتے ہیں۔
  - بجلی
  - گیس
  - ٹیلی فون
  - جبکہ سابقہ اور موجودہ میٹر ریڈنگ دی گئی ہو۔
- ◀ ذاتی آمدنی کیسے معلوم کرتے ہیں۔ (ہفتہ وار۔ ماہانہ اور سالانہ)
  - ایسے کارکن کی آمدنی جسے روزانہ کی بنیاد پر ادا کی جاتی ہے
  - ایک ورکر جس کو اضافی وقت (Over time) کی ادائیگی گھنٹوں کی بنیاد پر کی جائے اور علاوہ ازیں اس کی روزانہ کی اجرت بھی ادا کی جاتی ہے
  - ایک سبز مین جس کو اضافی وقت کی ادائیگی گھنٹوں کی بنیاد پر کی جائے اور ماہانہ تنخواہ کے علاوہ مختلف اشیاء کی فروخت پر کمیشن بھی ہو دیا جاتا ہے
- ◀ کسی سرکاری ملازم کی مجموعی آمدنی جس کو سرکاری پے سکیل یا غیر سرکاری پے سکیل کی بنیاد پر ادا کی جاتی ہے کیسے معلوم کرتے ہیں۔
- ◀ ضروری کٹوتی کے بعد باقی ماندہ آمدنی کیسے معلوم کرتے ہیں۔

## 5.1 ٹیکس TAXES

تعلیم، صحت، قومی دفاع وغیرہ پر قومی اخراجات پورے کرنے کے لیے گورنمنٹ مختلف اقسام کے ٹیکس اپنی عوام پر لگاتی ہے جو کہ براہ راست ٹیکس یا بالواسطہ ٹیکس پر مشتمل ہوتے ہیں۔

### 5.1.1 ٹیکس Tax

آمدنی یا نفع کے تناسب سے حاصل کی گئی رقم یا سامان کی قیمت خرید میں شامل اضافی رقم یا خدمات پر وہ رقم جو کہ ریاست کو ادا کی جاتی ہے ٹیکس کہلاتی ہے۔

#### براہ راست ٹیکس Direct Tax

یہ وہ ٹیکس ہے جو کہ آمدنی، جائیداد اور منافع پر انکم ٹیکس یا جائیداد ٹیکس کی شکل میں براہ راست حکومت افراد سے وصول کرتی ہے۔

#### بالواسطہ ٹیکس Indirect Tax

اس ٹیکس میں ڈیوٹیز، مشینری پر ٹیکس، سامان اور خدمات پر ٹیکس شامل ہیں۔ اس میں جنرل سیلز ٹیکس اور ویلیو ایڈڈ ٹیکس بھی شامل ہیں۔

### 5.1.2 بنیادی اصطلاحات Key Terms

#### سیلز ٹیکس Sales Tax

جب ہم کوئی چیز خریدتے ہیں تو ہمیں ٹیکس کی ایک خاص رقم جو کسی چیز کی قیمت خرید میں بطور اضافی ٹیکس کی صورت میں شامل ہوتی ہے ادا کرتے ہیں اسے سیلز ٹیکس کہتے ہیں۔ یہ ٹیکس قیمت فروخت پر مقررہ شرح فی صد سے ادا کیا جاتا ہے۔ پاکستان میں سامان کی خریداری پر یا خدمت کے عوض 16% سیلز ٹیکس لیا جاتا ہے۔

**مثال 1:-** ٹیلی ویژن پر 16% سیلز ٹیکس لگایا جاتا ہے۔ اگر ٹیلی ویژن پر درج قیمت 18000 روپے ہو تو ٹیلی ویژن خریدنے والے کو کل کتنی رقم ادا کرنی ہوگی۔

**حل:-** روپے 18000 = ٹیلی ویژن پر درج قیمت

$$\text{روپے } 2880 = \frac{16}{100} \times 18000 = \text{جتنا سیلز ٹیکس ادا کرنا ہوگا}$$

$$\text{روپے } 20880 = 18000 + 2880 = \text{ٹیلی ویژن خریدنے کے لیے کل رقم جو ادا کرنی ہوگی}$$

**مثال 2:-** ایک کمپیوٹر کی قیمت 34800 روپے ہے جس میں 16% سیلز ٹیکس شامل ہے۔ کمپیوٹر کی اصل قیمت کیا ہے؟

**حل:-** روپے 34,800 = کمپیوٹر کی قیمت بمعہ سیلز ٹیکس

روپے 100 = فرض کیا کمپیوٹر کی اصل قیمت

روپے 116 = 16% سیلز ٹیکس کے ساتھ کمپیوٹر کی قیمت

$$\text{اس کمپیوٹر کی اصل قیمت} = \frac{100}{116} \times 34,800 = \frac{3480000}{116}$$

$$= 30,000 \text{ روپے}$$

### ایکسائز ڈیوٹی Excise Duty

ایکسائز ڈیوٹی (Excise Duty) ٹیکس کی وہ شکل ہے جسے خریدار تیار شدہ چیز پر بوقت خرید ادا کرتا ہے۔

مثال کے طور پر کاریں الیکٹرونکس کی اشیاء اور کپڑے وغیرہ خریدتے وقت ہمیں قیمت خرید کے ساتھ یہ ٹیکس بھی ادا کرنا ہوتا ہے۔

**مثال 1:-** ایک آدمی ایک 1000 سی سی کار خریدنا چاہتا ہے۔ اسے کار کی قیمت پر 150% ایکسائز ڈیوٹی ادا کرنی ہوگی۔

اگر کار کی قیمت 5,00,000 روپے ہو تو اسے کل کتنی رقم ادا کرنا ہوگی؟

**حل:-** روپے 5,00,000 = کار کی قیمت

150% = ایکسائز ڈیوٹی کی شرح

$$5,00,000 \text{ روپے پر ایکسائز ڈیوٹی} = \frac{150}{100} \times 5,00,000$$

$$= 150 \times 5000 = 7,50,000 \text{ روپے}$$

$$7,50,000 + 5,00,000 = 12,50,000 \text{ روپے ادا کرنا ہوگی}$$

**مثال 2:-** ایک ٹیلی ویژن کی قیمت 14040 روپے ہے۔ جس میں 20% ایکسائز ڈیوٹی بھی شامل ہے۔ ٹیلی ویژن پر

لگائی گئی ایکسائز ڈیوٹی معلوم کیجئے۔ مزید یہ کہ ٹیلی ویژن کی قیمت بغیر ایکسائز ڈیوٹی معلوم کیجئے۔

**حل:-** روپے 14040 = ٹیلی ویژن کی قیمت بمعہ ایکسائز ڈیوٹی

20% = ایکسائز ڈیوٹی

روپے 100 = فرض کیا ٹیلی ویژن کی اصل قیمت

روپے 120 = 120% یکساں ڈیوٹی کے ساتھ ٹیلی ویژن کی قیمت

$$\text{ٹیلی ویژن کی اصل قیمت} = 14040 \times \frac{100}{120}$$

$$= 14040 \times \frac{5}{6}$$

$$= 2340 \times 5 = \text{روپے } 11700$$

پس ٹیلی ویژن کی قیمت ایکساں ڈیوٹی کے علاوہ 11700 روپے ہوگی۔

## Property Tax پراپرٹی ٹیکس

پراپرٹی ٹیکس زمین، گھر، فلیٹ یا عمارت کے مالکان سے 16% کی شرح سے پراپرٹی کی سالانہ آمدنی پر لیا جاتا ہے۔

**مثال :-** ایک فلیٹ کی سالانہ قیمت 14,00,000 روپے ہے۔ 16% سالانہ کی شرح سے قابل ادا پراپرٹی ٹیکس معلوم کیجئے۔

روپے 14,00,000 = فلیٹ کی سالانہ آمدنی

**حل :-**

16% = ٹیکس کی شرح

$$\text{قابل ادا ٹیکس} = 14,00,000 \times \frac{16}{100}$$

$$= 14,000 \times 16$$

$$= 2,24,000 \text{ روپے}$$

پس کل قابل ادا پراپرٹی ٹیکس 2,24,000 روپے ہے۔

## انکم ٹیکس Income Tax

یکم جولائی سے 30 جون تک کے مالی سال کے دوران تمام قسم کی آمدن پر ٹیکس کو انکم ٹیکس (Income Tax) کہتے ہیں۔ اگر

آمدن کا گوشوارہ (Income Return) 30 جون 2010 تک دائر کیا جائے۔ تو مالی سال 2009-2010 سمجھا جائے گا

اور ٹیکس کا سال 2009 کہلائے گا۔ ہر مالی سال کے اختتام پر ہر اس شخص کو جس کی آمدنی ٹیکس کے قابل ہو کو گوشوارہ داخل کرنا

ہوتا ہے جو سالانہ حاصل کی گئی آمدن کو ظاہر کرتا ہے۔ گورنمنٹ ایک خاص رقم کو ٹیکس سے مستثنیٰ (Exemption) قرار دے دیتی

ہے اور بقیہ رقم پر ٹیکس ادا کرنا ہوتا ہے۔

تنخواہ دار لوگوں کی قابل ٹیکس آمدن (Taxable Income) پر ٹیکس لگانے کے لیے بنیادی تنخواہ (Basic Pay) میں تمام

الائونسز (Allownces) شامل کئے جاتے ہیں۔

**مثال 1:-** ایک شخص کی سالانہ آمدنی بشمول تمام الاؤنسز 3,60,000 روپے ہے۔ جبکہ چھوٹ کی رقم 1,80,000 روپے ہے۔ اس شخص کو 0.75% کے حساب سے کتنا ٹیکس ادا کرنا ہوگا؟

**حل:-**

$$\text{شخص کی کل سالانہ آمدنی} = 3,60,000 \text{ روپے}$$

$$\text{چھوٹ کی رقم} = 1,80,000 \text{ روپے}$$

$$\text{قابل ٹیکس آمدن} = 3,60,000 - 1,80,000$$

$$= 1,80,000 \text{ روپے}$$

$$\text{ٹیکس کی شرح} = 0.75\%$$

$$\text{قابل ادا ٹیکس کی رقم} = 1,80,000 \times 0.75\%$$

$$= 1,80,000 \times \frac{0.75}{100}$$

$$= 1,80,000 \times \frac{75}{100 \times 100} = 18 \times 75$$

$$= 1350 \text{ روپے}$$

**مثال 2:-** ایک شخص کی کل سالانہ آمدنی 6,28,500 روپے ہے اور چھوٹ کی رقم 1,80,000 روپے ہے۔ بقیہ آمدنی پر 3.50% کی شرح سے کل قابل ادا ٹیکس معلوم کیجئے۔ جبکہ 15000 روپے انکم ٹیکس آمدنی میں سے پہلے ہی کاٹ لیا گیا ہو۔

**حل:-**

$$\text{کل سالانہ آمدن} = 6,28,500 \text{ روپے}$$

$$\text{چھوٹ کی رقم} = 1,80,000 \text{ روپے}$$

$$\text{ٹیکس کے قابل آمدنی} = 6,28,500 - 1,80,000$$

$$= 4,48,500 \text{ روپے}$$

$$\text{ٹیکس کی شرح} = 3.50\%$$

$$\text{کل قابل ادا ٹیکس} = 4,48,500 \times 3.50\%$$

$$= 4,48,500 \times \frac{350}{100 \times 100} = \frac{4485 \times 7}{2}$$

$$= \frac{31395}{2} = 15697.50 \text{ روپے}$$

$$\text{پہلے سے منہا شدہ ٹیکس} = 15,000 \text{ روپے}$$

$$\text{قابل ادا ٹیکس} = 15,697.50 - 15,000$$

$$= 697.50 \text{ روپے}$$

## مشق 5.1

- 1- ایک بائیسکل کی قیمت 3500 روپے ہے۔ اگر سیلز ٹیکس کی شرح 16% ہو تو ایسے 50 بائیسکلوں کی قیمت پر سیلز ٹیکس معلوم کیجئے۔
- 2- اگر ایک ایئر کنڈیشنر کی قیمت 40,000 روپے ہو تو اس پر 16% کی شرح سے سیلز ٹیکس کی رقم معلوم کیجئے۔ مزید ایئر کنڈیشنر کی قیمت بمعہ سیلز ٹیکس بھی معلوم کیجئے۔
- 3- 1300 سی سی اور 1600 سی سی دو کاروں کی بغیر ایکسائز ڈیوٹی کی قیمت بالترتیب 6,00,000 روپے اور 8,00,000 روپے ہے۔ اگر ان دونوں کاروں پر ایکسائز ڈیوٹی بالترتیب 200% اور 250% ہو تو دونوں کاروں کی قیمت بشمول ایکسائز ڈیوٹی معلوم کیجئے۔
- 4- ایک گھر اور ایک زمین سے سالانہ آمدنی بالترتیب 15,00,000 روپے اور 20,00,000 روپے ہے۔ ان دونوں میں سے ہر ایک پر 16% شرح سے پراپرٹی ٹیکس معلوم کیجئے۔
- 5- دو آدمیوں کی کل قابل ٹیکس آمدنی بالترتیب 2,50,000 روپے اور 3,10,000 روپے ہے۔ دونوں کی آمدنی پر 4.5% کی شرح سے قابل ادا انکم ٹیکس معلوم کیجئے۔
- 6- ایک شخص کی کل سالانہ آمدن 4,30,000 روپے ہے۔ اگر اسے قابل ادا ٹیکس پر 3000 روپے چھوٹ دی جاتی ہو تو اسے 4.5% کی شرح سے کتنا انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا؟
- 7- اگر ایک شخص کی کل سالانہ آمدنی 6,25,000 روپے ہو جبکہ چھوٹ 1,50,000 روپے ہو تو بقیہ آمدنی پر 4.5% کی شرح سے قابل ادا ٹیکس معلوم کیجئے۔
- 8- ایک شخص کی کل آمدنی 5,25,000 روپے ہے۔ جبکہ چھوٹ کی رقم 1,50,000 روپے ہے۔ اس کی بقیہ آمدنی پر 4.5% کی شرح سے قابل ادا ٹیکس معلوم کیجئے جبکہ 10,000 روپے کی رقم انکم ٹیکس کی مد میں پہلے ہی منہا کر لی گئی ہے۔

## 5.2 یوٹیلٹی بلز UTILITY BILLS

اس حصہ میں ہم یوٹیلٹی بلز پر غور کریں گے جو کہ بجلی، گیس اور ٹیلی فون سے متعلقہ ہوں گے۔

### بجلی کا بل Electricity Bill

گھریلو بجلی کا بل ہر گھر کے لیے ایک خاص رقم پر مشتمل ہوتا ہے۔ یہ رقم استعمال کیے گئے یونٹس کی مختلف قیمتوں پر مشتمل ہوتی ہے۔ درج ذیل میں یونٹس کی قیمتیں دی گئی ہیں۔

پہلے 100 یونٹس کی قیمت بحساب 2.65 روپے فی یونٹ  
 اگلے 200 یونٹس کی قیمت بحساب 3.64 روپے فی یونٹ  
 اگلے 700 یونٹس کی قیمت بحساب 6.15 روپے فی یونٹ  
 باقی استعمال کئے گئے یونٹس کی قیمت بحساب 7.41 روپے فی یونٹ

استعمال ہونے والے یونٹس ایک میٹر پر ریکارڈ ہوتے رہتے ہیں۔ مہینہ کے شروع اور آخر میں لی گئی ریڈنگز کا فرق مہینہ میں استعمال کی گئی بجلی کے یونٹس کو ظاہر کرتا ہے۔ ہر مہینہ کے بجلی کے بل میں ایکسائز ڈیوٹی، ٹیلی ویژن فیس اور انکم ٹیکس بھی شامل کیا جاتا ہے۔

**مثال :-** احسن ایک ماہ میں 1050 یونٹس بجلی استعمال کرتا ہے اسے مہینہ میں بجلی کا کتنا بل ادا کرنا ہوتا ہے۔

**حل :-**

استعمال کیے گئے یونٹس کی تعداد	= 1050
پہلے 100 یونٹس کی قیمت 2.65 روپے فی یونٹ کے حساب سے	= $100 \times 2.65 = 265$ روپے
اگلے 200 یونٹس کی قیمت 3.64 روپے فی یونٹ کے حساب سے	= $200 \times 3.64 = 728$ روپے
اگلے 400 یونٹس کی قیمت 6.15 روپے فی یونٹ کے حساب سے	= $700 \times 6.15 = 4305$ روپے
بقیہ 50 یونٹس کی قیمت 7.41 روپے فی یونٹ کے حساب سے	= $50 \times 7.41 = 370.50$ روپے
1050 یونٹس کی کل قیمت	= 5668.50 روپے.....(i)
1.5% کے حساب سے ایکسائز ڈیوٹی	= 85.03 روپے.....(ii)
بجلی کی ڈیوٹی	= 62.52 روپے.....(iii)
ٹیلی ویژن کی فیس	= 25.00 روپے.....(iv)
انکم ٹیکس	= 91.00 روپے.....(v)
(i) + (ii) + (iii) + (iv) + (v) کل رقم	= 5907.05 روپے
	= 5907 روپے یا



## گیس کا بل Gas Bill

بہت سے گھروں میں کھانا پکانے اور حرارت (Heat) حاصل کرنے کے لیے گیس استعمال ہوتی ہے۔ استعمال کی گئی گیس کی مقدار کو حجم (Volume) میں ماپا جاتا ہے اور اسے ایک میٹر کے ذریعے یونٹس (Units) میں ریکارڈ کیا جاتا ہے۔ ہر یونٹ میں 100 مکعب فٹ (Cubic Feet) گیس ہوتی ہے۔

01-07-2009 سے گھریلو صارفین کے لیے گیس سیلے کی شرح درج ذیل ہے۔

سلیب	گیس کا استعمال $Hm^3$ میں	روپے فی MMBTU
1	0 تا 0.50	80.65
2	0.50 تا 1	84.45
3	1 تا 2	153.73
4	2 تا 3	325.48
5	3 تا 4	423.42
6	4 تا 5	550.44
7	5 اور اس سے بالاتر	730.17

**مثال :-** گیس میٹر ریڈنگ سے ظاہر ہوتا ہے کہ  $4.872 Hm^3$  گیس ایک ماہ میں استعمال ہوئی۔ قابل ادا رقم بشمول جی ایس ٹی کی 16% شرح سے معلوم کیجئے۔

**حل :-** (i) ..... روپے 423.42 = گیس اخراجات  $4 Hm^3$  کے لیے

(ii) ..... روپے 84.45 = گیس اخراجات  $0.872 Hm^3$  کے لیے

(iii) ..... روپے 120.00 = کرایہ میٹر

روپے 627.87 = کل رقم = (i) + (ii) + (iii)

روپے 100.46 =  $16\% = \frac{16}{100} \times 627.87$  کی شرح سے جی ایس ٹی

موجودہ بل = 627.87 + 100.46

= 728.33 روپے

= 729 روپے

## ٹیلی فون کے بل Telephone Bills

ٹیلی فون کال کا خرچ تین چیزوں پر انحصار کرتا ہے۔

(i) کال کرنے والے اور کال سننے والے کے درمیان فاصلہ۔

(ii) دن کے اوقات یا ہفتہ کا وہ دن جس دن کال کی جاتی ہے۔

(iii) کال کا دورانیہ

ان تین اجزا کو مختلف انداز سے اکٹھا کر کے میٹر کے لیے ٹائم یونٹ بنایا جاتا ہے ہر یونٹ کی قیمت مقررہ شرح سے لی جاتی ہے۔

ایک صارف کا قوانین کے تحت ٹیلی فون کا بل درج ذیل ہے۔

(i) پی ٹی سی ایل اخراجات = روپے 1233  
(بشمول کرایہ لائن، لوکل کالز NWD کالز اخراجات،  
موبائل اخراجات، NED موبائل اخراجات)

(ii) ایف۔ ای۔ ڈی = روپے 259  
(فیڈرل ایکسٹرنل ڈیوٹی)

(iii) ڈبلیو۔ ایچ۔ ٹیکس = روپے 49  
(دو ہولڈنگ ٹیکس)

مقررہ تاریخ تک ادائیگی = روپے 1540

سرچارج = روپے 80

مقررہ تاریخ کے بعد ادائیگی = روپے 1620.00

موبائل فون کا بل درج ذیل طریقے سے بنایا جاتا ہے۔

190 منٹ کال کے اخراجات = روپے 570.00  
(3 روپے منٹ کی شرح سے)

ایس ایم ایس کے اخراجات = روپے 100.00  
(1 روپیہ پی SMS)

سی ای ڈی کے اخراجات = روپے 105.00  
(15 فی منٹ کی شرح سے)

کل قابل ادا رقم = روپے 775.00

## مشق 5.2

1- درج ذیل میں استعمال کی گئی گیس کی میٹر ریڈنگ دی گئی ہے۔ گیس کا بل دی گئی سلیب کے مطابق مکمل کیجئے۔ نیز اس میں کرایہ میٹر اور جی ایس ٹی بھی شامل کیجئے۔

(i)  $3.0756 \text{ Hm}^3$       (ii)  $4.285 \text{ Hm}^3$       (iii)  $2.796 \text{ Hm}^3$

(iv)  $1.378 \text{ Hm}^3$       (v)  $5.235 \text{ Hm}^3$       (vi)  $4.665 \text{ Hm}^3$

2- بجلی کے استعمال کی بناء پر ذیل میں استعمال کیے گئے یونٹس درج ہیں۔ حل شدہ مثال کی مدد سے بجلی کے بل مکمل کیجئے۔

(i) یونٹس 315      (ii) یونٹس 210

(iii) یونٹس 375      (iv) یونٹس 290

3- درج ذیل میں کی گئی ٹیلی فون کی کالز کی تعداد دی گئی ہے۔ کال کی شرح 5 روپے فی کال، سی۔ای۔ڈی %15 کی شرح اور ڈبلیو۔ایچ۔ٹیکس %4 کی شرح سے شامل کر کے ٹیلی فون بل مکمل کیجئے۔

(i) 530      (ii) 640      (iii) 750

(iv) 270      (v) 480      (vi) 315

## 5.3 ذاتی آمدن PERSONAL INCOME

کسی شخص کی انفرادی طور پر روزانہ، ہفتہ وار، ماہانہ یا سالانہ کی بنیاد پر حاصل کی گئی آمدنی کو اس شخص کی ذاتی آمدنی کہتے ہیں۔

### 5.3.1 ورکر کی ذاتی آمدنی Personal Income of a Worker

کسی شخص کی ذاتی آمدن دیکھنے کے لیے جو کہ روزانہ کی بنیاد پر کام کر رہا ہو ہم درج ذیل مثالیں دیکھتے ہیں۔

**مثال 1:-** درج ذیل میں فیکٹری ملازمین کی مجموعی روزانہ اجرت معلوم کیجئے۔ جبکہ ایک گھنٹہ کام کی اجرت 50 روپے ہو اور ایک دن 8 گھنٹوں پر مشتمل ہو۔

نام	کتنے گھنٹے کام کیا	50 روپے فی گھنٹہ کے حساب سے تنخواہ
1 اسلم	3	روپے $3 \times 50 = 150$
2 انور	5	روپے $5 \times 50 = 250$
3 دانیال	8	روپے $8 \times 50 = 400$
4 عبداللہ	7	روپے $7 \times 50 = 350$
5 علی	4	روپے $4 \times 50 = 200$
6 حمزہ	6	روپے $6 \times 50 = 300$
مجموعی اجرت		روپے $= 1650$

### اضافی وقت کے ساتھ روزانہ اجرت Daily wages along with over time

**مثال 2:-** دانیال ایک ہفتہ میں سوموار سے جمعہ تک 5 دن کام کرتا ہے۔ وہ روزانہ صبح 8 بجے کام شروع کرتا ہے اور شام 4 بجے ختم کرتا ہے۔ اسے روزانہ ایک گھنٹے کا وقفہ ملتا ہے اور وہ دو گھنٹے روزانہ اضافی وقت کام کرتا ہے۔ اگر اسے 60 روپے فی گھنٹہ معمول کی اجرت اور 80 روپے فی گھنٹہ اضافی وقت کے دیئے جائیں تو وہ ایک ماہ میں کتنے گھنٹے کام کرے گا۔ نیز اس کی مجموعی ماہانہ تنخواہ بھی معلوم کیجئے۔

**حل:-** گھنٹے  $8 =$  صبح 8 بجے سے شام 4 بجے تک گھنٹوں کی تعداد

چونکہ اسے روزانہ 1 گھنٹہ کا وقفہ ملتا ہے اس لیے وہ روزانہ 7 گھنٹے کام کرتا ہے۔

$$= 5 \times 7 = \text{ایک ہفتہ میں گھنٹوں کی تعداد}$$

$$= \text{گھنٹے } 35$$

$$\text{ایک مہینہ میں گھنٹوں کی تعداد} = 4 \times 35$$

$$= 140 \text{ گھنٹے}$$

$$\text{ایک ماہ کی تنخواہ 60 روپے فی گھنٹہ کے حساب سے} = 140 \times 60$$

$$= 8400 \text{ روپے}$$

چونکہ دانیال روزانہ 2 گھنٹے اضافی کام کرتا ہے اس لیے

$$\text{ایک ہفتہ میں جتنے گھنٹے اضافی کام کیا} = 2 \times 5$$

$$= 10 \text{ گھنٹے}$$

$$\text{ایک ماہ میں جتنے گھنٹے اضافی کام کیا} = 4 \times 10$$

$$= 40 \text{ گھنٹے}$$

$$\text{ایک ماہ میں اضافی کام کی تنخواہ} = 40 \times 80$$

$$= 3200 \text{ روپے}$$

$$\text{اضافی وقت کی تنخواہ} + \text{تنخواہ} = \text{مجموعی تنخواہ}$$

$$= 8400 + 3200$$

$$\text{مجموعی تنخواہ} = 11600 \text{ روپے}$$

**مثال 3:-** ایک سیلز مین کو 60 روپے فی گھنٹہ کے علاوہ فروخت کی گئی اشیاء پر 5% کمیشن بھی دیا جاتا ہے۔ اگر وہ دوکان

پر صبح 8 بجے سے رات 10 بجے تک کام کرتا ہو اور 20,000 روپے مالیت کی اشیاء فروخت کرتا ہو تو اس کی

روزانہ کی مجموعی آمدنی کیا ہوگی؟

$$\text{گھنٹے} = 14 = \text{صبح 8 بجے سے رات 10 بجے تک کام کا دورانیہ}$$

$$\text{روپے} = 60 = \text{تنخواہ فی گھنٹہ}$$

$$\text{روزانہ کی تنخواہ} = 14 \times 60$$

$$= 840 \text{ روپے}$$

$$5\% = \text{کمیشن کی شرح}$$

$$20,000 \text{ کا } 5\% = \frac{5}{100} \times 20000$$

$$= 1000 \text{ روپے}$$

$$\text{کمیشن} + \text{تنخواہ} = \text{روزانہ کی کل تنخواہ}$$

$$= 840 + 1000$$

$$= 1840 \text{ روپے}$$

## 5.3.2 تنخواہ دار شخص کی مجموعی آمدنی Gross Income of a Salaried Person

ایک تنخواہ دار شخص کی مجموعی آمدنی اس کی بنیادی تنخواہ، کرایہ مکان، کنونینس الاؤنس، مہنگائی الاؤنس، میڈیکل الاؤنس وغیرہ پر مشتمل ہوتی ہے۔

**مثال :-** اگر کسی شخص کی بنیادی تنخواہ 30,000 روپے مہینہ ہو اور اسے بنیادی تنخواہ کا 15% کرایہ مکان، 10% مہنگائی الاؤنس، 2000 روپے کنونینس الاؤنس اور 1000 روپے میڈیکل الاؤنس کے طور پر دیئے جائیں تو اس شخص کی مجموعی ماہانہ تنخواہ معلوم کیجئے۔

$$\text{بنیادی تنخواہ} = 30,000 \text{ روپے}$$

$$\begin{aligned} \text{کرایہ مکان} &= 15\% \text{ کا } 30,000 \\ &= \frac{15}{100} \times 30000 \\ &= 4500 \text{ روپے} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مہنگائی الاؤنس} &= 10\% \text{ کا } 30,000 \\ &= \frac{10}{100} \times 30000 \\ &= 3000 \text{ روپے} \end{aligned}$$

شخص کی ماہانہ تنخواہ کا بنیادی ڈھانچہ درج ذیل ہے۔

$$(i) \text{ بنیادی تنخواہ} = 30,000 \text{ روپے}$$

$$(ii) \text{ کرایہ مکان} = 4500 \text{ روپے}$$

$$(iii) \text{ مہنگائی الاؤنس} = 3000 \text{ روپے}$$

$$(iv) \text{ کنونینس الاؤنس} = 2000 \text{ روپے}$$

$$(v) \text{ میڈیکل الاؤنس} = 1000 \text{ روپے}$$

$$\text{مجموعی ماہانہ تنخواہ} = 40,500 \text{ روپے } ((i) + (ii) + (iii) + (iv) + (v))$$

### 5.3.3 کٹوتی کے بعد آمدنی Income after Deductions

کسی شخص کی حقیقی آمدنی یا وہ آمدنی جو وہ گھر لے کر جاتا ہے اس سے مراد ہے کہ وہ تنخواہ جو اسے مجموعی تنخواہ میں سے ضروری کٹوتیوں کے بعد ملتی ہے۔

**مثال :-** اگر ایک شخص کی مجموعی تنخواہ 25000 روپے ہو اور اسے 360 روپے انکم ٹیکس، 1500 روپے بینوییلٹی فنڈ، 1000 روپے جی پی فنڈ اور 300 روپے گروپ انشورنس کے ادا کرنا ہوں تو اس شخص کی آمدنی باقی آمدنی معلوم کیجئے۔

$$\text{مجموعی تنخواہ} = 25,000 \text{ روپے}$$

**حل :-**

کٹوتی

$$(i) \dots\dots\dots \text{انکم ٹیکس} = 360 \text{ روپے}$$

$$(ii) \dots\dots\dots \text{بینوییلٹی فنڈ} = 1500 \text{ روپے}$$

$$(iii) \dots\dots\dots \text{جی پی فنڈ} = 1000 \text{ روپے}$$

$$(iv) \dots\dots\dots \text{گروپ انشورنس} = 300 \text{ روپے}$$

$$\text{کل کٹوتی} = 3160 \text{ روپے} \{ (i), (ii), (iii), (iv) \text{ کا مجموعہ} \}$$

$$\text{حقیقی آمدنی} = \text{مجموعی تنخواہ} - \text{کٹوتی}$$

$$= 25000 - 3160$$

$$\text{حقیقی آمدنی} = 21,840 \text{ روپے}$$

### مشق 5.3

1- ایک خاتون کارکن ہفتہ میں 6 دن کام کرتی ہے۔ وہ صبح 7 بجے کام شروع کرتی ہے اور 4 بجے ختم کرتی ہے۔ اسے صبح کے وقت 15 منٹ کا وقفہ اور شام 45 منٹ کا وقفہ ملتا ہے۔ اگر ادائیگی کی شرح 40 روپے فی گھنٹہ ہو تو وہ ایک ہفتہ میں کتنا کام کرتی ہے اور اس کو کتنی ادائیگی ہوتی ہے؟

2- خالد ہفتہ میں 6 دن کام کرتا ہے اگر اسے 200 روپے یومیہ ادا کیا جائے تو اس کی مجموعی ماہانہ اجرت معلوم کیجئے۔

3- ہفتہ میں 6 دن روزانہ 8 گھنٹہ کی بنیاد پر کام کرتے ہوئے اسلم کو 70 روپے فی گھنٹہ ادائیگی ہوتی ہے۔ اضافی وقت کی ادائیگی 70 روپے فی گھنٹہ کا 1.5 گنا ہے۔ اگر وہ 40 گھنٹے اضافی وقت کام کرتا ہے تو اس کی ماہانہ مجموعی تنخواہ معلوم کیجئے۔

4- اگر ایک شخص کی بنیادی تنخواہ 18000 روپے، کرایہ مکان الاؤنس 3500 روپے، مہنگائی الاؤنس 3000 روپے اور کنونینس الاؤنس 1500 روپے اور میڈیکل الاؤنس 500 روپے ہو تو اس شخص کی مجموعی ماہانہ تنخواہ کیا ہوگی؟

5- اگر ایک شخص کی آمدنی میں کٹوتی کی شکل میں 400 روپے انکم ٹیکس، 1200 روپے بنیو ویلنیٹ فنڈ، 1500 روپے جی پی فنڈ اور 400 روپے گروپ انشورنس شامل ہوں تو 45000 روپے میں سے اس کے پاس کتنی رقم باقی بچے گی؟

6- نعمان ایک فیکٹری میں کام کرتا ہے جہاں 35 گھنٹوں کے ہفتہ میں 50 روپے فی گھنٹہ اجرت دی جاتی ہے۔ اضافی وقت کام کرنے پر 50 روپے فی گھنٹہ کا 1.5 گنا دیا جاتا ہے۔ وہ ہفتہ میں کتنا کمائے گا اگر وہ درج ذیل گھنٹے کام کرتا ہو۔

(i) گھنٹے 38

(ii) گھنٹے 48

(iii) گھنٹے 50

7- عبداللہ کی تنخواہ کی سلسلہ ظاہر کرتی ہے کہ اس نے ہفتہ میں 36 گھنٹے کام کے علاوہ 6 گھنٹے اضافی کام کیا ہے۔ اگر اس کی تنخواہ کی بنیادی شرح 60 روپے فی گھنٹہ اور اضافی وقت کی ادائیگی 60 روپے کا 1.5 گنا ہو تو عبداللہ کی ماہانہ مجموعی تنخواہ معلوم کیجئے۔



## جائزہ مشق 5

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) وہ رقم جو آمدنی کے تناسب سے کچھ چیزوں کی لاگت میں منافع کے اضافہ اور خدمات پر ریاست کو ادا کی جاتی ہے:

انکم ٹیکس کہلاتی ہے (d) جائیداد کا ٹیکس کہلاتی ہے (c) ایکسائز ڈیوٹی کہلاتی ہے (b) ٹیکس کہلاتی ہے (a)

(ii) وہ ٹیکس جو آمدنی، جائیداد اور منافع پر انکم ٹیکس، جائیداد ٹیکس وغیرہ کی شکل میں وصول کیا جاتا ہے اسے:

انکم ٹیکس کہتے ہیں (d) جائیداد ٹیکس کہتے ہیں (c) براہ راست ٹیکس کہتے ہیں (b) ٹیکس کہتے ہیں (a)

(iii) ڈیوٹیز، موٹروہیکل ٹیکس کی شکل میں ٹیکس کو:

انکم ٹیکس کہتے ہیں (d) جائیداد ٹیکس کہتے ہیں (c) براہ راست ٹیکس کہتے ہیں (b) بالواسطہ ٹیکس کہتے ہیں (a)

(iv) کسی چیز کی قیمت میں اضافی ٹیکس کو:

ایکسائز ڈیوٹی کہتے ہیں (d) انکم ٹیکس کہتے ہیں (c) سیلز ٹیکس کہتے ہیں (b) ٹیکس کہتے ہیں (a)

(v) کسی تیار کی گئی چیز پر ایک خریدار، خرید کے وقت جو ٹیکس ادا کرتا ہے اسے:

سیلز ٹیکس کہتے ہیں (d) انکم ٹیکس کہتے ہیں (c) ٹیکس کہتے ہیں (b) ایکسائز ڈیوٹی کہتے ہیں (a)

(vi) وہ ٹیکس جو زمین، گھر، فلیٹ یا عمارت کے مالک سے حاصل کیا جاتا ہے اسے:

غیر براہ راست ٹیکس کہتے ہیں (d) براہ راست ٹیکس کہتے ہیں (c) انکم ٹیکس کہتے ہیں (b) پراپرٹی ٹیکس کہتے ہیں (a)

(vii) وہ ٹیکس جو تمام قابل ٹیکس آمدنی پر لگایا جاتا ہے وہ:

ایکسائز ڈیوٹی کہلاتا ہے (d) انکم ٹیکس کہلاتا ہے (c) براہ راست ٹیکس کہلاتا ہے (b) سیلز ٹیکس کہلاتا ہے (a)

2- خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i) وہ رقم جو آمدنی کے تناسب سے اور منافع سے حاصل کر کے یا سامان کی قیمت میں جمع کر کے یا خدمات پر ریاست کو

ادا کی جاتی ہے وہ \_\_\_\_\_ کہلاتی ہے۔

(ii) جو ٹیکس جو آمدنی، جائیداد اور منافع پر انکم ٹیکس، جائیداد ٹیکس اور منافع کی شکل میں حاصل کیا جائے اسے \_\_\_\_\_

کہتے ہیں۔

(iii) ڈیوٹیز، موٹر وہیکل ٹیکس، سامان اور خدمات پر ٹیکس کو \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(iv) کسی چیز کی قیمت میں اضافی طور پر شامل ٹیکس کو \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(v) کسی تیار کی گئی چیز پر ایک خریدار، خرید کے وقت جو ٹیکس ادا کرتا ہے اسے \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(vi) وہ ٹیکس جو زمین، گھر، فلیٹ یا عمارت کے مالک سے حاصل کیا جاتا ہے اسے \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(vii) وہ ٹیکس جو تمام قابل ٹیکس آمدنی پر لگایا جاتا ہے اسے \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(viii) اگر ایک فلیٹ سے سالانہ آمدنی 6,00,000 روپے ہو تو 15% کی شرح سے قابل ادا ٹیکس \_\_\_\_\_ روپے ہوگا۔

(ix) 12000 روپے قیمت کے ٹیلی ویژن پر 10% کی شرح سے اضافی ٹیکس \_\_\_\_\_ روپے ہوگا۔

(x) 3,00,000 روپے کی رقم پر 150% کی شرح سے ایکسائز ڈیوٹی \_\_\_\_\_ روپے ہوگی۔

3- ایک ٹرائی سائیکل کی قیمت 4000 روپے ہے۔ اگر ایک سائیکل پر 16% کی شرح سے سیلز ٹیکس لیا جائے تو ایسے 30 سائیکلوں پر سیلز ٹیکس معلوم کیجئے۔

4- اگر ایک شخص کی مجموعی آمدنی 7,00,000 روپے ہو اور اس پر 1,50,000 روپے کی چھوٹ ہو تو 4.5% کی شرح سے کتنا ٹیکس حاصل ہوگا؟

5- گیس کا میٹر ایک ماہ کے دوران میں  $5.670 \text{ Hm}^3$  گیس کا استعمال ظاہر کرتا ہے۔ 16% جی ایس ٹی کی شرح کے ساتھ گیس کے بل کی قابل ادا رقم معلوم کیجئے۔

6- درج ذیل میں بجلی کے لیے استعمال کیے گئے یونٹس دیئے گئے ہیں۔

یونٹس 285 (iv) یونٹس 340 (iii) یونٹس 200 (ii) یونٹس 275 (i)

بجلی کے بل ان تمام اشیاء کو شامل کر کے بنائے جیسا کہ حل شدہ مثال میں ہے۔

7- ایک شخص کی ماہانہ مجموعی آمدنی 75000 روپے ہے۔ اگر 1500 روپے، 1200 روپے اور 1800 روپے بالترتیب انکم ٹیکس، بینو ویلنٹی فنڈ اور جی پی فنڈ منہا کئے گئے ہوں تو وہ شخص باقی کتنے روپے گھر لے جائے گا؟

## خلاصہ

✦ وہ رقم جو آمدنی کے تناسب سے اور منافع سے حاصل کر کے یا سامان کی قیمت خرید میں اضافہ کر کے یا خدمات پر ریاست کو ادا کی جاتی ہے ٹیکس کہلاتی ہے۔

✦ ”براہ راست ٹیکس“ آمدنی، جائیداد اور منافع پر انکم ٹیکس، پراپرٹی ٹیکس اور منافع پر ٹیکس کی شکل میں حاصل کیا جاتا ہے۔

✦ بالواسطہ ٹیکس میں ڈیوٹیز، موٹر وہیکلز، سامان، خدمات ٹیکس، (جی ایس ٹی) ٹیکس اور قیمت میں اضافی جمع شدہ ٹیکس شامل ہیں۔

✦ جب ہم کوئی چیز خریدتے ہیں تو ہم ایک خاص رقم بطور اضافی ٹیکس جو کہ چیز کی قیمت خرید میں شامل کرتے ہوئے ادا کرتے ہیں اسے سیلز ٹیکس کہتے ہیں۔ یہ ٹیکس عام طور پر قیمت فروخت کی ایک مقررہ شرح فی صد سے دیا جاتا ہے۔ پاکستان میں سامان کے خریدنے اور خدمات مہیا کرنے پر 16% کی شرح سے سیلز ٹیکس وصول کیا جاتا ہے۔

✦ ایکسائز ڈیوٹی ٹیکس کی وہ شکل ہے جو ایک خریدار ایک تیار کی گئی چیز پر خریدتے وقت ادا کرتا ہے۔

✦ پراپرٹی ٹیکس زمین، گھر، فلیٹ یا عمارات کے مالک سے ایک خاص شرح 16% کے حساب سے سالانہ آمدنی پر وصول کیا جاتا ہے۔

✦ انکم ٹیکس ہر سال یکم جولائی سے اگلے سال 30 جون کے درمیان قابل ٹیکس آمدن پر وصول کیا جاتا ہے۔

# قوت نما اور لوگار تھم

## EXPONENTS AND LOGARITHMS

- ◀ جذر اور مجذور
- ◀ قوانین قوت نما
- ◀ سائنسی ترقیم
- ◀ لوگار تھم
- ◀ لوگار تھم کے قوانین
- ◀ لوگار تھم کا استعمال

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- ◀ جذر اور مجذور کے تصورات۔
- ◀ کہ کسی جملہ کے جذر اور قوت نمائی شکل میں فرق کیا ہے۔
- ◀ کہ کسی جملہ کی حالت، جذر اور قوت نمائی حالت کو آپس میں تبدیل کیسے کرتے ہیں۔
- ◀ اساس، قوت نما اور قیمت میں واضح فرق۔
- ◀ حقیقی قوت نما والے جملوں کو مختصر کرنے کے لیے قوت نما کے قوانین کو استعمال کیا جاسکتا ہے۔
- ◀ کسی عدد کو سائنسی ترقیم اور عام ترقیم میں کیسے ظاہر کر سکتے ہیں۔
- ◀ کسی عدد کے لوگار تھم جس کا اساس 'a' ہو۔

$$(a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x, a > 0, y > 0 \text{ اور } a \neq 1)$$

- ◀ کاسن لوگار تھم یا کسی عدد کے لوگار تھم کا خاصہ اور مینیسما۔
- ◀ عدد کے لوگار تھم کو معلوم کرنے کے لیے جدول کا استعمال کیسے کرتے ہیں۔
- ◀ حقیقی لوگار تھم کا تصور اور اس کے جدول کو استعمال کرنے کا طریقہ۔
- ◀ صحت تبدیل قوانین کو کیسے ثابت کرتے ہیں۔

$$\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$$

$$\log_a \left( \frac{m}{n} \right) = \log_a m - \log_a n$$

$$\log_a m^n = n \log_a m$$

◀ لوگار تھم کے قوانین کو استعمال کرتے ہوئے ضرب، تقسیم اور قوت نما کے طویل عمل کو جمع اور تفریق جیسے آسان عمل میں کیسے تبدیل کر سکتے ہیں۔

## 6.1.1 جذر اور مجذور Radicals and Radicands

آئیے ایک حقیقی عدد  $\sqrt{5}$  کو دیکھتے ہیں۔ ہم اسے  $5^{\frac{1}{2}}$  بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہاں 5 ایک مثبت ناطق عدد ہے، 2 ایک مثبت حقیقی صحیح عدد اور  $\sqrt{5}$  ایک غیر ناطق عدد، اس لیے  $\sqrt{5}$  ایک جذر المربع ہے اسے 5 کا دوسرا جذر بھی کہتے ہیں۔ اسے دوسرے درجے کا جذر بھی کہتے ہیں۔  $\sqrt{\quad}$  جذر کی علامت (Radical Sign) اور 5 مجذور (Radicand) کہلاتا ہے۔

ایک اور حقیقی عدد  $\sqrt[3]{4}$  کو دیکھئے۔ ہم اسے  $4^{\frac{1}{3}}$  بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہاں 4 ایک مثبت ناطق عدد، 3 ایک مثبت صحیح عدد اور  $\sqrt[3]{4}$  غیر ناطق ہے۔ اس لیے  $\sqrt[3]{4}$  ایک جذر ہے اسے 4 کا تیسرا جذر بھی کہتے ہیں۔ یہ جذر المکعب بھی کہلاتا ہے۔

اس طرح ہر درجہ کا جذر ایک غیر ناطق عدد ہوتا ہے جس میں جذر المربع بھی شامل ہے۔ مثلاً

$$2\sqrt{3}, 4 + 3\sqrt{5}, 10 - 4\sqrt{6}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{9}{\sqrt{7}}$$

اگر 'a' ایک حقیقی عدد ہو اور 'n' ایک مثبت صحیح عدد، تب ایک عدد کی طاقت  $\frac{1}{n}$  لگانے سے  $a^{1/n}$  حاصل ہوتا ہے اسے 'a' کا 'n' واں جذر کہتے ہیں۔

$$\sqrt{2} = 2^{1/2}, \sqrt[3]{2} = 2^{1/3}, \sqrt[4]{5} = 5^{1/4} \text{ پس}$$

علامت  $\sqrt[n]{\quad}$  انڈیکس n کی جذری علامت کہلاتی ہے۔  $\sqrt[n]{a}$  میں 'a' مجذور (Radicand) کہلاتا ہے۔

$$\sqrt{a}, \text{ دوسرا جذر کہلاتا ہے۔}$$

$$\sqrt[3]{a}, \text{ تیسرا جذر کہلاتا ہے۔}$$

$$\sqrt[4]{a}, \text{ چوتھا جذر کہلاتا ہے۔}$$

$$\sqrt[n]{a}, \text{ n واں جذر کہلاتا ہے۔}$$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})$  اور  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$  ایک دوسرے کے کانجوگیٹ کہلاتے ہیں۔ ان دو جذروں کا حاصل ضرب ایک

ناطق عدد ہوتا ہے۔

## 6.1.2 کسی جملہ کی جذری اور قوت نمائی اشکال

### Radical Form and Exponential Form of an Expression

$\sqrt[3]{8}$  ایک جذری شکل ہے جبکہ  $(8)^{\frac{1}{3}}$  اس کی قوت نمائی شکل ہے۔ کیونکہ جذر کو کسری قوت نمائیں بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔

$5(3)^{1/2}$  کی جذری شکل  $5\sqrt{3}$  ہے۔

$$5(3)^{1/2} = 5\sqrt{3}$$

مندرجہ بالا مثالوں سے ہم دیکھتے ہیں کہ قوت نما کے قوانین کا اطلاق جذری جملوں پر بھی ہو سکتا ہے۔ پس کسی مثبت صحیح عدد 'n' اور مثبت ناطق عدد 'a' کے لیے ہم درج ذیل جدول (Table) پر غور کرتے ہیں۔

جذری شکل	قوت نما کی شکل
(i) $(\sqrt[n]{a})^n = a$	$(a^{1/n})^n = a$
(ii) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$	$(ab)^{1/n} = a^{1/n} b^{1/n}$
(iii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$(\frac{a}{b})^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$
(iv) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n} = a^{m/n}$

$$(i) (a^3b^2)^{1/4} \times (a^{1/3}b)^{3/4}$$

$$(ii) x^{1/4} \div x^{2/3} \text{ مختصر کیجئے۔} \text{ مثال 1:-}$$

حل:-

$$(i) (a^3b^2)^{1/4} \times (a^{1/3}b)^{3/4}$$

$$= a^{3/4}b^{2/4} \times a^{3/12}b^{3/4}$$

$$= a^{3/4}b^{1/2} \times a^{1/4}b^{3/4}$$

$$= a^{3/4} \times a^{1/4} \times b^{1/2} \times b^{3/4}$$

$$= a^{3/4+1/4} \times b^{1/2+3/4}$$

$$= a^{4/4} \times b^{2+3/4}$$

$$= a^1 b^{5/4}$$

$$= ab^{5/4}$$

$$(ii) x^{1/4} \div x^{2/3}$$

$$= x^{1/4} \times \frac{1}{x^{2/3}}$$

$$= x^{1/4} \cdot x^{-2/3}$$

$$= x^{1/4-2/3}$$

$$= x^{(3-8)/12}$$

$$= (x)^{-5/12}$$

$$= \frac{1}{x^{5/12}}$$

$$(i) \sqrt{(a^3b^2)^{1/4} (a^{1/3}b^{3/4})}$$

$$(ii) \sqrt{x^{1/4} \div x^{2/3}} \text{ مختصر کیجئے۔} \text{ مثال 2:-}$$

حل:-

$$(i) \sqrt{(a^3b^2)^{1/4} (a^{1/3}b^{3/4})}$$

$$= \sqrt{a^{3/4} \times b^{2/4} \times a^{1/3} \times b^{3/4}}$$

$$= \sqrt{a^{9+4/12} b^{2+3/4}}$$

$$= \sqrt{a^{13/12} b^{5/4}}$$

$$(ii) \sqrt{x^{1/4} \div x^{2/3}}$$

$$= \sqrt{\frac{x^{1/4}}{x^{2/3}}}$$

$$= \sqrt{x^{1/4} \times x^{2/3}}$$

$$= \sqrt{x^{3+8/12}}$$

$$= \sqrt{x^{11/12}}$$

### 6.1.3 جذری جملے کو قوت نما اور قوت نما جملے کو جذری جملے میں تبدیل کرنا۔

#### Transform an Expression into Radical Form to an Expression into Exponential Form and Vice Versa

آئیے ہم درج ذیل مثالیں دیکھتے ہیں۔

**مثال 1:-** قوت نما کی شکل میں تبدیل کیجئے۔

$$(i) \sqrt[4]{81a^{28}} \quad (ii) \sqrt[3]{27x^{18}} \quad (iii) \sqrt[3]{\frac{x^7 y^9}{z^4}}$$

$$\begin{aligned} (i) \sqrt[4]{81a^{28}} &= (81a^{28})^{1/4} \\ &= (3^4 a^{28})^{1/4} \\ &= 3^{4/4} \times a^{28/4} \\ &= 3^1 \times a^7 = 3a^7 \end{aligned}$$

حل:-

$$\begin{aligned} (ii) \sqrt[3]{27x^{18}} &= (27x^{18})^{1/3} \\ &= (3^3 \times x^{18})^{1/3} \\ &= 3^{3/3} \times x^{18/3} \\ &= 3^1 \times x^6 \\ &= 3x^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) \sqrt[3]{\frac{x^7 y^9}{z^4}} &= \left(\frac{x^7 y^9}{z^4}\right)^{1/3} \\ &= \frac{x^{7/3} y^{9/3}}{z^{4/3}} \\ &= \frac{x^{7/3} y^3}{z^{4/3}} = x^{7/3} y^3 z^{-4/3} \end{aligned}$$



مثال 2:- مختصر کیجئے اور جواب جذر کی شکل میں دیجئے۔

(i)  $\sqrt{18} \times \sqrt[5]{64}$     (ii)  $a^{1/2} \times a^{2/3} \div a^{3/4}$     (iii)  $(a^{1/3}b^{2/3})^{3/4} \div (a^{2/5}b^{1/3})^{5/6}$

(i)  $\sqrt{18} \times \sqrt[5]{64} = (18)^{1/2} \times (64)^{1/5}$  حل :-  
 $= (9 \times 2)^{1/2} \times (2^6)^{1/5}$   
 $= 9^{1/2} \times 2^{1/2} \times 2^{6/5}$   
 $= 9^{1/2} \times 2^{17/10}$   
 $= (9)^{1/2} \times (2^{17/5})^{1/2}$   
 $= \sqrt{9 \times 2^{17/5}}$

(ii)  $a^{1/2} \times a^{2/3} \div a^{3/4} = \frac{a^{1/2+2/3}}{a^{3/4}}$   
 $= a^{1/2+2/3-3/4}$   
 $= a^{6+8-9/12}$   
 $= a^{14-9/12}$   
 $= a^{5/12}$   
 $= \sqrt[12]{a^5}$

(iii)  $(a^{1/2}b^{2/3})^{3/4} \div (a^{2/5}b^{1/3})^{5/6} = a^{1/2 \times 3/4} \times b^{2/3 \times 3/4} \div a^{2/5 \times 5/6} \times b^{1/3 \times 5/6}$   
 $= (a^{3/8}b^{1/2}) \div a^{1/3}b^{5/18}$   
 $= a^{3/8-1/3}b^{1/2-5/18} = a^{9-8/24}b^{9-5/18}$   
 $= a^{9-8/24}b^{9-5/18} = a^{1/24}b^{4/18}$   
 $= \sqrt[24]{a} \sqrt[9]{b^2}$

## مشق 6.1

1- درج ذیل میں جذر اور مجذور بتائیے۔

(i)  $\sqrt{3}$

(ii)  $4 + 3\sqrt{a}$

(iii)  $\sqrt{11}$

(iv)  $8 - 2\sqrt{6}$

(v)  $\frac{\sqrt{5}}{7}$

(vi)  $\frac{9}{\sqrt{13}}$

2- درج ذیل کو قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

(i)  $\sqrt{a^3}$

(ii)  $\sqrt[5]{a^3}$

(iii)  $\frac{1}{\sqrt[p]{a^k}}$

(iv)  $\frac{1}{\sqrt[b]{a^k}}$

3- جذر کی شکل میں لکھ کر حل کیجئے۔

(i)  $(25)^{1/2}$

(ii)  $(64)^{1/3}$

(iii)  $(81)^{1/4}$

(iv)  $(27)^{1/3}$

(v)  $(27)^{2/3}$

(vi)  $8^{-1/3}$

(vii)  $(1000)^{2/3}$

(viii)  $(64)^{1/2}$

4- مختصر کیجئے اور جواب قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

(i)  $\sqrt{a^{16}}$

(ii)  $\sqrt[3]{a^{15}}$

(iii)  $\sqrt[3]{27a^9}$

(iv)  $\sqrt[3]{8a^9}$

(v)  $\sqrt[4]{x^{32}}$

(vi)  $\sqrt[4]{81x^{20}}$

(vii)  $\sqrt[3]{125x^9y^{15}}$

(viii)  $\sqrt{(8+y)^7}$

(ix)  $\sqrt[4]{16x^2y^6}$

(x)  $\sqrt[4]{\frac{x^5y^6}{z^2}}$

(xi)  $\sqrt[3]{\frac{8x}{x+y}}$

(xii)  $\sqrt[p]{\frac{y^n}{a^m}}$

5- مختصر کیجئے۔

(i)  $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$

(ii)  $\sqrt[5]{4} \times \sqrt[5]{128}$

(iii)  $\sqrt[5]{81} \times \sqrt[5]{27}$

(iv)  $\sqrt{2} \div \sqrt[2]{32}$

(v)  $\sqrt[5]{118} \div \sqrt[5]{2}$

(vi)  $\sqrt{27} \div \sqrt{81}$

(vii)  $a^{1/4} \times a^{2/3}$

(viii)  $x^{6/7} \times y^{1/4}$

(ix)  $(x^{3/4}y^{1/6})^6$

(x)  $(x^3y^2)^{1/2} \times (y^3x^4)^{-1/3}$

(xi)  $(x^3y^2)^{1/4} \times (x^{1/3}y)^{3/4}$

(xii)  $(a^{1/4}b^{1/3})^{-1/2} \div (a^{1/3}b^{1/4})^{-5}$

(xiii)  $(x^2y^3)^{1/5} \times (x^{1/3}y^2)^{1/4}$

## 6.2 قوت نماؤں کے قوانین / انڈیکس / LAWS OF EXPONENTS/INDICES

### 6.2.1 اساس، قوت نما اور قیمت Base, Exponent and Value

بعض اوقات درج ذیل اقسام کی ضرب ہمارے علم میں آتی ہیں۔

$$3 \times 3, 3 \times 3 \times 3, 3 \times 3 \times 3 \times 3, 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

انہیں مختصر شکل میں ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$3 \times 3 = 3^2$$

$$3 \times 3 \times 3 = 3^3$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

اور اسی طرح یہ سلسلہ جاری رہتا ہے۔

کسی حقیقی عدد 'a' اور مثبت صحیح عدد 'n' کے لیے ہم لکھتے ہیں۔

$$a^n = a \times a \times a \times a \dots \times a \quad (n \text{ مرتبہ})$$

یہاں 'a' کو ہم اساس (Base) اور n کو قوت نما یا انڈیکس (Exponents or index) کہتے ہیں۔  
تعریف کے مطابق ہم  $a^0 = 1$  لیتے ہیں۔ پس  $2^0 = 1, 3^0 = 1, (0.5)^0 = 1$  اور اسی طرح یہ سلسلہ جاری رہتا ہے۔

نوٹ: "a<sup>n</sup>" کو a کی n ویں (n<sup>th</sup>) پاور کہا جاتا ہے۔

$$3 \times 3 \times 3 = 3^3 \quad \text{مثال کے طور پر}$$

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$$

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4$$

$$8 \times 8 = 8^2$$

### 6.2.2 قوت نما کے قوانین اور ان کا استعمال

#### Laws of Exponents and their Applications

#### -1 قوتوں کی جمع کا قانون Law of Sum of Powers

کسی حقیقی عدد a جبکہ  $a \neq 0$  اور صحیح اعداد m اور n کے لیے اس قانون کو علامتی طور پر اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال 1:-

$$x^3 \times x^4 \times x^6 \quad \text{مختصر کیجئے۔}$$

$$\begin{aligned} x^3 \times x^4 \times x^6 &= x^{3+4+6} \\ &= x^{13} \end{aligned}$$

حل:-

مثال 2:-

$$x^3 \times y^4 \times x^4 \times y^3 \times x^5 \times y^5 \quad \text{مختصر کیجئے۔}$$

$$\begin{aligned} x^3 \times y^4 \times x^4 \times y^3 \times x^5 \times y^5 &= x^3 \times x^4 \times x^5 \times y^3 \times y^4 \times y^5 \\ &= x^{3+4+5} \times y^{3+4+5} \\ &= x^{12} \times y^{12} \\ &= x^{12} y^{12} \end{aligned}$$

حل:-

مثال 3:-

$$x^3 \times y^4 \times x^{-2} \times y^{-2} \quad \text{مختصر کیجئے۔}$$

$$\begin{aligned} x^3 \times y^4 \times x^{-2} \times y^{-2} &= x^3 \times x^{-2} \times y^4 \times y^{-2} \\ &= x^{3-2} \times y^{4-2} \\ &= xy^2 \end{aligned}$$

حل:-

## 2۔ قوتوں کی تفریق کے قوانین Laws of Subtraction of Powers

اگر  $a$  ایک حقیقی عدد ہو جبکہ  $a \neq 0$  اور  $m, n$  کوئی سے دو صحیح اعداد ہوں، تو

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

اس کی تین صورتیں ہیں۔

نمبر 1۔

جب:  $m > n$

$$\begin{aligned} \frac{a^m}{a^n} &= \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \dots}^m \text{ اے تک}}{\overbrace{a \times a \times a \times \dots}^n \text{ اے تک}} \\ &= a \times a \times a \times \dots \text{ اے تک } (m-n) \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

## نمبر 2-

جب:  $m = n$ 

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = \frac{a \times a \times a \times \dots \text{ } m \text{ اجزاء تک}}{a \times a \times a \times \dots \text{ } m \text{ اجزاء تک}} \quad \text{اس صورت میں}$$

$$= 1$$

$$= a^0$$

$$= a^{m-m}$$

$$= a^{m-n} [\because m = n]$$

ہم  $a^{-n}$  کو اس طرح بیان کرتے ہیں  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  جبکہ  $n$  صحیح عدد ہے اور  $a$  حقیقی عدد ہے اور  $a \neq 0$

## نمبر 3-

جب:  $m < n$ 

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times \dots \text{ } m \text{ اجزاء تک}}{a \times a \times a \times \dots \text{ } n \text{ اجزاء تک}} \quad \text{اس صورت میں}$$

$$= \frac{1}{a \times a \times a \times \dots \text{ } (n-m) \text{ اجزاء تک}}$$

$$= \frac{1}{a^{n-m}}$$

$$= a^{-(n-m)}$$

$$= a^{-n+m}$$

$$= a^{m-n}$$

پس  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  جبکہ  $m > n$  یا  $m = n$  یا  $m < n$

مثال 1:- مختصر کیجئے۔

حل:-

$$(i) \frac{x^3 \times x^5 \times x^6}{x^2 \times x^4 \times x}$$

$$(ii) \frac{x^3 \times x^4}{x^2 \times x^5}$$

$$(iii) \frac{x^4 \times x^5 \times x^6}{x^5 \times x^6 \times x^8}$$

$$(i) \frac{x^3 \times x^5 \times x^6}{x^2 \times x^4 \times x} = \frac{x^{3+5+6}}{x^{2+4+1}}$$

$$(ii) \frac{x^3 \times x^4}{x^2 \times x^5} = \frac{x^{3+4}}{x^{2+5}}$$

$$= \frac{x^{14}}{x^7}$$

$$= \frac{x^7}{x^7}$$

$$= x^{14-7}$$

$$= x^{7-7}$$

$$= x^7$$

$$= x^0$$

$$= 1$$

$$(iii) \frac{x^4 \times x^5 \times x^6}{x^5 \times x^6 \times x^8} = \frac{x^{4+5+6}}{x^{5+6+8}}$$

$$= \frac{x^{15}}{x^{19}}$$

$$= x^{15-19}$$

$$= x^{-4}$$

$$(i) x^{1/5} \times x^{2/5}$$

$$(ii) (x^2 y^3)^{1/6}$$

$$(iii) \left( \frac{x^{2/3}}{y^{3/4}} \right)^{1/2}$$

مثال 2:- مختصر کیجئے۔

حل:-

$$(i) x^{1/5} \times x^{2/5}$$

$$= x^{1/5+2/5}$$

$$= x^{3/5}$$

$$= x^{3/5}$$

$$(ii) (x^2 y^3)^{1/6}$$

$$= x^{2/6} \times y^{3/6}$$

$$= x^{1/3} y^{1/2}$$

$$(iii) \left( \frac{x^{2/3}}{y^{3/4}} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{(x^{2/3})^{1/2}}{(y^{3/4})^{1/2}}$$

$$= \frac{x^{1/3}}{y^{3/8}}$$

### 3- حاصل ضرب کی قوت کا قانون Law of Power of Product

اگر  $a, b$  حقیقی عدد ہوں اور  $a, b \neq 0$  اور  $n$  صحیح عدد ہو، تو

$$(i) (ab)^n = a^n b^n$$

$$(ii) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

مثال :- مختصر کیجئے۔

$$(i) (xy)^3 \quad (ii) (xy)^6 \quad (iii) \left(\frac{x}{y}\right)^5 \quad (iv) \left(\frac{x}{y}\right)^4$$

$$(i) (xy)^3 = x^3 y^3$$

$$(ii) (xy)^6 = x^6 y^6$$

$$(iii) \left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5}$$

$$(iv) \left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{x^4}{y^4}$$

حل :-

### 4- قوتوں کی قوت کا قانون Law of Power of Power

اگر  $a$  ایک حقیقی عدد ہو جبکہ  $a \neq 0$  اور  $m, n$  کوئی سے دو صحیح اعداد ہوں، تو

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

مثال :- مختصر کیجئے۔

$$(i) (x^3)^4 \quad (ii) (x^4)^6$$

حل :-

$$(i) (x^3)^4 \\ = x^{3 \times 4} \\ = x^{12}$$

$$(ii) (x^4)^6 \\ = x^{4 \times 6} \\ = x^{24}$$

## مشق 6.2

1- درج ذیل میں اساس (Base) اور قوت نما (Exponent) لکھیے۔

(i)  $16x^3$

(ii)  $x^9$

(iii)  $(4y)^3$

(iv)  $(x-2)^3$

(v)  $18x^5$

(vi)  $5x^{3/2} \times x^{1/2}$

مختصر کیجئے اور جواب مثبت قوت نما میں لکھیے۔

2-  $\sqrt{(a^2b^3)^6}$

3-  $\sqrt[9]{(x^{-4}y^3)^{-3}}$

4-  $(x^a y^{-b})^3 \times (x^3 y^2)^{-a}$

5-  $\left(\frac{16x^2}{y^{-2}}\right)^{-1/4}$

6-  $\left(\frac{27x^3}{8a^{-3}}\right)^{-2/3}$

7-  $\left(\frac{a^{-1/2}}{4c^2}\right)^{-2}$

8-  $\sqrt{a^{-2}b} \times 3\sqrt{ab^{-3}}$

9-  $\left(\frac{a^{-3}}{b^{-2/3}c}\right)^{-3/2} \div \frac{ab^2c}{a^2c}$

10-  $\frac{(a^4)^3 (a^{-1}b)^{10}}{a^2b^7}$

11-  $\frac{(x^3y)^3 (2xy)^{-2}}{4x^{-4}y^{-5}}$

12-  $\frac{(a^{-5})^3 \times (ab)^{15}}{a^{-1}b^2}$

13-  $a^5b^4c^2 \div abc$

14-  $(2ab^2)^2 (3abc^2)^{-2} \div (ab)^{-4} (bca)^5$

15-  $\frac{2^3 \times 6^5}{3^{-3} \times 4^{-4}}$

16-  $\frac{2^5 \times 9^{-1}}{27^{-3} \times 8^{-3}}$

17-  $(2^{-3}a^4b)^{-1} \times (4^{-2}b^{-5})$

حل کیجئے۔

18-  $(3^2)^5 \div 9^3 \times 27^{-1}$

19-  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \div \left(\frac{4}{9}\right)^3 \times \left(\frac{27}{16}\right)^{-1}$

20-  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \div \left(\frac{4}{9}\right)^{-2} \times 27$

21-  $\frac{5^4}{3^7} \times \left(\frac{9}{15}\right)^3 \div \frac{27}{25}$

22-  $a^{1/2}b^{2/3} \times a^{2/3}b^{1/4}$

23-  $a^{2/3}b^{5/6} \times a^{1/2}b \div (ab)^{1/3}$

24-  $(a^{1/2}b^{1/3}c^{1/4})^6$

25-  $(a^{1/2}b^{1/3})^{4/3} \div (a^{1/3}b^{1/4})^{1/2}$

26-  $a^{2/3} \times a^{1/2} \div a^{1/4}$



27- درج ذیل میں سے ہر ایک کو مختصر کیجئے۔

(i)  $4^{3/5} \times 4^{1/5}$

(ii)  $2^{1/8} \times 2^{3/8}$

(iii)  $x^{3/4} \times x^{2/5}$

(iv)  $5x^{1/3} \times 2x^{1/5}$

(v)  $\frac{1}{2}y^{3/7} \times 4y^{2/7}$

(vi)  $5x^{3/2} \times x^{1/2}$

28- درج ذیل میں سے ہر ایک کو مختصر کیجئے۔

(i)  $a^{2/3}b^{3/4} \times a^{1/3}b^{3/4}$

(ii)  $x^{3/5}y^{2/9} \times x^{1/5}y^{1/3}$

(iii)  $2ab^{1/3} \times 3a^{3/5}b^{4/5}$

(iv)  $6x^{3/7} \times \frac{1}{3}x^{1/4}y^{2/5}$

(v)  $x^3y^{1/2}z^{1/3} \times x^{1/6}y^{1/3}z^{1/2}$

29- درج ذیل میں سے ہر ایک کو مختصر کیجئے۔

(i)  $3^{1/2} \div 3^{1/3}$

(ii)  $\frac{x^{4/4}}{x^{5/9}}$

(iii)  $\frac{2x^{3/4}}{4x^{3/5}}$

(iv)  $\frac{25y^{3/5}}{20y^{1/4}}$

(v)  $x^3y^2 \div x^{4/3}y^{3/5}$

(vi)  $a^{5/9}b^{2/3} \div a^{2/5}b^{2/5}$

(vii)  $10x^{4/5}y \div 5x^{2/3}y^{1/4}$

(viii)  $\frac{5a^{3/4}b^{3/5}}{20a^{1/5}b^{1/4}}$

## 6.3 سائنسی ترقیم SCIENTIFIC NOTATION

سائنس کی کچھ شاخوں میں ہم بہت بڑے اور بہت چھوٹے اعداد استعمال کرتے ہیں۔ روشنی کی رفتار 186000 میل (یا 29933.24 کلومیٹر) فی سیکنڈ یا 30,000,000,000 سینٹی میٹر فی سیکنڈ ہے۔ ہائیڈروجن ایٹم کا رداس 0.00000073 سینٹی میٹر بالترتیب بہت بڑے اور بہت چھوٹے اعداد کی مثالیں ہیں۔ ایکس رے (X-Ray) کا طول موج 0.0000001 سینٹی میٹر ایک اور بہت چھوٹے عدد کی مثال ہے۔

ان اعداد کو لکھنے کا ایک آسان طریقہ دریافت کیا گیا ہے جسے سائنسی ترقیم کہتے ہیں۔

اس طریقہ میں ایک عدد 'a' کو دو اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے جن میں ایک عدد صفر اور 10 کے درمیان ہوتا ہے اور دوسرا عدد 10 کے مثبت یا منفی قوت نما کی صورت میں ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$a = b \times 10^n$$

**مثال 1:-** درج ذیل کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

(i) 100    (ii) 1000    (iii) 10000    (iv)  $\frac{1}{1000}$     (v)  $\frac{1}{10000}$

**حل:-**

(i)  $100 = 1 \times 10^2$

(ii)  $1000 = 1 \times 10^3$

(iii)  $10000 = 1 \times 10^4$

(iv)  $\frac{1}{1000} = 1 \times 10^{-3}$

(v)  $\frac{1}{10000} = 1 \times 10^{-4}$

**مثال 2:-** درج ذیل کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

(i) 190.85    (ii) 112.3    (iii) 12.35    (iv) 0.00018    (v) 0.0000281

(i)  $190.85 = \frac{9085}{100}$

**حل:-**

$$= 9085 \times 10^{-2}$$

$$= 9.085 \times 10^3 \times 10^{-2}$$

$$= 9.085 \times 10^{3-2}$$

$$= 9.085 \times 10^1$$

(ii) 112.3

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1123}{10} \\
 &= 1123 \times 10^{-1} \\
 &= 1.123 \times 10^3 \times 10^{-1} \\
 &= 1.123 \times 10^2 \\
 &= 1.123 \times 10^2
 \end{aligned}$$

(iii) 12.35

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1235}{100} \\
 &= 1235 \times 10^{-2} \\
 &= 1.235 \times 10^{+3} \times 10^{-2} \\
 &= 1.235 \times 10^{+3-2} \\
 &= 1.235 \times 10
 \end{aligned}$$

(iv) 0.00018

$$\begin{aligned}
 &= \frac{18}{100000} \\
 &= 18 \times 10^{-5} \\
 &= 1.8 \times 10 \times 10^{-5} \\
 &= 1.8 \times 10^{-4}
 \end{aligned}$$

(v) 0.0000281

$$\begin{aligned}
 &= \frac{281}{10000000} \\
 &= 281 \times 10^{-7} \\
 &= 2.81 \times 10^2 \times 10^{-7} \\
 &= 2.81 \times 10^{2-7} \\
 &= 2.81 \times 10^{-5}
 \end{aligned}$$

سائنسی ترقیم میں مثبت عدد کو دو اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے۔ اس میں پہلے عدد کو دیئے گئے عدد کے بائیں جانب سے پہلے ہندسے کے بعد اعشاریہ لگا کر حاصل کیا جاتا ہے۔

دوسرے عدد کے لیے 10 کا قوت نما حاصل کرنے کے لیے ہم ہندسوں کی تعداد کو گنتے ہیں جو کہ اعشاریہ کی اصل جگہ اور نئی جگہ کے درمیان آتے ہیں۔ اگر اعشاریہ کی جگہ بائیں جانب بدل دی جائے تو 10 کی قوت مثبت جب کہ دائیں جانب تبدیل کرنے سے 10 کی قوت منفی ہوگی۔

مثال 1:-

$18.42 \times 10^{-4}$  کو اعشاریہ کی شکل میں لکھیے۔

$$18.42 \times 10^{-4}$$

حل:-

$$= \frac{1842}{100} \times 10^{-4}$$

$$= \frac{1842}{100 \times 10^4}$$

$$= \frac{1842}{1000000}$$

$$= 0.001842$$

مثال 2:-

50,00,000 کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

$$50,00,000$$

حل:-

$$= 5 \times 10000000$$

$$= 5 \times 10^7$$

## مشق 6.3

درج ذیل کو سائنسی ترتیم میں لکھیے۔

1- 0.051

2- 89.99

3- 0.424

4- 2566324

5- 0.00000075

اعشاریہ کی شکل میں لکھیے۔

6-  $0.86 \times 10^4$

7-  $1.345 \times 10^{-5}$

8-  $5.1 \times 10^{-9}$

9-  $0.525 \times 10^{-7}$

10-  $636.5 \times 10^{-6}$

مختصر کیجئے اور جواب سائنسی ترتیم میں لکھیے۔

11-  $\frac{0.96 \times 10^7}{2 \times 10^4}$

12-  $\frac{2.61 \times 4 \times 10^8}{10^3}$

13-  $\frac{521 \times 10^3 \times 12}{2 \times 10^2}$

14-  $4.5 \times 10^5$  سینٹی میٹر کو میٹر میں تبدیل کیجئے اور جواب اعشاریہ کی شکل میں لکھیے۔

15- زمین کا رداس 6400 کلومیٹر ہے اسے میٹر میں تبدیل کیجئے اور جواب کو سائنسی ترتیم میں لکھیے۔

## 6.4 لوگار تھم LOGARITHM

الخوارزمی نے لوگار تھم کے لیے کافی کام کیا۔ سترویں صدی میں جان نیپیر (John Napier) نے لوگار تھم میں مزید تبدیلیاں کیں اور اس کے لیے ایک جدول تیار کیا۔ اس نے ان جدول کے لیے ایک اساس 'e' تیار کیا۔ 'e' کی قیمت 2.7183 ہے۔ جان نیپیر اور ہینری برگز (Henry Briggs) نے اساس 10 کا جدول تیار کرنے کے لیے ایک منصوبہ بنایا۔ بعد میں ہینری برگز نے منصوبہ کو مکمل کیا اور اساس 10 میں جدول تیار کیے۔

سوئٹزرلینڈ کے جابست برگی (Jobst Burgi) نے 1620 عیسوی میں اینٹی لوگار تھم کے لیے ایک جدول تیار کیا۔ اعداد پر حسابی عوامل کو ان جدولوں کے استعمال نے آسان بنا دیا۔

### 6.4.1 کسی عدد کا لوگار تھم Logarithm of a Number

فرض کیا،  $a > 0$  اور  $a \neq 1$  اگر  $y$  ایک مثبت عدد ہو تو

$$a^x = y \text{ اگر اور صرف اگر } x = \log_a y$$

$$a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x \quad \dots\dots\dots (1)$$

( $\log_a y$  کو اس طرح بیان کیجئے "y کا لوگار تھم اساس 'a' کے ساتھ")

**مثال 1:-** درج ذیل کو قوت نمائی شکل میں تبدیل کیجئے۔

(i)  $\log_5 25 = 2$       (ii)  $\log_3 \frac{1}{9} = -2$       (iii)  $\log_{10} 1000 = 3$       **حل:-**

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \text{ کو استعمال کرتے ہوئے۔}$$

$$(i) \log_5 25 = 2 \Leftrightarrow 5^2 = 25$$

$$(ii) \log_3 \frac{1}{9} = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$(iii) \log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1000$$

**مثال 2:-**  $\log_3(x+1) = 2$  کو حل کیجئے۔

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \text{ کو استعمال کرتے ہوئے۔}$$

$$3^2 = x+1 \quad \text{یا} \quad x+1 = 9$$

$$\Rightarrow x = 8$$

## 6.4.2 Common Logarithm کا من لوگار تھم

اساس 10 میں شمار کیا گیا لوگار تھم کا من لوگار تھم کہلاتا ہے۔ ہم  $\log_{10} m$  کو صرف  $\log m$  سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$10^1 = 10 \Leftrightarrow \log 10 = 1 ; 10^2 = 100 \Leftrightarrow \log 100 = 2$$

$$10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log 1000 = 3. \text{ etc.}$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1 \Leftrightarrow \log (0.1) = -1,$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01 \Leftrightarrow \log (0.01) = -2$$

مثال :- حل کیجئے۔ (i)  $\log (x-2) = 1$  (ii)  $\log (x+3) = 2$

حل :-

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \text{ کو استعمال کرتے ہوئے۔}$$

$$(i) \log (x-2) = 1 \Rightarrow 10^1 = x-2 \Rightarrow x-2 = 10$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 12}$$

$$(ii) \log (x+3) = 2 \Rightarrow x+3 = 10^2 \Rightarrow x+3 = 100$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 97}$$

### خاصہ اور مینٹیسیا Characteristic and Mantissa of a Log of a Number

کسی عدد کے لوگار تھم کے دو حصے ہوتے ہیں۔ صحیح عددی حصے کو خاصہ (Charatiristic) اور کسری حصے کو مینٹیسیا (mantissa) کہتے ہیں۔

مینٹیسیا کو ہمیشہ مثبت لیا جاتا ہے۔ جبکہ خاصہ صفر، مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔ جب خاصہ منفی ہو تو ہم اس ہندسے پر لائن (Bar) لگا دیتے ہیں۔ جو خاصہ کو ظاہر کرتا ہے۔ یعنی ہم '2' کو 2 لکھتے ہیں۔ 2.7638 کا مطلب  $-2 + 0.7638$  ہے۔

### 6.4.3 عدد کا لوگارٹھم معلوم کرنا Finding the Logarithm of a Number

#### عدد کا خاصہ Characteristic of a Number

فرض کیا عدد  $m \times 10^p$  ہے تب خاصہ 'p' ہے یا

(i) اگر کوئی عدد ایک یا ایک سے زیادہ ہے تو اس کا خاصہ (Characteristic) کس اعشاریہ (Decimal point) کی بائیں طرف کے ہندسوں کی تعداد سے ایک کم ہوگا۔

(ii) اگر کوئی عدد ایک سے کم ہو تو اس کا خاصہ منفی (Negative number) ہو گا جس کی عددی قیمت (Numerical value) عدد کے اعشاریہ اور پہلے نمایاں ہندسہ کے درمیان صفروں کی تعداد سے ایک زیادہ ہوگی۔

مثال کے طور پر:

عدد	معیاری شکل	خاصہ
5376.4	$5.3764 \times 10^3$	3
537.64	$5.3764 \times 10^2$	2
53.764	$5.3764 \times 10^1$	1
5.3764	$5.3764 \times 10^0$	0
0.5376	$5.376 \times 10^{-1}$	$\bar{1}$
0.0537	$5.37 \times 10^{-2}$	$\bar{2}$
0.00537	$5.37 \times 10^{-3}$	$\bar{3}$
0.0000046	$4.6 \times 10^{-6}$	$\bar{6}$

#### عدد کا مینٹیسیا Mantissa of a Number

ہم مینٹیسیا کو لوگارٹھم کے جدول کی مدد سے معلوم کرتے ہیں۔ مینٹیسیا معلوم کرنے کے لیے کسی عدد میں نقطہ اعشاریہ کے مقام کی کوئی اہمیت نہیں ہوتی۔ ہم اپنے آپ کو صرف چار ہندسی عدد کے مینٹیسیا معلوم کرنے تک پابند رکھتے ہیں۔ مثلاً

$\log(45)$ ,  $\log(.45)$ ,  $\log(.045)$ ,  $\log(.0045)$  کا مینٹیسیا ایک ہی عدد ہے۔ مینٹیسیا ہمیشہ صفر سے بڑا اور ایک سے چھوٹا عدد ہوتا ہے۔



(i) لوگار تھم کے جدول کی مدد سے 4385 کا مینٹیا معلوم کرنے کے لیے ہم 43 کی قطار میں سیدھا جاتے ہوئے عدد 8 کے کالم میں ایک عدد معلوم کرتے ہیں اس عدد میں پانچ کے کالم میں اسی قطار میں (Mean difference) معلوم کر کے جمع کرتے ہیں۔

$$\text{پس } 4385 \text{ کا مینٹیا } .6420 = (6415+5) \text{ ہے۔}$$

(ii) لوگار تھم کی مدد سے 438 کا مینٹیا معلوم کرنے کے لیے ہم 43 کی قطار میں سیدھا جاتے ہوئے 8 کے کالم میں عدد معلوم کرتے ہیں جو کہ 0.6415 ہے۔

(iii) لوگار تھم کی مدد سے 43 کا مینٹیا معلوم کرنے کے لیے ہم 43 کی قطار میں سیدھا جاتے ہوئے صفر کے کالم میں عدد معلوم کرتے ہیں جو کہ 0.6335 ہے۔

(iv) لوگار تھم کی مدد سے 4 کا مینٹیا معلوم کرنے کے لیے ہم 40 کی قطار میں سیدھا جاتے ہوئے صفر کے کالم میں عدد معلوم کرتے ہیں جو کہ 0.6021 ہے۔

پس ہمارے پاس:

$$\begin{array}{ll} \log 4385 = 3.6420 & \text{،} \quad \log 0.4385 = \bar{1}.6420 \\ \log 438.5 = 2.6420 & \text{،} \quad \log 0.04385 = \bar{2}.6420 \\ \log 43.85 = 1.6420 & \text{،} \quad \log 0.004385 = \bar{3}.6420 \\ \log 4.385 = 0.6021 & \text{،} \quad \log 0.0004385 = \bar{4}.6420 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log 43 = 1.6415 \quad \text{اور} \\ \log 4.3 = 0.6415 \end{array}$$

$$\log 4 = 0.6021 \quad \text{مزید}$$

$$\log .04 = \bar{2}.6021$$

### 6.4.4 اینٹی لوگار تھم کا تصور Concept of Antilogarithm

$\log m = n$  سے مراد ہے کہ  $n = m$  اینٹی لوگار تھم اسی طرح  $\log 1000 = 3$  سے مراد ہے  $1000 = 13$  اینٹی لوگار تھم

کسی عدد کا اینٹی لوگار تھم معلوم کرنے کے لیے ہم عدد کا کسری حصہ استعمال کرتے ہیں اور اینٹی لوگار تھم جدول کو اسی طرح پڑھتے ہیں جس طرح ہم لوگار تھم جدول پڑھتے ہیں۔

اینٹی لوگار تھم جدول سے متعلقہ عدد معلوم کرنے کے بعد ہم نقطہ اعشاریہ کو اس طرح لگاتے ہیں۔

جب خاصہ 'n' ہو تو نقطہ اعشاریہ کو (n+1)th ہندسہ کے بعد لگاتے ہیں۔

مثلاً اگر ہم 0.2346 اینٹی لوگار تھم معلوم کرنا چاہتے ہیں تو

$$\text{عدد} = 0.2346 \quad (i)$$

$$\text{خاصہ} = n = 0$$

$$\text{مینیسا} = .2346$$

اینٹی لوگار تھم جدول سے مینیسا 2346 کے لیے 1724 ہے۔ چونکہ خاصہ صفر ہے یعنی  $n = 0$  اس لیے نقطہ

اعشاریہ (0 + 1)th یا بائیں طرف سے پہلے ہندسہ کے بعد عدد 1724 میں لگایا جاتا ہے۔

$$\text{پس} \quad 0.2346 = 1.724 \text{ اینٹی لوگار تھم}$$

(ii) اگر ہم 2.6019 اینٹی لوگار تھم معلوم کرنا چاہتے ہیں تو

$$\text{عدد} = 2.6019$$

$$\text{خاصہ} = n = 2$$

$$\text{مینیسا} = .6019$$

اینٹی لوگار تھم جدول کی مدد سے مینیسا 6019 کے لیے عدد 3998 ہے۔ نقطہ اعشاریہ کو (2 + 1)th ہندسہ یا عدد کے بائیں

طرف سے تیسرے ہندسے کے بعد لگایا جائے گا۔

$$\text{پس} \quad 2.6019 = 399.8 \text{ اینٹی لوگار تھم}$$

(iii) اسی طرح اگر ہم 5.2612 اینٹی لوگار تھم معلوم کرنا چاہتے ہیں تو

$$\text{عدد} = 5.2612$$

$$\text{خاصہ} = n = 5$$

$$\text{مینیسا} = .2612$$

اینٹی لوگار تھم جدول کی مدد سے مینیسا 2612 کے لیے عدد 1825 ہے۔ نقطہ اعشاریہ (5 + 1)th ہندسہ کے بعد

عدد 1825 کے بائیں طرف سے چھٹے ہندسے کے بعد لگایا جائے گا۔

$$\text{پس} \quad 5.2612 = 182500.00 \text{ اینٹی لوگار تھم}$$

عدد 1825 میں چار ہندسے ہیں اس لیے ہم اس عدد کے دائیں طرف دو صفر لگا کر اسے 6 ہندسی عدد بنا دیتے ہیں۔ ان دو صفر کے بعد نقطہ اعشاریہ لگایا جائے گا۔

## نمبر 2-

جب خاصہ  $\bar{n}$  ہو تو نقطہ اعشاریہ اس طرح لگایا جاتا ہے کہ پہلا نمایاں عدد  $n$  ویں درجہ پر ہوگا۔  
مثلاً اگر ہم  $\bar{1}.4356$  اینٹی لوگار تھم معلوم کرنا چاہتے ہوں تو

$$\text{عدد} = \bar{1}.4356 \quad (i)$$

$$\text{خاصہ} = \bar{n} = \bar{1}$$

$$\text{مینٹیا} = .4356$$

اینٹی لوگار تھم جدول کی مدد سے مینٹیا 0.4356 کے لیے عدد 2727 ہے۔ چونکہ،  $\bar{n} = \bar{1}$  اس سے پہلا نمایاں عدد نقطہ اعشاریہ سے پہلے درجہ پر ہوگا۔

$$\text{پس} \quad \bar{1}.4356 = 0.2727 \quad \text{اینٹی لوگار تھم}$$

(ii) اسی طرح اگر ہم  $\bar{3}.1459$  اینٹی لوگار تھم معلوم کرنا چاہتے ہوں تو

$$\text{عدد} = \bar{3}.1459$$

$$\text{خاصہ} = \bar{n} = \bar{3}$$

$$\text{مینٹیا} = .1459$$

اینٹی لوگار تھم جدول کی مدد سے مینٹیا 0.1459 کے لیے عدد 1399 ہے۔ چونکہ،  $\bar{n} = \bar{3}$  اس لیے ایک نمایاں عدد نقطہ اعشاریہ کے بعد تیسرے درجہ پر ہوگا۔

$$\text{پس} \quad \bar{3}.1459 = 0.001399 \quad \text{اینٹی لوگار تھم}$$

مثال 1:- قیمت معلوم کیجئے۔

- (i)  $0.654$  اینٹی لوگارٹھم (ii)  $1.204$  اینٹی لوگارٹھم  
(iii)  $\bar{1}.3612$  اینٹی لوگارٹھم (iv)  $\bar{3}.4568$  اینٹی لوگارٹھم

(i)  $(0.654)$  اینٹی لوگارٹھم =  $4.508$  حل:-

(ii)  $(1.204)$  اینٹی لوگارٹھم =  $16.00$

(iii)  $(\bar{1}.3612)$  اینٹی لوگارٹھم =  $0.2297$

(iv)  $(\bar{3}.4568)$  اینٹی لوگارٹھم =  $0.002863$

مثال 2:-

(i)  $\bar{3}.4619$  اور  $\bar{1}.3612$ ,  $3.1946$ ,  $\bar{2}.0018$  کو جمع کیجئے۔

(ii)  $2.1375$  میں سے  $4.6342$  تفریق کیجئے۔

(iii)  $\bar{3}.4103$  کو  $6$  سے ضرب دیجئے۔

(iv)  $\bar{5}.1820$  کو  $15$  سے تقسیم کیجئے۔

(i)  $\bar{1}.3612 + 3.1946 + \bar{2}.0018 + \bar{3}.4619$  حل:-

$$= -1 + 0.3612 + 3.1946 - 2 + 0.0018 - 3 + 0.4619$$

$$= -6 + (.3612 + 3.1946 + .0018 + .4619)$$

$$= -6 + (4.0195)$$

$$= -2 + 0.0195$$

$$= \bar{2}.0195$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad 2.1375 - \bar{4}.6342 &= 2.1375 - [-4 + .6342] \\
 &= 2.1375 + 4 - .6342 \\
 &= 6.1375 - .6342 \\
 &= 5.5033
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad \bar{3}.4103 \times 6 &= (-3 + .4103) \times 6 \\
 &= -18 + 2.4618 \\
 &= (-18 + 2) + .4618 \\
 &= -16 + .4618 \\
 &= \bar{16}.4618
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad (\bar{5}.1820) \div 15 &= (-5.1820) \div 15 \\
 &= (-5 + .1820) \div 15 \\
 &= -4.9180 \div 15 \\
 &= -0.3212 \\
 &= -1 + (1 - (.3212)) \\
 &= \bar{1}.6788
 \end{aligned}$$

مثال 3:-

(i) اگر  $\log x = 0.5019$  ہو تو  $x$  معلوم کیجئے۔

(ii) اگر  $\log x = \bar{2}.5321$  ہو تو  $x$  معلوم کیجئے۔

(i)  $\log x = 0.5019$

حل:-

$\log x$  کا خاصہ  $= 0$

$\log x$  کا مینٹیا  $= 0.5019$

ابنٹی لوگار ہم کے جدول سے مینٹیا کے لیے ہمارے پاس جو عدد ہے وہ

$$0.5019 = 3170 + 7 = 3177$$

چونکہ خاصہ صفر ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ  $(0 + 1)$  ویں ہندسے یعنی 3 کے بعد لگایا جاتا ہے۔

$$x = 0.0519 \text{ اینٹی لوگارٹھم}$$

$$x = 3.177$$

$$(ii) \log x = \bar{2}.5321$$

$$\log x \text{ کا خاصہ} = \bar{2}$$

$$\log x \text{ کا مینٹسا} = .5321$$

اب اینٹی لوگارٹھم جدول میں ہمارے پاس مینٹسا کے لیے عدد ہے۔

$$.5321 = 3404 + 1 = 3405$$

چونکہ خاصہ  $\bar{2}$  ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ کو اس طرح لگایا جائے گا کہ ہمارے پاس پہلا نمایاں عدد اعشاریہ کے بعد دوسرے درجہ پر ہو۔

$$x = \bar{2}.5321 \text{ اینٹی لوگارٹھم}$$

$$= 0.03405$$

$$x = 0.03405 \text{ پس}$$

## مشق 6.4

1- درج ذیل میں دیئے گئے اعداد کا خاصہ لکھیے۔

(i) 6350

(ii) 2035.6

(iii) 2.057

(iv) 0.8657

(v) 0.0732

(vi) 0.000721

2- درج ذیل کی قیمت لکھیے۔

(i)  $\log 52.13$

(ii)  $\log 6.304$

(iii)  $\log 0.6127$

(iv)  $\log 0.0057$

(v)  $\log 0.00003$

3- اگر  $\log 6374 = 3.8044$  ہو تو درج ذیل کی قیمت معلوم کیجئے۔

(i)  $\log 6.374$

(ii)  $\log 0.6374$

(iii)  $\log 0.00637$

4- (i) اگر  $\log x = \bar{2}.0374$  ہو تو  $x$  کی قیمت معلوم کیجئے۔

(ii) اگر  $\log x = 0.1597$  ہو تو  $x$  کی قیمت معلوم کیجئے۔

(iii) اگر  $\log x = 4.4236$  ہو تو  $x$  کی قیمت معلوم کیجئے۔

## 6.5 لوگارٹھم کے قوانین LAWS OF LOGARITHM

$$(i) \log_a (m n) = \log_a m + \log_a n$$

$$(ii) \log_a \left( \frac{m}{n} \right) = \log_a m - \log_a n$$

$$(iii) \log_a m^n = n \log_a m$$

ثبوت:

(i) اگر  $m$  اور  $n$  مثبت حقیقی اعداد ہوں اور  $a$  ایک ممکن اساس ہو تو فرض کیجئے کہ

$$x = \log_a m \dots\dots\dots(i)$$

$$y = \log_a n \dots\dots\dots(ii)$$

$$a^x = m, \quad a^y = n \quad \text{اس لیے}$$

$$m n = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \text{پس}$$

$$\log_a m n = x + y \quad \text{اس طرح}$$

$$= x + y$$

$\log_a m n = \log_a m + \log_a n$  اور  $y$  کی قیمتیں (i) اور (ii) کی مدد سے درج کرنے سے

(ii) اگر  $m$  اور  $n$  مثبت حقیقی اعداد ہوں اور  $a$  ایک ممکن اساس ہے (جبکہ  $a > 1$ ) تو فرض کیجئے کہ۔

$$x = \log_a m \dots(i)$$

$$y = \log_a n \dots(ii)$$

$$a^x = m, \quad a^y = n \quad \text{اس لیے}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$= a^x \cdot a^{-y}$$

$$= a^{x-y}$$

$$\log_a \left( \frac{m}{n} \right) = x - y$$

$$\log_a \left( \frac{m}{n} \right) = \log_a m - \log_a n \quad \text{اور } y \text{ کی قیمتیں (i) اور (ii) کی مدد سے درج کرنے سے}$$

$$x = \log_a m \quad \text{(iii) فرض کیجئے کہ}$$

$$a^x = m$$

$$(a^x)^n = m^n \quad \text{اور}$$

$$m^n = (a^x)^n$$

$$= a^{nx}$$

$$\log_a m^n = nx \quad \text{اس لیے}$$

$$\log_a m^n = n \log_a m \quad \text{اس کی قیمت درج کرنے سے}$$

## 6.6 لوگارٹھم کا استعمال APPLICATION OF LOGARITHM

اساس 10 میں لوگارٹھم کو کا من لوگارٹھم کہتے ہیں۔ ہم  $\log_{10} m$  کو  $\log m$  سے ظاہر کریں گے۔

$$(i) \quad 3 \log 2 + \log 5 = \log 40$$

مثال 1:- ثابت کیجئے۔

$$(ii) \quad \log 2 + 2 \log 5 - \log 3 - 2 \log 7 = \log \left( \frac{50}{147} \right)$$

$$(iii) \quad \log \left( \frac{9}{14} \right) + \log \left( \frac{35}{24} \right) - \log \left( \frac{15}{16} \right) = 0$$

$$(iv) \quad 7 \log \left( \frac{16}{15} \right) + 5 \log \left( \frac{25}{24} \right) + 3 \log \left( \frac{81}{80} \right) = \log 2$$



$$(i) \text{ L.H.S} = 3 \log 2 + \log 5$$

حل :-

$$= \log 2^3 + \log 5$$

$$= \log 8 + \log 5$$

$$= \log (8 \times 5)$$

$$= \log 40$$

$$= \text{R.H.S}$$

$$3 \log 2 + \log 5 = \log 40$$

پس

$$(ii) \text{ L.H.S} \log 2 + 2 \log 5 - \log 3 - 2 \log 7$$

$$= \log 2 + \log 5^2 - (\log 3 + 2 \log 7)$$

$$= \log 2 + \log 25 - (\log 3 + \log 7^2)$$

$$= \log (2 \times 25) - (\log 3 + \log 49)$$

$$= \log (50) - (\log 3 \times 49)$$

$$= \log 50 - \log 147$$

$$= \log \left( \frac{50}{147} \right)$$

$$= \text{R.H.S}$$

$$(iii) \text{ L.H.S} = \log \left( \frac{9}{14} \right) + \log \left( \frac{35}{24} \right) - \log \left( \frac{15}{16} \right)$$

$$= \log \left( \frac{9}{14} \times \frac{35}{24} \right) - \log \left( \frac{15}{16} \right)$$

$$= \log\left(\frac{3}{2} \times \frac{5}{8}\right) - \log\left(\frac{15}{16}\right)$$

$$= \log\left(\frac{15}{16}\right) - \log\left(\frac{15}{16}\right)$$

$$= 0$$

$$= \text{R.H.S}$$

$$\log\left(\frac{9}{14}\right) + \log\left(\frac{35}{25}\right) - \log\left(\frac{15}{16}\right) = 0 \quad \text{پس}$$

$$(iv) \text{ L.H.S} = 7 \log\left(\frac{16}{15}\right) + 5 \log\left(\frac{25}{24}\right) + 3 \log\left(\frac{81}{80}\right)$$

$$= \log\left(\frac{16}{15}\right)^7 + \log\left(\frac{25}{24}\right)^5 + \log\left(\frac{81}{80}\right)^3$$

$$= \log\left[\left(\frac{16}{15}\right)^7 \times \left(\frac{25}{24}\right)^5 \times \left(\frac{81}{80}\right)^3\right]$$

$$= \log\left[\left(\frac{2^4}{3 \times 5}\right)^7 \times \left(\frac{5^2}{2^3 \times 3}\right)^5 \times \left(\frac{3^4}{2^4 \times 5}\right)^3\right]$$

$$= \log\left[\frac{2^{28}}{3^7 \times 5^7} \times \frac{5^{10}}{2^{15} \times 3^5} \times \frac{3^{12}}{2^{12} \times 5^3}\right]$$

$$= \log\left[2^{28-15-12} \times 5^{10-7-3} \times 3^{12-7-5}\right]$$

$$= \log\left[2^1 \times 5^0 \times 3^0\right]$$

$$= \log[2 \times 1 \times 1]$$

$$= \log 2$$

$$= \text{R.H.S}$$

مثال 2:- حل کیجئے۔

$$(i) \frac{\log 32}{\log 4} \quad (ii) \frac{\log 27}{\log 9}$$

$$(i) \frac{\log 32}{\log 4} = \frac{\log 2^5}{\log 2^2} \quad \text{حل:-}$$

$$= \frac{5 \log 2}{2 \log 2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

$$\frac{\log 32}{\log 4} = \frac{5}{2} \quad \text{پس}$$

$$(ii) \frac{\log 27}{\log 9} = \frac{\log 3^3}{\log 3^2}$$

$$= \frac{3 \log 3}{2 \log 3}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\frac{\log 27}{\log 9} = \frac{3}{2} \quad \text{پس}$$

مثال 3:- لوگار تھم کا جدول استعمال کیے بغیر مختصر کیجئے۔

$$(i) \log 5 + \log 6 - \log 2$$

$$(ii) \log 88.44 + \log 66.76 - \log 48.55$$

$$(iii) \log 7.44 + \log 5 + \log 99 - \log 7$$

$$(i) \log 5 + \log 6 - \log 2$$

$$= \log (5 \times 6) - \log 2$$

$$= \log \left( \frac{5 \times 6}{2} \right)$$

حل:-

$$(ii) \log 88.44 + \log 66.76 - \log 48.55$$

$$= \log (88.44 \times 66.76) - \log 48.55$$

$$= \log \left( \frac{88.44 \times 66.76}{48.55} \right)$$

$$(iii) \log 7.44 + \log 5 + \log 99 - \log 7$$

$$= \log (7.44 \times 5 \times 99) - \log 7$$

$$= \log \left( \frac{7.44 \times 5 \times 99}{7} \right)$$

مثال 4:-  $\frac{25.36 \times 2.4569}{847.5}$  کو لوگار تھم کے جدول کی مدد سے حل کیجئے۔

حل:- فرض کیا:  $x = \frac{25.36 \times 2.4569}{847.5}$

تب  $\log x = \log \left( \frac{25.36 \times 2.4569}{847.5} \right)$

$$= \log (25.36 \times 2.4569) - \log (847.5)$$

$$= \log (25.36) + \log (2.4569) - \log (847.5)$$

$$= 1.4041 + 0.3903 - 2.9281$$

$$= -1.1337 = -1 - 0.1337$$

$$= -1 - 1 + 1 - 0.1337$$

$$= -2 + 0.8663$$

$$x = \text{انتی لوگار تھم } (2.8663)$$

$$x = 0.07351$$

## مثال 5:-

لوگار تھم کے جدول کی مدد سے حل کیجئے۔  
 $\frac{8492 \times 3.72}{47.82 \times 52.24}$

حل:- فرض کیا:  $x = \frac{8492 \times 3.72}{47.8 \times 52.24}$

تب  $\log x = \log \left( \frac{8492 \times 3.72}{47.8 \times 52.24} \right)$

$= \log (8492 \times 3.72) - \log (47.8 \times 52.24)$

$= \log 8492 + \log 3.72 - (\log 47.8 + \log 52.24)$

$= \log 8492 + \log 3.72 - \log 47.8 - \log 52.24$

$= 3.9290 + 0.5705 - 1.6794 - 1.7180$

$= 4.4995 - 3.3974$

$= 1.1021$

$x = (1.1021)$  اینٹی لوگار تھم

$= 12.65$

پس  $12.65 =$  دی ہوئی مساوی کی قیمت

## مشق 6.5

1- حل کیجئے۔

(i)  $\frac{\log 81}{\log 9}$

(ii)  $\frac{\log 36}{\log 6}$

(iii)  $\frac{\log 243}{\log 9}$

2- حل کیجئے۔

(i)  $\log 5 + \log 4 + \log 3 - \log 6$

(ii)  $\log 5 + \log 20 + \log 24 + \log 25 - \log 60$

(iii)  $2 \log 3 + 3 \log 4 + 4 \log 5 - 2 \log 6$

(iv)  $2 \log 5 + \log 8 - \frac{1}{2} \log 4$

(v)  $\log 200 + \log 5$

$\left( \log 5 = \log \left( \frac{10}{2} \right) = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 \text{ جبکہ} \right)$

3- لوگار تھم کا جدول استعمال کیے بغیر حل کیجئے۔

(i)  $\log 1.3472 + \log 22.79 - \log 5$

(ii)  $\log 22.13 + \log 0.354 + \log 7 - \log 3$

(iii)  $\log 57.86 + \log 4.385 - \log 2.391 - \log 3.072$

4- لوگار تھم کے جدول کی مدد سے حل کیجئے۔

(i)  $\frac{2.38 \times 3.901}{4.83}$

(ii)  $\frac{8.67 \times 3.94}{1.78}$

(iii)  $\frac{25.36 \times 3.4569}{9.87 \times 8.93}$

-5 ثابت کیجئے۔

(i)  $\log\left(\frac{a^2}{bc}\right) + \log\left(\frac{b^2}{ca}\right) + \log\left(\frac{c^2}{ab}\right) = 0$

(ii)  $3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 5 = \log 360$

(iii)  $5 \log 3 - \log 9 = \log 27$

(iv)  $\log\left(\frac{75}{16}\right) + \log\left(\frac{32}{243}\right) - 2 \log\left(\frac{5}{9}\right) = \log 2$

(v)  $2 \log\left(\frac{11}{13}\right) + \log\left(\frac{130}{77}\right) - \log\left(\frac{55}{91}\right) = \log 2$

-6 ثابت کیجئے۔  $3 \log 4 + 2 \log 5 - \frac{1}{3} \log 64 - \frac{1}{2} \log 16 = 2$

-7 ثابت کیجئے۔  $\log(1 \times 2 \times 3) = \log 1 + \log 2 + \log 3$

-8 لوگار تھم کا جدول استعمال کیجئے اور درج ذیل کو حل کیجئے۔

(i)  $69.13 \times 0.34 \times 0.014$  (ii)  $\frac{8.67 \times 3.94}{1.78}$  (iii)  $\frac{4}{3} \times 3.142 \times (1.5)^3$

(iv)  $\frac{(25.36)^2 \times (0.4569)}{847.5}$  (v)  $\frac{0.9876 \times (16.42)^2}{(4.567)^{1/3}}$

(vi)  $\sqrt{\frac{3\sqrt{0.0125} \times \sqrt{31.15}}{0.00081}}$  (vii)  $\frac{(6.45)^3 \times (0.00034)^{1/3} \times (981.9)}{(9.37)^2 \times (8.93)^{1/4} \times (0.0617)}$

(viii)  $\frac{(0.0437)^{2/3} \times (1.407)^2}{(0.0015)^{1/3} \times (1.235)^{1/7}}$

-9 اگر  $v = \sqrt{\frac{gl}{2\pi}}$  ہو تو  $v$  معلوم کیجئے جبکہ  $l = 150$ ,  $g = 32.16$ ,  $\pi = 3.142$

-10 اگر  $H = \frac{I^2 R t}{4.2}$  ہو تو  $H$  معلوم کیجئے جبکہ  $t = 25$  اور  $I = 1.3$ ,  $R = 6.7$

-11 اگر  $h = \frac{v}{\pi(R^2 - r^2)}$  ہو تو  $h$  معلوم کیجئے جبکہ  $\pi = 3.14$  اور  $v = 1190$ ,  $R = 83.6$ ,  $r = 62.4$

## جائزہ مشق 6

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i)  $\sqrt{3}$  کیسا عدد ہے؟

- |               |                  |
|---------------|------------------|
| (a) ناطق عدد  | (b) غیر ناطق عدد |
| (c) قدرتی عدد | (d) صحیح عدد     |

(ii)  $\sqrt[3]{7}$  کو کیا کہتے ہیں؟

- |              |              |
|--------------|--------------|
| (a) جذر      | (b) مجذور    |
| (c) ناطق عدد | (d) صحیح عدد |

(iii)  $\sqrt{3}$  میں 3 کو کیا کہتے ہیں؟

- |              |               |
|--------------|---------------|
| (a) جذر      | (b) مجذور     |
| (c) صحیح عدد | (d) قدرتی عدد |

(iv)  $a^n$  میں  $n$  کو کیا کہتے ہیں؟

- |             |           |
|-------------|-----------|
| (a) جذر     | (b) مجذور |
| (c) قوت نما | (d) اساس  |

(v)  $4^5$  میں 4 کو کیا کہتے ہیں؟

- |              |             |
|--------------|-------------|
| (a) اساس     | (b) قوت نما |
| (c) صحیح عدد | (d) جذر     |

(vi) اساس 10 میں حل کیے گئے لوگارٹھم کو کیا کہتے ہیں؟

- |            |                   |
|------------|-------------------|
| (a) مینٹیس | (b) کامن لوگارٹھم |
| (c) خاصہ   | (d) قدرتی عدد     |

(vii) کسی عدد کے لوگارٹھم میں صحیح عدد والے حصہ کو کیا کہتے ہیں؟

- |                      |               |
|----------------------|---------------|
| (a) خاصہ             | (b) مینٹیس    |
| (c) اعشاریہ والا حصہ | (d) حقیقی حصہ |

(viii) کسی عدد کے لوگارٹھم میں کسری حصہ کو کیا کہتے ہیں؟

- |              |               |
|--------------|---------------|
| (a) خاصہ     | (b) مینٹیس    |
| (c) ناطق عدد | (d) حقیقی حصہ |



$$\sqrt{\sqrt{2}} = ? \quad (\text{ix})$$

(a)  $2^2$

(b) 2

(c)  $2^{1/2}$

(d)  $2^{1/4}$

(x)  $\sqrt{2+\sqrt{3}}$  ایک جذر نہیں ہے کیونکہ  $2+\sqrt{3}$  ایک

(a) غیر ناطق عدد ہے

(b) ناطق عدد ہے

(c) صحیح عدد ہے

(d) جذر ہے

-2 - خالی جگہ پر کیجئے۔

(i) اگر  $\sqrt[n]{a}$  غیر ناطق عدد ہو جبکہ  $a$  ناطق عدد ہو تو  $\sqrt[n]{a}$  کو \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(ii) علامت  $\sqrt[n]{a}$  کو \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(iii)  $3^5$  میں 5 کو \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(iv)  $a^n$  میں  $a$  کو \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(v) اساس 10 میں حل لوگار تھم کو \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(vi) کسی عدد میں لوگار تھم کے دو حصے ہوتے ہیں۔ صحیح عددی حصے کو \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

(vii) کسی عدد کے لوگار تھم میں کسری حصے کو \_\_\_\_\_ کہتے ہیں۔

-3 مختصر کیجئے۔

$$(i) (x^5 y^3)^{1/2} \times (y^7 x^3)^{-1/3}$$

$$(ii) (a^{1/4} b^{1/3})^{-1/2} \div (a^{1/3} b^{1/4})^{-3}$$

-4 حل کیجئے۔

$$(i) x^{2/3} y^{5/8} \times y^{1/2} \div (xy)^{1/3}$$

$$(ii) \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \div \left(\frac{4}{25}\right) \times 625$$

$$\log \frac{(3 \times 4 \times 5)}{7} = \log 3 + \log 4 + \log 5 - \log 7 \quad \text{ثابت کیجئے۔} \quad -5$$

-6 درج ذیل کو لوگار تھم جدول کی مدد سے حل کیجئے۔

$$(i) 62.14 \times 0.32 \times 0.015$$

$$(ii) \frac{3.64 \times 3.94}{2.78}$$

$$(iii) \frac{(13.26)^2 \times (0.4564)}{325.5}$$

## خلاصہ

✦ اگر  $\sqrt[n]{a}$  غیر ناطق عدد ہو جبکہ  $a$  ایک ناطق عدد ہے تو  $\sqrt[n]{a}$  کا  $n$  واں جذر کہلاتا ہے۔

✦ علامت  $\sqrt[n]{a}$  جذر کی علامت کہلاتی ہے۔ جس کا انڈیکس  $n$  ہے۔  $\sqrt[n]{a}$  میں  $a$  کو مجذور کہتے ہیں۔

✦ کسی حقیقی عدد  $a$  اور مثبت صحیح عدد  $n$  کے لیے ہم  $a^n$  کو بیان کرتے ہیں۔

$$a^n = a \times a \times a \times \dots \times a \quad (n \text{ مرتبہ})$$

یہاں ' $a$ ' کو اساس اور  $n$  کو قوت نما کہتے ہیں۔

✦ اساس 10 میں حل کیے گئے لوگارٹھم کو کامن لوگارٹھم کہتے ہیں۔

✦ کسی عدد کے لوگارٹھم کے دو حصے ہوتے ہیں۔ صحیح حصہ کو خاصہ اور کسری حصہ کو مینٹیساکہتے ہیں۔

✦ سائنسی ترقیم ایک طریقہ تحریر ہے جس میں بہت بڑے اور بہت چھوٹے عدد کو  $a = b \times 10^n$  کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔

✦ ایسا عدد جس کا مربع ایک غیر منفی عدد ہو حقیقی عدد کہلاتا ہے۔

# اعداد کے جمعی اور ضربی سلسلے

## ARITHMETIC AND GEOMETRIC SEQUENCES

- ◀ اعداد کا سلسلہ
- ◀ اعداد کا جمعی سلسلہ
- ◀ جمعی وسط
- ◀ اعداد کا ضربی سلسلہ
- ◀ ضربی وسط

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- ◀ اعداد کا سلسلہ اور اس کے ارکان کیا ہیں۔
- ◀ کہ اعداد کا سلسلہ ایک قاعدہ یا استقرائی تعریف کے تحت ہے۔
- ◀ اعداد کا سلسلہ اعداد کا جمعی سلسلہ کیا ہے۔
- ◀ کسی جمعی سلسلے کی  $n$  ویں رقم کیا ہے۔
- ◀ جمعی سلسلوں پر مبنی سوالات کیسے حل کرتے ہیں۔
- ◀ کہ دو اعداد کے درمیان جمعی وسط کیسے معلوم کر سکتے ہیں۔
- ◀ دو اعداد کے درمیان  $n$  جمعی وسط کیسے معلوم کر سکتے ہیں۔
- ◀ کہ ضربی سلسلے کی پہچان کیا ہے۔
- ◀ کہ ہندسی سیکوینس کی  $n$ th یا نمائندہ رکن (General Term) کیسے معلوم کی جاتی ہے۔
- ◀ ضربی سلسلہ پر مبنی سوالات کیسے معلوم کر سکتے ہیں۔
- ◀ کہ دو اعداد کے درمیان ضربی وسط کیسے معلوم کیا جاسکتا ہے۔
- ◀ کہ دو اعداد کے درمیان  $n$  ضربی وسط کیسے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

## 7.1 اعداد کا سلسلہ Sequence (progression)

روزمرہ زندگی میں ہم اکثر مشاہدہ کرتے ہیں کہ چیزیں ایک مقررہ مقدار سے سلسلہ وار بڑھتی یا کم ہوتی ہیں۔ مثلاً

- 1- سال میں دن ہفتہ وار 7 ایام کے حساب سے گزرتے ہیں۔
- 2- ہماری عمر ہر سال 12 ماہ کے حساب سے بڑھتی ہے۔
- 3- کسی شے کی قیمت مقررہ مقدار سے بڑھتی جاتی ہے جیسے جیسے آپ اس کی تعداد میں ایک ایک کر کے اضافہ کرتے چلے جاتے ہیں۔

ہماری زندگی میں ایسے معاملات کے مطالعہ کے لیے آئیے ہم سلسلہ کے تصور پر غور کرتے ہیں۔ ”ایک عددی سلسلہ، مخصوص قاعدہ کے مطابق لکھے گئے اعداد کی ترتیب ہوتی ہے“۔ عددی سلسلے کو انگریزی میں سیکوینس یا پروگریشن (Sequence or Progression) کہتے ہیں۔

اعداد کے درج ذیل نمونہ جات (Number Pattern) پر غور کیجئے۔

(i)  $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

(ii)  $2, 4, 6, 8, 10, \dots$

(iii)  $1, 4, 9, 16, 25, \dots$

(iv)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

(v)  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

اعداد کے ان دیئے گئے سلسلوں سے یہ بات مشاہدہ کی جاسکتی ہے کہ ہر آنے والا رکن (Term) خاص قاعدہ کے تحت معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اس قاعدہ کے مطابق ایک رکن کے بعد آنے والا رکن معلوم کیا جاسکتا ہے۔ دی گئی مثالوں میں

- (i) میں قاعدہ یہ ہے کہ '1' سے شروع کر کے ہر رکن میں '2' جمع کرنے سے آنے والا رکن حاصل ہوتا ہے۔
- (ii) میں قاعدہ یہ ہے کہ '2' سے شروع کر کے ہر رکن کی رقم میں '2' جمع کرنے سے آنے والا رکن حاصل ہوتا ہے۔

(iii) میں قاعدہ یہ ہے کہ سلسلہ کی ہر رقم قدرتی اعداد کا مربع ہے۔

(iv) میں قاعدہ یہ ہے کہ '1' سے شروع کر کے اگلی رقم (Next Term) کو حاصل کرنے کے لیے کچھلی رقم

(Preceding Term) کو  $\frac{1}{2}$  سے ضرب دی گئی۔

(i) تا (iv) میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہر ایک، ایک عددی سلسلہ (Number Sequence) ہے۔ یہی اعداد اس سلسلہ کو

(Sequence) کی رقم (Terms) کہلاتے ہیں۔

کسی بھی سلسلہ کو ظاہر کرنے کے لیے علامت  $a_n$  یا  $\{a_n\}$  یا  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  استعمال ہوتی ہے۔

(آخر میں دیئے نقاط ... وغیرہ وغیرہ کہے جاتے ہیں)۔

$$a_1 = \text{پہلی رقم} = \text{First term}$$

$$a_2 = \text{دوسری رقم} = \text{Second term}$$

$$a_3 = \text{تیسری رقم} = \text{Third term}$$

.....

$$a_n = \text{نمائندہ رقم یا } n^{\text{th}} \text{ term or general term}$$

## 7.1.1 محدود اور غیر محدود سلسلے Finite and Infinite Sequences

درج ذیل مترتب اعداد پر غور کیجئے۔

$$(i) 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$(ii) 1, 3, 5, 7, \dots, 15$$

$$(iii) 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

$$(iv) 2, 4, 6, 8, \dots, 20$$

$$(v) 1, 4, 7, 10, \dots$$

$$(vi) 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$$

اگر کسی سلسلہ میں آخری رقم موجود ہو تو یہ محدود سلسلہ کہلاتا ہے۔ جیسا کہ اوپر مثالوں میں (ii) اور (iv) محدود سلسلے ہیں۔

اگر کسی سلسلہ میں آخری رقم (Last Term) موجود نہیں تو یہ لامحدود سلسلہ کہلاتا ہے۔ جیسا کہ اوپر مثالوں میں (i)، (iii)، (v)،

اور (vi) لامحدود سلسلے (Infinite Sequences) ہیں۔

## 7.1.2 قاعدہ کے تحت سیکوینس کی بناوٹ

آئیے اب ہم سلسلہ کو  $n$  ویں رقم ( $n$ th term) کی مدد سے لکھتے ہیں اگر

$$\text{اگر } a_n = 2n + 3 \text{ جبکہ } n = 1, 2, 3, \dots, 8 \text{ ہو تو}$$

$$a_1 = 2 \times 1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$a_2 = 2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$a_3 = 2 \times 3 + 3 = 6 + 3 = 9$$

$$a_4 = 2 \times 4 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$a_5 = 2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$$

$$a_6 = 2 \times 6 + 3 = 12 + 3 = 15$$

$$a_7 = 2 \times 7 + 3 = 14 + 3 = 17$$

$$a_8 = 2 \times 8 + 3 = 16 + 3 = 19$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$  کی مدد سے سلسلہ 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 حاصل ہوتا ہے

جس میں رقوم کا سلسلہ  $\{a_n\}$  میں  $n$  کی جگہ 1, 2, 3, ..., 8 رکھنے سے حاصل ہونیں۔

مثلاً

$$\text{اگر } a_n = (-1)^{n+1} (n+3) \text{ اور } n = 1, 2, 3, 4 \text{ ہو تو}$$

$$a_1 = (-1)^{1+1} (1+3) = (-1)^2 (4) = 1 \times 4 = 4$$

$$a_2 = (-1)^{2+1} (2+3) = (-1)^3 (5) = -1 \times 5 = -5$$

$$a_3 = (-1)^{3+1} (3+3) = (-1)^4 (6) = 1 \times 6 = 6$$

$$a_4 = (-1)^{4+1} (4+3) = (-1)^5 (7) = -1 \times 7 = -7$$

لہذا سلسلہ -7, 6, -5, 4 حاصل ہوتا ہے۔

ہم  $n$  ویں رقم میں  $n$  کی مخصوص قیمت درج کر کے مطلوبہ رقم لکھ سکتے ہیں۔

## مشق 7.1

1- درج ذیل کی پہلی تین رقوم (Terms) لکھیے۔

(i)  $a_n = n + 3$

(ii)  $a_n = (-1)^n n^3$

(iii)  $a_n = 3n + 5$

(iv)  $a_n = \frac{n+1}{2n+5}$

(v)  $a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$

(vi)  $a_n = n + 3 = 2$

(vii)  $a_n = \frac{1}{3^n}$

(viii)  $a_n = 3n - 5$

(ix)  $a_n = (n+1)a_{n-1}, a_1 = 1$

2- درج ذیل سلسلوں کی نشاندہی کی گئی رقوم معلوم کیجئے۔

(i) 2, 6, 11, 17, ...,  $a_8$

(ii) 1, 3, 12, 60, ...,  $a_7$

(iii)  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, a_6$

(iv) -1, 1, 3, 5, ...,  $a_9$

(v)  $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \dots, a_5$

(vi) 1, -3, 5, -7, ...,  $a_9$

3- مندرجہ ذیل سلسلوں میں اگلی چار رقوم لکھیے۔

(i) 12, 16, 21, 27, ...

(ii) 1, 3, 7, 15, 31, ...

(iii) -1, 2, 12, 40, ...

(iv) 9, 11, 14, 17, 19, 22, ...

(v) 4, 8, 12, 16, ...

(vi) -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, ...

## 7.2 جمعی سلسلہ (Arithmetic Sequence (progression))

جمعی سلسلہ (مخفف A.P) اعداد کی ایسی ترتیب ہوتی ہے جس میں پچھلی رقم سے اگلی رقم ایک قدر مشترک (Common difference) جمع کر کے حاصل کی جاتی ہے۔

فرض کیا کسی جمعی سلسلہ میں 'a' پہلی رقم اور 'd' قدر مشترک (Common difference) ہو تو اس کی دوسری رقم  $a + d$  جبکہ تیسری رقم  $a + 2d$  ہوتی ہے۔ ان میں سے ہر رقم میں 'd' کا عددی سر رقم کی حیثیت میں سے '1' کم ہے۔ اس طرح  $a + 9d$  10 ویں رقم کو ظاہر کرتی ہے۔

چونکہ n ویں رقم پہلی رقم کے بعد (n - 1) مقام پر آتی ہے لہذا یہ رقم d کا عددی سر (n - 1) رکھنے سے حاصل ہوگی۔

$$n \text{ ویں رقم} = \text{جنرل ٹرم (نمائندہ ٹرم)} = a_n = a + (n - 1)d.$$

اگر  $n = 12$  ہو تو  $12 = a_{12} = a + (12 - 1)d$

$$= a + 11d$$



**مثال 1:-** اس A.P میں رقم اور 14 ویں رقم معلوم کیجئے جس کی پہلی رقم 2 اور مشترکہ قدر

(Common difference) 5 ہے۔

$$a_1 = a = 2, d = 5$$

حل:- چونکہ

$$a_n = a + (n-1)d$$

ہم جانتے ہیں

$$= 2 + (n-1)5$$

$$= 2 + 5n - 5$$

$$= 2 - 5 + 5n$$

$$= 5n - 3$$

$$n \text{ ویں رقم } = a_n = 5n - 3$$

اب  $n = 14$  رکھنے سے

$$a_{14} = a + (14-1)d$$

$$= 2 + 13 \times 5$$

$$= 2 + 65$$

$$= 67$$

$$a_{14} = 67$$

**مثال 2:-** اگر کسی جمعی سلسلہ کی 5 ویں رقم 16 اور 20 ویں رقم 46 ہو تو اس کی 15 ویں رقم کیا ہوگی۔

$$a_5 = 16 \quad \text{اور} \quad a_{20} = 46$$

حل:- چونکہ

$$a_n = a + (n-1)d \quad \dots\dots\dots (i) \quad \text{چونکہ}$$

اس لیے مساوات (i) میں  $n = 5$  رکھنے سے

$$a_5 = a + (5-1)d$$

$$16 = a + 4d \quad \dots\dots\dots (ii)$$

مساوات (i) میں  $n = 20$  رکھنے سے

$$a_{20} = a + (20-1)d$$

$$46 = a + 19d \quad \dots\dots\dots (iii)$$

مساوات (ii) کو (iii) میں سے تفریق کرنے سے

$$46 - 16 = a - a + 19d - 4d$$

$$30 = 15d \Rightarrow \boxed{d = 2}$$

$d = 2$  مساوات (ii) میں رکھنے سے

$$16 = a + 4 \times 2$$

$$16 = a + 8 \Rightarrow 16 - 8 = a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 8}$$

مساوات (i) میں  $n = 15$ ,  $d = 2$  اور  $a = 8$  رکھنے سے

$$a_{15} = a + (15 - 1)d$$

$$= 8 + 14 \times 2$$

$$= 8 + 28$$

$$= 36$$

$$\boxed{a_{15} = 36}$$

لہذا

**مثال 3:-** جمعی سلسلہ میں رقم کی تعداد معلوم کیجئے۔

$$\text{جبکہ } a_1 = 3, \quad d = 4, \quad a_n = 59$$

**حل:-** ہمیں معلوم ہے کہ  $a_1 = a = 3, \quad d = 4, \quad a_n = 59$

$$a_n = a + (n - 1)d \quad \text{چونکہ}$$

$$59 = 3 + (n - 1)4 \quad \text{اس لیے}$$

$$= 3 + 4n - 4$$

$$= 4n - 1$$

$$60 = 4n$$

$$n = \frac{60}{4} = 15$$

$$\boxed{n = 15}$$

**مثال 4:-** اگر  $a_{n-3} = 2n - 12$  ہو تو  $a_n$  معلوم کریں۔

**حل:-** ہمیں معلوم ہے کہ  $a_{n-3} = 2n - 12$

$n$  کی جگہ  $n + 3$  رکھنے سے

$$a_{n+3-3} = 2(n+3) - 12$$

$$a_n = 2n + 6 - 12$$

$$= 2n - 6$$

$$\boxed{a_n = 2n - 6}$$

## مشق 7.2

1- مندرجہ ذیل میں مطلوبہ رقم معلوم کریں۔

(i) 61 ویں رقم،  $3, 7, 11, \dots$

(ii)  $-4, -7, -10, \dots, a_{19}$

(iii) 45 ویں رقم،  $6, 4, 2, \dots$

(iv)  $9, 14, 19, \dots, a_{14}$

(v)  $11, 6, 1, \dots, a_{18}$

2- جمعی سلسلہ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے نامعلوم عنصر (Element) معلوم کیجئے۔

$$a_n = a + (n-1)d$$

(i)  $a = 2, a_n = 402, n = 26,$

(ii)  $a_n = 81, d = -3, n = 18$

(iii)  $a = 5, a_n = 61, n = 15$

(iv)  $a = 16, a_n = 0, d = -\frac{1}{4}$

(v)  $a = 10, a_n = 400, d = 5$

(vi)  $a_n = 261, d = 4, n = 18$

3- جمعی سلسلہ کی 15 ویں رقم معلوم کریں جبکہ تیسری رقم 8 اور مشترکہ قدر (Common difference)  $\frac{1}{3}$  ہے۔

4- جمعی سلسلہ  $6, 2, -2, \dots$  کی کونسی رقم -146 ہے؟

5- جمعی سلسلہ  $5, 2, -1, \dots$  کی کونسی رقم -118 ہے؟

6- جمعی سلسلہ کی کتنی رقم (Terms) ہیں کہ جس میں  $a_1 = a = 11, a_n = 68, d = 3$ ۔

7- جمعی سلسلہ  $2-x, 3-2x, 4-3x, \dots$  کی 11 ویں رقم معلوم کیجئے۔

8- جمعی سلسلہ کی  $n$  ویں رقم معلوم کیجئے جبکہ  $a_{n-5} = 3n + 9$ ۔

9- جمعی سلسلہ  $\left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{3}{7}\right)^2, \left(\frac{3}{10}\right)^2, \dots$  کی  $n$  ویں رقم معلوم کیجئے۔

10- اگر جمعی سلسلہ کی  $n$  ویں رقم  $3n - 5$  ہو تو جمعی سلسلہ معلوم کیجئے۔

### 7.3 جمعی وسط Arithmetic Mean

کوئی عدد 'A' دو اعداد a اور b کے درمیان جمعی وسط (A.M) کہلاتا ہے اگر a, A, b ایک جمعی سلسلہ میں ہوں۔

$$A - a = b - A \quad (\text{Common Difference}) \quad \text{مشترکہ قدر}$$

$$A + A = a + b$$

$$2A = a + b$$

$$A = \frac{a+b}{2}$$

مثال 1:- 4 اور 8 کے درمیان جمعی وسط (A.M) معلوم کیجئے۔

$$a = 4, b = 8$$

حل:-

$$A = \frac{a+b}{2}$$

اس لیے

$$= \frac{4+8}{2}$$

$$= \frac{12}{2} = 6$$

$$A = 6$$

A.M جمعی وسط  
Arithmetic Mean  
کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 2:-  $2\sqrt{5}$  اور  $6\sqrt{5}$  میں جمعی وسط معلوم کیجئے۔

$$a = 2\sqrt{5}, b = 6\sqrt{5} \quad \text{چونکہ}$$

حل:-

$$A = \frac{a+b}{2}$$

اس لیے

$$= \frac{2\sqrt{5} + 6\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{8\sqrt{5}}{2}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

## 7.3.2 دو اعداد کے درمیان $n$ جمعی وسط

### "n" Arithmetic Means Between Two Numbers

فرض کیا کہ دو اعداد  $a, b$  کے درمیان مطلوبہ " $n$ " جمعی وسط  $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$  اس طرح ہیں کہ

$a, A_1, A_2, A_3 \dots, A_n, b$  ایک جمعی سلسلہ ہے۔

یہاں  $a_1 = a, a_{n+2} = b$  کیونکہ اس جمعی سلسلہ میں رقوم کی تعداد  $n + 2$  ہے۔

کلیہ  $a_n = a + (n-1)d$  کا استعمال کرتے ہوئے

$$a_{n+2} = a + (n+2-1)d$$

$$b = a + (n+1)d$$

$$b - a = (n+1)d$$

$$\frac{(b-a)}{n+1} = d \quad \text{یا} \quad \boxed{d = \frac{b-a}{n+1}}$$

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1} = \frac{an+a+b-a}{n+1} = \frac{na+b}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + 2\left(\frac{b-a}{n+1}\right) = \frac{na+a+2b-2a}{n+1} = \frac{na+a+2b}{n+1} = \frac{(n-1)a+2b}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + 3\left(\frac{b-a}{n+1}\right) = \frac{na+a+3b-3a}{n+1} = \frac{na-2a+3b}{n+1} = \frac{(n-2)a+3b}{n+1}, \dots,$$

$$A_n = a + nd = a + n\left(\frac{b-a}{n+1}\right) = \frac{na+a+nb-na}{n+1} = \frac{a+nb}{n+1}$$

**مثال 1:-** اگر  $a$  اور  $b$  کے درمیان 8 اور 12 دو جمعی وسط ہوں تو  $a$  اور  $b$  معلوم کیجئے۔

**حل:-** چونکہ  $a, 8, 12, b$  ایک جمعی سلسلہ میں ہیں۔

$$\text{لہذا} \quad d = \text{مشترکہ قدر (Common difference)}$$

$$= a_3 - a_2$$

$$= 12 - 8 = 4$$

$$b = a_4$$

$$= a_3 + d$$

$$b = 12 + 4 = 16$$

$$a = a_2 - d$$

$$= 8 - 4 = 4$$

$$a = 4, b = 16 \text{ لہذا}$$

**مثال 2:-**  $\sqrt{3}$  اور  $9\sqrt{3}$  کے درمیان تین جمعی وسط معلوم کیجئے۔

**حل:-** فرض کیا  $\sqrt{3}$ ،  $9\sqrt{3}$  کے درمیان  $A_1, A_2, A_3$  تین جمعی وسط ہیں۔

اس طرح  $\sqrt{3}, A_1, A_2, A_3, 9\sqrt{3}$  ایک جمعی سلسلہ ہیں۔

$$a_1 = a = \sqrt{3}, n = 5, a_5 = 9\sqrt{3} \text{ یہاں}$$

$$a_n = a + (n-1)d \quad \text{اس لیے}$$

$$a_5 = a + (5-1)d$$

$$9\sqrt{3} = a + 4d$$

$$9\sqrt{3} = \sqrt{3} + 4d$$

$$9\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4d$$

$$4d = 8\sqrt{3}$$

$$d = 2\sqrt{3}$$

$$A_1 = a + d = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \quad \text{لہذا}$$

$$A_2 = A_1 + d = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$A_3 = A_2 + d = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

پس  $\sqrt{3}, 9\sqrt{3}$  کے درمیان  $3\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 7\sqrt{3}$  مطلوبہ تین جمعی وسط ہیں۔

## مشق 7.3

- 1- درج ذیل کے درمیان جمعی وسط معلوم کیجئے۔
  - (i)  $-3, 7$
  - (ii)  $x-1, x+7$
  - (iii)  $\sqrt{7}, 3\sqrt{7}$
  - (iv)  $x^2+x+1; x^2-x+1$
- 2- اگر  $a$  اور  $b$  کے درمیان  $6, 3$  دو جمعی وسط ہیں تو  $a$  اور  $b$  معلوم کیجئے۔
- 3-  $11$  اور  $19$  کے درمیان تین جمعی وسط معلوم کیجئے۔
- 4-  $\sqrt{2}$  اور  $6\sqrt{2}$  کے درمیان تین جمعی وسط معلوم کیجئے۔
- 5-  $5$  اور  $8$  کے درمیان چھ جمعی وسط معلوم کیجئے۔
- 6-  $8$  اور  $12$  کے درمیان سات جمعی وسط معلوم کیجئے۔
- 7- اگر  $5$  اور  $b$  کے درمیان جمعی وسط  $10$  ہو تو  $b$  کی قیمت معلوم کیجئے۔
- 8- اگر  $a$  اور  $10$  کے درمیان جمعی وسط  $40$  ہو تو  $a$  کی قیمت معلوم کیجئے۔
- 9- اگر دو اعداد  $a$  اور  $b$  کے درمیان  $9, 5$  اور  $13$  تین جمعی وسط ہوں تو  $a$  اور  $b$  کی قیمت معلوم کیجئے۔

## 7.4 ضربی سلسلہ (Geometric Sequence (progression))

ضربی سلسلہ (Geometric Progression) (مختصراً G.P.)، اعداد کی ایسی ترتیب ہے کہ جس میں ہر آنے والا عدد (رقم) پچھلی رقم کو ایک مقررہ مقدار (مشترکہ نسبت / ضارب Common Ratio) سے ضرب دے کر حاصل ہوتا ہے۔ مشترکہ نسبت کو 'r' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جبکہ ترتیب میں ہر عدد، ضربی سلسلہ کی رقم (Term) کہلاتی ہے۔ 'r' کبھی بھی صفر نہیں ہوتا۔ پس 'r' کی قیمت:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots$$

کسی بھی ضربی سلسلہ میں اگر پہلی رقم 'a' ہو اور مشترکہ نسبت 'r' ہو تو دوسری رقم 'ar' ہوگی اور تیسری رقم 'ar<sup>2</sup>' ہوگی۔ ہر رقم میں 'r' کا قوت نما اس رقم کے مقام سے ایک کم ہوتا ہے اس طرح 8 ویں رقم 'ar<sup>7</sup>' ہوگی۔ جبکہ n ویں رقم 'ar<sup>n-1</sup>' ہوگی۔ پس ضربی سلسلہ کی نمائندہ رقم یوں ہوگی  $a_n = ar^{n-1}$

**مثال 1:-** اس ضربی سلسلہ کی 5 ویں رقم معلوم کیجئے۔ جس میں  $a = 2$  اور  $r = 3$  ہو۔

**حل:-** جیسا کہ معلوم ہے کہ  $a = 2, r = 3, n = 5, a_5 = ?$   
چونکہ  $a_n = ar^{n-1}$

$$a_5 = ar^{5-1}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= 2(3)^4 \\ &= 2 \times 81 \\ &= 162 \end{aligned}$$

$$\boxed{a_5 = 162}$$

**مثال 2:-** اگر کسی ضربی سلسلہ میں  $a_4 = \frac{8}{27}$ ،  $a_7 = \frac{-64}{729}$  ہو تو  $a_{10}$  معلوم کیجئے۔

**حل:-** چونکہ

$$a_4 = \frac{8}{27}, a_7 = \frac{-64}{729}$$

یہاں پہلے ہم  $a$  اور  $r$  کی قیمتیں معلوم کریں گے۔

$$a_n = ar^{n-1} \quad \text{چونکہ}$$

$$a_4 = ar^{4-1} \quad \text{لہذا}$$

$$\frac{8}{27} = ar^3$$

$$ar^3 = \frac{8}{27} \quad \dots\dots(i)$$

$$a_7 = ar^{7-1}$$

اور

$$\frac{-64}{729} = ar^6$$

$$ar^6 = -\frac{64}{729} \quad \dots\dots(ii)$$

$$\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{-64}{729} \times \frac{27}{8}$$

اب مساوات (ii) کو (i) پر تقسیم کرنے سے

$$r^3 = \frac{-64 \times 27}{729 \times 8} = -\frac{8}{27} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

$$r = -\frac{2}{3}$$

مساوات (i) میں  $r = -\frac{2}{3}$  رکھنے سے

$$a \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow a \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$a = -1$$

$$a_{10} = ar^{10-1}$$

پس

$$= (-1) \left(\frac{2}{3}\right)^9 = -\left(\frac{2}{3}\right)^9$$



## مشق 7.4

- 1- ضربی سلسلہ ... 2, 8, 32, ... میں 7 ویں رقم لکھیے۔
- 2- ضربی سلسلہ ... 2, 6, 18, ... کی 11 ویں رقم معلوم کیجئے۔
- 3- ضربی سلسلہ ...  $-\frac{3}{2}, 3, -6, \dots$  کی 6 ویں رقم معلوم کیجئے۔
- 4- ضربی سلسلہ ... 4, -12, 36, ... کی 5 ویں رقم معلوم کیجئے۔
- 5- دیئے گئے ضربی سلسلہ کی  $a, a_n, n$  اور  $r$  میں سے نامعلوم کی قیمت معلوم کیجئے۔  
 (i)  $r = 10, a_n = 100, a = 1$       (ii)  $a_n = 400, r = 2, a = 25$   
 (iii)  $a = 128, r = \frac{1}{2}, a_n = \frac{1}{4}$
- 6- ایسے ضربی سلسلہ کی 11 ویں رقم معلوم کیجئے جس کی 5 ویں رقم کی قیمت 9 اور مشترک نسبت 2 ہے۔
- 7- ایسے ضربی سلسلہ کی 13 ویں رقم کیا ہوگی جس میں 7 ویں رقم 25 اور مشترک نسبت 3 ہے۔
- 8- اگر  $a, b, c, d$  ایک ضربی سلسلہ میں ہوں تو ثابت کیجئے کہ  $a - b, b - c, c - d$  بھی ضربی سلسلہ میں ہیں۔
- 9- اگر  $\frac{a_5}{a_3} = \frac{4}{9}$  اور  $a_2 = \frac{4}{9}$  ہو تو ضربی سلسلہ کی  $n$  ویں رقم کیا ہوگی؟
- 10- ضربی سلسلہ میں تین یکے بعد دیگرے اعداد معلوم کیجئے جن کا مجموعہ 26 اور حاصل ضرب 216 ہو۔
- 11-  $x, 1, \frac{1}{x}, \dots$  ضربی سلسلہ کی 30 ویں رقم معلوم کیجئے۔
- 12-  $x, x^3, x^5, \dots$  ضربی سلسلہ کی  $P$  ویں رقم معلوم کیجئے۔

## 7.5 ضربی وسط (G.M) Geometric Mean

دو اعداد 'a' اور 'b' کے درمیان 'G' ضربی وسط کہلاتا ہے اگر  $a, G, b$  ایک ضربی سلسلہ میں ہوں۔

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G} \quad \text{یعنی}$$

$$G^2 = ab$$

$$G = \pm \sqrt{ab}$$

جبکہ  $a, b$  کے درمیان مثبت ضربی وسط  $\sqrt{ab}$  ہے۔

مثال 1:- 3 اور 27 کے درمیان ضربی وسط معلوم کیجئے۔

حل:- چونکہ  $a = 3, b = 27$

$$G = \pm \sqrt{ab} \quad \text{لہذا}$$

$$= \pm \sqrt{3 \times 27}$$

$$= \pm \sqrt{81}$$

$$= \pm 9$$

مثال 2:-  $2x^2$  اور  $8y^4$  کے درمیان ضربی وسط معلوم کیجئے۔

حل:- چونکہ  $a = 2x^2, b = 8y^4$

$$G = \pm \sqrt{ab} \quad \text{اس لیے}$$

$$= \pm \sqrt{2x^2 \times 8y^4}$$

$$= \pm \sqrt{16x^2 y^4}$$

$$= \pm \sqrt{(4xy^2)^2}$$

$$= \pm 4xy^2$$

### 7.5.1 دو اعداد کے درمیان 'n' ضربی وسط

#### 'n' Geometric Means Between Two Numbers

فرض کیا دو اعداد 'a' اور 'b' کے درمیان  $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$  مطلوبہ n ضربی سلسلہ ہیں۔

اس طرح  $a, G_1, G_2, G_3, \dots, G_n, b$  ایک ضربی سلسلہ میں ہیں۔

اب اس ضربی سلسلہ میں رقوم کی تعداد  $n + 2$  بنتی ہے۔

جس میں  $a_1 = a, a_{n+2} = b$

تو  $a_n = ar^{n-1}$

میں n کی قیمت  $n + 2$  رکھنے سے

$$a_{n+2} = ar^{n+2-1}$$

$$b = ar^{n+1}$$

$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

$$r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$G_1 = a \times r = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$G_2 = G_1 \times r = ar^2 = a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$G_3 = G_2 \times r = ar^3 = a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$G_n = G_{n-1} \times r = ar^n = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

**مثال 1:-** 4 اور  $\frac{1}{2}$  کے درمیان دو ضربی وسط معلوم کیجئے۔

**حل:-** فرض کیا 4 اور  $\frac{1}{2}$  کے درمیان  $G_1, G_2$  دو مطلوبہ ضربی وسط معلوم کیجئے۔

$$a = 4, n = 4, a_4 = \frac{1}{2}, \text{ یہاں}$$

$$a_n = ar^{n-1} \quad \text{چونکہ}$$

$$a_4 = ar^{4-1} \quad \text{اس لیے}$$

$$\frac{1}{2} = ar^3$$

$$ar^3 = \frac{1}{2}$$

$$4r^3 = \frac{1}{2}$$

$$r^3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$$

$$r^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$G_1 = a \times r = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \quad \text{پس}$$

$$G_2 = G_1 \times r = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

## مشق 7.5

1- ضربی وسط معلوم کیجئے۔ (i) 9 اور 5 میں (ii) 4 اور 9 میں (iii) 2 اور 8 میں

2- دو ضربی وسط لکھیے۔ (i) 1 اور 8 کے درمیان (ii) 3 اور 81 کے درمیان

3- تین ضربی وسط لکھیے۔ (i) 1 اور 16 کے درمیان (ii) 2 اور 32 کے درمیان

4- 3 اور 96 کے درمیان چار حقیقی ضربی وسط لکھیے۔

5- دو اعداد کا جمعی وسط 5 ہے جبکہ ان کا مثبت ضربی وسط 4 ہے۔ اعداد معلوم کیجئے۔

6- دو اعداد کا مثبت ضربی وسط 6 ہے اور ان کا جمعی وسط 10 ہے۔ اعداد معلوم کیجئے۔

7- ثابت کیجئے کہ دو اعداد 4 اور 8 کا جمعی وسط ان کے ضربی وسط سے بڑا ہے۔

8- 160 اور 5 کے درمیان چار ضربی وسط لکھیے۔

9- 486 اور 6 کے درمیان تین ضربی وسط لکھیے۔

10-  $\frac{1}{8}$  اور 128 کے درمیان چار ضربی وسط لکھیے۔

11- 56 اور  $\frac{7}{16}$  کے درمیان چھ ضربی وسط لکھیے۔

12-  $\frac{32}{81}$  اور  $\frac{9}{2}$  کے درمیان پانچ ضربی وسط لکھیے۔

## جائزہ مشق 7

-1 صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i)  $a_n = n + 3$  کی تیسری رقم کیا ہے؟

- (a) 3                      (b) 6                      (c) 9                      (d) 0

(ii)  $a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$  کی چوتھی رقم کیا ہے؟

- (a)  $\frac{1}{7}$                       (b)  $\frac{1}{49}$                       (c)  $\frac{1}{81}$                       (d) 0

(iii) ... 2, 6, 11, 17 میں  $a_5$  کی قیمت کیا ہے؟

- (a) 24                      (b) 30                      (c) 21                      (d) 22

(iv) 12, 16, 21, 27 میں اگلی رقم کیا ہے؟

- (a) 34                      (b) 30                      (c) 31                      (d) 32

(v) 3, 7, 11, ... کی  $a_6$  کیا ہے؟

- (a) 3                      (b) 19                      (c) 23                      (d) 20

(vi)  $\sqrt{3}$  اور  $3\sqrt{3}$  میں جمعی وسط کیا ہے؟

- (a)  $2\sqrt{3}$                       (b)  $5\sqrt{3}$                       (c)  $9\sqrt{3}$                       (d)  $4\sqrt{3}$

(vii)  $2\sqrt{5}$  اور  $6\sqrt{5}$  میں جمعی وسط کیا ہے؟

- (a)  $4\sqrt{5}$                       (b)  $3\sqrt{5}$                       (c)  $5\sqrt{5}$                       (d)  $7\sqrt{5}$

(viii) ... 2, 6, 18, ... میں  $a_5$  کی قیمت کیا ہے؟

- (a) 160                      (b) 161                      (c) 162                      (d) 30

(ix) -3 اور -12 کے درمیان ضربی وسط کیا ہے؟

- (a)  $\pm 6$                       (b)  $\pm 9$                       (c)  $\pm 36$                       (d)  $\pm 3$

(x) 1 اور 8 کے درمیان ضربی وسط کیا ہے؟

- (a)  $2\sqrt{2}$                       (b)  $\pm 2\sqrt{2}$                       (c)  $-2\sqrt{2}$                       (d)  $\sqrt{2}$

2- خالی جگہ پر کیجئے۔

(i) کسی سلسلہ کی جنرل ٹرم یا  $n$  ویں رقم کو \_\_\_\_\_ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(ii) اگر  $a_n = 2n + 3$  ہو تو  $a =$  \_\_\_\_\_

(iii) کسی  $A.P$  میں  $a_n = a + (n-1)d$  کہلاتی ہے \_\_\_\_\_

(iv) 5 اور 15 کے درمیان \_\_\_\_\_ = جمعی وسط

(v) اگر  $a, A, b$  ایک جمعی سلسلہ میں ہو تو  $A =$  \_\_\_\_\_

(vi) ایک ضربی سلسلہ میں "r" \_\_\_\_\_ کہلاتا ہے۔

(vii) کسی ضربی سلسلہ میں  $a_n =$  \_\_\_\_\_

(viii) اگر  $a, G, b$  ایک ضربی سلسلہ میں ہوں تو  $G =$  \_\_\_\_\_

(ix) 3 اور 2 کا مثبت ضربی وسط \_\_\_\_\_ ہے۔

(x)  $A.P$   $a_{n-5} = 3n + 9$  کی  $n$  ویں رقم کو \_\_\_\_\_ ہے۔

3- اس جمعی سلسلہ کی  $n$  ویں رقم اور 18 ویں رقم معلوم کیجئے جس کی پہلی رقم 3 اور مشترکہ قدر 2 ہو۔

4- جمعی سلسلہ  $\dots + \left(\frac{3}{9}\right)^3 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^3$  کی  $n$  ویں رقم معلوم کیجئے۔

5- اگر  $a$  اور 16 کا جمعی وسط 24 ہو تو 'a' کی قیمت معلوم کیجئے۔

6- ایسی 15 ویں رقم کا ضربی سلسلہ معلوم کیجئے جس کی 7 ویں رقم 27 اور مشترکہ نسبت 3 ہے۔

7-  $\frac{1}{2}$  اور 16 کے درمیان چار ضربی وسط لکھیے۔

8- ضربی سلسلہ کی تین ایسی متواتر رقم لکھیے جن کا مجموعہ 26 اور حاصل ضرب 216 ہو۔

## خلاصہ

✦ اعداد کی ایسی ترتیب جس میں ہر اگلی رقم خاص قاعدہ کے اطلاق سے حاصل کی گئی ہو اور یہ قاعدہ اس رقم کے مقام کا تعین بھی کرتا ہو۔ یعنی کہ اس ترتیب کے تمام اراکین سلسلہ وار مخصوص ترتیب میں ہوں۔ اعداد کی ایسی ترتیب کو سلسلہ (Sequence) کہتے ہیں۔

✦ ایسا سلسلہ جس میں ہر اگلی رقم، پچھلی رقم میں ایک مقررہ عدد (مشترکہ قدر) جمع کر کے حاصل کی گئی ہو۔  
جمعی سلسلہ *Arithmetic Sequence* کہلاتی ہے۔

✦ کوئی عدد 'A' دو اعداد 'a'، 'b' کے درمیان جمعی وسط کہلاتا ہے اگر  $a, A, b$  ایک جمعی سلسلہ میں ہوں۔

✦ ایک سلسلہ جس میں ہر اگلی رقم، پچھلی رقم کو ایک مشترکہ نسبت سے ضرب دے کر حاصل کی ہو۔  
ضربی سلسلہ کہلاتی ہے۔

✦ "G" دو اعداد 'a' اور 'b' کے درمیان ضربی وسط کہلاتا ہے اگر  $a, G, b$  ایک ضربی سلسلہ میں ہوں۔

# سیٹ اور تفاعل

## SETS AND FUNCTIONS

سیٹوں پر عوامل

ثنائی روابط

تفاعل

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

◀ اور  $N, Z, W, E, O, P, Q$  کی علامت سے ظاہر کئے گئے سیٹوں کی شناخت کیا ہیں۔

◀ سیٹوں پر  $(\cup, \cap, \dots)$  کے عوامل کیا ہیں۔

◀ سیٹوں پر مندرجہ ذیل عوامل کیسے کرائیں۔

• یونین Union

• تقاطع Intersection

• مکملہ Complement

◀ دو یا تین سیٹوں پر یونین اور تقاطع کے درج ذیل خواص کی تصدیق کیسے کرنا ہے۔

• یونین اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ

• یونین اور تقاطع کی خاصیت تلازم

◀ وین اشکال سے مندرجہ ذیل کا اظہار کیسے کرنا ہے۔

• سیٹوں کا یونین اور انٹرسیکشن

• سیٹ کا مکملہ

◀ وین اشکال سے مندرجہ ذیل کا ثبوت فراہم کیسے کرنا ہے۔

• سیٹوں کے یونین اور انٹرسیکشن کے قوانین مبادلہ

• سیٹوں کے یونین اور انٹرسیکشن کے لحاظ سے قوانین تلازم

• ڈی مارگن کے قوانین

◀ ثنائی رابطہ (Binary Relation) کی تعریف کرنا اور اس کی ڈومین (Domain) اور رینج (Range) کا تعین کرنا۔

◀ تفاعل (Function) کی تعریف کرنا اور اس کی ڈومین (Domain) اور رینج (Range) کی پہچان کیسے کرنا ہے۔

◀ مندرجہ ذیل کو واضح کیسے کرنا ہے۔

• ان فونکشن

• ون۔ ون فونکشن

• ان ٹو، ون۔ ون فونکشن (Injective Function)

• آن فونکشن (Surjective Function)

• ون۔ ون، آن فونکشن (Bijective Function)



## Set 8.1

کائنات کی ہر چیز چاہے وہ جاندار ہو یا بے جان ”شے“ کہلاتی ہے۔ ہم مخصوص اشیاء کے اجتماع یا اکٹھ کو مخصوص نام دیتے ہیں جیسا کہ ”ہاکی ٹیم“، ”بھیڑوں کا ریوڑ“، ”پھولوں کا گلدستہ“ وغیرہ۔

سیٹ سے مراد واضح متعارف اشیاء کا اجتماع یا اکٹھ ہے۔ یعنی کہ اشیاء کا اجتماع یا اکٹھ اس طرح سے لیا گیا ہو کہ بغیر کسی شک و شبہ کے ہم بتاسکیں کہ کوئی دی ہوئی شے کا اس اکٹھ سے تعلق ہے یا نہیں۔

واضح متعارف اشیاء کے اکٹھ کو ”سیٹ“ کہتے ہیں۔

کسی سیٹ کے نام کو بالعموم حروف تہجی  $A, B, C, \dots, X, Y, Z$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

سیٹ میں موجود اشیاء ممبران یا ارکان کہلاتے ہیں۔ ارکان سیٹ کو چھوٹے حروف تہجی یا اعداد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر

- (i)  $A = \{1, 3, 4, 5\}$   
 (ii)  $B = \{a, e, i, o, u\}$   
 (iii)  $C = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
- تمام سیٹ کہلاتے ہیں۔

اگر کوئی شے  $x$  سیٹ ' $A$ ' سے تعلق رکھتی ہو تو اسے یوں لکھتے ہیں  $x \in A$  جس کا مطلب ہے  $x$ ، سیٹ ' $A$ ' کا رکن ہے۔  
 اور اگر کوئی شے  $x$  سیٹ ' $A$ ' سے تعلق نہ رکھتی ہو تو ہم لکھتے ہیں  $x \notin A$ ۔

## اہم سیٹ Important Sets

## قدرتی اعداد کا سیٹ Set of Natural Number

گنتی کے اعداد مثلاً  $1, 2, 3, \dots$  وغیرہ قدرتی اعداد کہلاتے ہیں۔ قدرتی اعداد کا سیٹ ' $N$ ' سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسا کہ

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

## مکمل اعداد کا سیٹ Set of Whole Numbers

مکمل اعداد کے سیٹ کو ' $W$ ' سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسا کہ

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

## صحیح اعداد کا سیٹ Set of Integers

صحیح اعداد کے سیٹ کو علامت 'Z' سے ظاہر کیا

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

## جفت اعداد کا سیٹ Set of Even Numbers

جفت اعداد کے سیٹ کو 'E' سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسا کہ

$$E = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

## طاق اعداد کا سیٹ Set of Odd Numbers

طاق اعداد کے سیٹ کو 'O' سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسا کہ

$$O = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$$

## مفرد اعداد کا سیٹ Set of Prime Numbers

مفرد اعداد کے سیٹ کو 'P' سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسا کہ

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$$

مفرد اعداد ایسے اعداد ہیں جو کہ '1' اور اپنے آپ پر تقسیم ہوتے ہیں۔ اس کے علاوہ وہ کسی اور عدد سے تقسیم نہیں ہوتے۔

## ناطق اعداد کا سیٹ Set of Rational Numbers

ناطق اعداد کے سیٹ کو 'Q' سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسا کہ

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : q \neq 0, p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

## 8.1.1 سیٹوں پر عوامل Operations on Sets

حساب، اعداد پر جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے عوامل کی طرح سیٹوں پر یونین، تقاطع اور مکملیمنٹ جیسے عوامل ہوتے ہیں۔

### سیٹوں کا یونین (Union of Sets)

اگر A اور B کوئی سے دو سیٹ ہوں تو سیٹ A اور سیٹ B کے یونین سے مراد ان ممبران پر مشتمل سیٹ ہوتا ہے جو کہ سیٹ A اور سیٹ B کے تمام ارکان ہوں۔

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\} \text{ لہذا}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{مثال کے طور پر اگر}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad \text{ہو تو}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$$

مثالیں :-

(i)  $A \cup B$  معلوم کیجئے اگر

$$A = \{a, b, c\} \text{ اور } B = \{a, e, i, o, u\}$$

$$A = \{a, b, c\}, B = \{a, e, i, o, u\}$$

حل :-

$$A \cup B = \{a, b, c\} \cup \{a, e, i, o, u\} \quad \text{تو}$$

$$= \{a, b, c, e, i, o, u\}$$

(ii)  $C \cup D$  معلوم کیجئے اگر

$$C = \{2, 3, 4, 5\} \text{ اور } D = \{6, 7\}$$

$$C = \{2, 3, 4, 5\}, D = \{6, 7\} \quad \text{چونکہ}$$

حل :-

$$C \cup D = \{2, 3, 4, 5, \} \cup \{6, 7\} \quad \text{تو}$$

$$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

(iii)  $E \cup F$  معلوم کیجئے اگر

$$E = \{1, 2, 3, 5, 7\} \text{ اور } F = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$E = \{1, 2, 3, 5, 7\}, F = \{2, 4, 6, 8\}$$

حل :-

$$E \cup F = \{1, 2, 3, 5, 7\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

## سیٹوں کا تقاطع Intersection of Sets

دو سیٹوں  $A$  اور  $B$  کا تقاطع  $A \cap B$  سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ ان ارکان پر مشتمل ہوتا ہے جو  $A$  اور  $B$  دونوں کے مشترک ارکان ہوں۔

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} \text{ لہذا}$$

$A \cap B$  معلوم کیجئے اگر

مثال :-

(i)  $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$  ,  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(ii)  $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$  ,  $B = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32\}$

(iii)  $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 18\}$

حل :-

$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$  ,  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(i) چونکہ

$A \cap B = \{2, 3, 5, 7, 11\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\}$

اس لیے

$= \{3, 5, 7\}$

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$  ,  $B = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32\}$

(ii) چونکہ

$A \cap B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\} \cap \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32\}$

لہذا

$= \{12, 24\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 18\}$

(iii) چونکہ

$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 18\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 6\}$

## کائناتی سیٹ Universal Set

اگر کچھ سیٹ زیر بحث ہوں تو ان میں ایک سیٹ ایسا بھی ہو سکتا ہے کہ وہ ان سب سیٹوں کا فوقی سیٹ (Super Set) ہو۔ ایسا سیٹ کائناتی یعنی یونیورسل سیٹ کہلاتا ہے۔ جسے ہم علامت 'U' سے ظاہر کرتے ہیں۔  
مثال کے طور پر

اگر  $A = \{1, 2\}$  ,  $B = \{2, 3\}$  ,  $C = \{1, 3\}$  ہو تو  $U = \{1, 2, 3\}$  تمام سیٹوں  $A, B, C$  کا فوقی سیٹ Super set ہے اور سیٹ  $A, B, C$  سیٹ  $U$  کے تحتی سیٹ کہلاتے ہیں۔

## Complement of a Set سیٹ کا مکمل

فرض کریں کہ 'A' کسی یونیورسل سیٹ کا تحتی سیٹ ہے۔ تو سیٹ A کا مکمل سیٹ، یونیورسل سیٹ U کے لحاظ سے، سیٹ U کے ان تمام ارکان پر مشتمل ہوگا جو سیٹ A میں نہ ہوں اسے علامتی طور پر  $A'$  یا  $U - A$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$A' = \{x | x \in U \wedge x \notin A\} \quad \text{پس}$$

$$x \in A' \Rightarrow x \notin A$$

$$x \in A \Rightarrow x \notin A' \quad \text{اور}$$

$$A^c = U - A$$

یاد رہے کہ

$$U^c = U - U = \Phi, \Phi^c = U - \Phi = U$$

$$(A^c)^c = U - A^c = A$$

مثال 1:-

اگر  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  اور  $A = \{3, 4, 5\}$  ہو تو  $A^c$  معلوم کیجئے۔

حل:-

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{چونکہ}$$

$$A = \{3, 4, 5\} \quad \text{اس لیے}$$

$$A^c = U - A \quad \text{تو}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{3, 4, 5\}$$

$$A^c = \{1, 2, 6, 7\} \quad \text{لہذا}$$

مثال 2:-

اگر  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  اور  $A = \{2, 3, 5, 7\}$  ہو تو  $A^c$ ,  $A \cup A^c$ ,  $A \cap A^c$  معلوم کیجئے۔

حل:-

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad \text{چونکہ}$$

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$A^c = U - A \quad \text{اس لیے}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{2, 3, 5, 7\}$$

$$= \{1, 4, 6, 8\}$$

$$A \cup A^c = \{2, 3, 5, 7\} \cup \{1, 4, 6, 8\} \quad \text{اب}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$= U$$

$$A \cap A^c = \{2,3,5,7\} \cap \{1,4,6,8\}$$

$$= \{ \}$$

$$= \Phi$$

$$A \cup A^c = U \text{ اور } A \cap A^c = \Phi$$

یعنی کہ

مثال 3:-

اگر  $U = \{1,2,3,\dots,20\}$ ,  $A = \{9,10,11,12,\dots,20\}$  ہو تو  $A^c$ ,  $A \cup A^c$  اور  $A \cap A^c$  معلوم کیجئے۔

$$A^c = U - A$$

$$= \{1,2,3,\dots,20\} - \{9,10,11,12,\dots,20\}$$

$$= \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

حل:-

$$A \cup A^c = \{9,10,11,12,\dots,20\} \cup \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,\dots,20\}$$

$$= U$$

اب

$$A \cap A^c = \{9,10,11,12,\dots,20\} \cap \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$= \{ \}$$

$$= \Phi$$

$$A \cup A^c = U \text{ اور } A \cap A^c = \Phi$$

### دو سیٹوں کا فرق Difference of two sets

اگر  $A$  اور  $B$  دو سیٹ ہوں۔ تو  $A$  سے  $B$  کا فرق سیٹ  $A$  کے ان ارکان پر مشتمل ہوگا جو سیٹ  $B$  میں موجود نہ ہوں۔ علامتی طور پر اسے  $A - B$  یا  $A \setminus B$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح  $B$  سے  $A$  کا فرق سیٹ  $B$  کے ان ارکان پر مشتمل ہوگا جو سیٹ  $A$  میں موجود نہ ہوں جسے  $B - A$  یا  $B \setminus A$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$A = \{2,3,4,5\}, B = \{2,4,6,8\} \quad (i) \text{ فرض کیا کہ}$$

$$A - B = \{2,3,4,5\} - \{2,4,6,8\} = \{3,5\} \quad \text{تب}$$

$$B - A = \{2,4,6,8\} - \{2,3,4,5\} = \{6,8\} \quad \text{اور}$$

$$A = \{3,4,5,6,7\}, B = \{1,2,3,4,7,8,9,10\} \quad (ii) \text{ فرض کیا}$$

$$A \setminus B = \{3,4,5,6,7\} \setminus \{1,2,3,4,7,8,9,10\} = \{5,6\}$$

$$B \setminus A = \{1,2,3,4,7,8,9,10\} \setminus \{3,4,5,6,7\} \quad \text{اور}$$

$$= \{1,2,8,9,10\}$$

$$A - B \neq B - A$$

## 8.1.2 سیٹوں کے یونین کے خواص Properties of Union of Sets

### خاصیت مبادلہ Commutative Property

کوئی سے دو سیٹوں  $A$  اور  $B$  کے لیے

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cup B &= \{x : x \in A \text{ or } x \in B\} && \text{فرض کیا کہ} \\ &= \{x : x \in B \text{ or } x \in A\} \\ &= B \cup A \\ A \cup B &= B \cup A && \text{پس} \end{aligned}$$

### خاصیت تلازم Associative Property

کوئی سے تین سیٹوں  $A, B, C$  کے لیے

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cup B) \cup C &= \{x : x \in (A \cup B) \text{ or } x \in C\} && \text{فرض کیا} \\ &= \{x : (x \in A \text{ or } x \in B) \text{ or } x \in C\} \\ &= \{x : x \in A \text{ or } (x \in B \text{ or } x \in C)\} \\ &= \{x : x \in A \text{ or } x \in (B \cup C)\} \\ &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) && \text{پس} \end{aligned}$$

**مثال :-** اگر  $C = \{2, 6\}$  اور  $B = \{7, 8, 9, 10\}$  ،  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  ہو تو ثابت کیجئے کہ

$$(a) A \cup B = B \cup A$$

$$(b) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

**حل :-** چونکہ  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  ،  $B = \{7, 8, 9, 10\}$  ،  $C = \{2, 6\}$

$$(a) A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{7, 8, 9, 10\} \quad \text{اس لیے}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\} \dots \dots \dots (i)$$

$$B \cup A = \{7, 8, 9, 10\} \cup \{1, 2, 3, 4\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\} \dots \dots \dots (ii)$$

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{نتیجہ (i) اور (ii) سے}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad (A \cup B) \cup C &= (\{1,2,3,4\} \cup \{7,8,9,10\}) \cup \{2,6\} \\
 &= \{1,2,3,4,7,8,9,10\} \cup \{2,6\} \\
 &= \{1,2,3,4,6,7,8,9,10\} \dots \dots \dots (i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A \cup (B \cup C) &= \{1,2,3,4\} \cup (\{7,8,9,10\} \cup \{2,6\}) \\
 &= \{1,2,3,4\} \cup \{2,6,7,8,9,10\} \\
 &= \{1,2,3,4,6,7,8,9,10\} \dots \dots \dots (ii)
 \end{aligned}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{نتیجہ (i) اور (ii) سے}$$

## Properties of Intersection of Sets سیٹوں پر تقاطع کے خواص

### Commutative Property خاصیت مبادلہ

کسی دو سیٹوں A اور B کے لیے

$$A \cap B = B \cap A$$

$$\begin{aligned}
 A \cap B &= \{x : x \in A \text{ and } x \in B\} \quad \text{ثبوت: فرض کیا کہ} \\
 &= \{x : x \in B \text{ and } x \in A\} \\
 &= \{x : x \in (B \cap A)\} \\
 &= B \cap A
 \end{aligned}$$

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{پس}$$

### Associative Property خاصیت تلازم

کوئی سے تین سیٹوں A, B, C کے لیے

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$\begin{aligned}
 (A \cap B) \cap C &= \{x : x \in (A \cap B) \text{ and } x \in C\} \quad \text{فرض کیا کہ} \\
 &= \{x : (x \in A \text{ and } x \in B) \text{ and } x \in C\} \\
 &= \{x : x \in A \text{ and } x \in B \text{ and } x \in C\} \\
 &= \{x : x \in A \text{ and } (x \in B \text{ and } x \in C)\} \\
 &= \{x : x \in A \text{ and } x \in (B \cap C)\} \\
 &= \{x : x \in A \cap (B \cap C)\} \\
 &= A \cap (B \cap C)
 \end{aligned}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \text{پس}$$

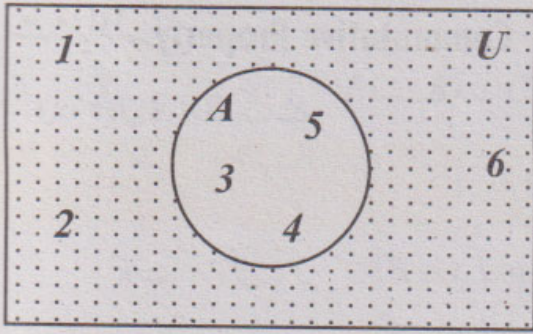


## 8.1.3 وین اشکال Venn Diagram

سیٹوں کے درمیان تعلق کو مناظری لحاظ سے ظاہر کرنے کے لئے، ہم سیٹوں کو اشکال کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں۔ جو کہ وین اشکال کہلاتی ہیں۔ وین اشکال کو سب سے پہلے انگریز ماہر منطق اور ریاضی دان جان وین (1834-1883) John Venn نے استعمال کیا۔

وین اشکال میں عموماً یونیورسل سیٹ کو ایک مستطیلی علاقہ اور اس کے متعلقہ تحتی سیٹوں کو اس کے اندر بند علاقوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ اور } A = \{3, 4, 5\} \text{ مثلاً اگر}$$



دی ہوئی شکل میں مستطیلی علاقہ یونیورسل سیٹ  $U$  کو ظاہر کرتا ہے۔ جبکہ اس کے اندر دائروی بند علاقہ سیٹ  $A$  کو ظاہر کرتا ہے۔

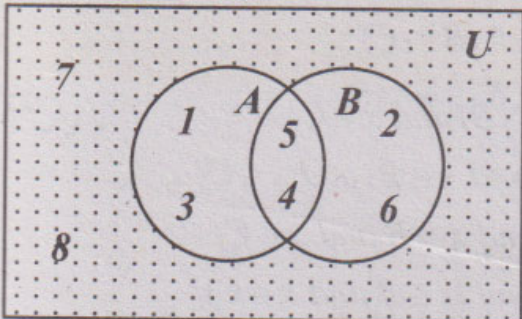
$A^c = \{1, 2, 6\}$  سے باہر  $U$  کا نقاط دار علاقہ  $A$  کے کمپلیمنٹ یعنی  $A^c$  کو ظاہر کرتا ہے پس

## سیٹوں کا یونین اور تقاطع Union and Intersection of Sets

فرض کیا  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

اور  $B = \{2, 4, 5, 6\}$  اور  $A = \{1, 3, 4, 5\}$

اس کے کوئی دو تحتی سیٹ ہیں تب۔



شکل میں مستطیلی علاقہ  $U$  کا ناتی سیٹ کو ظاہر کرتا ہے چونکہ  $A$  اور  $B$  دو متقاطع سیٹ ہیں۔ لہذا دو متقاطع دائرے  $A$  اور  $B$  کو ظاہر کرتے ہیں۔

(1)  $A$  اور  $B$  سے گھرا ہوا علاقہ  $A \cup B$  ظاہر کرتا ہے۔

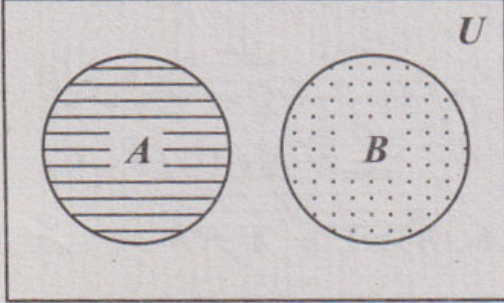
$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5\} \cup \{2, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ لہذا}$$

(2) دونوں سیٹوں  $A$  اور  $B$  کا مشترکہ علاقہ  $A \cap B$  کو ظاہر کرتا ہے۔

$$A \cap B = \{1, 3, 4, 5\} \cap \{2, 4, 5, 6\} = \{4, 5\} \text{ لہذا}$$

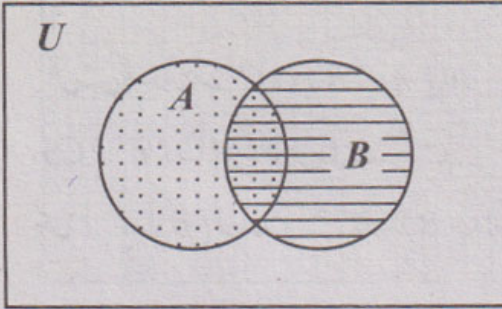
### 8.1.4 سیٹوں کی یونین اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ وین اشکال میں

سیٹوں کا یونین جب دو سیٹ غیر متراکب ہوں **When two Sets are Disjoint**



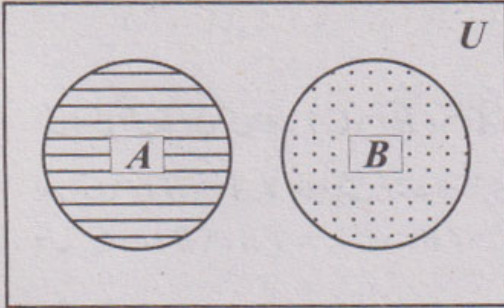
شکل میں لکیر دار اور نقاط دار حصہ  $A \cup B$  کو ظاہر کرتا ہے اور یہی نقاط دار اور لکیر دار حصہ  $B \cup A$  کو بھی ظاہر کرتا ہے۔ جس کا مطلب ہوا کہ  $A \cup B$  اور  $B \cup A$  کو ایک ہی طرح کا حصہ ظاہر کرتا ہے پس  $A \cup B = B \cup A$

سیٹوں کا یونین جب سیٹ متراکب ہوں **When two Sets are Overlapping**



دی گئی شکل میں نقاط دار، نقاط دار اور لکیر دار حصہ  $A \cup B$  کو ظاہر کرتا ہے اور اسی طرح لکیر دار، لکیر دار اور نقاط دار حصہ  $B \cup A$  کو ظاہر کرتا ہے لہذا  $A \cup B = B \cup A$

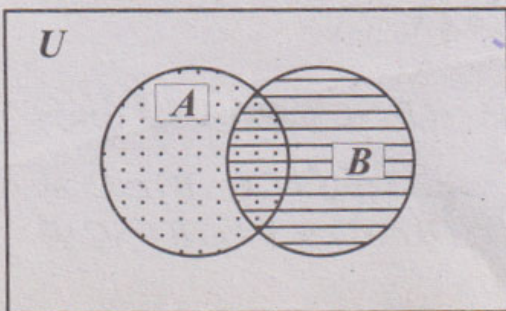
سیٹوں کا تقاطع جب دونوں سیٹ غیر متراکب ہوں **When two Sets are Disjoint**



شکل میں لکیر دار حصہ سیٹ A کو جبکہ نقاط دار حصہ سیٹ B کو ظاہر کرتا ہے۔ یعنی کہ  $U$  کا کوئی بھی حصہ  $A \cap B$  اور  $B \cap A$  کو ظاہر نہیں کرتا۔

$$A \cap B = B \cap A \text{ پس}$$

سیٹوں کا تقاطع جب دونوں سیٹ متراکب ہوں **When two Sets are Overlapping**

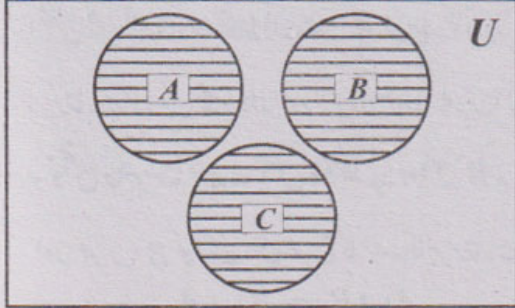


شکل میں نقاط دار، نقاط دار اور لکیر دار حصہ A سیٹ کو ظاہر کرتا ہے۔ جبکہ لکیر دار اور نقاط دار، لکیر دار حصہ سیٹ B کو ظاہر کرتا ہے۔ لکیر دار اور نقاط دار حصہ دونوں سیٹوں کا مشترکہ علاقہ ہے جو کہ  $A \cap B$  اور  $B \cap A$  کو ظاہر کرتا ہے۔

$$A \cap B = B \cap A \text{ پس}$$

## سیٹوں کی یونین اور تقاطع کی خاصیت تلازم وین اشکال میں

سیٹوں کا یونین جب تینوں سیٹ غیر متراکب ہوں

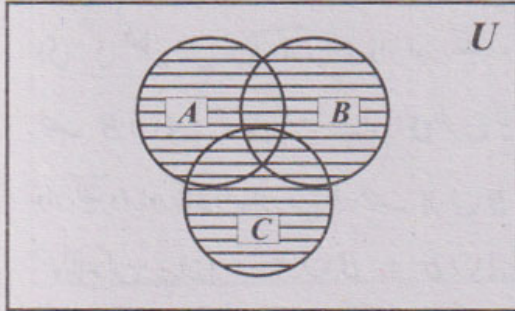


شکل میں لیکر دار حصہ  $(A \cup B) \cup C$  اور

$A \cup (B \cup C)$  کو ظاہر کرتا ہے۔

پس  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

سیٹوں کا یونین جب تینوں سیٹ متراکب ہوں

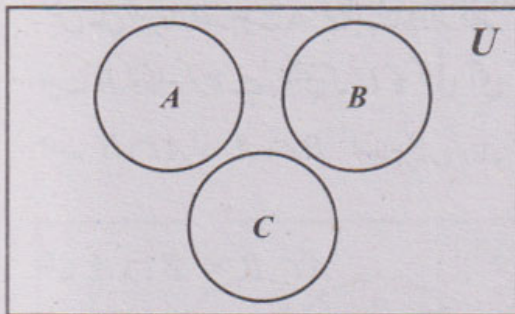


شکل میں لیکر دار حصہ  $(A \cup B) \cup C$  اور

$A \cup (B \cup C)$  کو ظاہر کرتا ہے۔

پس  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

سیٹوں کا تقاطع جب تینوں سیٹ غیر متراکب ہوں

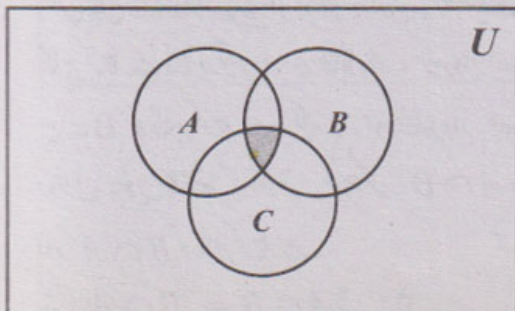


دی ہوئی شکل کا کوئی بھی حصہ  $A \cap (B \cap C)$

اور  $(A \cap B) \cap C$  ظاہر نہیں کرتا۔

پس  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

سیٹوں کا تقاطع جب تینوں سیٹ متراکب ہوں



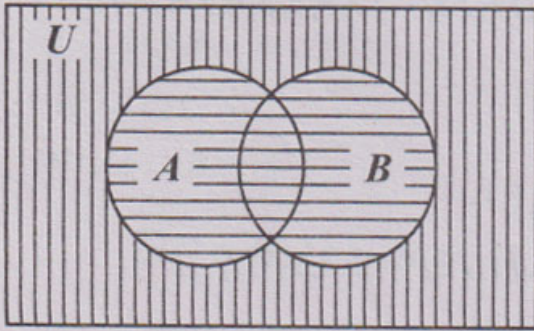
دی ہوئی شکل کا سایہ دار حصہ  $A \cap (B \cap C)$

اور  $(A \cap B) \cap C$  کو بھی ظاہر کرتا ہے۔

لہذا  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

## De Morgan's Laws ڈی مارگن کے قوانین

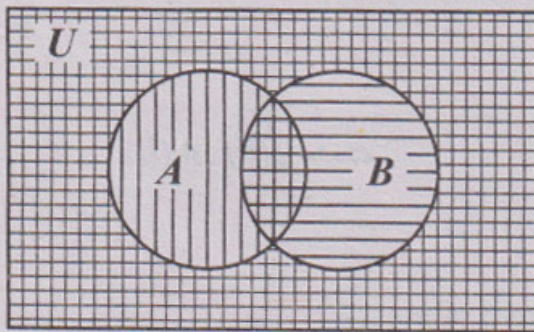
یونیورسل سیٹ  $U$  کے دو تہی سیٹوں  $A$  اور  $B$  کے لئے



$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (i)$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad (ii)$$

شکل میں  $\equiv$  لائنوں سے ظاہر کیا گیا حصہ  $A \cup B$  کو جبکہ  $\equiv$  حصہ  $(A \cup B)^c$  کو ظاہر کرتا ہے۔



شکل میں  $\equiv$  چیک دار حصہ  $A^c \cap B^c$

کو ظاہر کرتا ہے۔ لہذا دونوں اشکال میں  $\equiv$  اور

$\equiv$  ایک ہی جگہ ہیں۔

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \text{ پس}$$

اس کا دوسرا قانون طلبہ کے لیے بطور مشتق چھوڑ دیا گیا ہے۔

**مثال :-** اگر  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$   $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$

اور  $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$  ہو تو ڈی مارگن کے قوانین ثابت کیجئے۔

$$A = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

چونکہ

**حل :-**

$$B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$$

$$(a) \quad A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\} \cup \{2, 3, 5, 7, 9\}$$

$$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$(A \cup B)^c = U - (A \cup B)$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} - \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$= \{1, 11, 12\} \dots (i)$$

$$\begin{aligned}
 A^c &= U - A \\
 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} - \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \\
 &= \{1, 11, 12\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^c &= U - B \\
 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} - \{2, 3, 5, 7, 9\} \\
 &= \{1, 4, 6, 8, 10, 11, 12\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^c \cap B^c &= \{1, 11, 12\} \cap \{1, 4, 6, 8, 10, 11, 12\} \\
 &= \{1, 11, 12\} \dots \dots (ii)
 \end{aligned}$$

(i) اور (ii) کی مدد سے

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad A \cap B &= \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{2, 3, 5, 7, 9\} \\
 &= \{2, 3, 7, 9\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A \cap B)^c &= U - (A \cap B) \\
 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} - \{2, 3, 7, 9\} \\
 &= \{1, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12\} \dots \dots (i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^c &= U - A \\
 &= \{1, 5, 11, 12\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^c &= U - B \\
 &= \{1, 4, 6, 8, 10, 11, 12\}
 \end{aligned}$$

$$A^c \cup B^c = \{1, 4, 6, 8, 10, 11, 12\} \dots \dots (ii)$$

(i) اور (ii) کی مدد سے

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

## 8.1 مشق

1- اگر  $A = \{1,4,7,8\}$ ,  $B = \{4,6,8,9\}$  اور  $C = \{3,4,5,7\}$  ہو تو درج ذیل معلوم کیجئے۔

(i)  $A \cup B$

(ii)  $B \cup C$

(iii)  $A \cap C$

(iv)  $A \cap (B \cap C)$

(v)  $(A \cup B) \cup C$

(vi)  $(A \cap B) \cap C$

2- اگر  $A = \{1,7,11,15,17,21\}$ ,  $B = \{11,17,19,23\}$  اور  $C = \{2,3,5\}$  ہو تو

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ ثابت کیجئے کہ}$$

3- اگر  $A = \{2,4,6\}$ ,  $B = \{3,6,9,12\}$  اور  $C = \{4,6,8,10\}$  ہو تو

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \text{ ثابت کیجئے کہ}$$

4- اگر  $A = \{2,3,5,7,9\}$ ,  $B = \{1,3,5,7\}$  اور  $C = \{2,3,4,5,6\}$  ہو تو

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ ثابت کیجئے کہ}$$

5- اگر  $U = \{7,8,9,10,11,12,13,14\}$

$$A = \{7,10,13,14\}$$

$$\text{اور } B = \{7,8,11,12\} \text{ ہو تو}$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \text{ ثابت کیجئے کہ}$$

6- ڈی مارگن کے قوانین ثابت کیجئے اگر  $U = \{4,6,8,9,10\}$  اور  $A = \{4,6\}$ ,  $B = \{6,8,9\}$

7- اگر  $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  اور  $A = \{2,3,6,9\}$

$$\text{اور } B = \{1,3,6,7,8\} \text{ ہو تو}$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \text{ ثابت کیجئے کہ}$$

8- خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i)  $A \cup A = \underline{\hspace{2cm}}$

(ii)  $A \cap A = \underline{\hspace{2cm}}$

(iii)  $A \cup \Phi = \underline{\hspace{2cm}}$

(iv)  $A \cap \Phi = \underline{\hspace{2cm}}$

(v)  $\Phi \cup \Phi = \underline{\hspace{2cm}}$

(vi)  $(A \cap B)^c = \underline{\hspace{2cm}}$

(vii)  $(A \cup B)^c = \underline{\hspace{2cm}}$

(viii)  $(A^c)^c = \underline{\hspace{2cm}}$

(ix)  $\Phi \cap \Phi^c = \underline{\hspace{2cm}}$

(x)  $A \cap A^c = \underline{\hspace{2cm}}$

## 8.2 ثنائی ربط BINARY RELATION

دو غیر خالی سیٹ  $A = \{1, 2\}$  اور  $B = \{3, 4\}$  لیجئے پھر  $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$  جبکہ  $A \times B$  سے  $A$  کا تیسری حاصل ضرب (Cartesian Product) کہلاتا ہے۔  $A \times B$  کے اراکین  $(1, 3), (1, 4), (2, 3)$  اور  $(2, 4)$  مرتب جوڑے کہلاتے ہیں۔

اسی طرح  $B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$  سے  $A$  کا تیسری حاصل ضرب کہلاتا ہے۔ بالعموم  $A \times B \neq B \times A$  درج ذیل  $A \times B$  کے تمام تہتی سیٹ (Sub sets) سے  $B$  ثنائی روابط (A to B, Binary Relations) کہلاتے ہیں۔

$$R_1 = \{ \}, R_2 = \{(1, 3)\}, R_3 = \{(1, 4)\}$$

$$R_4 = \{(2, 3)\}, R_5 = \{(2, 4)\}, R_6 = \{(1, 3), (1, 4)\}$$

$$R_7 = \{(1, 3), (2, 3)\}, R_8 = \{(1, 3), (2, 4)\}, R_9 = \{(1, 4), (2, 3)\}$$

$$R_{10} = \{(1, 4), (2, 4)\}, R_{11} = \{(2, 3), (2, 4)\}, R_{12} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$$

$$R_{13} = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4)\}, R_{14} = \{(1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$R_{15} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}, R_{16} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

کسی بھی ثنائی ربط کے مرتب جوڑوں کے پہلے مقام کے اراکین پر مشتمل سیٹ اس ثنائی ربط کا ڈومین (Dom) کہلاتا ہے۔ جبکہ مرتب جوڑوں کے دوسرے مقام پر موجود اراکین کا سیٹ اس ثنائی ربط کی رینج (Range) کہلاتا ہے۔ درج ذیل مثال پر غور کیجئے۔

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$$

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$$

ہم  $A \times B$  کا ایک تہتی سیٹ لیتے ہیں۔

$$R_1 = \{(1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

$R_1$  ایک ربط یا ثنائی ربط ہے۔

$$R_1 \text{ ڈومین } = \{1, 2, 3\}$$

$$R_1 \text{ رینج } = \{3, 4\}$$

اسی طرح اگر  $A = \{4, 5, 6\}$  ہو تو

$$A \times A = \{(4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

تو ہم  $A \times A$  کا تہتی سیٹ 'R' اس طرح لیتے ہیں کہ

$$R = \{(4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$R \text{ ڈومین } = \{4, 5, 6\}$$

$$R \text{ رینج } = \{4, 5, 6\}$$

**مثال :-** اگر  $C = \{1, 2\}$  ہو تو  $C \times C$  میں ثنائی روابط کی تعداد لکھیے۔

**حل :-**

چونکہ  
 $C = \{1, 2\}$   
 $C \times C = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$   
 تو  $C \times C$  کے ثنائی روابط کی تعداد  $2^4$  یا 16 ہوگی۔

### 8.3 تفاعل FUNCTION

دو سیٹوں  $A$  اور  $B$  میں اسی طرح کا ثنائی ربط 'f' ایسا ہو کہ

(i)  $f = A$  ڈومین

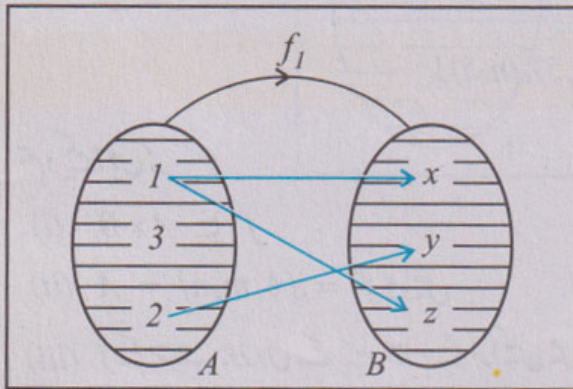
(ii) 'f' کے ہر مرتب جوڑوں کے پہلے مقام کے اراکین میں تکرار (Repetition) نہ ہو۔

تب 'f' کو  $A$  سے  $B$  کی جانب فنکشن کہتے ہیں اور اسے یوں ظاہر کرتے ہیں  $f: A \rightarrow B$

**مثال :-**

$A = \{1, 2, 3\}$  ,  $B = \{x, y, z\}$

$A \times B = \{(1, x), (2, x), (3, x), (1, y), (2, y), (3, y), (1, z), (2, z), (3, z)\}$



درج ذیل دو ثنائی روابط لیجئے۔

$f_1 = \{(1, x), (2, y), (1, z)\}$

$f_2 = \{(1, y), (2, x), (3, y)\}$

ثنائی ربط  $f_1$ :

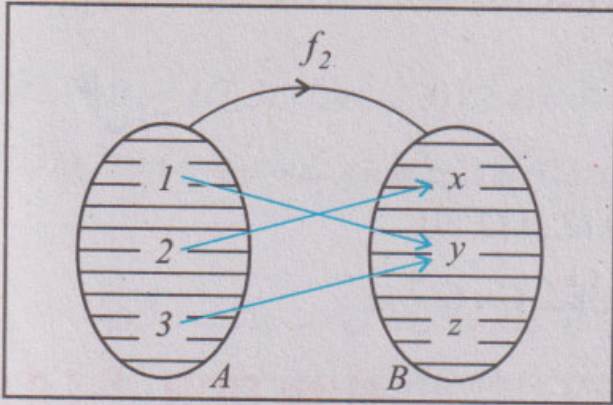
$f_1 \subset A \times B$ . (i)

$\text{Dom } f_1 \neq A$  (ii)

(iii) 'f1' کے مرتب جوڑوں  $(1, x), (1, z)$  کے پہلے اراکین میں تکرار پائی جاتی ہے۔

لہذا  $f_1$  ایک ثنائی ربط ہے مگر فنکشن نہیں ہے۔  $f_1$  ریج  $\{x, y, z\}$





ثانی ربط  $f_2$ :

$$f_2 \subset A \times B \quad (i)$$

$$f_2 = \{1, 2, 3\} = A \quad (ii)$$

(iii)  $f_2$  کے مرتب جوڑوں کے پہلے مقام کے

اراکین میں تکرار نہیں پائی جاتی۔

$$\text{ریج } f_2 = \{x, y\} \subset B \quad \text{لیکن } f_2 \neq B$$

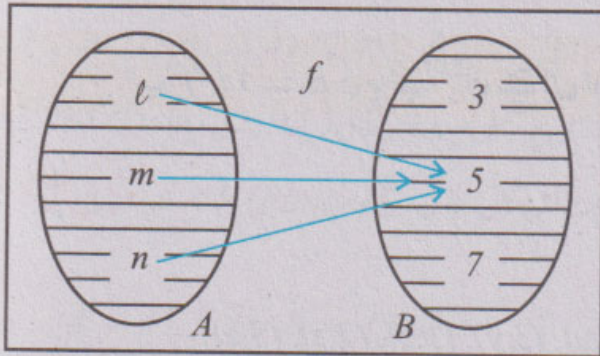
لہذا  $Af_2$  سے  $B$  کی جانب فنکشن ہے۔

### ان ٹو فنکشن Into Function

اگر  $f$  سے  $A$  کی جانب فنکشن ہو۔

یعنی  $f \subset B$  مگر  $f \neq B$

تو  $f$  کو  $A$  ان ٹو  $B$  فنکشن کہتے ہیں۔



مثال :-

$$A = \{l, m, n\}, \quad B = \{3, 5, 7\}$$

$$A \times B = \{(l, 3), (l, 5), (l, 7),$$

$$(m, 3), (m, 5), (m, 7),$$

$$(n, 3), (n, 5), (n, 7)\}$$

ایک ثانی ربط 'f' لیا۔

$$f = \{(l, 5), (m, 5), (n, 5)\}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$f \subset A \times B \quad (i)$$

$$f = \{l, m, n\} = A \quad (ii)$$

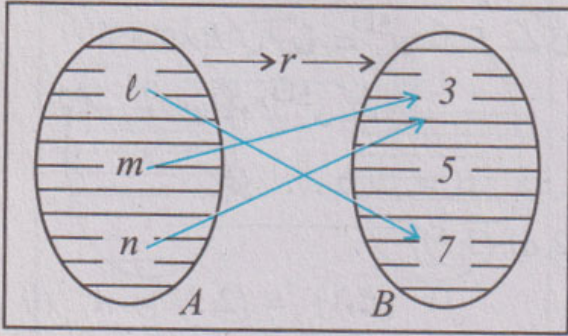
(iii)  $f$  کے مرتب جوڑوں کے پہلے مقام کے اراکین میں تکرار نہیں پائی جاتی۔ یا یوں کہ سیٹ  $A$  کا ہر ایک رکن

ایک اور صرف ایک مرتبہ سیٹ  $B$  کے ایک رکن سے جوڑا گیا ہے۔

$$\text{ریج } f = \{5\} \subset B \quad \text{لیکن } f \neq B \quad (iv)$$

لہذا 'f' "A ان ٹو B" فنکشن ہے۔

ایک اور ثنائی ربط 'r' پر غور کیجئے۔ جو کہ یوں ہے۔



$$r = \{(l, 7), (m, 3), (n, 3)\}.$$

$$r \subset A \times B \quad (i)$$

$$\text{ڈومین } r = \{l, m, n\} = A \quad (ii)$$

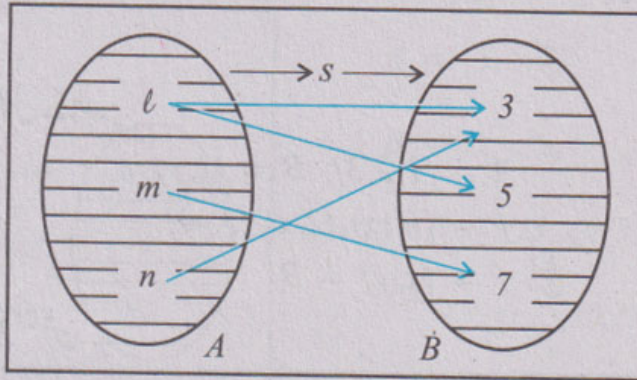
(iii) مرتب جوڑوں میں سیٹ A کے ہر ایک رکن کو سیٹ B کے ارکان سے جوڑا گیا ہے۔  
یعنی r کے کسی دو مرتب جوڑوں کے پہلے مقام کے اراکین میں تکرار نہیں پائی جاتی۔

$$\text{رنج } r = \{3, 7\} \neq B \quad (iv)$$

لہذا 'r' A ان ٹو B فنکشن ہے۔

آئیے سیٹ 'S' سے A کی جانب ایک اور ثنائی ربط لیتے ہیں۔

$$S = \{(l, 3), (l, 5), (m, 7), (n, 3)\}$$



$$S \subset A \times B \quad (i)$$

$$\text{Dom } S = \{l, m, n\} = A \quad (ii)$$

(iii) مرتب جوڑوں (l, 3), (l, 5) میں پہلے رکن 'l' کی تکرار ہے یعنی  $l \in A$  کو

3, 5 ∈ B کے دو اراکین سے جوڑا گیا ہے۔

لہذا 'S' ایک فنکشن نہیں ہے۔

## انجیکٹو فنکشن Injective Function

اگر 'f' A ان ٹو B اس طرح سے فنکشن ہو کہ 'f' کے کسی دو مرتب جوڑوں کے دوسرے مقام کے اراکین ایک جیسے نہ ہوں۔ تو پھر f کو "انجیکٹو" فنکشن کہتے ہیں۔

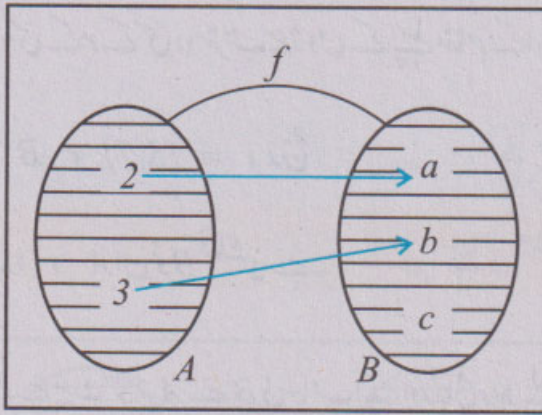
$$A = \{2, 3\}, B = \{a, b, c\}, \text{ مثلاً}$$

$$f = \{(2, a), (3, b)\}$$

$$f = \{2, 3\} = A \text{ (i)}$$

(ii) f کے مرتب جوڑوں کے پہلے مقام کے اراکین میں تکرار نہیں پائی جاتی۔

$$f \neq B \text{ (iii)}$$



لہذا 'f' A ان ٹو B فنکشن ہے۔

(iv) f کے مرتب جوڑوں کے دوسرے مقام کے

اراکین ایک جیسے نہیں (تکرار نہیں پائی جاتی)

پس 'f' ون۔ ون ہے۔ لہذا 'f' انجیکٹو فنکشن ہے۔

## آن ٹو فنکشن Surjective Function

اگر 'f' سیٹ A ٹو B ایسا فنکشن ہو کہ 'f' کی رینج سیٹ B کے برابر ہو یعنی  $f = B$  رینج، تب 'f' A آن ٹو B فنکشن کہلاتا ہے۔

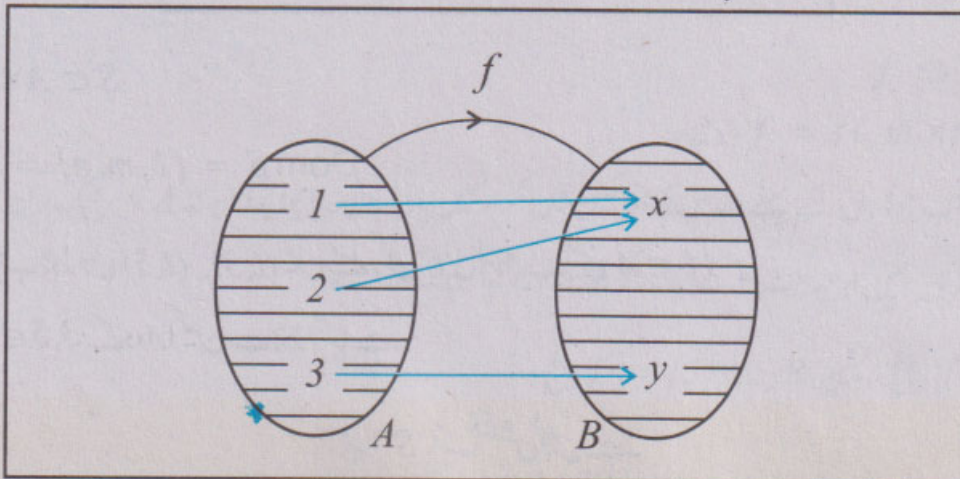
مثال کے طور پر

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{x, y\}$$

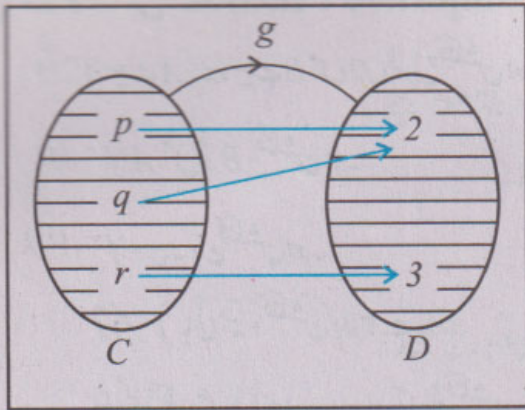
$$f = \{(1, x), (2, x), (3, y)\}$$

$$f = \{x, y\} = B$$

لہذا 'f' A آن ٹو B فنکشن ہے۔



مثال :- فرض کیا



$$C = \{p, q, r\}$$

$$D = \{2, 3\}$$

$$C \times D = \{(p, 2), (q, 2), (r, 2), (p, 3), (q, 3), (r, 3)\}$$

$$g = \{(p, 2), (q, 2), (r, 3)\}$$

$$g \text{ ڈومین } = \{p, q, r\} \quad (i)$$

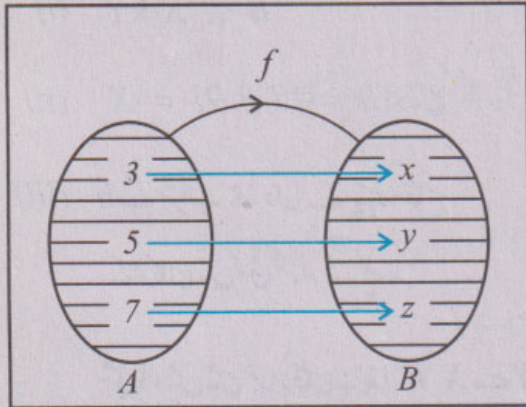
(ii)  $g$  کے کسی بھی دو مرتب جوڑوں کے پہلے ارکان میں تکرار نہیں پائی جاتی ہے۔

لہذا  $g$  سے  $C$  کی جانب فنکشن ہے۔

$$\text{ریج } (g) = D \quad (iii)$$

پس 'g'  $C$  آن ٹو  $D$  فنکشن ہے۔

مثال :- فرض کیا



$$A = \{3, 5, 7\}$$

$$B = \{x, y, z\}$$

$$A \times B = \{(3, x), (3, y), (3, z), (5, x),$$

$$(5, y), (5, z), (7, x), (7, y), (7, z)\}$$

$$f = \{(3, x), (5, y), (7, z)\}$$

$$f \text{ ڈومین } = \{3, 5, 7\} = A \quad (i)$$

(ii) 'f' کے کسی بھی دو مرتب جوڑوں کے پہلے مقام کے ارکان میں تکرار نہیں پائی جاتی ہے۔

لہذا 'f' سے  $A$  کی جانب فنکشن ہے۔

$$\text{ریج } f = B \quad (iii)$$

پس 'f'  $A$  آن ٹو  $B$  فنکشن ہے۔

## بائی جیکٹو فنکشن Bijjective Function

اگر 'f' سیٹ A سے سیٹ B میں اس طرح فنکشن ہو کہ

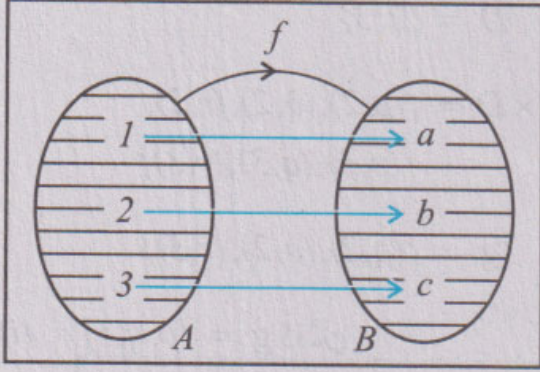
(i) 'f' A آن ٹو B فنکشن ہو۔

(ii) 'f' ون-ون فنکشن ہو۔

تو پھر 'f' بائی جیکٹو فنکشن کہلاتا ہے۔

دی گئی شکل میں 'f' ون-ون اور آن ٹو فنکشن ہے۔

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$



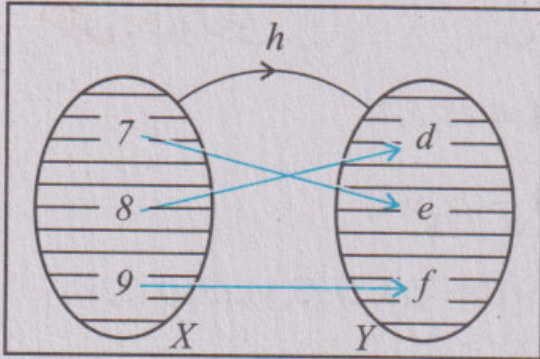
مثال :- فرض کیا

$$X = \{7, 8, 9\}, Y = \{d, e, f\}$$

تب،  $X \times Y = \{(7, d), (8, d), (9, d), (7, e), (8, e), (9, e), (7, f), (8, f), (9, f)\}$

$$h = \{(7, e), (8, d), (9, f)\}$$

اور



$$h \subset X \times Y \quad (i)$$

$$h = \{7, 8, 9\} = X \quad (ii)$$

(iii) h کے مترتب جوڑوں کے پہلے مقام

کے ارکان میں کوئی تکرار نہ ہے۔

یعنی ڈومین میں تکرار نہیں۔ لہذا 'h' X سے Y کی جانب فنکشن ہے۔

$$h = Y = \{d, e, f\} \quad (iv)$$

پس X، h آن ٹو Y فنکشن ہے۔

(v) مترتب جوڑوں کے دوسرے مقام کے ارکان جو کہ Y سے ہیں میں تکرار نہیں ہے۔

لہذا 'h' (ون-ون) فنکشن ہے۔ اس لیے 'h' بائی جیکٹو فنکشن ہے۔

## مشق 8.2

- 1- اگر  $A = \{3, 5, 6\}$ ,  $B = \{1, 3\}$  ہو تو  $A \times B$  اور  $B \times A$  معلوم کیجئے۔  
اور خود سے دو دو ثنائی روابط لکھ کر ان کی ڈومین اور رینج معلوم کیجئے۔
- 2- اگر  $A = \{-2, 1, 4\}$  تو  $A$  میں دو ثنائی روابط لکھ کر ان کی ڈومین اور رینج لکھیے۔
- 3- مندرجہ ذیل میں ہر ایک کے ممکن ثنائی روابط کی تعداد لکھیے۔  
(i)  $C \times C$  میں جبکہ  $C$  کے ارکان کی تعداد 3 ہے۔  
(ii)  $A \times B$  میں جبکہ  $A$  میں 3 ارکان اور  $B$  میں 4 ارکان ہوں۔
- 4- اگر  $L = \{1, 2, 3\}$  اور  $M = \{2, 3, 4\}$  ہو تو 'R' ثنائی ربط ایسا لکھیے کہ:  
 $R = \{(x, y) \mid x \in L, y \in M \wedge y \leq x\}$  اور  $R$  کی ڈومین اور رینج بھی لکھیے۔
- 5- اگر  $X = \{0, 3, 5\}$  اور  $Y = \{2, 4, 8\}$  ہو تو  $X \times Y$  میں چار ثنائی روابط لکھیے۔
- 6- اگر  $A = \{a, b, c\}$  اور  $B = \{2, 4, 6\}$  اور  $f = \{(a, 4), (b, 4), (c, 4)\}$  ایک  $A \times B$  سے ثنائی ربط ہو تو ثابت کیجئے کہ 'f' ان ٹو  $B$  فنکشن ہے۔
- 7- اگر  $A = \{l, m, n\}$  اور  $B = \{1, 2, 3\}$  اور  $g = \{(l, 3), (m, 1), (n, 1)\}$  ایک  $A \times B$  سے ثنائی ربط ہو تو ثابت کیجئے کہ 'g' ان ٹو  $B$  فنکشن ہے۔
- 8- اگر  $A = \{1, 3, 5\}$  اور  $B = \{x, y, z\}$  اور  $g = \{(1, x), (3, y), (5, z)\}$  ایک  $A \times B$  سے ثنائی ربط ہو تو ثابت کیجئے کہ 'g' ان ٹو  $B$  فنکشن ہے۔

## جائزہ مشق 8

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) اگر  $A$  اور  $B$  دو سیٹ ہوں تو  $A \cup B = ?$

- (a)  $\Phi$  (b)  $B \cup A$  (c)  $A \cap B$  (d)  $B \cap A$

(ii) اگر  $A$  اور  $B$  دو متراکب (Overlapping) سیٹ ہوں تو  $A \cap B = ?$

- (a)  $\Phi$  (b)  $B \cap A$  (c)  $A \cap B$  (d)  $B \cup A$

(iii) دو سیٹوں  $A$  اور  $B$  کے لیے  $A \cup B = B \cup A$  کہلاتا ہے۔

- (a) خاصیت مبادلہ (b) خاصیت تلازم (c) ڈی مارگن کا قانون (d) دو سیٹوں کا کمپلیمنٹ

(iv)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$  کہلاتی ہے۔

- (a) خاصیت مبادلہ (b) خاصیت تلازم (c) ڈی مارگن کا قانون (d) سیٹوں کا تقاطع

(v) اگر  $A = \{4\}$ ,  $U = \{1,2,3,4\}$  تو  $A^c = ?$

- (a)  $\{1,2,3\}$  (b)  $\Phi$  (c)  $\{1\}$  (d)  $\{1,2,3,4\}$

(vi) اگر  $A = \{1\}$ ,  $U = \{1,2,3\}$  ہو تو  $U - A = ?$

- (a)  $\{2,3\}$  (b)  $\{1,2\}$  (c)  $\{1,3\}$  (d)  $\Phi$

(vii)  $(A \cup B)^c = ?$

- (a)  $A^c \cup B^c$  (b)  $A^c \cap B^c$  (c)  $(A \cap B)^c$  (d)  $\Phi$

(viii)  $(A \cap B)^c = ?$

- (a)  $A^c \cap B^c$  (b)  $A^c \cup B^c$  (c)  $A \cap B$  (d)  $A \cup B$

(ix) اگر  $R = \{(4,5), (5,4), (5,6), (6,4)\}$  ہو تو  $(R)$  ڈومین

- (a)  $\{4,6\}$  (b)  $\{4,5\}$  (c)  $\{4,5,6\}$  (d)  $\{5,6\}$

(x) اگر  $R = \{(4,5), (5,4), (5,6), (6,4)\}$  ہو تو  $(R)$  رینج

- (a)  $\{4\}$  (b)  $\{5\}$  (c)  $\{6\}$  (d)  $\{4,5,6\}$

2- خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i)  $(A \cup B)' = \text{_____}$

(ii)  $(A \cap B)' = \text{_____}$

(iii)  $A \cup (B \cap C) = \text{_____}$

(iv)  $A \cap (B \cup C) = \text{_____}$

(v) اگر  $A$  اور  $B$  دو سیٹ ہوں تو  $A \cup B = B \cup A$  \_\_\_\_\_ کہلاتی ہے۔

(vi) اگر  $A$  اور  $B$  دو سیٹ ہوں تو  $A \cap B = B \cap A$  \_\_\_\_\_ کہلاتی ہے۔

(vii) دو سیٹوں کے کارتھیسی حاصل ضرب کا قحقی سیٹ \_\_\_\_\_ کہلاتا ہے۔

(viii) اگر  $R_1 = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$  ہو تو  $R_1$  کی ڈومین \_\_\_\_\_ ہے۔

(ix) اگر  $R_1 = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$  ہو تو  $R_1$  کی رینج \_\_\_\_\_ ہے۔

(x) اگر  $f : A \rightarrow B$  ہو تو سیٹ  $A$  کے ہر رکن کی امیج \_\_\_\_\_ میں ہوگی۔

3- اگر  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 6\}$  اور  $C = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$  ہو تو ثابت کیجئے کہ

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

4- اگر  $A = \{2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 6, 9, 12\}$  اور  $C = \{4, 6, 8, 10\}$  ہو تو ثابت کیجئے کہ

$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup C$$

5- اگر  $A = \{2, 3, 4\}$  اور  $B = \{1, 3\}$  ہو تو  $A \times B$  اور  $B \times A$  لکھیے۔ نیز ان میں دو، دو شنائی روابط بھی بنائیے۔

6- درج ذیل میں ممکن شنائی روابط کی تعداد لکھیے۔

(i)  $C \times C$  میں اگر  $C$  میں ارکان کی تعداد 4 ہو۔

(ii)  $A \times B$  میں اگر  $A$  میں 2 اور  $B$  میں 3 ارکان ہوں۔

7- اگر  $R = \{(a, b) : a, b \in W, 3a + 2b = 16\}$  ہو تو  $R$  کی ڈومین اور رینج لکھیے۔



## خلاصہ

✦ واضح اور جدا جدا اشیاء کے اجتماع یا اکٹھ کو سیٹ کہتے ہیں۔

$$N = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{قدرتی اعداد کا سیٹ}$$

$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{مکمل اعداد کا سیٹ}$$

$$Z = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{صحیح اعداد کا سیٹ}$$

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in Z, q \neq 0 \right\} \quad \text{ناطق اعداد کا سیٹ}$$

$$Q' \quad \text{غیر ناطق اعداد کا سیٹ}$$

$$R = Q \cup Q' \quad \text{حقیقی اعداد کا سیٹ}$$

✦ اگر زیر بحث سیٹ اس طرح سے ہوں کہ ان میں ایک ایسا سیٹ ہو جو ان تمام سیٹوں کا فوقی (سپر) سیٹ ہو تو ایسا سیٹ یونیورسل سیٹ کہلاتا ہے جسے علامت 'U' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

✦ اگر سیٹ A کسی یونیورسل سیٹ U کا تختی سیٹ ہو تو A کا کمپلیمنٹ جسے A'، A<sup>c</sup> سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ U کے ان تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے جو A میں نہ ہوں اسے ہم A کا کمپلیمنٹ کہتے ہیں۔

✦ اگر A اور B کوئی سے دو سیٹ ہوں تو کارٹیسی ضرب A × B کا ہر تختی سیٹ A سے B کی جانب ثنائی ربط کہلاتا ہے۔

✦ ایک ثنائی ربط 'f' دو غیر خالی سیٹوں A اور B کے درمیان اس طرح ہو کہ

$$(i) \quad f = A \text{ ڈومین}$$

(ii) ثنائی ربط 'f' کوئی سے بھی دو مرتب جوڑوں کے پہلے مقام کے ارکان میں تکرار نہ ہو تو 'f' کو A سے B کا فنکشن کہتے ہیں۔

✦ دو سیٹوں A اور B کے یونین سے مراد ان ارکان کا سیٹ ہے جو یا تو A میں یا B میں ہوں اسے A ∪ B سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

✦ دو سیٹوں A اور B کا تقاطع جسے A ∩ B سے ظاہر کیا جاتا ہے، سے مراد ایسا سیٹ ہے جو A اور B دونوں کے مشترک ارکان پر مشتمل ہو۔

✦ اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو A سے B کے فرق سے مراد A کے ان ارکان کا سیٹ جو سیٹ B میں نہ ہوں اسے علامتی طور پر (A - B) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

# خطی گراف

## LINEAR GRAPHS

کارٹیسی مستوی اور خطی گراف

گراف مبادلہ

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- ◀ کہ حقیقی اعداد کے جوڑے کو مرتب جوڑے کے طور پر لے سکتے ہیں۔
- ◀ مرتب جوڑے کی پہچان کیا ہے مثلاً مرتب جوڑے (2, 3) کو کسی امتحانی مرکز میں لگی سیننگ پلان میں سیٹ کا تعین دوسری قطار اور تیسرے کالم کی صورت میں کر سکیں۔
- ◀ کہ کسی مستطیلی یا کارٹیسی مستوی پر ایک دوسرے پر متقاطع محدود خطوط جو نقطہ پر قطع کرتے ہوں کو ظاہر کرتے ہیں۔
- ◀ کہ مبداء (O) اور محدود محوروں کی پہچان بطور X-axis محور اور Y-axis محور کیا ہے۔
- ◀ کہ کسی مرتب جوڑے (a, b) کو محدودی مستوی پر ظاہر کیسے کرتے ہیں۔
- ◀ 'a' کو x-محدی (Abscisa)
- ◀ 'b' کو y-محدی (Ordinate)
- ◀ کہ دیے گئے نقاط کے سیٹ کو ملا کر جو میٹری کی مختلف اشکال مثلاً خط۔ مثلث۔ یا مستطیل وغیرہ کیسے بنتے ہیں۔
- ◀ کہ دو متغیرات میں دی گئی مساواتوں کی ان متغیرات کی مساوات پر پورا اترنے والی جوڑا قیمتوں کا جدول بنانا۔
- ◀ کہ ریاضی کے کسی فقرہ کو ان جوڑوں کی مدد سے گراف میں ظاہر کیسے کرتے ہیں۔
- ◀ کہ مناسب سکیل کا تعین کر کے گراف کیسے بناتے ہیں۔
- ◀ گراف بنانا درج ذیل مساواتوں کی صورت میں۔
- $y = mx + c$  •  $y = mx$  •  $x = a$  •  $y = c$
- ◀ کہ کسی جدول میں دی گئی عددی قیمتوں سے گراف کیسے بنتا ہے۔
- ◀ کہ گراف کی مدد سے کسی فنکشن (تفاعل) کی ڈومین اور رینج کا تعین کیسے ہوتا ہے۔
- ◀ کہ راست تناسب میں دی گئی دو مقداروں کے باہمی تعلق کو گراف کی مدد سے واضح کیسے کیا جاتا ہے۔
- ◀ کہ گراف کی مدد سے ایک مقدار کا دوسری مقدار سے موازنہ کیسے بنتا ہے۔
- ◀ کہ گراف کی مدد سے مقداروں میں باہمی تبدیلی کا مطالعہ کیسے کیا جاتا ہے۔
- میل اور کلومیٹر کا
- ایکڑ اور ہیکٹر کا
- سینٹی گریڈ سے فارن ہیٹ ڈگری کا
- پاکستانی کرنسی سے کسی دوسرے ملک کی کرنسی میں تبادلہ

## 9.1 CARTESIAN PLANE AND LINEAR GRAPHS اور خطی گراف

### 9.1.1 دو حقیقی اعداد کا جوڑا بطور مرتب جوڑا

#### Pair of Real Numbers as an Ordered Pair

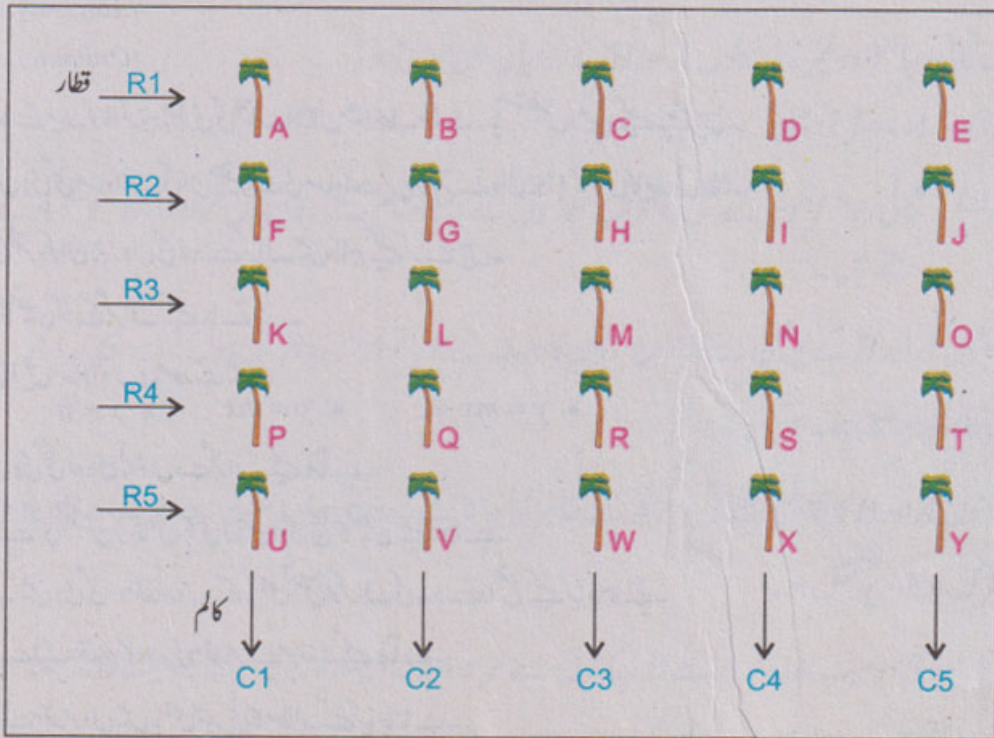
دو مساوی سیٹوں کی تعریف کی رو سے کسی بھی دو ارکان 'a' اور 'b' کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں  $\{a, b\} = \{b, a\}$

تاہم اگر ہم ارکان کی ترتیب جس میں یہ رکن لکھے گئے ہوں کو اپنے ذہن میں رکھیں تو دو ارکان کا جوڑا جو ایک مخصوص ترتیب میں ہو مرتب جوڑا کہلاتا ہے اور اسے  $(a, b)$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ پس اگر 'a' اور 'b' دو مختلف رکن ہوں تو  $(a, b) \neq (b, a)$

عموماً اگر  $b_1 = b_2$  اور  $a_1 = a_2 \Leftrightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$  ہم مستوی پر کسی نقطہ کو  $(x, y)$  سے ظاہر کرتے ہیں۔

### 9.1.2 مرتب جوڑے Ordered Pairs

کسی باغ کا مالی ایک مربع کھیت میں درختوں کو ترتیب دیتا ہے۔ درختوں کی عددوں سے نشاندہی کرتا ہے۔ کسی درخت کی نشاندہی کو زیادہ سہل بنانے کے لئے وہ اس درخت کو قطار نمبر اور کالم نمبر جس میں وہ موجود ہے سے نسبت دیتا ہے۔ درخت H، دوسری قطار اور تیسرے کالم میں موجود ہے جبکہ درخت R قطار نمبر 4 اور کالم نمبر 3 میں موجود ہے۔



مالی درخت کے نمبر کے سامنے ان عددی جوڑوں کو اس طرح لکھ سکتا ہے۔

$A(1,1)$ ,	$B(1,2)$ ,	$C(1,3)$ ,	$D(1,4)$ ,	$E(1,5)$
$F(2,1)$ ,	$G(2,2)$ ,	$H(2,3)$ ,	$I(2,4)$ ,	$J(2,5)$
$K(3,1)$ ,	$L(3,2)$ ,	$M(3,3)$ ,	$N(3,4)$ ,	$O(3,5)$
$P(4,1)$ ,	$Q(4,2)$ ,	$R(4,3)$ ,	$S(4,4)$ ,	$T(4,5)$
$U(5,1)$ ,	$V(5,2)$ ,	$W(5,3)$ ,	$X(5,4)$ ,	$Y(5,5)$

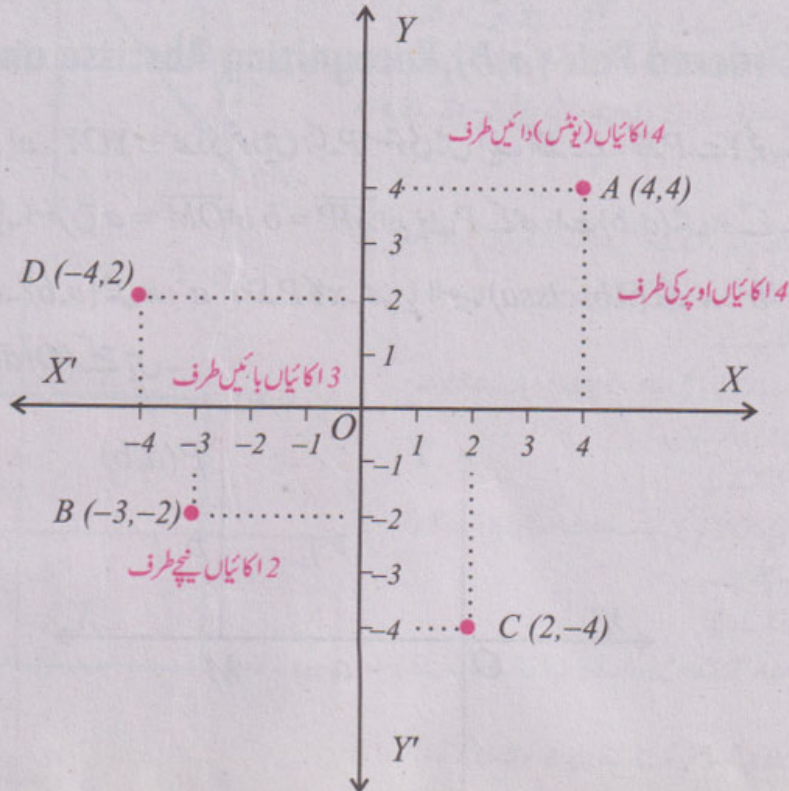
کیا ہم درخت نمبر  $F, G, H, K$  اور  $M$  کو ان عددی جوڑوں سے لکھ سکتے ہیں۔

ہاں یہ بالترتیب  $F(2,1), G(2,2), H(2,3), I(2,4), K(3,1)$  اور  $M(3,3)$  ہیں۔

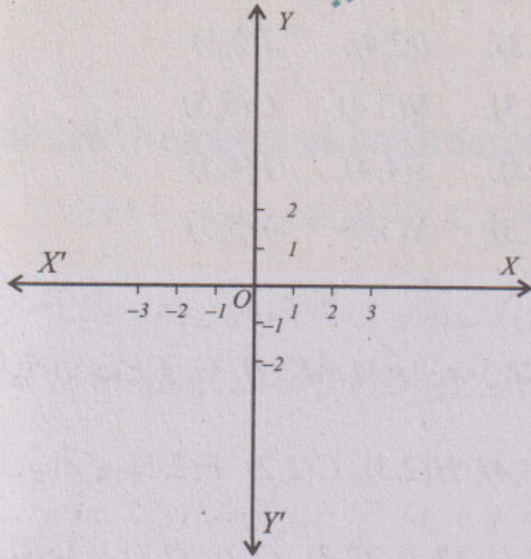
عددی جوڑے  $(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,3)$  وغیرہ وغیرہ مرتب جوڑوں کی مثالیں ہیں۔

### 9.1.3 مستطیلی یا کارٹیسسی مستوی Rectangular or Cartesian Plane

دی گئی تصویر میں ایک مستطیلی یا کارٹیسسی مستوی کو ظاہر کیا گیا ہے جو کہ نقطہ 'O' پر دو متقاطع محوری خطوط  $XOX'$  اور  $YOY'$  پر مشتمل ہے۔



### 9.1.4 مستطیلی مستوی میں مبداء (O) اور محددی محوروں کی پہچان



کسی بھی کارٹیسی مستوی میں  $XOX'$  اور  $YOY'$  آپس میں نقطہ  $O$  پر عموداً متقاطع ہوتے ہیں، محددی محور کہلاتے ہیں۔ ہم  $O$  کو مبداء کہتے ہیں۔

افقی خط  $XOX'$  کو  $X$ -محور اور عمودی خط  $YOY'$  کو  $Y$ -محور کہتے ہیں۔

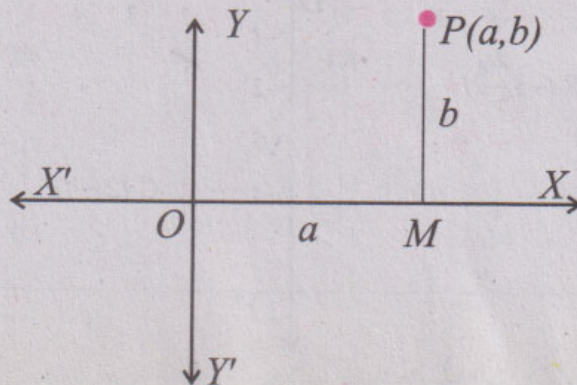
ہم لمبائی کی مناسب اکائی مقرر کر لیتے ہیں اور مبداء  $O$  کا تعین کر لیتے ہیں۔

اب ہم  $O$  کے دونوں جانب  $X$ -محور پر اور  $Y$ -محور پر برابر برابر نشان (جو کہ لمبائی کی مقررہ اکائی کے برابر ہوتے ہیں) لگاتے ہیں۔  $\vec{OX}$  اور  $\vec{OY}$  کی جانب پیمائش کو مثبت جبکہ  $\vec{OX'}$  اور  $\vec{OY'}$  کی جانب پیمائش کو منفی لیا جاتا ہے۔

### 9.1.5 مترتب جوڑا $(a, b)$ کو دکھانا، اسیسا اور آرڈینیٹ کو پہچاننا

#### Locating an Ordered Pair $(a, b)$ , Recognizing Abscissa and Ordinate

فرض کیا  $XOX'$  اور  $YOY'$  دو محددی محور ہیں جبکہ  $P$  مستوی میں ایک نقطہ ہے۔ نقطہ  $P$  سے  $Y$ -محور کے متوازی  $XOX'$  پر عمود  $\overline{MP}$  گرایا۔ اس طرح  $\overline{OM} = a$  اور  $\overline{MP} = b$  اور یوں  $P$  کے محددات  $(a, b)$  میں ہوئے۔ ہم اس نقطہ کو  $P(a, b)$  سے ظاہر کرتے ہیں۔  $(a, b)$  میں عدد 'a' کو نقطہ  $P$  کا  $x$ -محدد یا اسیسا (Abscissa) جبکہ عدد 'b' کو نقطہ  $P$  کا  $y$ -محدد یا آرڈینیٹ (Ordinate) کہتے ہیں۔

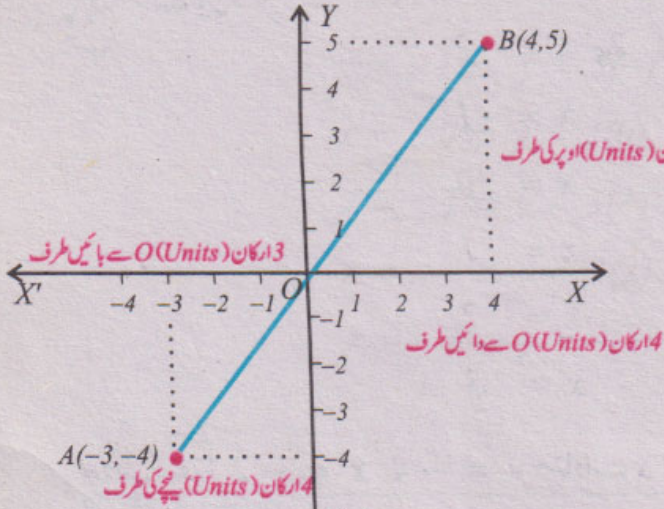


## 9.1.6 دیئے گئے نقاط کے سیٹ کو ملانے سے جیومیٹرک شکل بنانا Geometrical Shapes by Joining a Set of Given Points

(i)  $A(-3,-4), B(4,5)$ , مثالیں :- دیئے گئے نقاط کی مدد سے قسط، مثلث اور مستطیل بنانا

(ii)  $A(2,3), B(-3,4), C(4,-5)$ , (iii)  $A(4,3), B(-4,3), C(-4,-3), D(4,-3)$

حل :-



(i) مترتب جوڑے  $A(-3,-4), B(4,5)$  ہیں۔

نقطہ  $A(-3,-4)$  کے لیے

ہم  $O$  سے  $X$  محور پر بائیں جانب 3 اکائیاں اور پھر وہاں سے  $Y$  محور کے 5 اکائیاں (Units) اوپر کی طرف متوازی  $X$  محور کے نیچے 4 اکائیاں چلتے ہیں۔

نقطہ  $B(4,5)$  کے لیے

مبدأ  $O$  سے ہم  $X$  محور پر دائیں جانب 4 اکائیاں چلتے ہیں اور پھر وہاں سے  $Y$  محور کے متوازی  $X$  محور کے اوپر 5 اکائیاں چلتے ہیں  $A$  اور  $B$  کو ملا کر  $AB$  قطعہ خط حاصل کریں۔

(ii)  $A(2,3), B(-3,4), C(4,-5)$  دیئے گئے مترتب جوڑے ہیں۔

نقطہ  $A(2,3)$  کے لیے

$X$  محور کے ساتھ مبدأ  $O$  کی دائیں جانب 2 یونٹ چلتے اور پھر 3 یونٹ  $X$  محور کے اوپر  $Y$  محور کے متوازی چلتے۔

نقطہ  $B(-3,4)$  کے لیے

ہم  $X$  محور پر مبدأ  $O$  کی بائیں جانب 3 یونٹ اور پھر وہاں سے 4 یونٹ (اکائیاں)

$X$  محور کے اوپر  $Y$  محور کے متوازی چلتے ہیں۔

نقطہ  $C(4,-5)$  کے لیے

ہم مبدأ  $O$  سے  $X$  محور پر دائیں جانب 4 یونٹ اور وہاں سے  $Y$  محور کے متوازی  $X$  محور پر عمود نیچے کی جانب 5 یونٹ چلتے ہیں۔ ہم مثلث  $ABC$  کے لیے  $A$  کو  $B$  سے،  $B$  کو  $C$  سے اور  $C$  کو  $A$  سے ملاتے ہیں۔

(iii) مترتب جوڑے  $A(4,3), B(-4,3), C(-4,-3), D(4,-3)$

دیئے گئے ہیں۔

نقطہ  $A(4,3)$  کے لیے

ہم 4 یونٹ  $X$  محور پر مبدأ  $O$  سے دائیں جانب اور پھر وہاں سے 3 یونٹ

$Y$  محور کے متوازی  $X$  محور سے اوپر چلتے ہیں۔

نقطہ  $B(-4,3)$  کے لیے

ہم  $X$  محور پر مبدأ  $O$  کی بائیں جانب 4 یونٹ اور وہاں سے 3 یونٹ

$X$  محور کے اوپر حرکت کرتے ہیں۔

نقطہ  $C(-4,-3)$  کے لیے

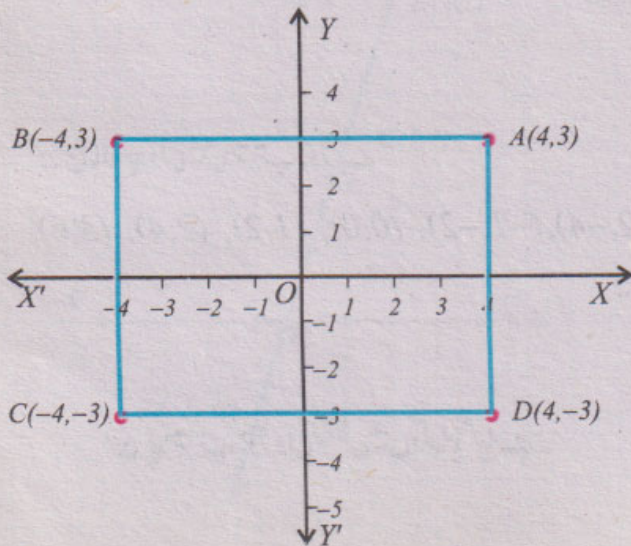
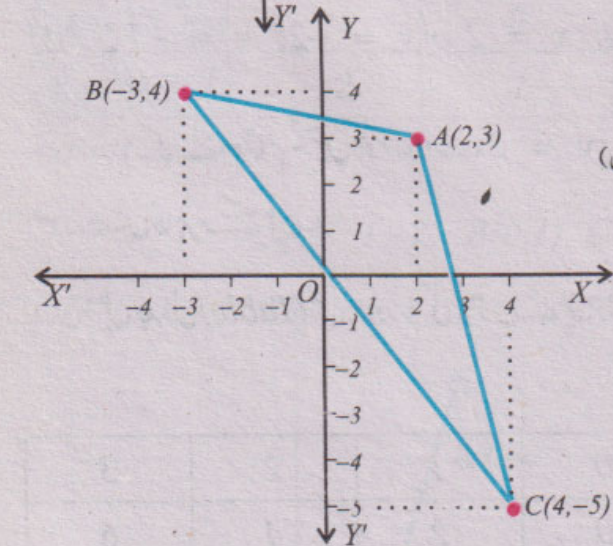
ہم  $X$  محور پر مبدأ  $O$  کی بائیں جانب 4 یونٹ اور پھر وہاں سے  $X$  محور کے نیچے 3 یونٹ چلتے ہیں۔

نقطہ  $D(4,-3)$  کے لیے

ہم  $X$  محور پر مبدأ  $O$  کے دائیں جانب 4 یونٹ پھر  $X$  محور کے نیچے 3 یونٹ چلتے ہیں۔

ہم چکور  $ABCD$  کو حاصل کرنے کے لیے  $A$  کو  $B$  سے،  $B$  کو  $C$  سے،

$C$  کو  $D$  سے اور  $D$  کو  $A$  سے ملاتے ہیں۔



## 9.1.7 دو متغیرات میں یک درجی مساوات پر پورا اترنے والے مترتب جوڑوں کا جدول Table for Pairs of Values Satisfying a Linear Equation in two Variables

آئیے مساوات  $y = 2x$  کو دیکھیں۔ ہم وہ تمام عددوں کے جوڑے بناتے ہیں جو کہ مساوات  $y = 2x$

پر پورا اترتے ہیں۔  
جب

$$y = 2(-2) = -4 \quad \text{ہو تو } x = -2$$

$$y = 2(-1) = -2 \quad x = -1$$

$$y = 2(0) = 0 \quad x = 0$$

$$y = 2(1) = 2 \quad x = 1$$

$$y = 2(2) = 4 \quad x = 2$$

$$y = 2(3) = 6 \quad x = 3$$

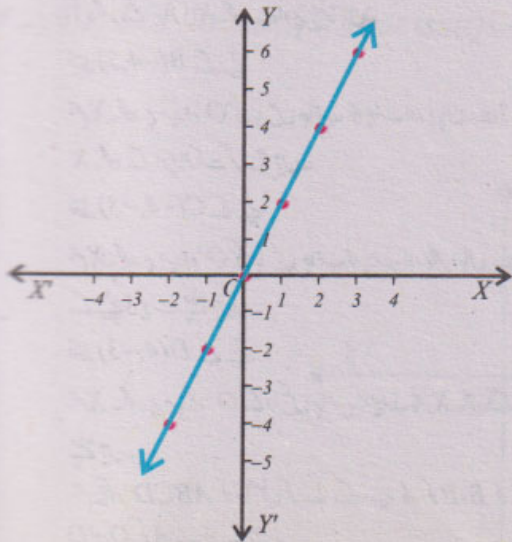
عددوں کا جوڑا  $y = -4, x = -2$  مساوات  $y = 2x$  پر پورا اترتا ہے۔

اسی طرح  $x = -1, y = -2$  اور  $x = 2, y = 4$  وغیرہ مساوات  $y = 2x$  پر پورا اترتے ہیں۔

ہم  $x$  اور  $y$  کے لئے وہ تمام قیمتیں جو مساوات  $y = 2x$  پر پورا اتریں لکھ تو نہیں سکتے مگر ان تمام قیمتوں کو گراف کی صورت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

درج ذیل جدول (Table) میں  $x$  اور  $y$  کی قیمتوں کے چھ جوڑے مساوات  $y = 2x$  پر پورا اترتے ہوئے لکھے گئے ہیں۔

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x$	-4	-2	0	2	4	6



درج بالا جدول میں مترتب جوڑے

$$(-2, -4), (-1, -2), (0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6)$$

ان چھ مترتب جوڑوں کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

## 9.1.8 دیے گئے جملہ کا گراف اس کے نقاط کے جوڑوں کو ظاہر کر کے حاصل کرنا

### Plot the Pairs of Points to Obtain the Graph of a given Expression

مساوات  $y = 3x + 1$  کو لیجئے۔

ہم  $x$  اور  $y$  کیلئے اعداد کے ایسے جوڑوں کو دیکھتے ہیں جو اس مساوات  $y = 3x + 1$  پر پورا اترتے ہیں۔

$$x = -1 \Rightarrow y = 3(-1) + 1 = -2 \quad \text{جب}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 3(0) + 1 = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 3(1) + 1 = 4$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 3(2) + 1 = 7$$

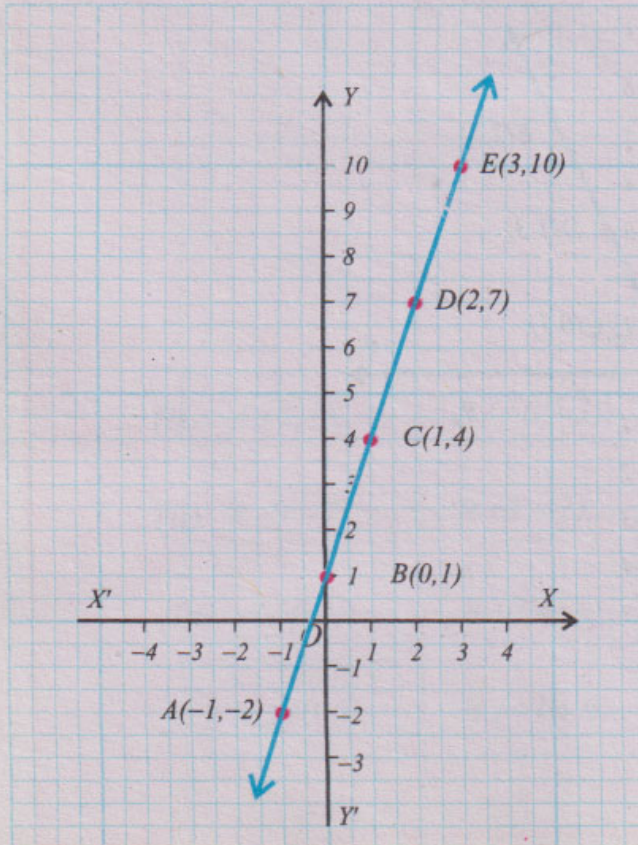
$$x = 3 \Rightarrow y = 3(3) + 1 = 10$$

نیچے جدول میں  $x$  اور  $y$  کی قیمتوں کے پانچ جوڑے درج ہیں۔

$x$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$
$y = 3x + 1$	$-2$	$1$	$4$	$7$	$10$

پانچ مرتب جوڑے

ہیں  $A(-1, -2)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(1, 4)$ ,  $D(2, 7)$ ,  $E(3, 10)$



اب ہم ان نقاط کے جوڑوں کو گراف پر ظاہر کرتے ہیں۔

نقطہ  $A(-1, -2)$  کے لیے

ہم مبدأ  $O$  سے  $X$ -محور پر بائیں جانب 1 یونٹ اور پھر وہاں سے  $Y$ -محور کے متوازی 2 یونٹس  $X$ -محور کے نیچے حرکت کرتے ہیں۔

نقطہ  $B(0, 1)$  کے لیے

ہم مبدأ  $O$  سے  $Y$ -محور پر اوپر 1 یونٹ حرکت کرتے ہیں۔

نقطہ  $C(1, 4)$  کے لیے

ہم مبدأ  $O$  سے  $X$ -محور پر دائیں جانب 1 یونٹ پھر وہاں سے  $Y$ -محور کے متوازی 3 یونٹس  $X$ -محور سے اوپر عموداً 4 یونٹ حرکت کرتے ہیں۔

نقطہ  $D(2, 7)$  کے لیے

ہم مبدأ  $O$  سے  $X$ -محور پر دائیں جانب 2 یونٹس پھر وہاں سے  $Y$ -محور کے متوازی 5 یونٹس  $X$ -محور سے اوپر 7 یونٹس حرکت کرتے ہیں۔

نقطہ  $E(3, 10)$  کے لیے

ہم مبدأ  $O$  سے  $X$ -محور پر دائیں جانب 3 یونٹس پھر وہاں سے  $Y$ -محور کے متوازی 7 یونٹس  $X$ -محور پر اوپر 10 یونٹس حرکت کرتے ہیں۔

پھر ہم  $E$  کو  $A$  سے ملا کر لائن  $AE$  کھینچتے ہیں۔



## 9.1.9 گراف کھینچنے کے لئے مناسب سکیل کا انتخاب

## Choosing an Appropriate Scale to Draw a Graph

مساوات  $y = 2x + 1$  کو لیتے ہیں۔

$$x = -2, y = 2(-2) + 1 = -3$$

جب

$$x = -1, y = 2(-1) + 1 = -1$$

$$x = 0, y = 2(0) + 1 = 1$$

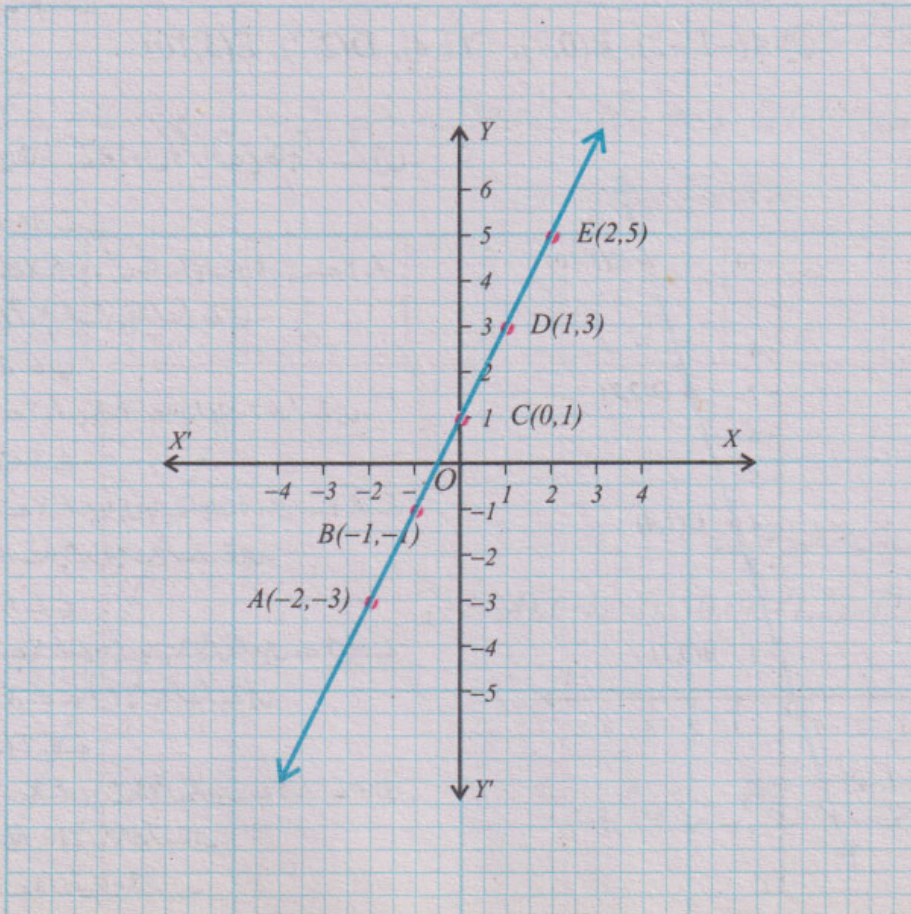
$$x = 1, y = 2(1) + 1 = 3$$

$$x = 2, y = 2(2) + 1 = 5$$

درج بالا  $x$  اور  $y$  کی قیمتوں کے 5 جوڑوں کی جدول نیچے بنائی جاتی ہے۔

$x$	-2	-1	0	1	2
$y = 2x + 1$	-3	-1	1	3	5

$X$ -محور اور  $Y$ -محور دونوں پر ہم 1 بڑا مربع  $1$  یونٹ سکیل استعمال کرتے ہیں۔



## مشق 9.1

1- نیچے درج کیے گئے نقاط کو گراف پر ظاہر کیجئے۔

(i)  $A(2, -4)$

(ii)  $B(3, 2)$

(iii)  $C(-5, -1)$

(iv)  $D(6, -3)$

(v)  $E(4, 4)$

(vi)  $F(-3, 7)$

(vii)  $G(0, 7)$

(viii)  $H(5, 0)$

2- نیچے دیئے گئے نقاط کے محدودات لکھیے۔

(i) مبداء۔

(ii) ایسا نقطہ  $x$ -محور پر بائیں جانب جو مبداء سے 5 یونٹس کے فاصلہ پر ہو۔

(iii) ایسا نقطہ  $x$ -محور پر دائیں جانب جو مبداء سے 3 یونٹس کے فاصلہ پر ہو۔

(iv) ایسا نقطہ  $y$ -محور پر  $x$ -محور سے اوپر 4 یونٹس ہو۔

(v) ایسا نقطہ  $y$ -محور پر  $x$ -محور سے نیچے 6 یونٹس ہو۔

3- درج ذیل نقاط کو گراف پیپر پر بنا کر اور ان کو ملا کر اشکال بنائیے۔

(i)  $A(7, 2), B(-6, -3), C(5, 3)$

(ii)  $A(0, -7), B(3, -2), C(4, 0), D(5, 6), E(7, 8)$

(iii)  $A(4, 0), B(0, 4), C(-4, 0), D(0, -4)$

(iv)  $A(10, 6), B(-10, 6), C(-10, -6), D(10, -6),$

## 9.1.10 یک درجی مساوات $y = c$ کی شکل کا گراف

### Graphs of Linear Equations of the form $y = c$

$y = c$  کا گراف کھینچنے کے لئے ہم  $y = c$  کو  $x + y = c$  کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ گراف کھینچنے کا عمل مندرجہ ذیل مثال سے واضح کیا جاتا ہے۔

**مثال :-** مساوات  $y = 5$  کا گراف کھینچئے۔

**حل :-**

مساوات  $y = 5$  کو  $y = 0 \times x + 5$  کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات میں  $x = 0$  رکھنے سے ہمیں مساوات  $y = 5$  حاصل ہوتی ہے۔

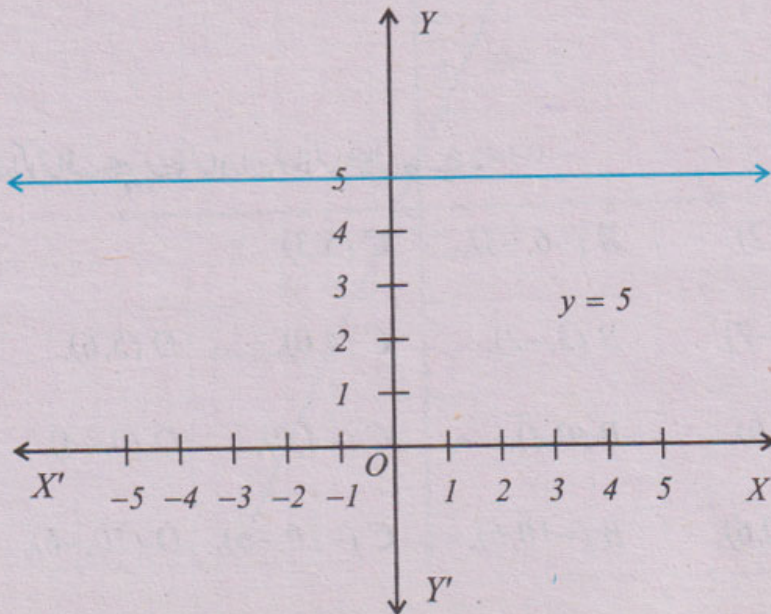
اسی طرح  $y = 0 \times x + 5$  میں  $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  رکھنے

سے بھی ہمیں  $y = 5$  حاصل ہوتی ہے۔  $x$  کی تمام قیمتوں کے لیے

$y = 5$  یعنی  $y$  کی قیمت مستقل ہی رہتی ہے۔

$x$  اور  $y$  قیمتوں کا جدول کچھ یوں ہے۔

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	5	5	5	5	5	5	5



## یک درجی مساوات $x = a$ کی شکل کا گراف

### Graph of a Linear Equation of the form $x = a$

$x = a$  کا گراف کھینچنے کے لئے ہم  $x = a$  کو  $x + 0 \cdot y = a$  کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ گراف کھینچنے کی وضاحت درج ذیل مثال سے کرتے ہیں۔

**مثال :-**  $x = -2$  کا گراف کھینچئے۔

**حل :-**

مساوات  $x = -2$  کو  $x + 0 \cdot y = -2$  کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

اگر ہم مساوات میں  $y = 0$  رکھیں تو ہمیں  $x = -2$  حاصل ہوتا ہے۔

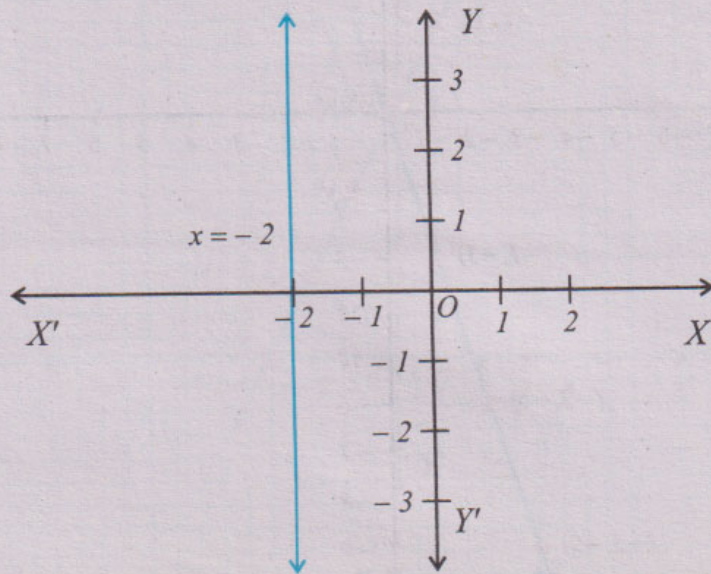
اسی طرح مساوات  $x + 0 \cdot y = -2$  میں  $y = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  رکھنے

سے  $x = -2$  ہی حاصل ہوتا ہے۔

$y$  کی تمام قیمتوں کے لیے ہمیں  $x = -2$  حاصل ہوتا ہے یعنی کہ  $x$  کی قیمت مستقل ہے۔

$x$  اور  $y$  کی قیمتوں کا جدول درج ذیل ہے۔

$x$	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
$y$	-3	-2	-1	0	1	2	3



## Graph of a Linear Equation $y = mx$ ایک درجی مساوات $y = mx$ کا گراف

$y = mx$  کا گراف کھینچنے کے لیے ہم مندرجہ ذیل مثال دیکھتے ہیں۔

**مثال :-**  $y = 3x$  کا ترسیم (گراف) کھینچئے۔

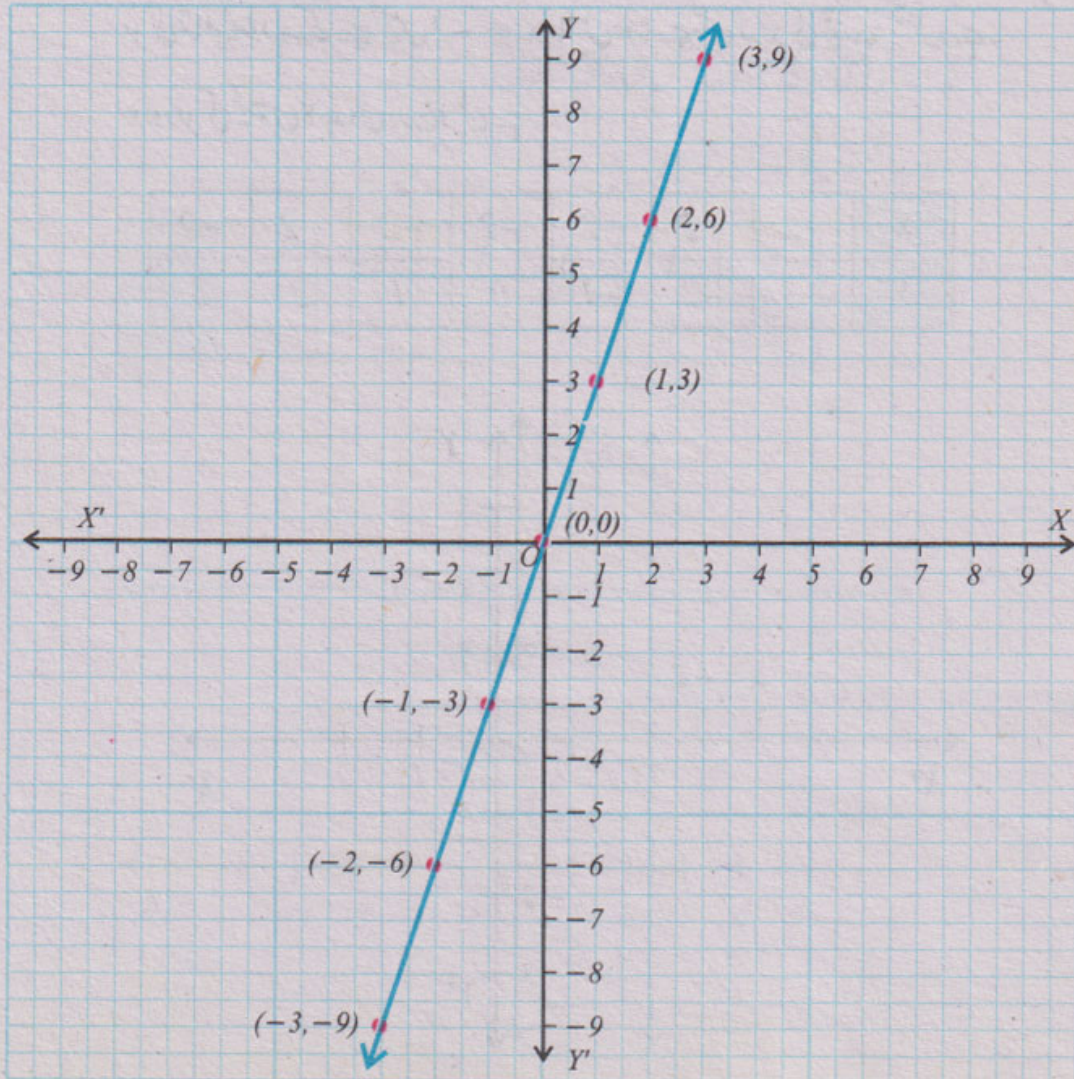
**حل :-**

مساوات  $y = 3x$  میں  $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  رکھنے سے ہمیں

$y = \pm 3, y = \pm 6, y = \pm 9, \dots$  حاصل ہوتا

$x$  اور  $y$  کی قیمتوں کا جدول اور گراف نیچے یوں ہے۔

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	-9	-6	-3	0	3	6	9



## Graph of an Equation $y = mx + c$ کا گراف $y = mx + c$ ایک درجی مساوات

$y = mx + c$  کا گراف کھینچنے کے لیے ہم درج ذیل مثال کو لیتے ہیں۔

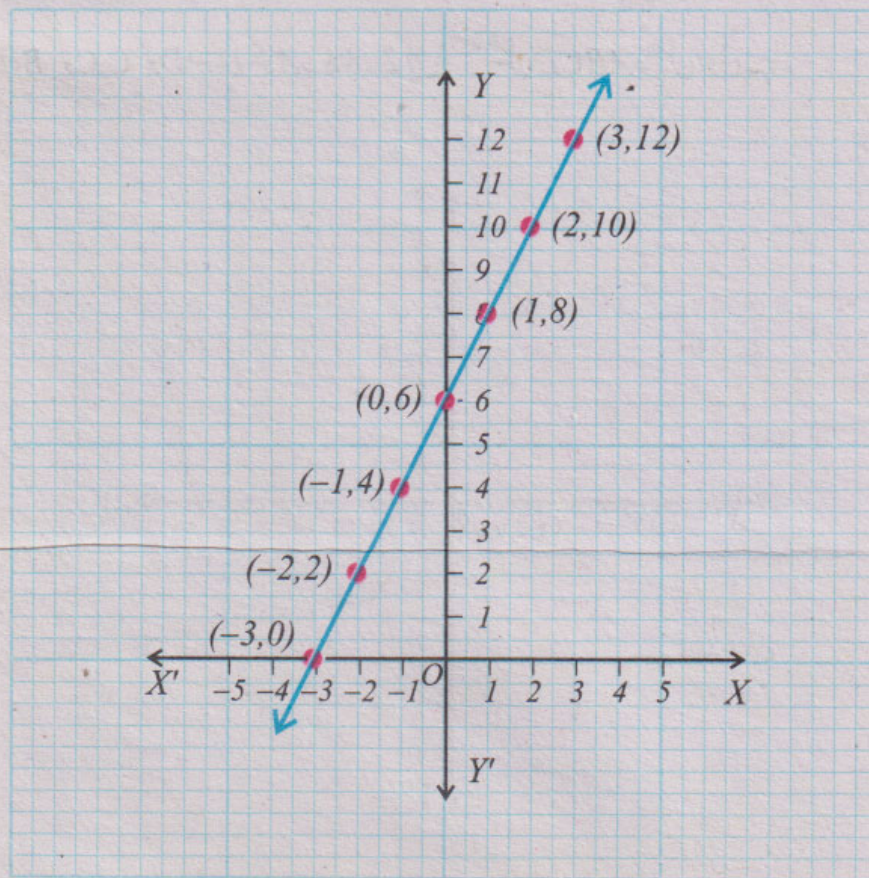
**مثال :-**  $y = 2x + 6$  کا گراف کھینچئے۔

**حل :-**

اس مساوات کا گراف کھینچنے کے لیے ہم اس  $x$ -محور پر قاطع اور  $y$ -محور پر قاطع دیکھتے ہیں۔  $x$ -محور پر قاطع کے لیے  $y = 0$  رکھنے سے ہمیں  $x = 3$  لہذا  $x$ -محور پر قاطع نقطہ  $(3, 0)$  اور  $y$ -محور پر قاطع کے لیے  $x = 0$  رکھنے سے  $y = 6$  یعنی قاطع نقطہ  $(0, 6)$  حاصل ہوتے ہیں۔

اسی طرح  $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  سے ہمیں  $y$  کی قیمتیں درج ذیل جدول کے مطابق حاصل ہوتی ہیں۔

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	0	2	4	6	8	10	12



## 9.1.11 دی گئی جدول کی ترسیم (گراف) کھینچنا Draw a Graph from a given Table

ہم نیچے دی گئی جدول کے نقاط کا گراف پیپر پر ترسیم (گراف) بناتے ہیں۔

$x$	6	-6	-6	6
$y$	4	4	-4	-4

جدول سے ہمیں چار مترتب جوڑے

ملتے ہیں۔  $A(6,4)$ ,  $B(-6,4)$ ,  $C(-6,-4)$  اور  $D(6,-4)$ ۔

نقطہ  $A(6,4)$  کے لیے

ہم  $x$ -محور پر مبداء 'O' سے دائیں جانب 6 یونٹس اور پھر  $y$ -محور کے متوازی  $x$ -محور کے عموداً اوپر 4 یونٹس چلتے ہیں۔

نقطہ  $B(-6,4)$  کے لیے

ہم  $x$ -محور پر مبداء 'O' کے بائیں جانب 6 یونٹس اور پھر  $y$ -محور کے متوازی  $x$ -محور کے نیچے عموداً اوپر 4 یونٹس اور پر کی جانب چلتے ہیں۔

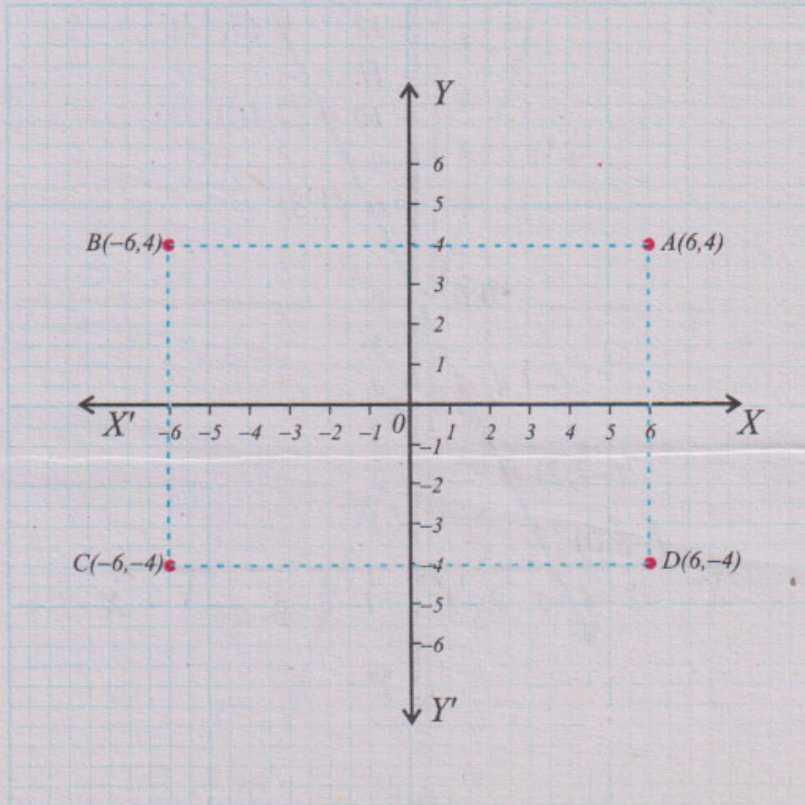
نقطہ  $C(-6,-4)$  کے لیے

ہم  $x$ -محور پر مبداء 'O' کے بائیں جانب 6 یونٹس اور پھر  $y$ -محور کے متوازی  $x$ -محور کے نیچے عموداً اوپر 4 یونٹس چلتے ہیں۔

نقطہ  $D(6,-4)$  کے لیے

ہم  $x$ -محور پر مبداء 'O' کے دائیں جانب 6 یونٹس پھر وہاں سے عموداً  $x$ -محور کے نیچے 4 یونٹس چلتے ہیں۔

ہم  $A$  کو  $B$ ،  $B$  کو  $C$ ،  $C$  کو  $D$  اور  $D$  کو  $A$  سے ملاتے ہیں تو مستطیل  $ABCD$  حاصل ہوتی ہے۔



## 9.1.12 تفاعل (فنکشن) کی ڈومین اور رینج کی بذریعہ گراف نشاندہی

### Identification of Domain and Range of a Function Through Graph

شکل میں فنکشن  $y = 2x + 1$  کا گراف دکھایا گیا ہے۔ یہ گراف درج ذیل مترتب جوڑوں کی مدد سے بنایا گیا ہے۔

$$E(2,5) \text{ اور } D(1,3), C(0,1), B(-1,-1), A(-2,-3)$$

ہم ان مترتب جوڑوں سے  $x$  اور  $y$  کی قیمتوں پر مشتمل جدول تیار کرتے ہیں۔

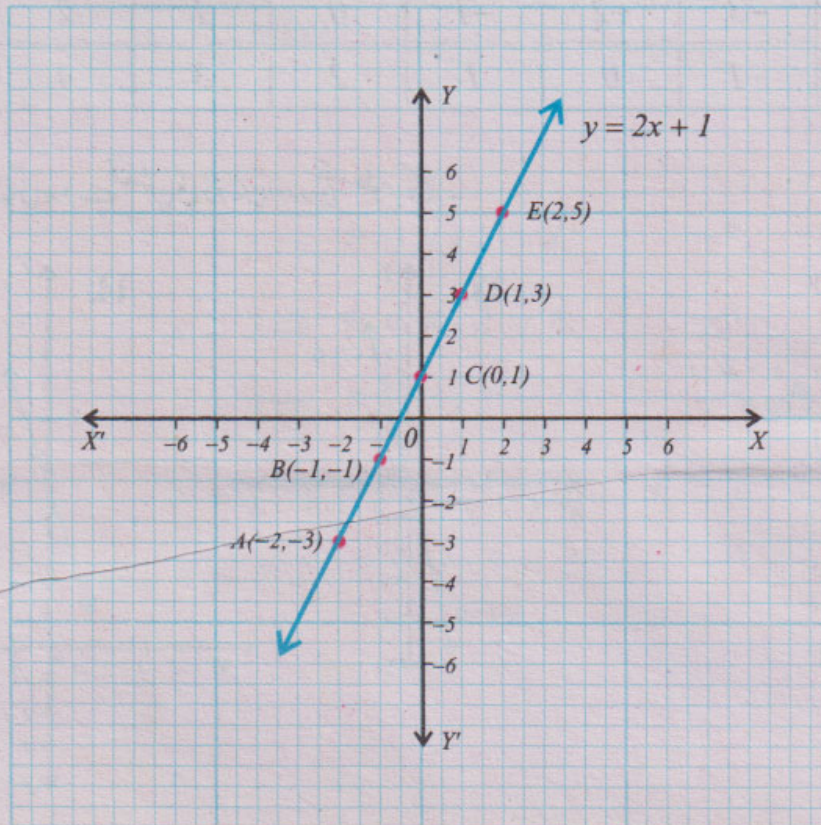
$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	-3	-1	1	3	5

فنکشن  $y = 2x + 1$  میں  $x$  کی قیمتوں کا سیٹ ڈومین جبکہ  $y$  کی قیمتوں پر مشتمل سیٹ اس فنکشن کی رینج کہلاتا ہے۔

پس فنکشن  $y = 2x + 1$  کے لیے

فنکشن کی ڈومین کا سیٹ  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

فنکشن کی رینج کا سیٹ  $\{-3, -1, 1, 3, 5\}$





## مشق 9.2

مندرجہ ذیل کے گراف کھینچئے۔

1.  $y = 3x$

2.  $y = x + 7$

3.  $y = 2x - 3$

4.  $y = 4x + 1$

5.  $y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

6.  $y = x - 1$

7.  $y = 2x - 3$

8.  $y = 3x + 5$

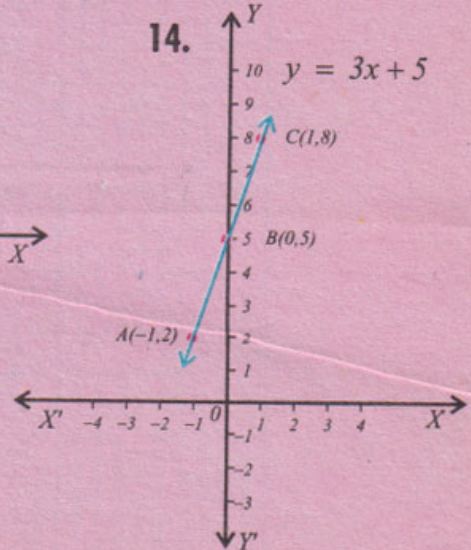
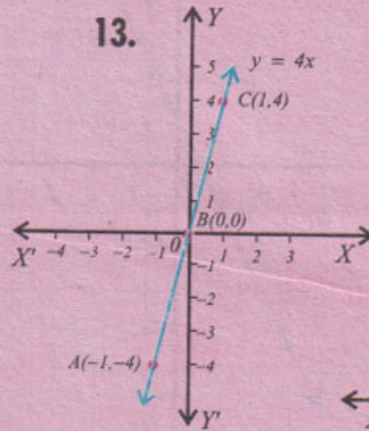
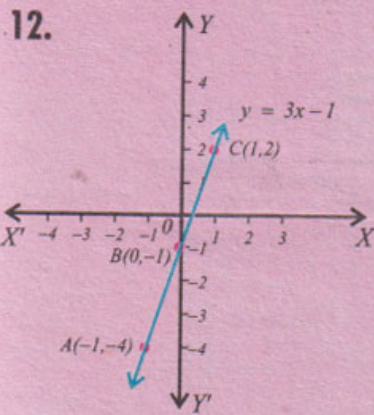
9.  $y = \frac{x}{2}$

10 - نقاط  $A(1,0)$ ,  $B(7,0)$ ,  $C(1,8)$  کے گراف کھینچئے۔

11 - دیئے گئے جدولوں کے گراف کھینچئے۔

(i)	$x$	3	2	1	0	-1	-2	-3
	$y$	-5	-3	-1	1	3	5	7
(ii)	$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
	$y$	-1	0	1	2	3	4	5

دیئے گئے گراف کی مدد سے فنکشن کی ڈومین اور رینج معلوم کیجئے۔



## 9.2 تحویلی گراف CONVERSION GRAPHS

اگر ہمیں چھٹیوں میں لندن جانا ہو تو ممکن ہے کہ ہمیں اشیاء کی پونڈوں (£ Pounds) اور پینس (Pence) میں قیمتیں جاننا ذرا مشکل ہوں۔ مگر اگر ہمیں کرنسی کی شرح تبدیلی کا علم ہو تو ہم دیئے گئے روپوں کو پونڈوں میں اور دیئے گئے پونڈوں کو روپوں میں تبدیل کرنے کے لئے ایک سادہ سا خطی گراف استعمال کر سکتے ہیں۔

سیدھا خط جو اس مقصد کے لئے استعمال ہوتا ہے تحویلی گراف کہلاتا ہے۔

### 9.2.1 تحویلی گراف بطور خطی گراف Conversion Graph as a Linear Graph

کسی مربع کا احاطہ کا فارمولہ  $P = 4s$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جس میں  $P$  یونٹ (اکائیاں) احاطہ اور 's' اکائیاں ایک ضلع کی لمبائی ہوتی ہے۔ یہ ایک راست تناسب کی مثال ہے۔ کیونکہ اس میں ایک مقدار میں اضافہ سے دوسری مقدار میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔

مثلاً

$$s = 1 \Rightarrow P = 4 \times 1 = 4, \quad \text{جب}$$

$$s = 2 \Rightarrow P = 4 \times 2 = 8, \quad \text{جب}$$

$$s = 3 \Rightarrow P = 4 \times 3 = 12, \quad \text{جب}$$

$$s = 4 \Rightarrow P = 4 \times 4 = 16, \quad \text{جب}$$

$$s = 5 \Rightarrow P = 4 \times 5 = 20 \quad \text{جب}$$

## 9.2.2 ایک مقدار سے دوسری مقدار میں تبدیلی کا بذریعہ گراف مطالعہ کرنا

### Read a given Graph to Know One Quantity Corresponding to Another

آئیے مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کیجئے۔

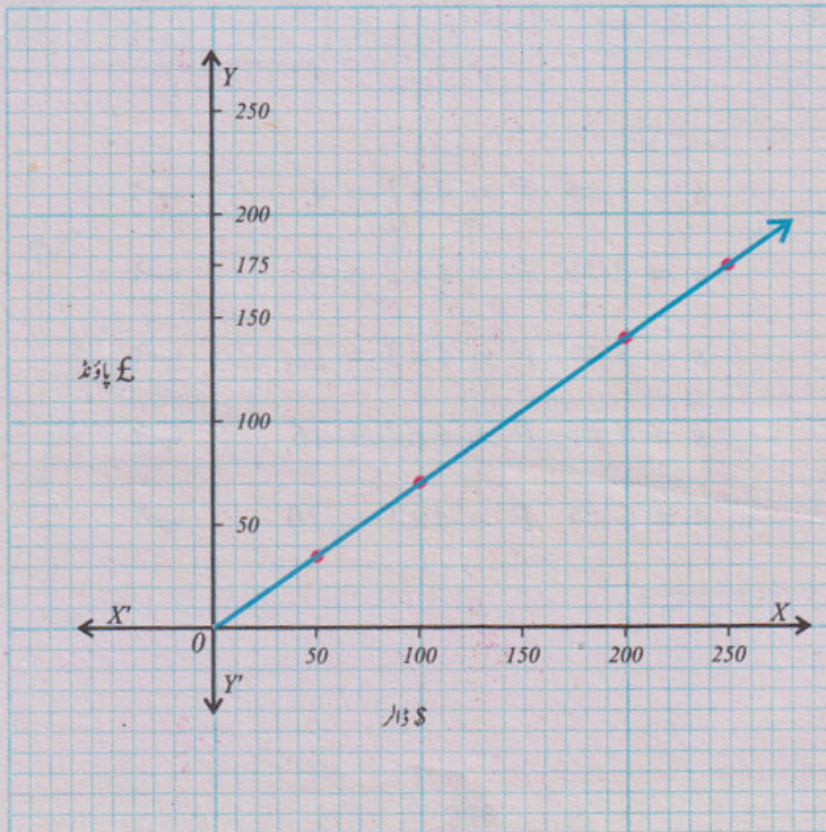
**مثال :-**

نیچے دیا گیا گراف مختلف رقوم کی مقداروں کے لئے ڈالروں سے پونڈوں میں منتقلی کو ظاہر کرتا ہے۔

\$	50	100	200	250
£	35	70	140	175

**حل :-**

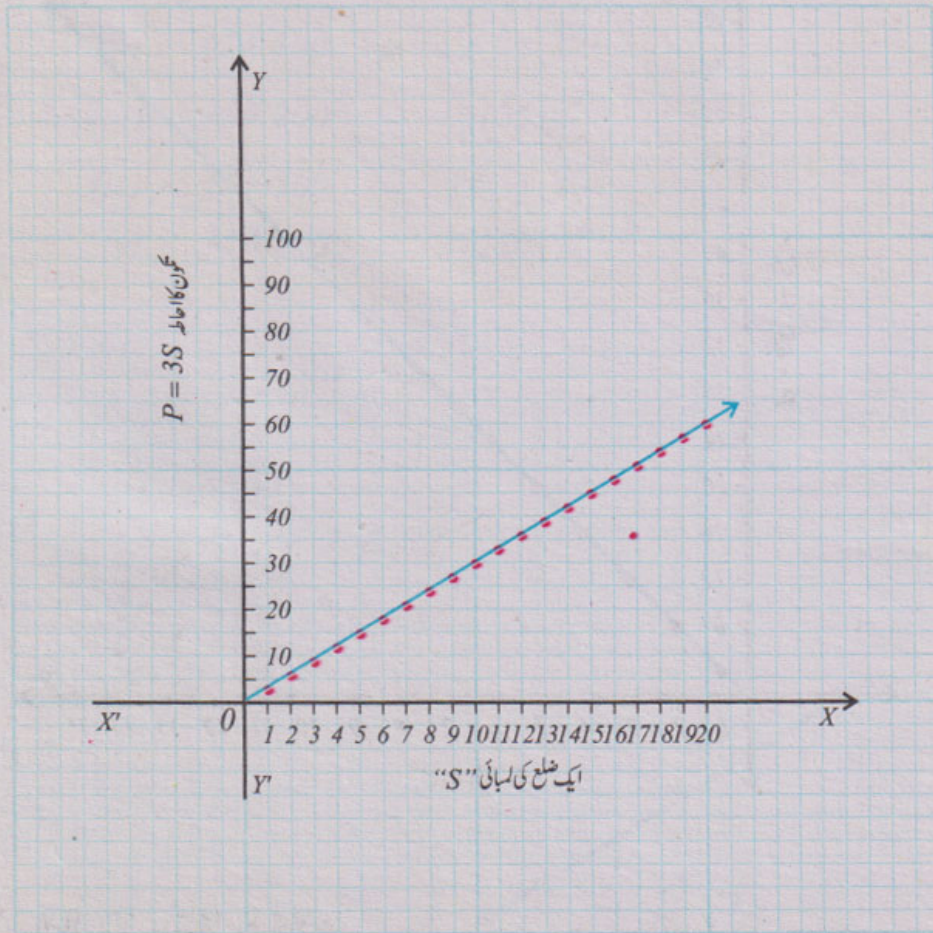
- (i) 50 ڈالر، 35 پونڈ میں تبدیل ہوتے ہیں۔
- (ii) 100 ڈالر، 70 پونڈ میں تبدیل ہوتے ہیں۔
- (iii) 150 ڈالر، 105 پونڈ میں تبدیل ہوتے ہیں۔
- (iv) 250 ڈالر، 175 پونڈ میں تبدیل ہوتے ہیں۔



## مثال 2:-

درج ذیل گراف مساوی الاضلاع مثلث کے احاطہ اور اضلاع کے درمیان تعلق  $P = 3S$  دکھایا گیا ہے۔  
جبکہ 'S' کی قیمتیں 1 تا 20 ہیں۔

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$P = 3S$	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60



(i) ضلع کی لمبائی 1 یونٹ ہو تو احاطہ 3 یونٹ

(ii) ضلع کی لمبائی 3 یونٹ ہو تو احاطہ 9 یونٹ

$$P = 42, S = 14 \text{ (vii)}$$

$$P = 48, S = 16 \text{ (viii)}$$

$$P = 60, S = 20 \text{ (ix)}$$

$$P = 12, S = 4 \text{ (iii)}$$

$$P = 18, S = 6 \text{ (iv)}$$

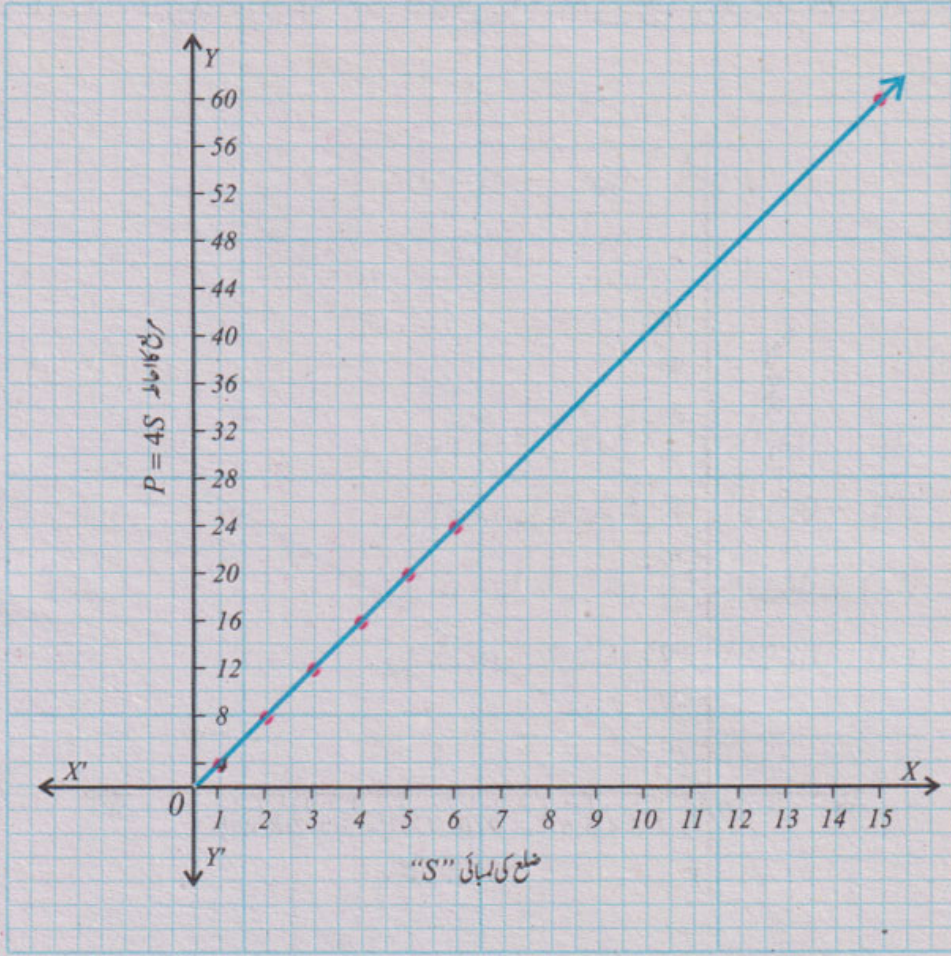
$$P = 27, S = 9 \text{ (v)}$$

$$P = 33, S = 11 \text{ (vi)}$$

## مثال 3:-

مربع کے ضلع  $S$  اور احاطہ  $P$  کی لمبائیوں میں گراف فارمولا  $P = 4S$  میں دکھایا گیا ہے۔ جبکہ 'S' کی قیمتیں 1 تا 15 ہیں۔

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P = 4S$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60



(i) ضلع کی لمبائی 1 یونٹ کیلئے احاطہ 4 یونٹ

(ii) ضلع کی لمبائی 2 یونٹ ہو تو احاطہ 8 یونٹ

$$P = 36, S = 9 \quad (ix)$$

$$P = 40, S = 10 \quad (x)$$

$$P = 44, S = 11 \quad (xi)$$

$$P = 48, S = 12 \quad (xii)$$

$$P = 52, S = 13 \quad (xiii)$$

$$P = 56, S = 14 \quad (xiv)$$

$$P = 60, S = 15 \quad (xv)$$

$$P = 12, S = 3 \quad (iii)$$

$$P = 16, S = 4 \quad (iv)$$

$$P = 20, S = 5 \quad (v)$$

$$P = 24, S = 6 \quad (vi)$$

$$P = 28, S = 7 \quad (vii)$$

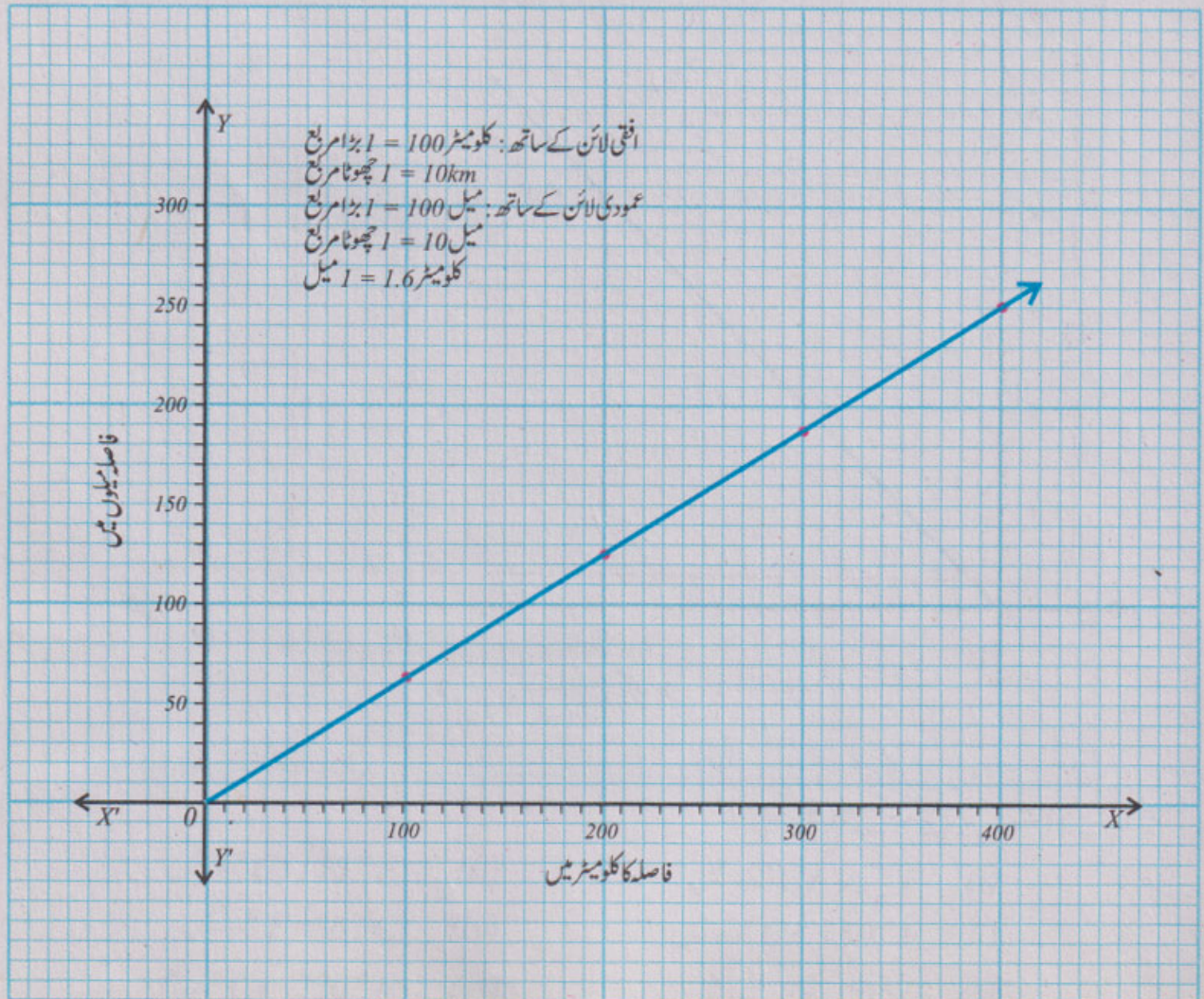
$$P = 32, S = 8 \quad (viii)$$

## 9.2.3 تحویلی گراف کا مطالعہ کرنا Read the Graph for Conversion

میل اور کلومیٹر

تحویلی گراف کا مطالعہ کیجئے۔

	1.6 کلومیٹر	=	1 میل	تحویلی
(i)	0 کلومیٹر	=	0 میل	
(ii)	100 کلومیٹر	=	62.5 میل	
(iii)	200 کلومیٹر	=	125 میل	
(iv)	300 کلومیٹر	=	187.5 میل	
(v)	400 کلومیٹر	=	250 میل	

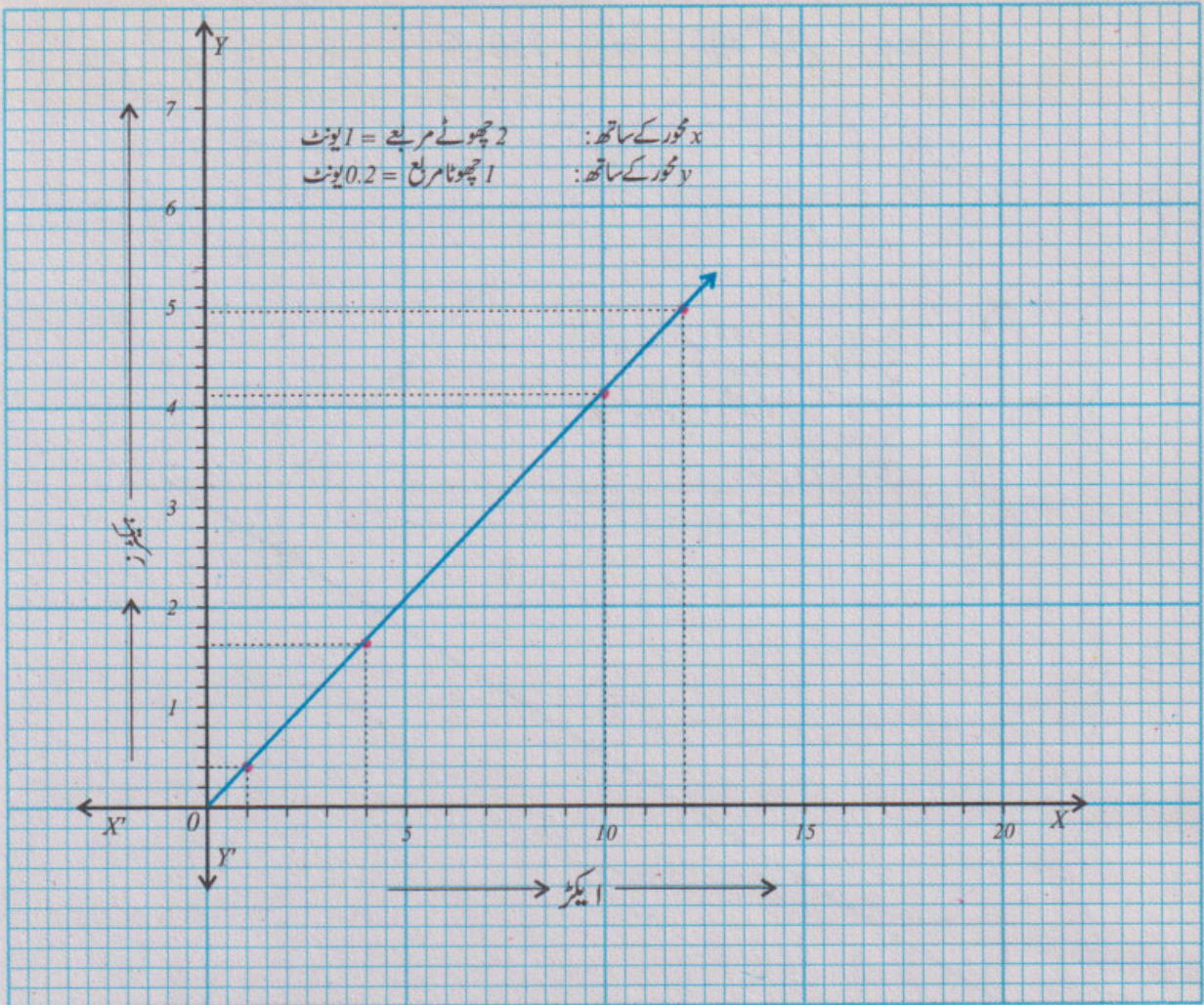


## ایکڑ اور ہیکٹر Acres and Hacters

جدول رقبہ کی مقدار میں ایکڑوں سے ہیکٹروں میں تبدیلی کو ظاہر کرتا ہے۔

ایکڑ	1	4	10	12
ہیکٹر	0.4046	1.6187	4.0468	4.8562

ان نقاط کے گراف کو گراف پیپر پر ایکڑ کی قیمتوں 0 تا 30 اور ہیکٹروں 0 تا 12.1405 تک ظاہر کیا گیا۔ فرض کیا  $X$ ۔ محور پر 2 چھوٹے مربع ایک اکائی کو ظاہر کرتے ہیں۔ جبکہ  $Y$  محور پر 1 چھوٹا مربع 0.2 یونٹس کو ظاہر کرتا ہے۔



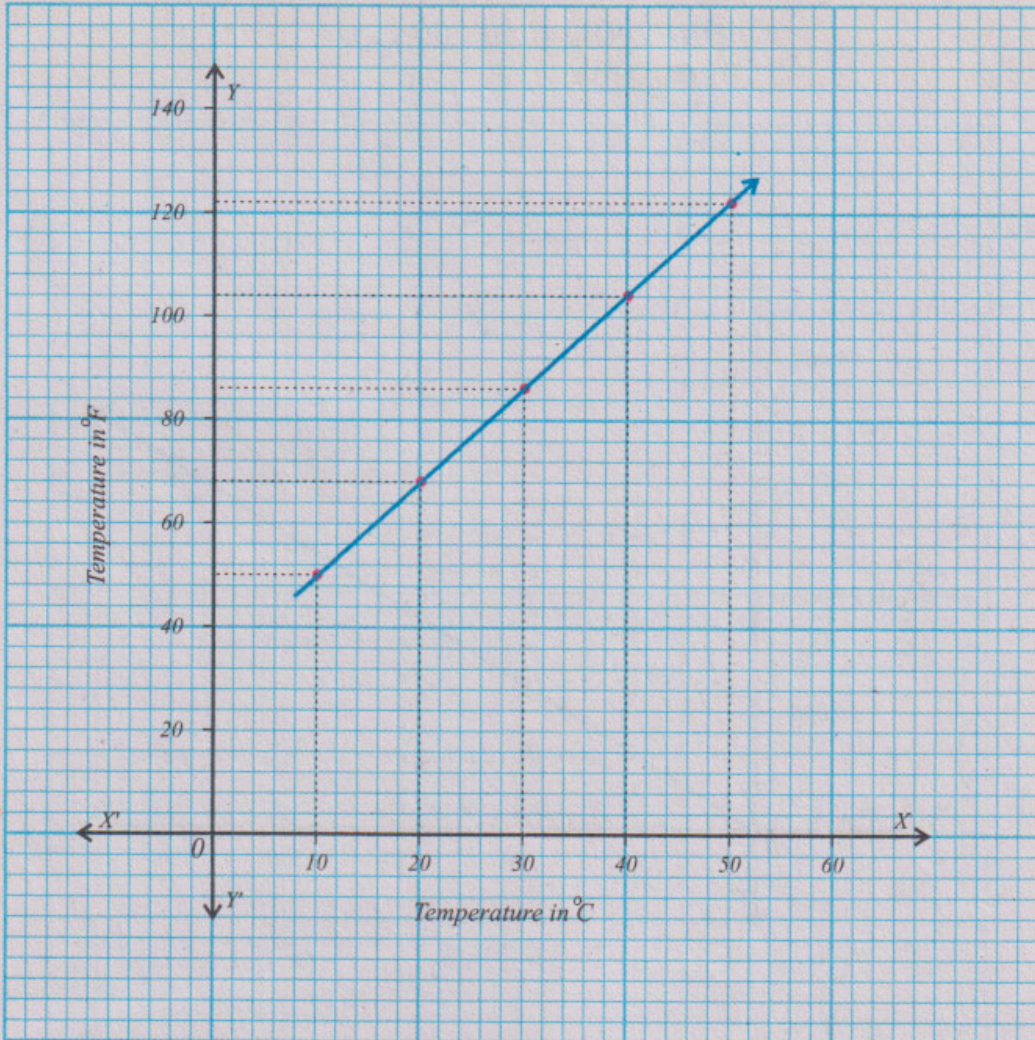
## درجہ حرارت سینٹی گریڈ اور فارن ہائیٹ کی باہمی تبدیلی

### Degrees Celsius and Degrees Fahrenheit

دیا گیا گراف درجہ فارن ہائیٹ ( $^{\circ}F$ ) کی تحویلی قیمت کو درجہ سینٹی گریڈ میں ظاہر کرتا ہے۔ گراف کا احتیاط کے ساتھ مطالعہ کیجئے اور سوالوں کے جوابات دیجئے۔

افقی محور یعنی X-محور پر سینٹی گریڈ کو  $10^{\circ}C$  کو 5 چھوٹے مربع کے برابر لے کر 0 درجہ تا 50 درجہ جبکہ عمودی محور یعنی Y-محور پر فارن ہائیٹ  $20^{\circ}F$  کو 5 چھوٹے مربع کے برابر رکھ کر گراف بنایا گیا۔

$$^{\circ}C = \frac{5}{9}(^{\circ}F - 32) \quad , \quad ^{\circ}F = \left(\frac{9}{5} \times ^{\circ}C\right) + 32 \quad (\text{کنورژن})$$



گراف کا استعمال کرتے ہوئے تبدیل کیجئے۔

- |   |  |
|---|--|
| (i) $95^{\circ}C$ کو $^{\circ}F$ میں    | (ii) $113^{\circ}C$ کو $^{\circ}F$ میں |
| (iii) $150^{\circ}F$ کو $^{\circ}C$ میں | (iv) $86^{\circ}C$ کو $^{\circ}F$ میں  |
| (v) $20^{\circ}C$ کو $^{\circ}F$ میں    | (vi) $220^{\circ}F$ کو $^{\circ}C$ میں |



## پاکستانی کرنسی کی دوسرے ملک کی کرنسی میں تبدیلی

### Pakistani Currency and another Currency

دیا گیا گراف برطانوی پونڈ کی مختلف قیمتوں کے برابر پاکستانی روپوں کی قدروں کو ظاہر کرتا ہے۔

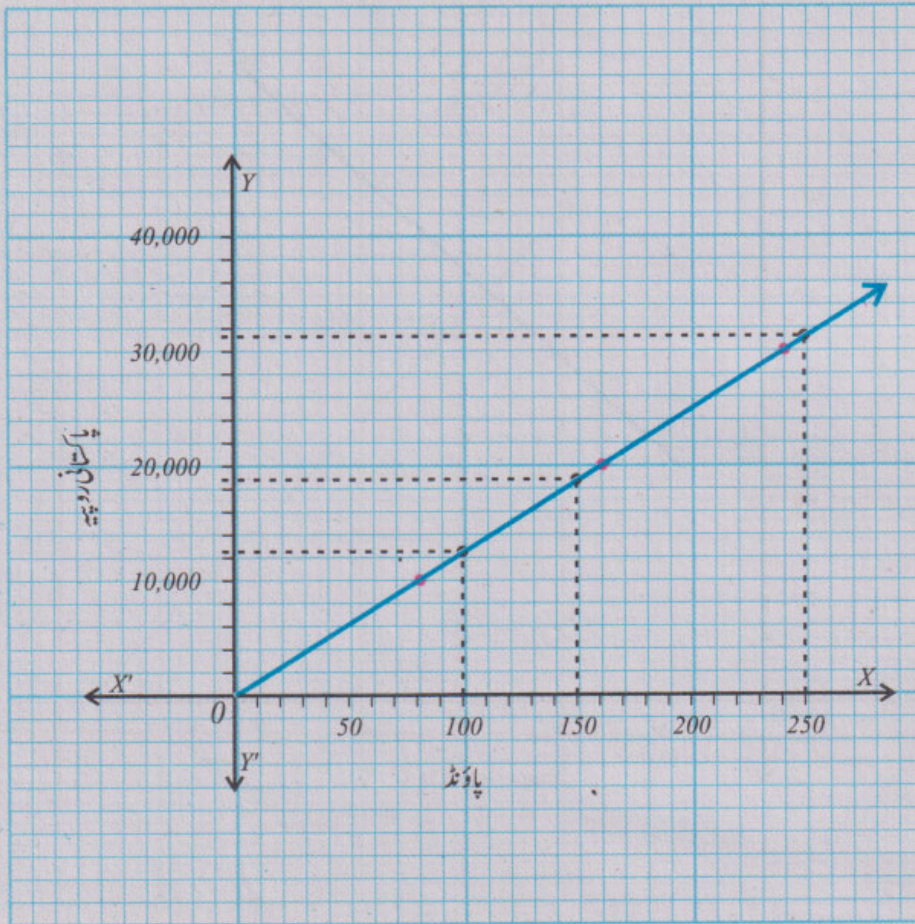
انفی محور پر 5 چھوٹے مربع = £ 50 اور عمودی محور پر 5 چھوٹے مربع = 10,000 روپے اور 125 روپے = £ 1

گراف سے:

(i)  $80 \text{ £} = 10,000$  روپے

(ii)  $160 \text{ £} = 20,000$  روپے

(iii)  $240 \text{ £} = 30,000$  روپے



گراف کا مطالعہ کر کے بتائیے کہ

(iv)  $250 \text{ £} =$  \_\_\_\_\_ روپے      (v)  $150 \text{ £} =$  \_\_\_\_\_ روپے      (vi)  $100 \text{ £} =$  \_\_\_\_\_ روپے

(vii)  $5000$  روپے = £ \_\_\_\_\_      (viii)  $8000$  روپے = £ \_\_\_\_\_

## مشق 9.3

1- جدول میں فارن ہائیٹ  $F$  اور اس کے متساوی سینٹی گریڈ میں قیمتیں درج ہیں۔

درجہ حرارت فارن ہائیٹ	$^{\circ}F$	57	126	158	194
درجہ حرارت سینٹی گریڈ	$^{\circ}C$	14	52	70	90

ان نقاط کو  $0^{\circ}$  تا  $100^{\circ}$  اور فارن ہائیٹ سکیل  $0^{\circ}$  تا  $220^{\circ}$  گراف پیپر پر ظاہر کیجئے۔ جبکہ دونوں محوروں پر یونٹس  $20 = 5^{\circ}$  چھوٹے مربع رکھیں۔ اپنے گراف کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی تبدیلی معلوم کیجئے۔  
(a)  $97^{\circ}F$  کو  $^{\circ}C$  میں (b)  $127^{\circ}F$  کو  $^{\circ}C$  میں (c)  $25^{\circ}C$  کو  $^{\circ}F$  میں (d)  $80^{\circ}C$  کو  $^{\circ}F$  میں

2- دی گئی جدول مختلف رقوم کے لئے امریکی ڈالروں (\$) سے پونڈوں (£) میں تبدیلی کو ظاہر کرتی ہے۔

\$	50	100	200
£	35	70	140

ان نقاط کو گراف پیپر پر ظاہر کر کے ان کو لکھ کر ایک سیدھا خط حاصل کیجئے۔ دونوں محوروں پر یونٹس  $50 = 5$  چھوٹے مربع لے کر گراف مکمل کیجئے۔ اپنے گراف کو درج ذیل تبدیلی کیلئے استعمال کیجئے۔

$$\$160 = £ \dots (a) \quad \$160 = £ \dots (b)$$

$$£160 = \$ \dots (c) \quad £160 = \$ \dots (d)$$

3- نیچے دیئے گئے جدول میں کلومیٹر کی مختلف قدروں کی متساوی میل میں قدریں دی گئی ہیں۔

کلومیٹر	0	100	200	300
میل	0	62.5	125	187.5

ان قدروں کو گراف پیپر پر ظاہر کیجئے۔  $x$ -محور پر 10 چھوٹے مربع  $= 100$  کلومیٹر جبکہ  $y$ -محور پر 10 چھوٹے مربع  $= 100$  میل رکھئے۔ اپنے گراف کو مندرجہ ذیل تبدیلیوں کے لئے استعمال کیجئے۔

$$(a) \text{ میل } \dots = 140 \text{ کلومیٹر} \quad (b) \text{ میل } \dots = 175 \text{ کلومیٹر}$$

$$(c) \text{ کلومیٹر } \dots = 50 \text{ میل} \quad (d) \text{ کلومیٹر } \dots = 100 \text{ میل}$$

4- صفحہ نمبر 241 پر 9.2.3 آرٹیکل میں دیئے گئے گراف کو مندرجہ ذیل تبدیلیوں میں لکھنے کے لئے استعمال کیجئے۔

$$(a) \text{ ہیکٹر } \dots = 16 \text{ ایکڑ} \quad (b) \text{ ہیکٹر } \dots = 118 \text{ ایکڑ}$$

$$(c) \text{ ایکڑ } \dots = 6.0702 \text{ ہیکٹر} \quad (d) \text{ ہیکٹر } \dots = 124 \text{ ایکڑ}$$

$$(e) \text{ ایکڑ } \dots = 11.3311 \text{ ہیکٹر}$$

## جائزہ مشق 9

1- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

(i) مبدا کے محددات کیا ہوتے ہیں؟

- (a) (1,1) (b) (0,1) (c) (0,0) (d) (1,0)

(ii) کسی نقطہ کا  $Y$ -محور سے عمودی فاصلہ کیا کہلاتا ہے؟

- (a) افقی لائن (b) مبدا (c) عمودی لائن (d) محور

(iii) کسی نقطہ کا  $X$ -محور سے عمودی فاصلہ کیا کہلاتا ہے؟

- (a) افقی لائن (b) مبدا (c) ایسا (d) آرڈینیٹ

(iv)  $2x + y = 6$  میں  $x = 1$  رکھنے سے  $y = ?$

- (a) -4 (b) -8 (c) 4 (d) 8

(v)  $2x - y = 6$  میں  $y = 2$  رکھنے سے  $x = ?$

- (a) -2 (b) 2 (c) -4 (d) 4

(vi) مساوات  $y = c$  کی شکل میں گراف پر  $y$  محدد کیا ہوتا ہے؟

- (a) -1 (b) 0 (c)  $c$  (d) 1

(vii) مساوات  $y = a$  کے گراف پر  $x$  محدد کیا ہوتا ہے؟

- (a)  $c$  (b) 1 (c) متغیر (d)  $a$

(viii)  $f(x) = \frac{x}{2}$ ,  $4 \leq x \leq 12$ ,  $x$  جبکہ  $x$  ایک جفت عدد ہو تو  $f(x)$  کی ڈومین کیا ہے؟

- (a) {2,3,4,5,6} (b) {4,6,8,10} (c) {6,8,10} (d) {4,6,8,10,12}

(ix)  $f(x) = \frac{x}{2}$ ,  $4 \leq x \leq 12$ , جبکہ  $x$  ایک جفت عدد ہو تو  $f(x)$  کی رینج کیا ہے؟

- (a) {3,4,5,6} (b) {3,4,5} (c) {2,3,4,5,6} (d) {4,6,8,10,12}

(x) اگر  $y = 3x$  میں  $x = 2$  رکھیں تو  $y = ?$

- (a) 2 (b) -3 (c) 6 (d) 0

## 2- خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i) مستوی سطح جس میں ایک دوسرے کے عموداً نقطہ  $O$  پر متقاطع خطوط  $YOY'$ ,  $XOX'$  کھلتی ہے۔

(ii)  $Y$ -محور سے عموداً فاصلہ کھلاتا ہے۔

(iii)  $X$ -محور سے عموداً فاصلہ کھلاتا ہے۔

(iv) عددوں کا جوڑا  $(2, 3)$  کھلاتا ہے۔

(v) افقی خط  $XOX'$  کھلاتا ہے۔

(vi) عموداً خط  $YOY'$  کھلاتا ہے۔

(vii) نقطہ  $(-1, -2)$  کے اظہار کے لئے ہم مبدا  $O$  سے  $X$ -محور پر بائیں جانب '1' یونٹ اور '2' یونٹ

(viii) مبدا کے محددات ہوتے ہیں۔

(ix) خط کی مساوات جس میں  $y$  پایا جاتا ہو کھلتی ہے۔

(x) مساوات  $2x + y = 6$  کے گراف میں  $X$ -محور کا نقطہ قاطع ہے۔

## 3- مندرجہ ذیل نقاط کو گراف پیپر پر ظاہر کیجئے۔

(i)  $C(3, 5)$  اور  $B(-6, -3)$ ,  $A(5, 2)$

(ii)  $D(6, 7)$  اور  $C(3, 0)$ ,  $B(3, -2)$ ,  $A(0, -5)$

(iii)  $D(10, -6)$  اور  $C(-5, -3)$ ,  $B(-6, 3)$ ,  $A(8, 4)$

## 4- مندرجہ ذیل کا گراف بنائے۔

$$y = 3x + 2 \quad (i)$$

$$y = 2x + 1 \quad (ii)$$

$$y = x + 1 \quad (iii)$$

$$y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2} \quad (iv)$$

$$y = 3x + 4 \quad (v)$$

5- نقاط  $C(1, 8)$  اور  $B(7, 0)$ ,  $A(2, 0)$  کا گراف بنائیے۔

6- اگر  $f(x) = \frac{x}{2}$ ,  $4 \leq x \leq 12$  ہو تو  $f(x)$  کی ڈومین اور رینج لکھیے۔

## خلاصہ

✦ سیٹوں کی برابری کی تعریف کی رو سے کسی بھی دو عناصر 'a' اور 'b' کے لئے  $\{a, b\} = \{b, a\}$

✦ اعداد کے جوڑے  $(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2)$  وغیرہ وغیرہ مرتب جوڑوں کی مثالیں ہیں۔

✦ ہم ایک خطی گراف کو دی گئی مقدار میں روپوں کو پونڈوں میں پونڈوں کو روپوں میں تبدیل کرنے کے لئے استعمال کر سکتے ہیں۔

# بنیادی شماریات

## BASIC STATISTICS

10

- ◀ تعددی تقسیم
- ◀ مجموعی تعدد
- ◀ مرکزی رجحان کی پیمائش
- ◀ انتشار کی پیمائش

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ یہ جان سکیں:

- ◀ کہ گروہی / جماعتی تعددی جدول کیسے تیار کیے جاتے ہیں۔
- ◀ کہ برابر اور نابرابر جماعتی وقفہ کے ساتھ ہسٹوگرام کیسے تیار ہوتے ہیں۔
- ◀ کہ تعددی کثیر الاضلاع کیسے بنتی ہے۔
- ◀ کہ مجموعی تعدد والی جدول کیسے بنتا ہے۔
- ◀ کہ مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کیسے بنتی ہے۔
- ◀ کہ گروہی اور غیر گروہی مواد کیسے حاصل ہوتا ہے۔
- کہ تعریف کے مطابق حسابی اوسط فرضی اوسط سے انحراف کا استعمال کیسے ہوتا ہے۔
- کہ وسطانیہ، اعادہ، حسابی اوسط اور ہم آہنگ اوسط کیسے حل کرتے ہیں۔
- ◀ کہ حسابی وسط کی خصوصیات کیا ہیں۔
- ◀ کہ اوزانی اوسط، وسط اور متحرک اوسط کیسے نکالے جاتے ہیں۔
- ◀ کہ وسطانیہ، چوتھائیوں اور اعادہ کا بذریعہ گراف تخمینہ کیسے لگاتے ہیں۔
- ◀ کہ وسعت، تغیریت اور معیاری انحراف کی پیمائش کیسے کرتے ہیں۔

## 10.1 تعددی پھیلاؤ FREQUENCY DISTRIBUTION

### تعدد Frequency

جتنی مرتبہ دیے گئے مواد میں کوئی قدر پائی جاتی ہے۔ وہی اس کا تعدد یا فریکوینسی کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر 10% سے 20% نمبر حاصل کرنے والے طلباء 3 ہوں تو 3 اس گروہ کا تعدد کہلاتا ہے۔ اگر 5 طلباء 20% تا 30% نمبر حاصل کرنے والے ہوں تو اس گروہ کا تعدد 5 ہوگا۔

### تعدد جدول Frequency Table

ایسا جدول جس میں ہر سکور/قدر کا تعدد دیا گیا ہو تعددی جدول کہلاتا ہے۔

## 10.1.1 گروہی تعددی جدول Grouped Frequency Table

مقامی محکمہ صحت 5 سال کی عمر کے اپنے علاقے کے بچوں کے قد کے متعلق معلومات حاصل کرنا چاہتا ہے۔ اپنے پہلے دورے میں ٹیم 90 بچوں کے قدوں کا ریکارڈ سینٹی میٹر میں دیئے گئے جدول کے مطابق حاصل کرتی ہے۔

99	107	102	98	115	95	106	110	108	105
118	102	114	108	94	104	113	102	105	95
105	110	109	101	106	108	107	107	101	109
108	105	116	109	114	110	97	110	113	116
112	101	92	105	104	115	111	103	110	99
93	104	103	113	107	94	102	117	116	104
99	114	106	114	98	109	107	104	106	107
109	113	112	100	109	113	118	104	94	114
107	96	108	103	112	106	115	111	115	101

اس جدول میں بچوں کے قد کسی ترتیب کے بغیر لکھے گئے ہیں یعنی جیسے جیسے جو بچہ میڈیکل چیکنگ کے لیے آتا گیا اس کا قد ریکارڈ کر لیا گیا۔ ہمیں واضح نتائج کی خاطر اس ڈیٹا کو خاص ترتیب میں لکھنا ہے۔ ہم قدوں کو کچھ اس طرح گروہوں میں لکھتے ہیں۔

100; سینٹی میٹر تا 104 سینٹی میٹر      95; سینٹی میٹر تا 99 سینٹی میٹر      90; سینٹی میٹر تا 94 سینٹی میٹر

115 سینٹی میٹر تا 119 سینٹی میٹر      110; سینٹی میٹر تا 114 سینٹی میٹر      105; سینٹی میٹر تا 109 سینٹی میٹر

قدوں کو ان کی عددی قیمت کے مطابق ترتیب دیا گیا ہے۔ ہر ایک گروہ میں قدوں کی تعداد گن کر درج ذیل جدول میں لکھا گیا ہے۔

قد سینٹی میٹر میں	موازنہ	تعداد
90 - 94		5
95 - 99		9
100 - 104		17
105 - 109		28
110 - 114		21
115 - 119		10
		90: کل میزان

## 10.1.2 کالمی نقشہ Histogram

جب ہم کالمی نقشہ اس طرح بناتے ہیں کہ ہر کالم کا رقبہ اس گروہ کے تعدد کے راست متناسب ہو تو ایسے نقشہ کو کالمی نقشہ (Histogram) کہتے ہیں۔



## Histogram with equal class intervals مساوی جماعتی وقفوں کے لیے کالمی نقشہ

درج ذیل مثالوں پر غور کیجئے۔

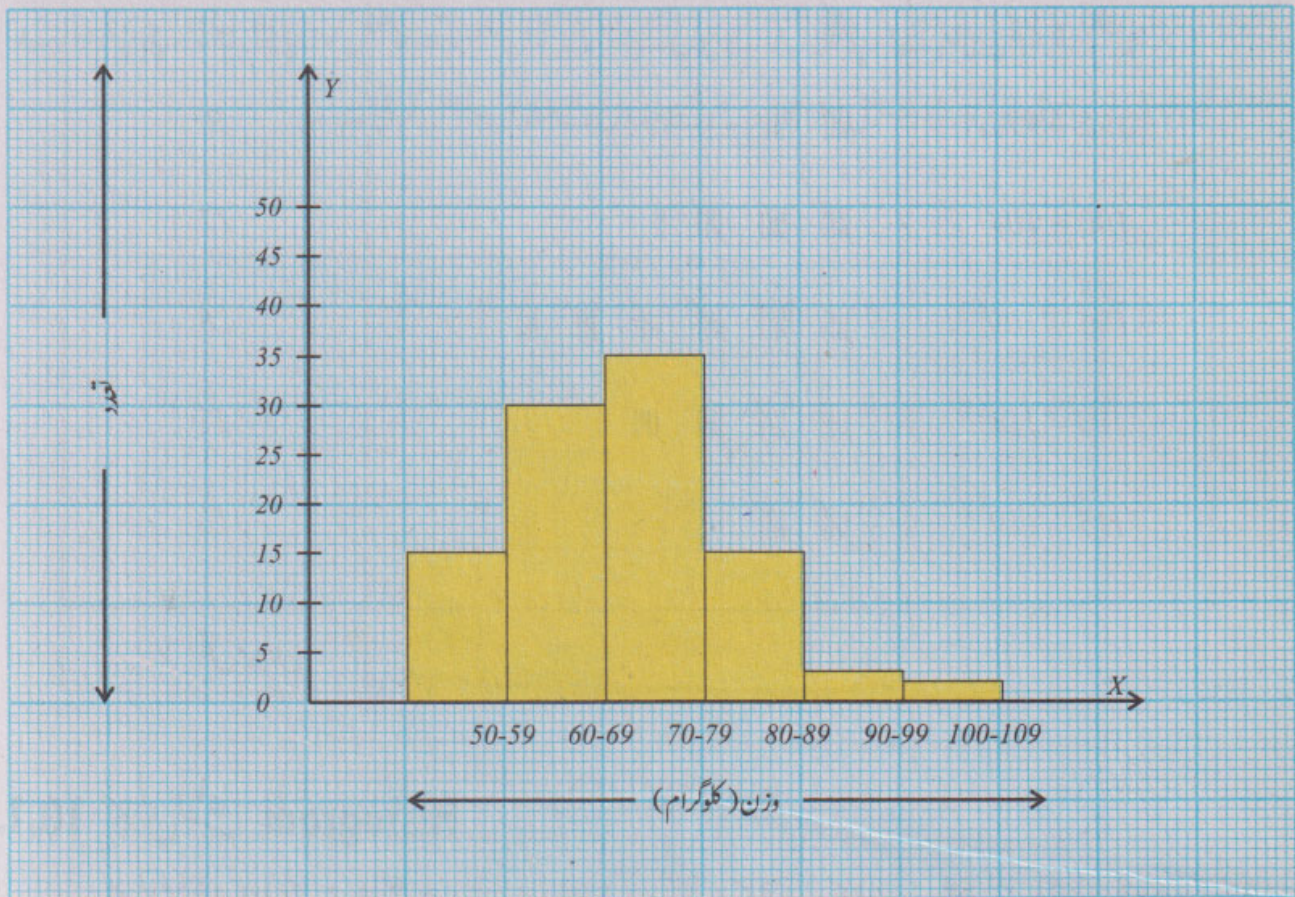
**مثال :-** مندرجہ ذیل مساوی جماعتی وقفوں کی جدول کا کالمی نقشہ تیار کیجئے۔

اوزان (کلوگرام میں)	50 - 59	60 - 69	70 - 79	80 - 89	90 - 99	100 - 109
تعداد	15	30	35	15	3	2
کل تعداد : 100						

**حل :-** مندرجہ ذیل کالمی نقشہ تعدوی جدول کی وضاحت کرتا ہے۔

(i) اوزان (کلوگرام میں)  $X$ -محور پر مبداء 'O' کی دائیں جانب۔ جبکہ تعداد  $X$ -محور کے اوپر  $Y$ -محور کے ساتھ لیا گیا ہے۔

(ii)  $X$ -محور پر ایک بڑا مربع = 10 کلوگرام وزن۔ جبکہ  $Y$ -محور پر ایک بڑا مربع = 10 تعدد۔



ہر کالم کا رقبہ اس جماعت کے تعدد کے راست متناسب ہے۔

شکل ایک مساوی کالمی نقشہ ہے۔ ہر جماعت کا جماعتی وقفہ یکساں ہے لہذا ہر کالم کی چوڑائی یکساں ہے۔ لہذا ہر کالم کا رقبہ اس

جماعت کے ارکان کی تعداد کے متناسب ہے۔

## غیر مساوی جماعتی وقفوں کے لیے کالمی نقشہ Histogram with unequal class intervals

مثال :-

درج ذیل تعددی جدول میں 100 آدمیوں کی ماہانہ تنخواہ کا جائزہ پیش کیا گیا۔

تنخواہ روپوں میں	0 - 1999	2000 - 3999	4000 - 5999	6000 - 9999	10000 - 19999
تعدد	20	36	25	14	5

حل :- جماعتی وقفے مساوی نہیں ہیں۔

پہلی تین جماعتوں میں وقفہ 2000 روپے کا ہے۔  
چوتھی جماعت کا وقفہ 4000 روپے کا ہے جو کہ پہلی تین کے وقفے کا دو گنا ہے۔  
پانچویں جماعت کا وقفہ 10,000 روپے ہے۔ جو کہ پہلی تین کے وقفے سے پانچ گنا ہے۔  
اس گروہی تقسیم کو ہسٹوگرام پر ظاہر کرنے کے لئے ہم پہلے تین کالموں کی چوڑائی یکساں رکھتے ہیں۔

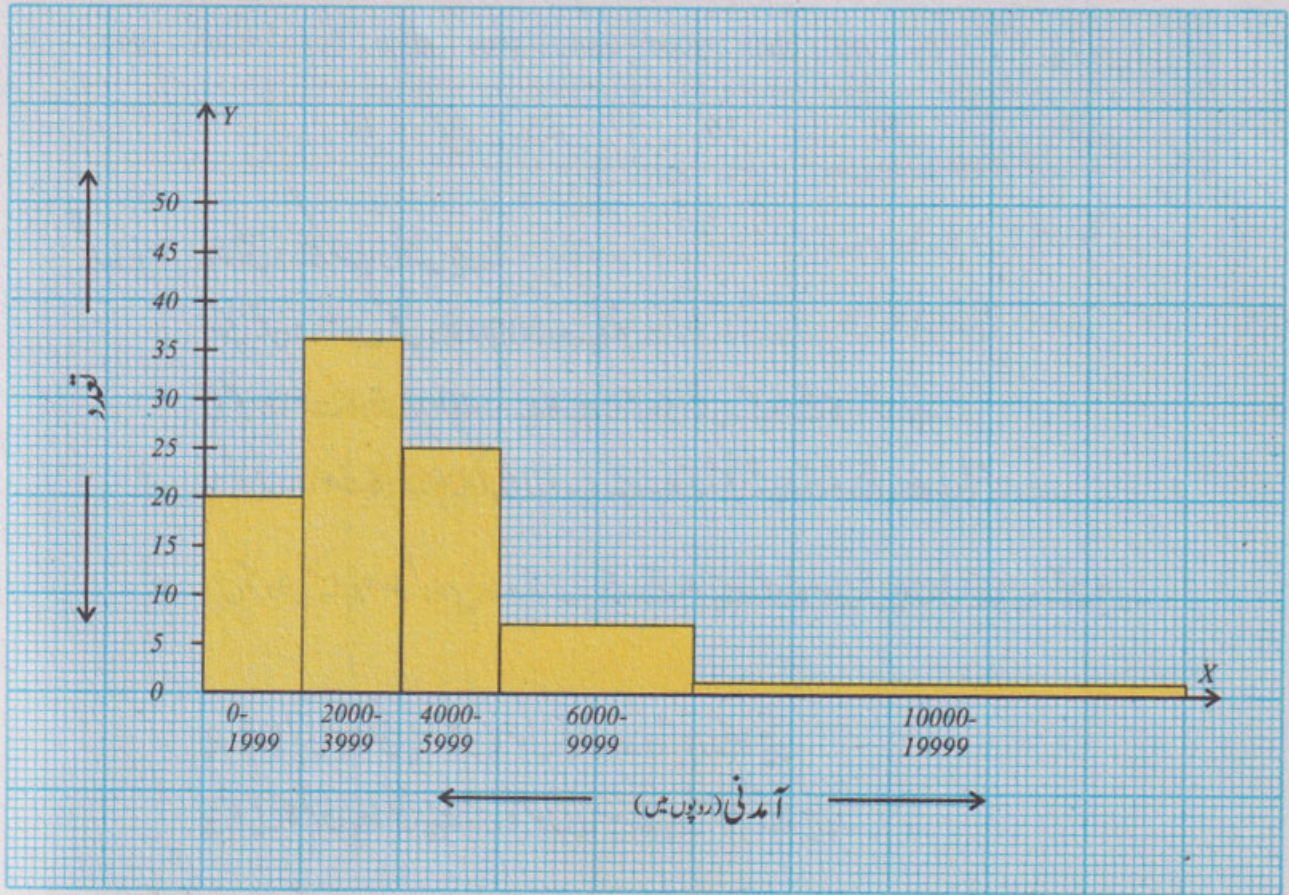
چوتھے کالم کی چوڑائی پہلے تین کالموں کی نسبت دو گنا رکھتے ہیں۔  
پانچویں کالم کی چوڑائی پہلے تین کالموں کی نسبت پانچ گنا رکھتے ہیں۔

اب 14 تعدد کو لیجئے جو کہ گروپ 6000 روپے تا 9999 روپے میں واقع ہے۔ اگر ہم فرض کر لیں کہ تنخواہیں یکساں طور پر بڑھتی ہیں تو اس سے مراد یہ ہے کہ

سات افراد کی تنخواہ 6000 روپے سے 7999 روپے کے درمیان ہے۔  
اور مزید سات افراد کی تنخواہ 8000 روپے سے 9999 روپے کے درمیان ہے۔

لہذا چوتھا کالم باقی تمام کالموں کے بالمقابل 7 یونٹس اونچا ہے۔ کیونکہ اس کالم کی چوڑائی دوسرے گروپ کے مقابلے میں دو گنا ہے۔ اس کا رقبہ اس کے تعدد کے متناسب بنتا ہے۔

اگر ہم یہ بھی تصور کریں کہ پانچویں گروپ میں آمدنی کو گروپ میں یکساں طور پر پھیلا یا گیا ہے تب تو ہر ذیلی گروپ میں صرف ایک آدی 2000 روپے والے وقفہ میں آتا ہے۔ اس لیے پانچواں کالم تمام گروپ سے ایک یونٹ اونچا بنتا ہے۔ پانچویں کالم کا رقبہ اس کے تعدد کے متناسب ہوگا۔



نوٹ۔ ہم عمودی محور کو تعدد کے اظہار کے لئے استعمال نہیں کرتے کیونکہ کالم کا رقبہ جو کہ تعدد کو ظاہر کرتا ہے نہ کہ اس کی بلندی۔

### 10.1.3 تعددی کثیر الاضلاع Frequency Polygon

تعددی کثیر الاضلاع بہت سارے اضلاع سے مل کر بننے والی بند شکل ہوتی ہے جسے بنانے کے لیے ہر گروہ کے کلاس مارک (کلاس/گروپ کا وسطی نقطہ) تعدد کے بالمقابل رکھ کر گراف پیپر پر نقاط لگائے جاتے ہیں۔ پھر ان نقاط کو سیدھی لائنوں سے ملا دیا جاتا ہے۔ تعددی کثیر الاضلاع ہسٹوگرام کی مستطیلوں کے اوپر کے اضلاع کے وسطی نقاط کو بھی ملانے سے حاصل ہوتی ہے۔

**مثال :-** تعددی جدول میں مواد وزن گھٹاؤ پر وگرام میں 40 شرکاء کا وزن دیا گیا ہے۔

دیئے گئے ڈیٹا کو استعمال کر کے ظاہر کیجئے۔

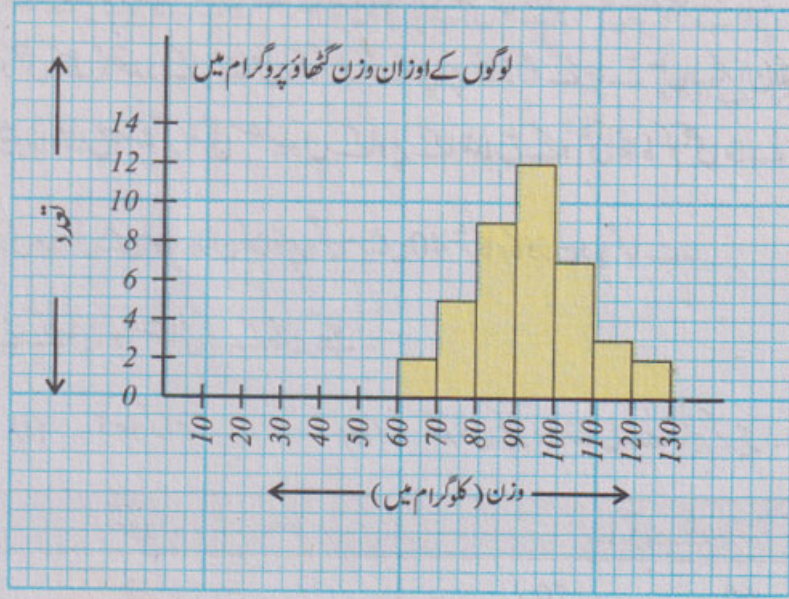
(i) ہسٹوگرام (ii) تعددی کثیر الاضلاع سے ظاہر کریں۔

جماعتی وقفے	تعدد
60 — 70	2
70 — 80	5
80 — 90	9
90 — 100	12
100 — 110	7
110 — 120	3
120 — 130	2
40 : میزان	

**حل :-**

- (i) گراف پیپر پر محور بنائیے (x-محور، y-محور)
- (ii) گراف کا عنوان لکھئے۔
- (iii) افقی x-محور پر وزن (کلوگرام) میں اور عمودی y-محور پر تعدد لکھئے
- (iv) افقی اور عمودی محوروں کے لیے سکیل مقرر کیجئے۔
- (v) x-محور پر گراف کے آغاز سے پہلے اور اختتام کے بعد کم از کم جماعتی وقفے سے آدھی لمبائی چھوڑ دیجئے۔
- (vi) 2 افراد کی بلندی تک بلند پہلا کالم پہلے جماعتی وقفہ کو ظاہر کرتا ہوا بنائیے۔

جز (iii) کو ایک جماعتی وقفہ کے لیے دہرائیے۔



(ii) مندرجہ بالا ہسٹوگرام A کی تمام مستطیلوں کے اوپر والے اضلاع کے وسطی نقاط کی نشاندہی کیجئے۔ ان وسطی نقاط کو سیدھے خطوط سے اس طرح ملا کر پہلے کالم سے پہلے والے کالم کے وسطی نقطہ اور کالم کے وسطی نقطہ کو x-محور پر جا ملائیں اور یوں ایک بند کثیرالاضلاع حاصل ہوتی ہے۔



## مشق 10.1

1- ایک جوئیر سکول کے 50 طلباء نے سکول کمپیوٹر کلب میں شمولیت اختیار کی۔ ان کی عمروں کا بنایا گیا ریکارڈ درج ذیل ہے۔

10	8	9	10	7	8	8	11	10	9
7	8	9	9	10	11	11	10	9	8
8	7	9	7	10	7	10	8	9	11
10	11	8	10	9	8	9	7	11	10
9	10	10	11	10	11	7	11	10	9

تعددی جدول بنائیے جو کہ ہر عمر کے عدد کو ظاہر کرے۔ اس معلومات کو کالم چارٹ سے ظاہر کیجئے۔

2- مقامی مچھلی اور چپس کی دوکان پر ایک ہفتہ کی شام 56 گاہک آئے۔ انہوں نے دی گئی رقم خرچ کیں۔

270	110	45	96	250	490	325	45
382	136	125	450	420	380	150	250
85	250	320	525	218	210	216	120
155	430	250	40	510	150	510	245
320	120	316	150	260	45	180	310
273	280	85	280	318	45	210	282
462	316	218	316	325	45	560	315

گروپوں 0-99 روپے، 100-199 روپے، 200-299 روپے، 300-399 روپے، 400-499 روپے، 500-599 روپے کو استعمال کرتے ہوئے تعددی جدول تیار کیجئے اور مواد کو کالم / بار چارٹ میں ظاہر کیجئے۔

3- ایک میلے میں فروخت کیے گئے 30 پاپ کارن کے بیگوں کے اوزان گرام میں دیئے گئے ہیں۔

69	83	75	65	68	68	73	70	80	79
70	76	63	86	69	65	66	74	86	68
70	60	67	74	65	65	67	88	81	63

بار چارٹ بنا کر مواد کو ظاہر کیجئے۔

## 10.2 مجموعی تعدد CUMULATIVE FREQUENCY

مجموعی تعدد (Cumulative Frequency) کسی بھی قدر سے پہلی قدروں کے تعددات کے مجموعے کو ظاہر کرتا ہے۔ اس کی وضاحت درج ذیل مثال سے ہوتی ہے۔

### مثال 1:-

نویں جماعت کے تمام طلباء نے ریاضی کا امتحان دیا۔ یہاں ان کے فیصد نمبر دئے گئے ہیں جو کہ 10 جماعتی وقفوں میں منقسم ہیں۔ ان کے مجموعی تعددات معلوم کریں۔

فیصد نمبر	تعدد
1 - 10	3
11 - 20	6
21 - 30	11
31 - 40	13
41 - 50	18
51 - 60	24
61 - 70	14
71 - 80	6
81 - 90	3
91 - 100	2
100 : میزان تعدد	

- (i) کتنے طلباء نے 10% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (ii) کتنے طلباء نے 20% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (iii) کتنے طلباء نے 30% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (iv) کتنے طلباء نے 40% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (v) کتنے طلباء نے 50% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (vi) کتنے طلباء نے 60% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (vii) کتنے طلباء نے 70% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (viii) کتنے طلباء نے 80% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (ix) کتنے طلباء نے 90% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟
- (x) کتنے طلباء نے 100% یا اس کے کم نمبر حاصل کئے؟

حل:-

درج ذیل جدول اجتماعی تعددات کو ظاہر کرتا ہے۔

فیصد نمبر	مجموعی تعدد
10% یا کم	3
20% یا کم	9
30% یا کم	20
40% یا کم	33
50% یا کم	51
60% یا کم	75
70% یا کم	89
80% یا کم	95
90% یا کم	98
100% یا کم	100

مثال 2:- سائنس کے ٹیسٹ میں حاصل کردہ نمبروں کا جدول دیا گیا ہے۔ مجموعی تعدد مکمل کیجئے۔

نمبر	تعدد	نمبرز	مجموعی تعدد
1 - 10	5	10 یا کم	
11 - 20	6	20 یا کم	
21 - 30	8	30 یا کم	
31 - 40	16	40 یا کم	
41 - 50	23	50 یا کم	
51 - 60	18	60 یا کم	
61 - 70	12	70 یا کم	
71 - 80	10	80 یا کم	
81 - 90	2	90 یا کم	
91 - 100	0	100 یا کم	



حل :-

نمبروں کا وقفہ	تعداد	حاصل کردہ نمبر	مجموعی تعداد
1 - 10	5	10 یا کم	5
11 - 20	6	20 یا کم	11
21 - 30	8	30 یا کم	19
31 - 40	16	40 یا کم	35
41 - 50	23	50 یا کم	58
51 - 60	18	60 یا کم	76
61 - 70	12	70 یا کم	88
71 - 80	10	80 یا کم	98
81 - 90	2	90 یا کم	100
91 - 100	0	100 یا کم	100

## 10.2.2 مجموعی تعداد والی کثیر الاضلاع Cumulative Frequency Polygon

جب مجموعی تعداد کو آخری نقاط کے متعلقہ جماعتی وقفوں کے خلاف پلاٹ کیا جاتا ہے اور انہیں آپس میں ملایا جاتا ہے تو نتیجہ میں حاصل ہونے والے گراف کو مجموعی تعداد والا گراف یا (Ogive) کہتے ہیں۔

پس اوگو کو ہم مجموعی تعداد سے حاصل کردہ خطی گراف کہہ سکتے ہیں۔

مثال :-

پکڑی گئی مچھلیوں کا جماعتی وقفہ	تعداد
0 — 5	3
5 — 10	5
10 — 15	6
15 — 20	8
20 — 25	4
25 — 30	2
28: میزان	

جدول میں دیا گیا مواد مچھلیاں پکڑنے والے

28 شرکاء کی پکڑی گئی مچھلیوں کی تعداد کو

ظاہر کرتا ہے۔

اس مواد کے لیے مجموعی تعداد والی کثیر الاضلاع یعنی

(ogive) تیار کیجئے۔

حل :-

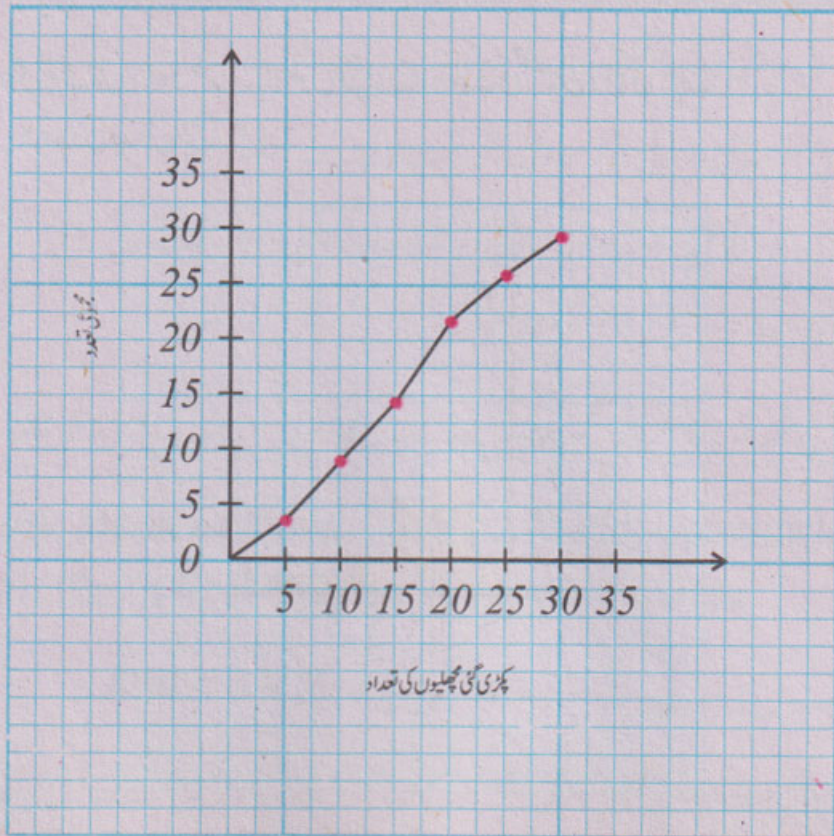
مجموعی تعددات معلوم کیجئے۔ گراف پیپر پر دونوں محور کھینچیں۔ افقی محور پر مچھلیوں کی تعداد اور عمودی محور پر مجموعی تعددات ظاہر کیجئے۔

پکڑی گئی مچھلیوں کا جماعتی وقفہ	تعدد	مجموعی تعدد
0 — 5	3	3
5 — 10	5	3 + 5 = 8
10 — 15	6	8 + 6 = 14
15 — 20	8	14 + 8 = 22
20 — 25	4	22 + 4 = 26
25 — 30	2	26 + 2 = 28
میزان	$\Sigma f = 28$	

ہر مجموعی تعدد کے آخری نقاط کو اپنے متعلقہ جماعتی وقفہ کے انتہائی قیمت کے سامنے گراف پر ظاہر کیجئے۔

ابتدائی جماعتی وقفہ کے لئے اوگو (ogive) کی پہلی مجموعی تعدد کی قیمت صفر ہوگی لہذا اوگو کا پہلا نقطہ (0, 0) ہوگا۔

اگلا نقطہ (5, 3) جس کے بعد (10, 8) وغیرہ وغیرہ۔ ان نقاط کو سیدھے قطعہ خط سے ملائیے۔



## مشق 10.2

1- درج ذیل میں سے ہر ایک کے لئے تعددی جدول کو ظاہر کرنے کے لئے کالمی نقشہ بنائیے۔

(i) درج ذیل جدول میں سکول فنکشن میں حصہ لینے والے 100 لوگوں کی عمریں دی گئی ہیں۔

عمر (سالوں میں)	0-19	20-39	40-59	60-79	80-89
تعداد	43	24	17	10	6

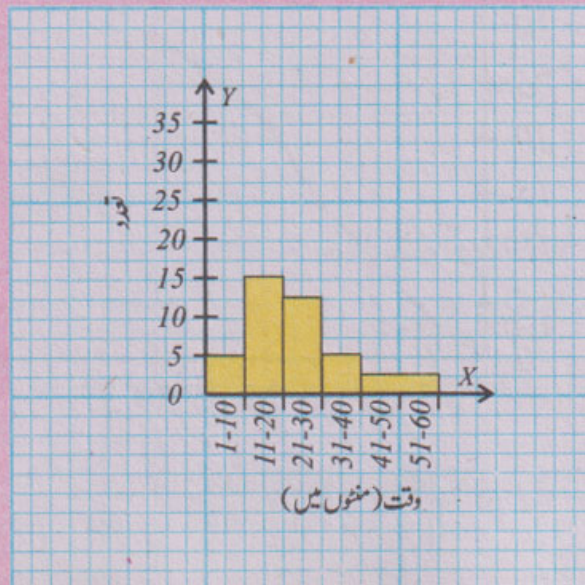
(ii) درج ذیل جدول میں 16 سالہ 100 لڑکوں کی ہفتہ وار آمدن دی گئی ہیں۔

ہفتہ وار آمدن	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
تعداد	45	10	11	21	10	3

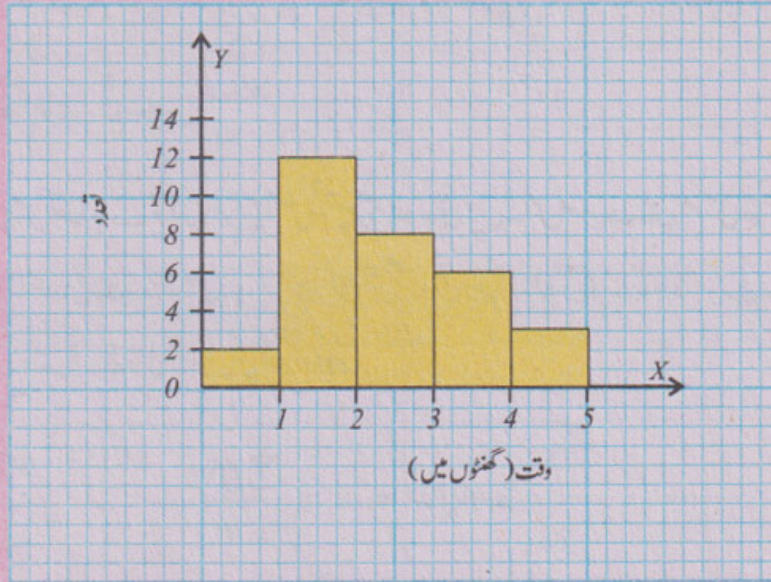
(iii) درج ذیل جدول میں 40 بچوں کے اوسط نمبروں کی تفصیل جو کہ انہوں نے سال کے آخر میں حاصل کئے درج ہے۔

اوسط حاصل کردہ نمبر	1-20	21-40	41-60	61-80	81-100
تعداد	2	4	19	12	3

2- درج ذیل کالمی نقشہ میں 500 طلباء کے سکول پہنچنے کے اوقات کی تفصیل دی گئی ہے۔ اس سے اس کا تعددی جدول تیار کریں۔



3- دیا گیا کالمی نقشہ 30 طلباء کے اس وقت (گھنٹوں میں) کی بنیاد پر بنایا گیا ہے جو انہوں نے ایک خاص ہفتہ کو ٹیلی ویژن دیکھتے ہوئے گزارا۔ اس کالمی نقشہ سے تعددی جدول بنائیے۔



## MEASURES OF CENTRAL TENDENCY

## 10.3 مرکزی رجحان کی پیمائش

مرکزی رجحان کی پیمائش (Measures of Central Tendency) دراصل کسی دیے گئے مواد کی درمیانی (مرکزی) قیمت کا پتہ چلانا ہے۔ جس کی تین قسمیں زیادہ اہم ہوتی ہیں۔

(i) حسابی اوسط: جو کہ مواد کی وسطی قیمت ہوتی ہے۔

(ii) وسطانیہ: جو کہ مواد کی قیمتوں کو ترتیب سے لکھنے پر درمیانی قیمت ہوتی ہے۔

(iii) عادہ: وہ قیمت جس کی مواد میں سب سے زیادہ تکرار ہو۔

### 10.3.1 کسی گروہی / غیر گروہی مواد سے حسابی اوسط، وسطانیہ، عادہ، ضربی اوسط اور آہنگ اوسط معلوم کرنا

To find Arithmetic Mean or Mean, Median, Mode, Geometric Mean, Harmonic Mean from Grouped/Ungrouped Data

حسابی اوسط تعریف کی رو سے Arithmetic Mean by definition

کسی غیر گروہی مواد کو حسابی اوسط کی تمام قیمتوں کو جمع کر کے ان قیمتوں کی تعداد پر تقسیم کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

$$\text{تمام قیمتوں کا مجموعہ} \\ \text{حسابی اوسط} = \frac{\text{قیمتوں کی تعداد}}{\text{}}$$

$$\text{علامتی طور پر اسے } \bar{x} = \frac{\sum x}{n} \text{ لکھتے ہیں۔}$$

جبکہ "Σ" مجموعہ کو ظاہر کرتی ہے۔

جب مواد کو گروہوں میں لکھا جائے تو اس طرح اصل قیمتیں ضم ہو جاتی ہیں۔ اس صورت میں ہم کسی خاص گروہ کی درمیانی / وسطی قیمت کو اس گروہ کی نمائندہ قیمت لیتے ہیں۔ اگر 'x' کسی بھی گروہی وسط (جماعتی وسط) کو ظاہر کرتی ہے جبکہ 'f' اس کا تعدد ہو اور  $(n = \sum f)$  تمام مشاہدہ میں آنے والی قیمتوں کی تعداد ہو تو

$$\text{حسابی اوسط} = \bar{x} = \frac{\sum (fx)}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} \quad \text{یا}$$

**مثال 1:-**

آٹھ آدمیوں کی انفرادی آمدنی 3000 روپے، 4000 روپے، 3500 روپے، 3800 روپے، 4500 روپے، 4200 روپے، 3600 روپے اور 5400 روپے ہے۔ ان کا حسابی اوسط معلوم کیجئے۔

$$x_1 = 3000, \quad x_2 = 4000, \quad x_3 = 3500, \quad x_4 = 4500,$$

$$x_5 = 3800, \quad x_6 = 4200, \quad x_7 = 3600, \quad x_8 = 5400,$$

**حل:-**

$$\text{حسابی اوسط} = \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8}$$

$$= \frac{3000 + 4000 + 3500 + 4500 + 3800 + 4200 + 3600 + 5400}{8}$$

$$= \frac{32000}{8}$$

$$\bar{x} = 4000 \text{ روپے}$$

مثال 2:-

مندرجہ ذیل جدول میں 50 طلباء کے سالانہ امتحان میں حاصل کردہ نمبروں کی تفصیل دی گئی ہے۔ اس کا حسابی اوسط معلوم کیجئے۔

نمبر	20 - 24	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49	50 - 54
تعداد	1	4	8	11	15	9	2

حل:-

نمبر	تعداد (f)	جماعتی نمائندہ قیمت (x)	fx
20 - 24	1	22	22
25 - 29	4	27	108
30 - 34	8	32	256
35 - 39	11	37	407
40 - 44	15	42	630
45 - 49	9	47	423
50 - 54	2	52	104

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum (fx)}{n} = \frac{22 + 108 + 256 + 407 + 630 + 423 + 104}{50} \\ &= \frac{1950}{50} \\ &= 39 \end{aligned}$$

فرضی اوسط سے انحراف کے استعمال سے حسابی اوسط معلوم کرنا

**Arithmetic Mean using Deviation from Assumed Means**

حسابی اوسط کے لیے فارمولا  $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$  کا استعمال اسی صورت میں آسان ہوتا ہے جب  $x$  اور  $f$  کی قیمتیں بہت بڑی نہ ہوں۔ اگر  $x$  اور  $f$  کی قیمتیں بہت زیادہ ہوں تو ہم فرضی اوسط لیکر بہت سارے وقت کی بچت کر سکتے ہیں۔ اگر 'A' ایک فرضی اوسط ہو (جو کہ کوئی بھی قیمت ہو سکتی ہے) اور  $D_i$  اور  $X_i$  قیمت کا فرضی اوسط 'A' سے انحراف ظاہر کرے۔

$$D_i = X_i - A \quad \text{تب} \quad X_i = D_i + A, \quad \text{یعنی کہ}$$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^k D_i}{n} \quad \text{ہم لکھ سکتے ہیں کہ}$$

$$= A + \frac{\sum_{i=1}^k D}{n} \quad \text{(غیر گروہی مواد)}$$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^k f_i D_i}{\sum f_i} \quad \text{اور}$$

$$= A + \frac{\sum f D}{\sum f} \quad \text{یا (گروہی مواد)}$$

**مثال 1:-** کلیہ  $\bar{X} = A + \frac{\sum D}{n}$  کی مدد سے دی گئی قیمتوں کا حسابی اوسط معلوم کیجئے۔

184, 191, 172, 168, 187, 189, 196, 186, 193, 195.

**حل:-** فرضی اوسط  $A = 180$  سے ہمیں انحراف حاصل ہوتے ہیں۔

$$D = 184 - 180, 191 - 180, 172 - 180, 168 - 180, 187 - 180, 189 - 180, \\ 196 - 180, 189 - 180, 193 - 180, 195 - 180$$

$$= 4, 11, -8, -12, 7, 9, 16, 9, 13, 15$$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum D}{n} = 180 + \frac{4+11-8-12+7+9+16+9+13+15}{10}$$

$$= 180 + \frac{64}{10}$$

$$= 180 + 6.4$$

$$= 186.4$$

## مثال 2:-

جدول میں دیے گئے 120 طلباء کے اوزان کی تفصیل کا کلیہ  $\bar{X} = A + \frac{\Sigma f D}{\Sigma f}$  کے تحت اوسط وزن معلوم کیجئے۔

وزن (پونڈ)	جماعتی وسط (X)	تعداد (f)	$D = X - 144.5$	$fD$
110 - 119	114.5	1	- 30	- 30
120 - 129	124.5	4	- 20	- 80
130 - 139	134.5	17	- 10	- 170
140 - 149	144.5 ← A	28	0	0
150 - 159	154.5	25	10	250
160 - 169	164.5	18	20	360
170 - 179	174.5	13	30	390
180 - 189	184.5	6	40	240
190 - 199	194.5	5	50	250
200 - 209	204.5	2	60	120
210 - 219	214.5	1	70	70
		$n = \Sigma f = 120$	$\Sigma f D = 1680 - 280 = 1400$	

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma f D}{\Sigma f}$$

حل:-

$$= 144.5 + \frac{1400}{120}$$

$$= 144.5 + 11.67$$

$$= 156.17 \text{ پونڈ}$$



## وسطانہ (غیر گروہی مواد) Median (ungrouped data)

وسطانہ کسی مواد کو عددی ترتیب میں لکھے جانے کے بعد اس کی وسطی قیمت ہوتی ہے اگر قیمتوں کی تعداد  $n$  ہو تو ترتیب وار لکھے گئے مواد کے  $\frac{n+1}{2}$  کی جگہ والی قیمت وسطانہ کہلاتی ہے جبکہ  $n$  طاق ہو۔ اور اگر  $n$  جفت ہو تو دو درمیان والی جگہوں کی قیمتوں کا اوسط وسطانہ کہلاتی ہے۔

- اگر قیمتوں کی تعداد طاق ہو تو درمیانی قیمت وسطانہ کہلاتی ہے۔
- اگر قیمتوں کی تعداد جفت ہو تو دو درمیانی قیمتوں کے حسابی اوسط کو وسطانہ کہتے ہیں۔

**مثال :-** مواد کے سیٹ 5, 4, 5, 4, 3, 4, 2, 6 کا وسطانہ معلوم کیجئے۔

**حل :-**

2 3 4 4 4 5 5 6

مواد کو ترتیب سے لکھنے سے

2 3 4 4 4 5 5 6

$\frac{n+1}{2}$  کے اصول کے مطابق وسطانہ کا تعین کیجئے۔ یہ 4.5 ہے یعنی چوتھے عدد اور پانچویں عدد کا حسابی اوسط۔

$$\text{وسطانہ} = \frac{4+4}{2}$$

$$= \frac{8}{2}$$

$$= 4$$

پس وسطانہ 4 ہے۔

## وسطانہ (گروہی مواد) Median (grouped data)

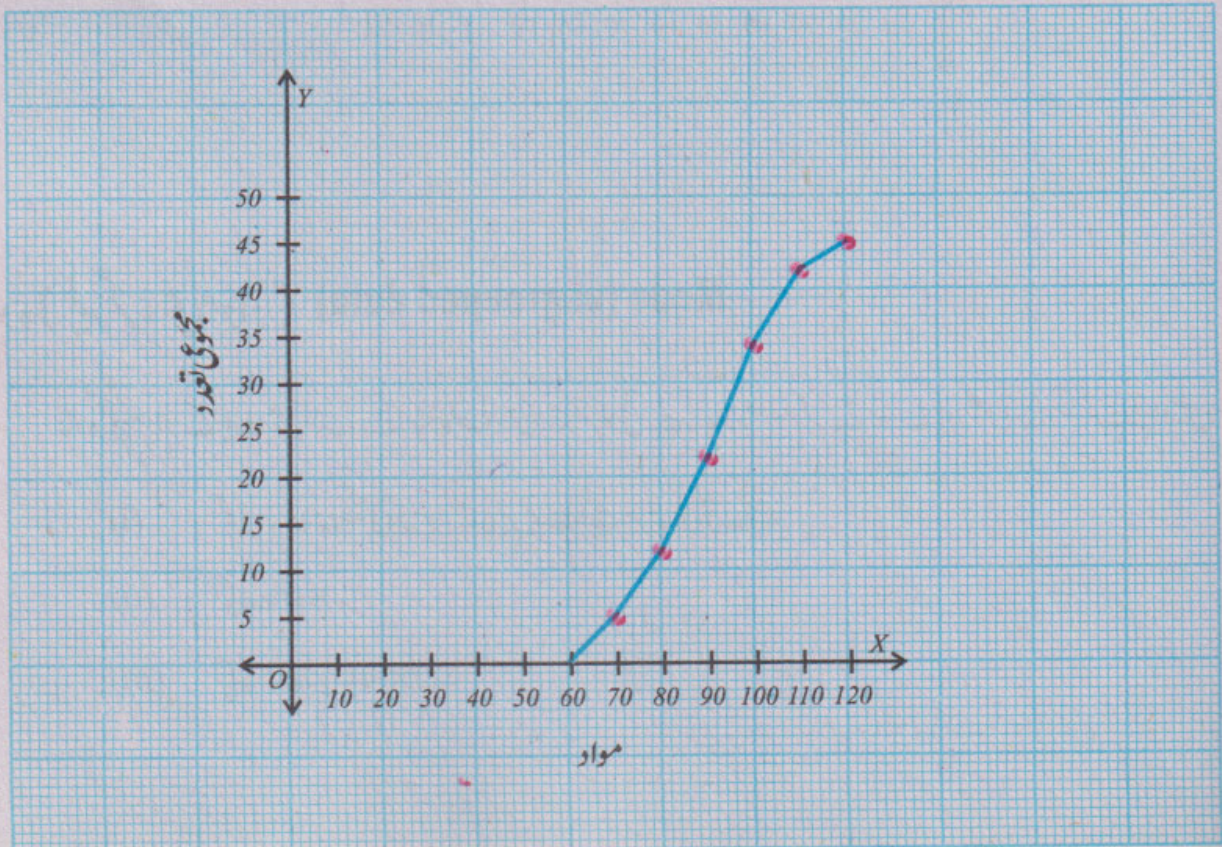
وسطانہ مواد کا (ogive) کھینچ کر حاصل کیا جاتا ہے اور 50 فیصد مواد کے بعد والی قیمت بطور وسطانہ لی جاتی ہے۔

مثال :- دیئے گئے مواد کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔

جماعتی وقفہ	تعداد (f)	مجموعی تعداد (Cf)
60 - 70	5	5
70 - 80	7	12
80 - 90	10	22
90 - 100	12	34
100 - 110	8	42
110 - 120	3	45
میزان	45	

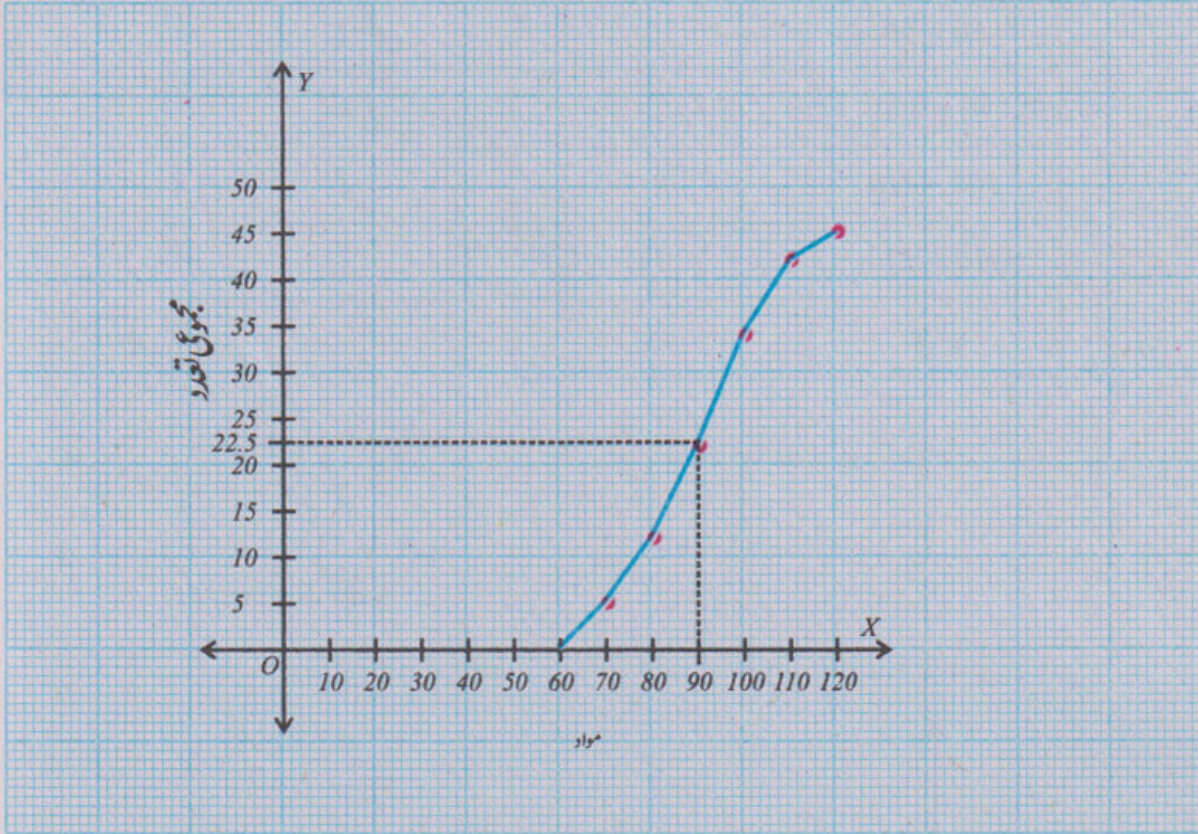
حل :-

اوگو (ogive) کھینچئے۔



تعدادی محور پر وسطی نقطہ لیجئے جو کہ 22.5 ہے اس کو نمایاں کیجئے۔

اس نقطہ سے اوگیو (ogive) تک افقی لائن اور پھر وہاں سے عموداً، افقی خط پر لائن کھینچئے۔  $X$ -محور پر دیئے گئے مواد کا وسطانیہ جو تقریباً 90 ہے کو نوٹ کیجئے۔



### عادہ (غیر گروہی مواد) Mode (ungrouped data)

عادہ کسی مواد کے سیٹ میں سب سے زیادہ تعدد والی مقدار ہوتی ہے۔ عادہ معلوم کرتے ہوئے یاد رکھیں کہ ہو سکتا ہے مواد میں:

(i) کوئی عادہ نہ ہو یعنی کہ مواد میں ہر قیمت ایک مرتبہ ہی آئے۔

(ii) ایک عادہ ہو۔

(iii) ایک سے زیادہ عادہ ہوں۔

**مثال :-** مواد کے سیٹ 6, 2, 4, 3, 4, 5, 4, 5 کا عادی معلوم کیجئے۔

**حل :-**

هم مواد كے سیٹ كا بغور جائزہ لیتے ہیں اور معلوم كرتے ہیں كہ كوںی قیمت سب سے زیادہ مرتبہ آئی ہے۔

2 3 4 4 4 5 5 6  
 ↑ ↑ ↑ ↓ ↓

چونکہ عدد 4 کی تکرار زیادہ یعنی تین مرتبہ ہے پس عادی 4 ہے۔

### عادی (گروہی مواد) Mode (grouped data)

گروہی مواد میں ہم عادی صحیح طریقہ سے تو معلوم نہیں کر سکتے کیونکہ اصل قیمتیں جماعتی وقفوں (Class Intervals) میں ضم ہو جاتی ہے۔ تاہم ایسے جماعتی وقفہ کا تعین کرتے ہیں۔ جس کا تعدد سب سے زیادہ ہوتا ہے۔ اسے عادی جماعت (Model Class) کہتے ہیں۔

**مثال :-** درج ذیل جدول میں عادی جماعت کا تعین کیجئے۔

جماعتی وقفہ	تعدد
60 - 70	5
70 - 80	7
80 - 90	10
90 - 100	12
100 - 110	8
110 - 120	3
میزان	45

**حل :-**

عادی جماعت اس مواد میں سب سے زیادہ تعدد 12 والی جماعت (90-100) ہے۔

## ضربنی اوسط (غیر گروہی مواد) Geometric Mean (ungrouped data)

ضربنی اوسط 'G'، n قیمتوں والے سیٹ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  کے لیے ان n قیمتوں کے حاصل ضرب کے n ویں جذر کے برابر ہوتا ہے۔

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n}$$

$$= (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

مثال :-

2، 4 اور 8 کا ضربنی اوسط معلوم کیجئے۔

$$G = \sqrt[3]{2 \times 4 \times 8} = \sqrt[3]{64}$$

$$= [(4)^3]^{\frac{1}{3}}$$

$$= 4$$

حل :-

## ضربنی اوسط (گروہی مواد) Geometric Mean (grouped data)

فرض کریں کہ  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ان جماعتی وقفوں کی نمائندہ قیمتیں ہیں جن کے تعدد بالترتیب  $f_1, f_2, \dots, f_k$  ہیں۔

(جبکہ  $n = \sum f = f_1 + f_2 + \dots + f_k$ ) چونکہ  $x_1$  مواد میں  $f_1$  مرتبہ دہرایا جاتا ہے۔

اسی طرح  $x_1$  مرتبہ پایا جاتا وغیرہ بالآخر  $x_k$  مرتبہ پایا جاتا ہے۔

$$\underbrace{x_1 \cdot x_1 \dots x_1}_{f_1 \text{ times}} \quad \underbrace{x_2 \cdot x_2 \dots x_2}_{f_2 \text{ times}} \quad \dots \quad \underbrace{x_k \cdot x_k \dots x_k}_{f_k \text{ times}}$$

ان سب کا حاصل ضرب ہوگا۔  $x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \dots x_k^{f_k}$  اس طرح ضربنی اوسط یہ ہوا۔

$$G = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \dots x_k^{f_k}}$$

$$= (x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \dots x_k^{f_k})^{1/n}$$

بعض اوقات یہ اوزانی ضربی اوسط کہلاتی ہے۔ جبکہ  $f_1, f_2, \dots, f_k$  متعلقہ اوزان کہلاتے ہیں۔

**مثال :-** درج ذیل تعددی مواد کا ضربی اوسط معلوم کیجئے۔

$x$	1	2	3	4
$f$	2	3	4	1

حل :-

$$\Sigma f = 2 + 3 + 4 + 1 = 10$$

یہاں

$$G = \left( x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \dots x_k^{f_k} \right)^{1/n}$$

$$= \left( (1)^2 \cdot (2)^3 \cdot (3)^4 \cdot (4)^1 \right)^{1/10}$$

$$= (1 \times 8 \times 81 \times 4)^{1/10}$$

$$= (2592)^{1/10} = 2.1946$$

**ہارمونک اوسط (غیر گروہی مواد) (Harmonic Mean (ungrouped data)**

$x_1, x_2, \dots, x_n$  قیمتوں والے گروہ کا ہارمونک اوسط (Harmonic Mean) ان قیمتوں کے ضربی معکوسوں کے

حسابی اوسط کا ضربی معکوس (reciprocal) ہوتا ہے۔

$$\text{ہارمونک اوسط} = H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_i} \right)} = \frac{n}{\sum \left( \frac{1}{x} \right)}$$

مثال :-

3، 4 اور 8 کا ہارمونک اوسط معلوم کیجئے۔

$$H = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{3}{\frac{4+2+1}{8}} = \frac{3}{\frac{7}{8}} = \frac{3 \times 8}{7} = \frac{24}{7} = 3.43$$

حل :-

### ہارمونک اوسط (گروہی مواد) The Harmonic Mean (grouped data)

فرض کیا  $x_1, x_2, \dots, x_k$  گروہوں کی نمائندہ قیمتیں جبکہ ان گروہوں کا تعداد بالترتیب  $f_1, f_2, \dots, f_k$  ہیں۔

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_k = \sum f_i = n)$$

ان گروہی نمائندہ قیمتوں کے ضربی معکوس  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_k}$  ہیں۔ چونکہ ان قیمتوں کے تعداد بالترتیب

$f_1, f_2, \dots, f_k$  ہیں۔

$$\frac{f_1}{x_1} \text{ یا } f_1 \left( \frac{1}{x_1} \right) \text{ قیمتوں کا مجموعہ}$$

اسی طرح بالترتیب تمام قیمتوں کے مجموعے  $\frac{f_2}{x_2}, \frac{f_3}{x_3}, \dots, \frac{f_k}{x_k}$  ہوں گے۔

$$\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \dots + \frac{f_k}{x_k} = \sum_{i=1}^k \frac{f_i}{x_i} = \sum \frac{f_k}{x_k} = \sum f \left( \frac{1}{x} \right)$$

ہارمونک اوسط کی تعریف کی رو سے

$$H = \frac{\sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^k f_i \left( \frac{1}{x_i} \right)} = \frac{\sum f}{\sum f \left( \frac{1}{x} \right)} = \frac{n}{\sum f \left( \frac{1}{x} \right)}$$

بعض اوقات اسے اوزانی ہارمونک اوسط کہتے ہیں جن کے اوزان بالترتیب  $f_1, f_2, \dots, f_k$  ہیں۔

## 10.3.2 حسابی اوسط کی خصوصیات Properties of Arithmetic Mean

حسابی اوسط کی خصوصیات درج ذیل ہیں۔

(i) کسی مواد کی قیمتوں کے حسابی اوسط سے ان قیمتوں کے فرق کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

$$\sum (x_i - \bar{X}) = 0 \quad \text{یا} \quad \sum f_i (x_i - \bar{X}) = 0$$

(ii) اگر  $n_1$  قیمتوں کا حسابی اوسط  $\bar{x}_1$ ،  $n_2$  قیمتوں کا حسابی اوسط  $\bar{x}_2$  اور اسی طرح  $n_k$

قیمتوں کا حسابی اوسط  $\bar{x}_k$  ہو تو ان تمام قیمتوں کا حسابی اوسط:

$$\bar{X} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2 + \dots + n_k \bar{X}_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^k n_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{\sum n \bar{X}}{\sum n}$$

(iii) کسی مواد کی قیمتوں کے کسی قیمت 'a' سے فرق کے مربعوں کا مجموعہ سب سے کم ہوگا اگر  $a = \bar{X}$  علامتی طور پر

$$a = \bar{X} \quad \sum (x_i - a)^2$$

## 10.3.3 اوزانی اوسط اور متغیر اوسط Weighted Mean and Moving Average

اگر کسی مواد میں  $x_1, x_2, \dots, x_k$  قیمتوں کے اوزان بالترتیب  $w_1, w_2, \dots, w_k$  ہوں تو اوزانی حسابی اوسط  $\bar{x}_w$

کو یوں بیان کیا جاتا ہے۔

$$\bar{X}_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_k x_k}{w_1 + w_2 + \dots + w_k}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^k w_i x_i}{\sum_{i=1}^k w_i} = \frac{\sum w x}{\sum w}$$



## متحرک اوسط Moving Average

کسی مشاہدہ میں آنے والی  $n$  متواتر قیمتوں کے سلسلے کو استعمال کرتے ہوئے اوسط نکالنا متحرک اوسط کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر ہمیں 3 سالہ متحرک اوسط نکالنا ہو تو ہم اس سیریز کی پہلی تین قیمتیں لیتے ہیں۔ ان کا اوسط لے کر ہم ان قیمتوں کی وسطی قیمت کے سامنے لکھ لیتے ہیں۔ پھر ہم ان تینوں قیمتوں میں سے پہلے چھوڑ کر چوتھی قیمت شامل کرتے ہیں اور ان تینوں کی اوسط لے کر ان کی وسطی قیمت کے سامنے لکھتے ہیں۔ اس کی الجبری شکل یہ ہے۔

$$a_1 = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

$$a_2 = \frac{1}{3}(y_2 + y_3 + y_4) \text{ وغیرہ وغیرہ}$$

## ربعی قاطع Quartiles

ہم جانتے ہیں کسی مواد کو ترتیب میں لکھنے کے بعد اس کا وسطانیہ (Median) اس مواد کی وسطی قیمت ہوتا ہے (جو کہ مجموعی تعداد طاق ہونے کی صورت میں درمیانی قیمت اور جفت کی صورت میں اس کی دو وسطی قیمتوں کا اوسط ہوتا ہے) یہ وسطانیہ اس مواد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اسی طرح مواد کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرنے والی قیمتوں کو ربعی قاطع کہتے ہیں۔ اس طرح تین قیمتیں جو مترتب مواد کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہیں ربعی قاطع کہلاتی ہیں انہیں  $Q_1, Q_2$  اور  $Q_3$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

پہلے ربعی قاطع کو زیریں ربعی قاطع (Lower Quartile) جبکہ تیسرے ربعی قاطع کو بالائی ربعی قاطع (Upper Quartile) کہتے ہیں۔

$$Q_1 = \text{کے مقام پر آنے والی قیمت} \left( \frac{n+1}{4} \right)$$

$$Q_2 = \text{کے مقام پر آنے والی قیمت} \left( \frac{n+1}{2} \right) \text{ یا } 2 \left( \frac{n+1}{4} \right)$$

$$Q_3 = \text{کے مقام پر آنے والی قیمت} \frac{3(n+1)}{4}$$

## مثال :-

درج ذیل مواد میں 20 طلباء کے شماریات کے ٹیسٹ میں حاصل کردہ نمبروں کے تمام ربعی قاطع معلوم کیجئے۔

53 74 82 42 39 20 81 68 58 28  
67 54 93 70 30 55 36 37 29 61

## حل :-

$n=20$ ، طلباء کے نمبروں کو ترتیب صعودی میں لکھنے سے:

20 28 29 30 36 37 39 42 53 54  
55 58 61 67 68 70 74 81 82 93

$$Q_1 = \text{نیچے سے } \left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ ویں یا } \left(\frac{20+1}{4}\right) \text{ ویں یعنی } 5.25 \text{ ویں نمبر پر آنے والی قیمت}$$

چونکہ 5 ویں نمبر پر آنے والی قیمت 36 اور 6 ویں نمبر پر آنے والی قیمت 37 ہے۔ لہذا پہلا ربعی قاطع نمبر 5 اور نمبر 6 کی قیمتوں کے درمیان پانچویں قیمت سے آگے 0.25 کے فاصلے پر ہوگا۔ پس

$$Q_1 = 36.25$$

$$Q_2 = \text{نیچے سے } 2\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ یا } \frac{2(20+1)}{4} \text{ یا } \frac{21}{2} \text{ یا } 10.5 \text{th ویں قیمت ہوگا۔ } Q_2 \text{ (وسطانیہ)}$$

10 ویں نمبر پر آنے والی قیمت 54 ہے جو کہ 11 ویں کے 0.5 فاصلے پر ہوگا یعنی کہ 55 ہے۔ لہذا دوسرا ربعی قاطع 10 ویں اور 11 ویں کے درمیان ہوگا۔ یعنی کہ 54.5 ہے۔

$$Q_2 = 54.5 \quad \text{پس}$$

$$Q_3 = \text{نیچے سے } \frac{3(n+1)}{4} \text{ یا } \frac{3(20+1)}{4} \text{ یا } \frac{3 \times 21}{4} \text{ یا } \frac{63}{4} \text{ یا } 15.75 \text{ قیمت ویں}$$

15 ویں نمبر پر 68 جبکہ 16 ویں نمبر پر 70 ہے لہذا 68 سے آگے 70 تک کے فاصلے کا 0.75 حصہ طے کرنے پر تیسرا ربعی قاطع حاصل ہوگا۔

$$Q_3 = 68 + 0.75(70 - 68) \quad \text{پس}$$

$$Q_3 = 69.5$$

## مثال :-

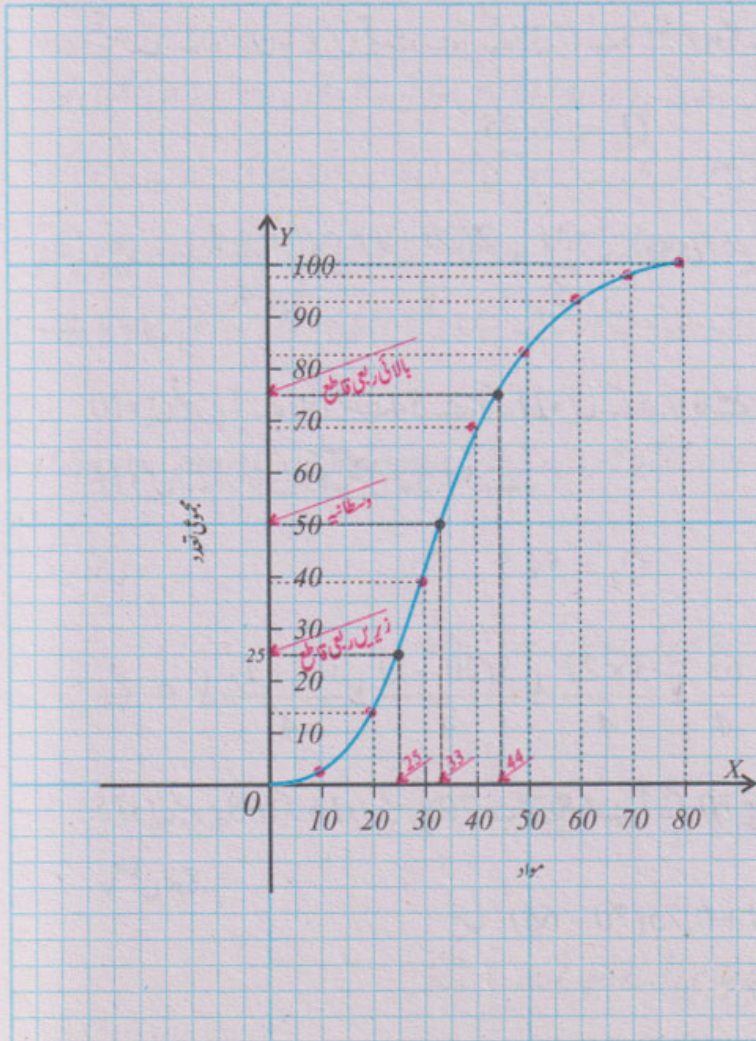
100 طلباء کے امتحان میں حاصل کردہ نمبر درج ذیل جدول میں دیے گئے ہیں۔

مجموعی تعدد	تعداد طلباء	حاصل کردہ نمبر
2	2	1 — 10
14	12	11 — 20
39	25	21 — 30
68	29	31 — 40
83	15	41 — 50
93	10	51 — 60
97	4	61 — 70
100	3	71 — 80

اوگو کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل ربعی قاطع کا تخمینہ لگائیے۔

(i) بالائی ربعی قاطع

(ii) زیریں ربعی قاطع



$$75 = \frac{3}{4} \times 100 = \frac{3}{4} \text{ مجموعی تعدد کا } \quad (i)$$

اوگو میں ہمیں 75 دیں تعدد کے متناظرہ مواد کی قیمت 44 حاصل ہوتی ہے۔ لہذا بالائی ربعی قاطع = 44

$$25 = \frac{1}{4} \times 100 = \frac{1}{4} \text{ مجموعی تعدد کا } \quad (ii)$$

اوگو میں ہمیں 25 تعدد کے متناظرہ مواد کی قیمت 25 حاصل ہوتی ہے۔ لہذا زیریں ربعی قاطع = 25

$$50 = \frac{1}{2} \times 100 = \frac{1}{2} \text{ مجموعی تعدد کا } \quad (iii)$$

اوگو میں 50 تعدد کے سامنے مواد کی قیمت 33 حاصل ہوتی ہے۔ لہذا وسطانیہ = 33

X- محور پر 2 چھوٹے مربع = 10 فنٹ

Y- محور پر 2 چھوٹے مربع = 10 فنٹ

### 10.3.4 ترسیم کی مدد سے وسطانیہ، ربعی قاطع اور عادیہ کا تخمینہ لگانا

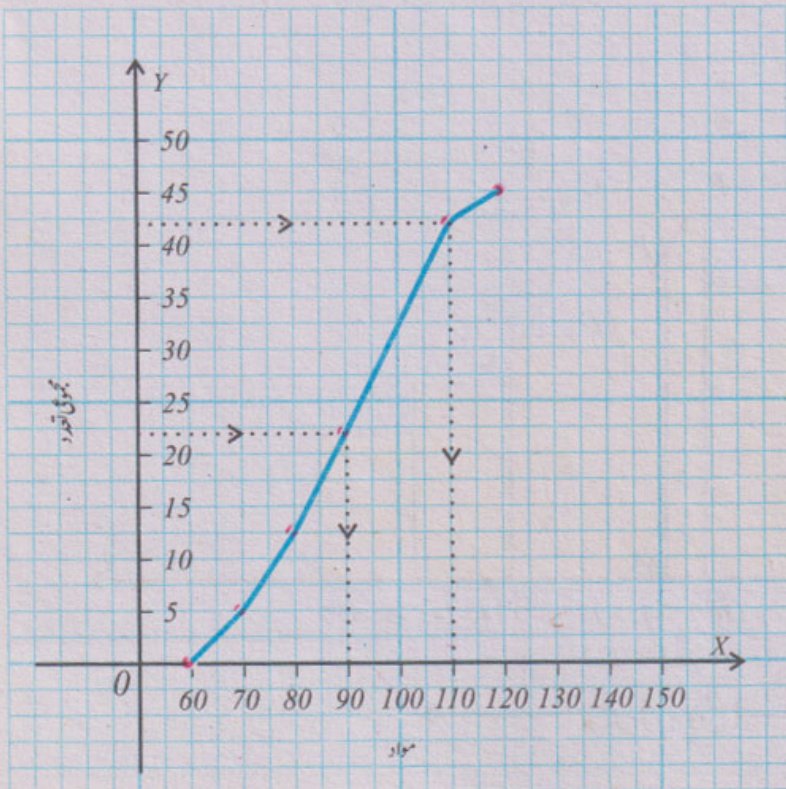
#### Estimate Median, Quartile and Mode Graphically, Graphic Location of Median

#### وسطانیہ کا ترسیمی تعین

وسطانیہ کی تخمینی قیمت کا تعین اوگو (Ogive) سے بھی کیا جاسکتا ہے۔ (جو کہ مجموعی تعدد والی کثیر الاضلاع ہوتی ہے) وسطانیہ اوگو میں  $\frac{n}{2}$  کے مقابل  $X$  کی قیمت ہوتی ہے۔ پس وسطانیہ معلوم کرنے کے لیے ہم  $Y$ -محور پر  $\frac{n}{2}$  کی قیمت لے کر اس مقام پر  $Y$ -محور پر عمود اٹھا کر اوگو کو کاٹنا ہوا کھینچتے ہیں۔ پھر اس نقطہ سے  $X$ -محور پر عمود گراتے ہیں اس مقام پر جو قیمت  $x$  کی نکلتی ہے وہ وسطانیہ کہلاتی ہے۔

جماعتی وقفے	تعدد	مجموعی تعدد
60 — 70	5	5
70 — 80	7	12
80 — 90	10	22
90 — 100	12	34
100 — 110	8	42
110 — 120	3	45
	45	—

جدول میں دیئے گئے مواد کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔



(i) اوگو (ogive) تیار کیجئے۔

(ii)  $Y$ -محور پر مجموعی تعدد کا نصف معلوم کریں۔  
جو کہ 22.5 ہے اسے لیبل کیجئے۔

(iii) اس مقام سے  $X$ -محور کے متوازی افقی خط اوگو (ogive) تک کھینچئے اور پھر وہاں سے  $X$ -محور پر عمود گرایئے اور پھر وہاں سے  $X$ -محور پر عمود گرایئے

(iv) یہاں سے وسطانیہ کی قیمت جو کہ تقریباً 90 ہے حاصل کیجئے۔

مثال :-

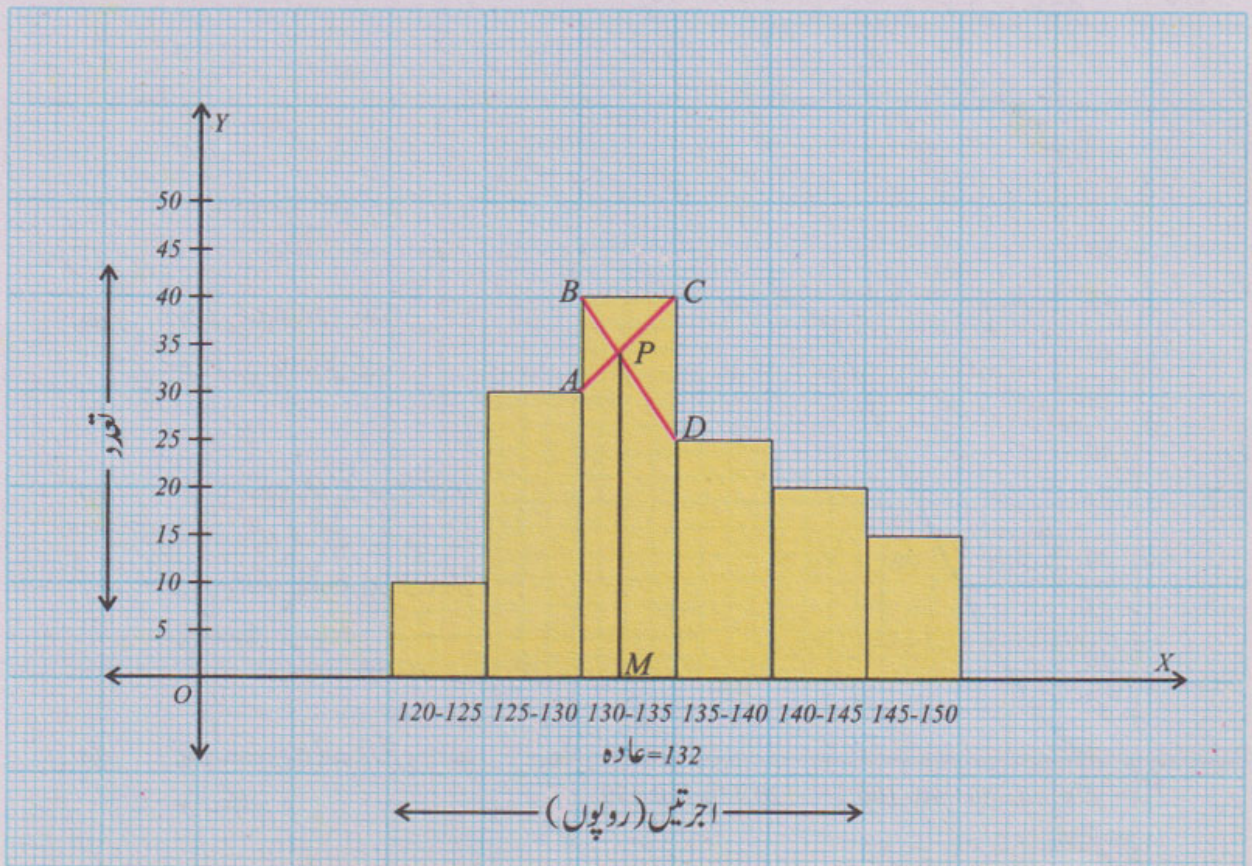
دیئے گئے مواد سے تریسی طریقے سے عادی (Mode) معلوم کیجئے۔

اجرتیں (روپوں)	120 - 125	125 - 130	130 - 135	135 - 140	140 - 145	145 - 150
f تعداد	10	30	40	25	20	15

حل :-

اجرتیں (روپوں) میں X-محور پر لی گئیں جبکہ تعداد Y-محور پر لیے گئے ہیں۔ ایک بڑا مربع X-محور پر 15 کائیوں اور Y-محور پر 10 کائیوں کو ظاہر کرتا ہے۔ ہم زیادہ تعداد والے کالموں کے سب سے بلند سروں کو ملاتے ہیں۔ کناروں کو ملانے والے قطعات AC اور BD ایک دوسرے کو نقطہ P پر کاٹتے ہیں۔ ہم X-محور پر عمود گراتے ہیں جو کہ اسے M پر ملتا ہے۔ یہاں پر M کی قیمت 132 بنتی ہے۔

پس (Mode) = 132 عادی



## رہی قاطع ترسیم کے ذریعے معلوم کرنا Graphic Location of Quartiles

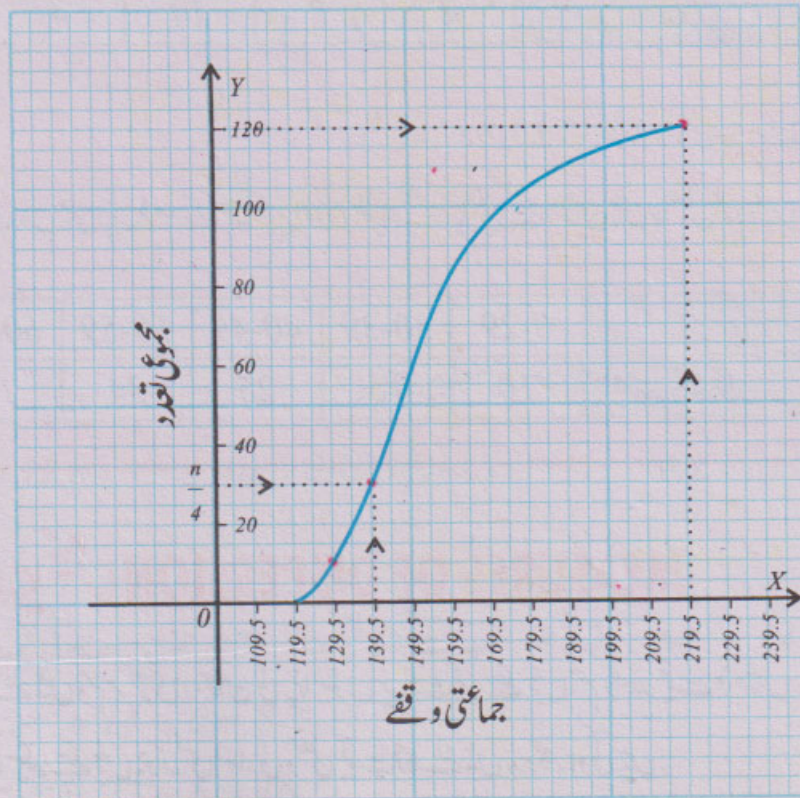
**مثال :-** درج ذیل جدول ریاضی کے سالانہ امتحان میں گریڈ کی تعددی تفصیل کو ظاہر کرتا ہے۔ ترسیم کی ذریعے پہلے ربعی قاطع کی نشاندہی کیجئے۔

گریڈ	90-99	80-89	70-79	60-69	50-59	40-49	30-39
طلباء کی تعداد	9	32	43	21	11	3	1

**حل :-**

ترسیمی نشاندہی کے لئے طلباء کی تفصیل کو ہم اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

گریڈ	طلباء کی تعداد (f)	جماعتی وقفے	مجموعی تعدد
30-39	1	29.5 - 39.5	1
40-49	3	39.5 - 49.5	4
50-59	11	49.5 - 59.5	15
60-69	21	59.5 - 69.5	36
70-79	43	69.5 - 79.5	79
80-89	32	79.5 - 89.5	111
90-99	9	89.5 - 99.5	120



### مشق 10.3

1- درج ذیل مواد کی تعددی کثیر الاضلاع بنائیے۔

(i) کسی امتحان میں 30 طلباء کی تفصیل جدول میں دی گئی ہے۔

نمبر	0-39	40-49	60-79	80-99
تعدد	8	8	10	4

(ii) 40 طلباء کی رکاوٹی دوڑ کے وقت (سیکنڈوں میں) کی تفصیل جدول میں دی گئی ہے۔

(سیکنڈ) وقت	1-40	41-50	51-60	61-70
تعدد	8	15	7	10

(iii) کسی فٹس اینڈ چپس شاپ میں چپس کے 30 پیکیٹوں کے اوزان کی تفصیل جدول میں درج ہے۔

(گرام) اوزان	1-50	51-60	61-70	71-80
تعدد	4	8	14	4

(iv) دیئے گئے جدول میں ایک ٹرم کے اختتام پر 100 طلباء کے ریاضی کے امتحان میں حاصل کردہ نمبروں کی تفصیل درج ہے۔

نمبر	0-29	30-39	40-49	50-59	60-99
تعدد	10	15	25	34	16

### 10.4 انتشاری پیمائش MEASURES OF DISPERSION

اس سے پچھلے حصے میں ہم مرکزی رجحان کی پیمائشوں پر بحث کر چکے ہیں ہم واحد قیمت (مثال کے طور پر اوسط، وسطانیہ اور عادیہ) معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں جو کہ کسی مواد کی وسطی قیمت نکالنے میں مددگار ہوتی ہیں۔

اس مقصد کے لئے ہم درج ذیل تفصیل کو لیتے ہیں۔

1.	63, 63, 63, 63, 63, 63, 63, 63	$\bar{X} = 63$
2.	62, 62, 62, 63, 63, 64, 64, 64	$\bar{X} = 63$
3.	48, 49, 57, 63, 69, 68, 74, 78	$\bar{X} = 63$
4.	40, 41, 47, 52, 62, 87, 88, 94	$\bar{X} = 63$

درج بالا تفصیل کی اوسط یکساں یعنی 63 ہے، لیکن یہ تفصیل اپنی انتشار میں بہت مختلف ہیں یعنی کہ اپنی اوسط قیمت سے پھیلاؤ میں۔

چونکہ قیمتوں کے انتشار میں بہت فرق ہے۔ اس کے باوجود یہ ایک ہی اوسط یعنی 63 سے بیان ہوتی ہیں۔ تاہم ہمیں ایک پیمانے کی ضرورت ہے جو اس بات کا تعین کر سکے کہ مواد کتنا پھیلا ہوا ہے۔

اس مقصد کے لیے استعمال کی جانے والی پیمائشوں کو انتشاری پیمائش کہتے ہیں۔

### سعت Range

انتشار کی سادہ ترین پیمائش سعت ہے۔ سعت مواد کی سب سے بڑی قیمت کا سب سے چھوٹی قیمت سے فرق ہوتی ہے۔ اگر سب سے چھوٹی قیمت  $X_o$  ہو اور سب سے بڑی قیمت  $X_m$  ہو تو سعت  $R$  کو یوں ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$R = X_m - X_o$$

مثلاً قیمتوں کے سیٹ 6, 8, 13, 11, 18, 27, 23 کے لیے

$$R = 27 - 6 = 21$$

مثال :-

درج ذیل مواد کی سعت معلوم کیجئے۔

(i) 2, 9, 3, 6, 12, 8

(ii) 6, 8, 10, 14, 13, 12

(iii) 10, 18, 9, 6, 22

حل :-

(i) سب سے بڑی قیمت = 12، سب سے چھوٹی قیمت = 2، سعت = 12 - 2 = 10

(ii) سعت = 14 - 6 = 8

(iii) سعت = 22 - 6 = 16



## تغیریت Variance

تغیریت معیاری انحراف کا مربع کہلاتی ہے۔ یعنی مواد کی اوسط سے انحراف کے مربعوں کی اوسط کے برابر ہے۔

$$\text{تغیریت} = \frac{\sum (x - \bar{X})^2}{n} \quad (\text{غیر گروہی مواد})$$

$$\text{تغیریت} = \frac{\sum f(x - \bar{X})^2}{\sum f} \quad (\text{گروہی مواد})$$

## Standard Deviation معیاری انحراف

یہ دیئے گئے مواد کے اوسط فرق کے مربعوں کی اوسط کا مثبت جذر ہوتی ہے۔

$n$  قیمتوں  $x_1, x_2, \dots, x_n$  کے معیاری فرق کو  $S$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{X})^2}{n}} \quad (\text{غیر گروہی مواد})$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum f(x - \bar{X})^2}{\sum f}} \quad (\text{گروہی مواد})$$

$$n = f_1 + f_2 + \dots + f_k = \sum f \quad \text{جبکہ}$$

**مثال 1:-** مواد 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11 کے لیے معیاری فرق اور تغیریت معلوم کیجئے۔

$$\bar{X} = \frac{1+2+3+4+6+8+11}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

حل:-

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{X})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-5)^2 + (2-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2 + (11-5)^2}{7}}$$

$$= \sqrt{\frac{16+9+4+1+1+9+36}{7}} = \sqrt{\frac{76}{7}}$$

$$= \sqrt{10.86}$$

$$= 3.2955$$

$$\text{معیاری فرق} = S = 3.2955$$

$$\begin{aligned} \text{تغیریت} &= \frac{\Sigma(x - \bar{X})^2}{n} = \frac{76}{7} \\ &= 10.86 \end{aligned}$$

**مثال 2:-** انگریزی کے کسی امتحان میں 50 طلباء کے حاصل کردہ نمبروں کی تعددی تفصیل کا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔  
نیز اس کی تغیریت بھی معلوم کیجئے۔

نمبر	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54
تعدد	1	4	8	11	15	9	2

حل:-

نمبر	تعدد (f)	جماعتی نمائندہ قیمت	fx	x - $\bar{X}$	(x - $\bar{X}$ ) <sup>2</sup>	f(x - $\bar{X}$ ) <sup>2</sup>
20-24	1	22	22	- 17	289	289
25-29	4	27	108	- 12	144	576
30-34	8	32	256	- 7	49	392
35-39	11	37	407	- 2	4	44
40-44	15	42	630	3	9	135
45-49	9	47	423	8	64	576
50-54	2	52	104	13	169	338
$n = \Sigma f = 50$		$\Sigma f = 259$	$\Sigma fx = 1950$	$\Sigma f(x - \bar{x})^2 = 2350$		

$$\bar{X} = \frac{\Sigma f x}{\Sigma f} = \frac{1950}{50} = \text{نمبر } 39$$

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma f (x - \bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{2350}{50}} = \sqrt{47}$$

$$\text{معیاری فرق} = S = 6.85$$

$$\begin{aligned} \text{تغیریت} &= \frac{\Sigma f (x - \bar{X})^2}{n} = (\sqrt{47})^2 \\ &= 47 \end{aligned}$$

پس  
اور

## مشق 10.4

1- دیئے گئے مواد کا مجموعی تعددی کثیر الاضلاع (یعنی اوگو) بنائیے۔

(i) جدول میں 10 سالہ عمر کے 60 بچوں کے اوزان (کلوگرام میں) کی تفصیل دی گئی ہے۔

وزن (کلوگرام)	31-36	37-39	40-42	43-45	46-54
تعدد	8	10	18	12	12

(ii) جدول میں 50 طلباء جن کی عمریں 5 سال ہیں کارات کے کھانا کھانے کے اوقات (منٹوں) میں تفصیل دی گئی ہے۔

وقت (منٹوں میں)	4-5	6-7	8-9	10-11	12-15	16-19	20-29
تعدد	5	4	10	9	6	6	10

(iii) جدول میں 08:30 تا 09:30 کے دوران صبح کے اوقات میں مختلف عمر کے لوگوں کی بس سٹاپ پر بس میں سوار ہونے کی تفصیل درج ہے۔

عمر (سالوں میں)	0-9	10-19	20-29	30-39	40-69
تعدد	10	20	30	20	15

جماعتیں	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
تعدد	10	15	20	30	15

(v) جدول میں 100 لوگوں کے اوزان کی تعددی تفصیل درج ہے۔

اوزان (کلوگرام میں)	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99	100-109
تعدد	15	30	35	15	3	2

## جائزہ مشق 10

صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

-1

(i) جب کوئی کالمی نقشہ اس طرح سے تیار کیا جائے کہ ہر کالم کا رقبہ اس میں موجود گروہ کے تعدد کے متناسب ہو تو یہ کہلاتا ہے۔

- (a) منحنی (b) اوگو (c) کالمی نقشہ (d) بار چارٹ

(ii) کسی مواد کا شماریاتی اختصار جو وسط (مرکز) کی پیمائش کرتا ہے، کہلاتا ہے۔

- (a) اوسط (b) عادہ (c) وسطانیہ (d) سب کے سب

(iii) اگر کسی مواد کی قیمتوں کو جمع کر کے مجموعہ کو ان کی کل تعداد پر تقسیم کیا جائے تو یہ کہلاتا ہے۔

- (a) اوسط (b) عادہ (c) وسطانیہ (d) اوزانی اوسط

(iv) کسی مترتب مواد میں وسطی عددی قیمت کہلاتی ہے۔

- (a) عادہ (b) وسطانیہ (c) اوسط (d) ضربی اوسط

(v) وہ قیمت جو کسی مواد میں سب سے زیادہ مرتبہ آئے، کہلاتی ہے۔

- (a) عادہ (b) اوسط (c) وسطانیہ (d) ضربی اوسط

(vi) 
$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$
 کہلاتا ہے۔

- (a)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  کا اوسط (b) حسابی اوسط  
(c) ضربی اوسط (d) اوزانی اوسط

(vii) 
$$H = \frac{n}{\sum \left( \frac{1}{x} \right)}$$
 کہلاتا ہے۔

- (a) ہارمونک اوسط (b) عادہ (c) اوسط (d) حسابی اوسط

(viii) 
$$\bar{X}_w = \frac{\sum wx}{\sum w}$$
 کہلاتا ہے۔

- (a) حسابی اوسط (b) اوزانی اوسط  
(c) ضربی اوسط (d) اوسط

(ix) 
$$\sum (x_i - \bar{X}) = 0$$
 کو خاصیت کہا جاتا ہے۔

- (a) حسابی اوسط (b) ضربی اوسط  
(c) ہارمونک اوسط (d) عادہ

2- خالی جگہ پر کیجئے۔

(i) کوئی کالمی نقشہ اس طرح سے تعمیر کیا جائے کہ ہر کالم کا رقبہ اس میں موجود گروہ کے تعدد کے متناسب ہو تو وہ \_\_\_\_\_ کہلاتا ہے۔

(ii) شماراتی اختصار جو کہ کسی مواد کی درمیانی (وسطی) قیمت کی نمائندہ ہو \_\_\_\_\_ کہلاتا ہے۔

(iii) اگر کسی مواد کی تمام عددی قیمتوں کو جمع کر کے ان کی تعداد پر تقسیم کیا جائے تو یہ \_\_\_\_\_ کہلاتا ہے۔

(iv) عددی قیمت کے لحاظ سے کسی مترتب مواد کی وسطی قیمت \_\_\_\_\_ کہلاتی ہے۔

(v) وہ عددی قیمت جو کسی مواد میں سب سے زیادہ مرتبہ آئے \_\_\_\_\_ کہلاتی ہے۔

(vi) \_\_\_\_\_ کہلاتا ہے 
$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

(vii)  $n$  قیمتوں والے سیٹ کے حاصل ضرب کا  $n$ th جذر \_\_\_\_\_ کہلاتا ہے۔

(viii) \_\_\_\_\_ کہلاتا ہے۔ 
$$H = \frac{n}{\sum \left( \frac{1}{x} \right)}$$

(ix) \_\_\_\_\_ کہلاتا ہے۔ 
$$\bar{X}_w = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

(x)  $\sum (x_i - \bar{X}) = 0$  کی ایک خاصیت ہے۔

3- 2, 3, 6, 8, 11 کا معیاری انحراف معلوم کریں۔

4- غیر گروہی مواد جس میں  $n = 15$  اور  $\sum x = 48$  اور  $\bar{x} = 10$  ہو تو اس غیر گروہی مواد کا معیاری انحراف اور تغیریت معلوم کیجئے۔

5- مواد 3, 5, 6, 8, 8, 9, 10 کا (i) اوسط (ii) وسطانیہ (iii) عادیہ معلوم کیجئے۔

6- درج ذیل قیمتوں کے سیٹ

4, 6, 7, 4, 8, 9, 7, 10 کا اوسط، وسطانیہ اور عادیہ معلوم کیجئے۔

## خلاصہ

- ✦ کالمی نقشہ جس کے ہر کالم کا رقبہ اس میں موجود گروہ کی قیمتوں کی تعداد کے متناسب ہو اس مواد کا کالمی نقشہ کہلاتا ہے۔
- ✦ مجموعی تعداد، کسی بھی قدر سے پہلی قدروں کے تعدادات کے مجموعہ کو کہتے ہیں۔
- ✦ جب مجموعی تعداد کو بالمقابل جماعتی وقفوں کی انتہائی قیمت کے بالمقابل رکھ کر گراف پیپر پر نقاط لگائے جائیں۔ پھر ان نقاط کو ملانے سے حاصل شدہ گراف کو مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کہتے ہیں۔
- ✦ شماریاتی اختصار کسی مواد کی وسطی (مرکز) کا تعین کرتا ہے۔
- ✦ کسی مواد کا اوسط حاصل کرنے کے لئے اس کی تمام قیمتوں کو جمع کر کے اس کی تعداد پر تقسیم کیا جاتا ہے۔
- ✦ کسی مواد کی عددی ترتیب میں درمیانی قیمت وسطانیہ کہلاتی ہے۔
- ✦ عاڈہ کسی مواد میں سب سے زیادہ بار آنے والی قیمت ہوتی ہے۔
- ✦ کسی غیر گروہی مواد کا حسابی اوسط اس کی تمام عددی قیمتوں کو جمع کر کے ان کی کل تعداد سے تقسیم کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔
- ✦ وسطانیہ کسی مواد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے جبکہ کچھ اور قیمتیں مواد کے سیٹ کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہیں جو کہ پہلا، دوسرا اور تیسرا ربعی قاطع کہلاتے ہیں۔
- ✦  $n$  مثبت قیمتوں  $x_1, x_2, \dots, x_n$  کا ضربی اوسط "G" ان کے حاصل ضرب کا  $n$  واں مثبت جذر ہوتا ہے۔

✦  $n$  قیمتوں  $x_1, x_2, \dots, x_n$  کا ہارمونک اوسط "H" ان قیمتوں کے ضربی معکوس قیمتوں کے حسابی اوسط کا ضربی معکوس قیمت ہوتا ہے۔

✦ تغیریت، معیاری انحراف کا مربع ہوتی ہے۔ یعنی کہ حسابی اوسط سے مواد کی قیمتوں کے فرق کے مربعوں کے اوسط کے برابر ہوتی ہے۔

✦ انتشار کی سادہ ترین پیمائش سعت (Range) ہے۔ سعت کسی مواد کی سب سے بڑی قیمت کا سب سے چھوٹی قیمت سے فرق ہوتی ہے۔

✦ معیاری فرق تمام قیمتوں کے حسابی اوسط کے مواد کی قیمتوں کے فرق کے مربعوں کی اوسط کا مثبت جذر ہوتا ہے۔  $n$  قیمتوں  $x_1, x_2, \dots, x_n$  کا معیاری انحراف 'S' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

✦ اگر مواد میں  $x_1, x_2, \dots, x_k$  قیمتوں کے اوزران (Weight) بالترتیب  $w_1, w_2, \dots, w_k$  ہوں تو اوزانی حسابی اوسط جو کہ  $\bar{x}_w$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\bar{x}_w = \frac{\sum w x}{\sum w}$$