بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

شروع اللہ کے نام سے جو بڑا مہربان نہایت رحم والا ہے۔

ریاضی 10

سائنس گروپ

علمی کتاب خانہ، لاہور۔

فہرست

الجبرا

جیومیٹری

مؤلفین
- پروفیسر محمد حبیب
- پروفیسر چوہدری اصغر علی
- پروفیسر عبدالروف خان
- پروفیسر محمد معین

مدیر
پروفیسر محمد شریف غوری

ماہر مضمون
محمد اختر شیرانی
پنجاب کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک بورڈ لاہور

اراکین ریویو کمیٹی

۱۔ پروفیسر ڈاکٹر شاہد مبین
۲۔ مسٹر منور دین اعوان
۳۔ مسٹر نسیم الاسلام
۴۔ پروفیسر ایم اسلم خٹک
۵۔ مسز تنزیلہ ناز
۶۔ مسٹر عرفان حسین
۷۔ مسٹر محمد عظیم
۸۔ سید شمن رضا
۹۔ مسٹر فہیم حسین
۱۰۔ مسٹر افضال حسین

کمپوزنگ
مقصود گرافکس
اُردو بازار، لاہور

تیار کردہ
علمی کتاب خانہ
کبیر سٹریٹ، اُردو بازار، لاہور
042-37353510, 37248129

تاریخ اشاعت	ایڈیشن	طباعت	تعداد اشاعت	قیمت
مارچ 2017ء	اوّل	اوّل	63,000	133.00

یونٹ 1

دو درجی مساواتیں
(QUADRATIC EQUATIONS)

In this unit, students will learn how to

- دو درجی مساوات کی تعریف کرنا۔
- ایک متغیر میں دو درجی مساوات کو بذریعہ تجزی حل کرنا۔
- ایک متغیر میں دو درجی مساوات کو تکمیل مربع سے حل کرنا۔
- بذریعہ تکمیل مربع، دو درجی فارمولا اخذ کرنا۔
- دو درجی فارمولا سے دو درجی مساوات کو حل کرنا۔
- $ax^4 + bx^2 + c = 0$ قسم کی مساواتوں کو دو درجی مساواتوں میں تبدیل کر کے حل کرنا۔
- $a\,p(x) + \frac{b}{p(x)} = c$ قسم کی مساواتوں کو حل کرنا۔
- $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ یا $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$ قسم کی معکوس مساواتوں کو حل کرنا۔
- قوت نمائی مساواتوں جن کے متغیر قوت نماؤں میں ہوں، حل کرنا۔
- $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = k$ قسم کی مساواتوں کو جبکہ $a + b = c + d$ حل کرنا۔
- مندرجہ ذیل جذری مساواتوں کو حل کرنا۔

$$\sqrt{ax + b} = cx + d, \qquad \text{(i)}$$

$$\sqrt{x + a} + \sqrt{x + b} = \sqrt{x + c}\,, \qquad \text{(ii)}$$

$$\sqrt{x^2 + px + m} + \sqrt{x^2 + px + n} = q. \qquad \text{(iii)}$$

1.1 دودرجی مساوات (Quadratic Equation):

ایک مساوات جو کہ نامعلوم متغیر مقدار کے مربع پر مشتمل ہو مگر اسکی قوت دو سے زیادہ نہ ہو، دودرجی مساوات کہلاتی ہے۔

x متغیر میں دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$

جبکہ $a \neq 0$ اور a, b, c حقیقی اعداد ہوں۔ دودرجی مساوات کی عام یا معیاری فارم (شکل) کہلاتی ہے۔

یہاں x^2 کا عددی سر a ہے، x کا عددی سر b ہے اور c مستقل مقدار ہے۔

مساواتیں $x^2 - 7x + 6 = 0$ اور $3x^2 + 4x = 5$ دودرجی مساواتوں کی مثالیں ہیں۔

$x^2 - 7x + 6 = 0$ معیاری فارم میں ہے لیکن $3x^2 + 4x = 5$ معیاری فارم میں نہیں۔

> یاد رہے کہ اگر $ax^2 + bx + c = 0$، میں $a = 0$ ہو تو مندرجہ بالا مساوات یک درجی مساوات $bx + c = 0$ بن جاتی ہے۔

دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ میں اگر $b = 0$ ہو تو یہ خالص (پیور) دودرجی مساوات کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر $x^2 - 16 = 0$ اور $4x^2 = 7$ پیور دودرجی مساواتیں ہیں۔

> **سرگرمی:**
> کوئی سی دو پیور دودرجی مساواتیں لکھیں۔

1.2 دودرجی مساواتوں کا حل (Solution of Quadratic Equations):

دودرجی مساوات کا حل سیٹ معلوم کرنے کے لیے درج ذیل طریقے استعمال کیے جاتے ہیں۔

(i) تجزی (ii) مربع مکمل کرنے سے

1.2(i) حل بذریعہ تجزی (Solution by Factorization)

اس طریقہ میں دودرجی مساوات کو معیاری فارم میں لکھتے ہیں جیسے

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{(i)}$$

اگر مساوات (i) کے لیے دو اعداد r اور s معلوم کیے جا سکتے ہوں جبکہ $r + s = b$ اور $rs = ac$ ہو تو $ax^2 + bx + c$ کے دو یک درجی فیکٹرز (اجزائے ضربی) معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

طریقہ کار کی وضاحت مثال 1 میں کی گئی ہے۔

مثال 1: دودرجی مساوات $3x^2 - 6x = x + 20$ کو بذریعہ تجزی حل کریں۔

حل:

$$3x^2 - 6x = x + 20 \qquad \text{(i)}$$

مساوات (i) کی معیاری شکل یوں ہے۔

$$3x^2 - 7x - 20 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

یہاں $a = 3$, $b = -7$, $c = -20$ اور $ac = 3 \times -20 = -60$

کیونکہ $-12 + 5 = -7$ اور $-12 \times 5 = -60$

لہٰذا مساوات (ii) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$3x^2 - 12x + 5x - 20 = 0$$

یا
$$3x(x-4) + 5(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-4)(3x+5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x - 4 = 0 \quad \text{یا} \quad 3x + 5 = 0$$

یعنی
$$\Rightarrow \quad x = 4 \quad \text{یا} \quad 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

$x = -\frac{5}{3}, 4$ دودرجی مساوات (ii) کے حل ہیں۔

پس حل سیٹ $\left\{-\frac{5}{3}, 4\right\}$ ہے۔

سرگرمی:

تجزی کریں۔

$x^2 - x - 2 = 0$

مثال 2: $5x^2 = 30x$ کو بذریعہ تجزی حل کریں۔

حل:

$$5x^2 = 30x$$

$5x^2 - 30x = 0$ کے اجزائے ضربی یوں ہیں۔

$$5x(x-6) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 5x = 0 \quad \text{یا} \quad x - 6 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = 6$$

$x = 0, 6$ دی ہوئی مساوات کے حل ہیں۔

پس حل سیٹ $\{0, 6\}$ ہے۔

یاد رہے کہ $5x^2 = 30x$ سے x کو ختم کرنے سے مراد ایک حل کو ضائع کرنا ہے یعنی $x = 0$

1.2(ii) حل بذریعہ تکمیل مربع (Solution by Completing Square)

دودرجی مساوات بذریعہ تکمیل مربع کے حل کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1: مساوات $x^2 - 3x - 4 = 0$ کو بذریعہ تکمیل مربع حل کیجیے۔

حل:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad \text{(i)}$$

مستقل مقدار -4 کو دائیں طرف لے جانے سے

$$x^2 - 3x = 4 \qquad \text{(ii)}$$

x کے عددی سر کے $\frac{1}{2}$ کے مربع یعنی $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$ کو مساوات (ii) کے طرفین میں جمع کرنے سے

$$x^2 - 3x + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{16+9}{4}$$

یا $$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

اوپر دی گئی مساوات کا دونوں اطراف سے جذر لینے سے

$$\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{3}{2} = \pm\frac{5}{2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \qquad \text{یا} \qquad x = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

4 اور 1– دی ہوئی مساوات کے حل ہیں۔ لہٰذا حل سیٹ $\{-1, 4\}$ ہے۔

مثال 2: مساوات $2x^2 - 5x - 3 = 0$ کو بذریعہ تکمیل مربع حل کیجیے۔

حل:

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

ہر رقم کو 2 پر تقسیم کرنے سے

$$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

$-\frac{3}{2}$ کو دائیں طرف لے جانے سے

$$x^2 - \frac{5}{2}x = \frac{3}{2} \qquad \text{(i)}$$

x کے عددی سر کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دی یعنی $\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{4}$

اب $\left(-\frac{5}{4}\right)^2$ کو مساوات (i) کے طرفین میں جمع کرنے سے

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} + \left(-\frac{5}{4}\right)^2$$

یعنی $$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{25}{16} = \frac{24+25}{16}$$

یا $$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

اوپر دی گئی مساوات کے طرفین کا جذر لینے سے

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{49}{16}}$$

$$x - \frac{5}{4} = \pm\frac{7}{4}$$

یعنی
$$x - \frac{5}{4} = -\frac{7}{4} \quad \text{یا} \quad x - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$$
$$\Rightarrow \quad x = -\frac{7}{4} + \frac{5}{4} \quad \text{یا} \quad x = \frac{7}{4} + \frac{5}{4}$$
$$= \frac{-7+5}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \qquad = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$3, -\frac{1}{2}$ دی ہوئی مساوات کے حل ہیں۔

پس حل سیٹ $\left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$ ہے۔

مشق 1.1

1- مندرجہ ذیل مساواتوں کو معیاری فارم میں لکھیے اور پیور دو درجی مساوات کی نشان دہی کیجیے۔

(i). $(x+7)(x-3) = -7$ (ii) $\frac{x^2+4}{3} - \frac{x}{7} = 1$

(iii) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = 6$ (iv) $\frac{x+4}{x-2} - \frac{x-2}{x} + 4 = 0$

(v) $\frac{x+3}{x+4} - \frac{x-5}{x} = 1$ (vi) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{25}{12}$

2- بذریعہ تجزی حل کیجیے۔

(i) $x^2 - x - 20 = 0$ (ii) $3y^2 = y(y-5)$

(iii) $4 - 32x = 17x^2$ (iv) $x^2 - 11x = 152$

(v) $\frac{x+1}{x} + \frac{x}{x+1} = \frac{25}{12}$ (vi) $\frac{2}{x-9} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}$

3- مندرجہ ذیل مساواتوں کو تکمیل مربع سے حل کیجیے۔

(i) $7x^2 + 2x - 1 = 0$ (ii) $ax^2 + 4x - a = 0, a \neq 0$

(iii) $11x^2 - 34x + 3 = 0$ (iv) $lx^2 + mx + n = 0, l \neq 0$

(v) $3x^2 + 7x = 0$ (vi) $x^2 - 2x - 195 = 0$

(vii) $-x^2 + \frac{15}{2} = \frac{7}{2}x$ (viii) $x^2 + 17x + \frac{33}{4} = 0$

(ix) $4 - \frac{8}{3x+1} = \frac{3x^2+5}{3x+1}$ (x) $7(x+2a)^2 + 3a^2 = 5a(7x+23a)$

1.3 دو درجی فارمولا (Quadratic Formula)

1.3(i) دو درجی فارمولا کو بذریعہ تکمیل مربع اخذ کرنا:
Derivation of quadratic formula by using completing square method:

دو درجی مساوات کی معیاری شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ہے جبکہ $a \neq 0$

مساوات کی ہر رقم کو a پر تقسیم کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$\frac{c}{a}$ کو دائیں طرف لے جانے سے

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ کو دونوں اطراف میں جمع کرنے سے

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

یا

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

طرفین کا جذر لینے سے

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

یا

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

پس $a \neq 0$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ بطور **دو درجی فارمولا** جانا جاتا ہے۔

1.3(ii) دو درجی فارمولا کا استعمال (Use of Quadratic Formula)

دو درجی فارمولا ہر قسم کی مساواتوں کو حل کرنے کے لیے مفید ہے جن کی تجزی ہو سکتی ہو یا نہ ہو سکتی ہو۔ دو درجی فارمولا کی مدد سے دو درجی مساوات کو حل کرنے کی وضاحت مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1: دو درجی مساوات $2 + 9x = 5x^2$ کو بذریعہ دو درجی فارمولا حل کریں۔

حل:

$$2 + 9x = 5x^2$$

دی ہوئی مساوات کو معیاری صورت میں یوں لکھا جاتا ہے۔

$$5x^2 - 9x - 2 = 0$$

دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ

$$a = 5,\ b = -9\ ,\ c = -2$$

دو درجی فارمولا $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ میں a, b اور c کی قیمتیں درج کرنے سے

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(5)(-2)}}{2(5)}$$

یا $$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{10} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{10} = \frac{9 \pm 11}{10}$$

یعنی $$x = \frac{9 + 11}{10} \quad \text{یا} \quad x = \frac{9 - 11}{10}$$

$$x = \frac{20}{10} = 2 \quad \text{یا} \quad x = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

سرگرمی: دو درجی مساوات کا فارمولا استعمال کرتے ہوئے $x^2 + x - 2 = 0$ کا حل سیٹ معلوم کریں۔

$-\frac{1}{5}$, 2 دی ہوئی مساوات کے حل ہیں۔ پس حل سیٹ $\left\{-\frac{1}{5}, 2\right\}$ ہے۔

مثال 2: دو درجی فارمولا کے استعمال سے مساوات $\frac{2x+1}{x+2} - \frac{x-2}{x+4} = 0$ کو حل کیجیے۔

حل:

$$\frac{2x+1}{x+2} - \frac{x-2}{x+4} = 0$$

مختصر کرنے اور معیاری شکل میں لکھنے سے

$$(2x+1)(x+4) - (x-2)(x+2) = 0$$

$$2x^2 + 8x + x + 4 - (x^2 - 4) = 0$$

$$2x^2 + 9x + 4 - x^2 + 4 = 0$$

یا $$x^2 + 9x + 8 = 0$$

یہاں $a = 1$, $b = 9$, $c = 8$

فارمولا $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ استعمال کرنے سے

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{(9)^2 - 4 \times 1 \times 8}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-9 \pm 7}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-9 + 7}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{یا} \quad x = \frac{-9 - 7}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

-1, -8 دی ہوئی مساوات کے حل ہیں۔ پس حل سیٹ $\{-8, -1\}$ ہے۔

مشق 1.2

1- مندرجہ ذیل مساواتوں کو دو درجی فارمولا کے استعمال سے حل کیجیے۔

(i)	$2 - x^2 = 7x$	(ii)	$5x^2 + 8x + 1 = 0$
(iii)	$\sqrt{3}\,x^2 + x = 4\sqrt{3}$	(iv)	$4x^2 - 14 = 3x$
(v)	$6x^2 - 3 - 7x = 0$	(vi)	$3x^2 + 8x + 2 = 0$

(vii) $\dfrac{3}{x-6}-\dfrac{4}{x-5}=1$ (viii) $\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{4-x}{2x}=2\dfrac{1}{3}$

(ix) $\dfrac{a}{x-b}+\dfrac{b}{x-a}=2$

(x) $-(l+m)-lx^2+(2l+m)x=0,\ l\neq 0$

1.4 مساواتوں کو دو درجی فارم میں تبدیل کرنا

(Equations reducible to quadratic form)

اب ہم مساواتوں کی مختلف اقسام کے بارے میں بحث کریں گے جنہیں دو درجی مساوات میں مناسب طریقے سے تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

(i) $ax^4+bx^2+c=0$ قسم کی مساواتیں:

مساوات $ax^4+bx^2+c=0$ میں $x^2=y$ اور $x^4=y^2$ تبدیل کرنے سے ہمیں y میں دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مثال 1: $x^4-13x^2+36=0$ کو حل کریں۔

حل:

$$x^4-13x^2+36=0$$

فرض کیا کہ $x^2=y$ تو $x^4=y^2$

مساوات (i) اس طرح بن جاتی ہے۔

$$y^2-13y+36=0$$

$\Rightarrow$ $y^2-9y-4y+36=0$

$\Rightarrow$ $y(y-9)-4(y-9)=0$

$\Rightarrow$ $(y-9)(y-4)=0$

یعنی

$\Rightarrow$ $y-9=0$ یا $y-4=0$

$\Rightarrow$ $y=9$ یا $y=4$

$y=x^2$ رکھنے سے

$x^2=9$ یا $x^2=4$

$\Rightarrow$ $x=\pm 3$ یا $x=\pm 2$

اس لیے حل سیٹ $\{\pm 2, \pm 3\}$ ہے۔

(ii) $ap(x) + \frac{b}{p(x)} = c$ قسم کی مساواتیں:

مثال 2: $2(2x-1) + \frac{3}{2x-1} = 5$ مساوات کو حل کریں۔

حل:
$$2(2x-1) + \frac{3}{2x-1} = 5 \qquad \text{(i)}$$

فرض کیا کہ $2x - 1 = y$

تب مساوات (i) اس طرح بن جاتی ہے۔

$$2y + \frac{3}{y} = 5 \quad \text{یا} \quad 2y^2 + 3 = 5y$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2 - 5y + 3 = 0$$

دو درجی فارمولا استعمال کرنے سے

$$y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

ہم حاصل کرتے ہیں $y = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ یا $y = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

جب $y = \frac{3}{2}$

$$2x - 1 = \frac{3}{2} \qquad (\because\ y = 2x-1)$$

$$\Rightarrow \quad 2x = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

جب $y = 1$

$$2x - 1 = 1 \qquad (\because\ y = 2x-1)$$

$$\Rightarrow \quad 2x = 1 + 1 = 2 \quad \Rightarrow x = 1.$$

پس حل سیٹ $\left\{1, \frac{5}{4}\right\}$ ہے۔

(iii) معکوس مساواتیں:

مساوات $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ یا $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$

معکوس مساوات کہلاتی ہے اگر یہ x کی جگہ $\frac{1}{x}$ درج کرنے سے تبدیل نہ ہو۔

$ax^4 - bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ میں x کی جگہ $\frac{1}{x}$ درج کرنے سے

$$a\left(\frac{1}{x}\right)^4 - b\left(\frac{1}{x}\right)^3 + c\left(\frac{1}{x}\right)^2 - b\left(\frac{1}{x}\right) + a = 0$$

جس کو مختصر کرنے سے ہمیں وہی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$a - bx + cx^2 - bx^3 + ax^4 = 0$$

پس $ax^4 - bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ معکوس مساوات ہے۔

معکوس مساوات کو حل کرنے کے طریقہ کی درج ذیل مثال سے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 3: مساوات $2x^4 - 5x^3 - 14x^2 - 5x + 2 = 0$ کو حل کریں۔

حل:

$$2x^4 - 5x^3 - 14x^2 - 5x + 2 = 0$$

ہر رقم کو x^2 پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{2x^4}{x^2} - \frac{5x^3}{x^2} - \frac{14x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2x^2 - 5x - 14 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0 \qquad \text{(i)}$$

فرض کیا کہ $x + \frac{1}{x} = y$ تو $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

پس مساوات (i) اس طرح بن جاتی ہے

$$2(y^2 - 2) - 5y - 14 = 0 \quad \text{یا} \quad 2y^2 - 4 - 5y - 14 = 0$$

$$2y^2 - 5y - 18 = 0$$

$$2y^2 - 9y + 4y - 18 = 0 \quad \text{یا} \quad y(2y - 9) + 2(2y - 9) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2y - 9)(y + 2) = 0$$

$$2y - 9 = 0 \quad \text{یا} \quad y + 2 = 0$$

کیونکہ $y = x + \frac{1}{x}$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 9 = 0 \quad \text{یا} \quad x + \frac{1}{x} + 2 = 0$$

$$2x^2 - 9x + 2 = 0 \quad \text{یا} \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

دودرجی فارمولا کے استعمال سے

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 16}}{4}$ یا $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$

$= \dfrac{9 \pm \sqrt{65}}{4}$ یا $x = \dfrac{-2 \pm 0}{2} \Rightarrow x = -1, -1$

پس حل سیٹ $\left\{-1, \dfrac{9 - \sqrt{65}}{4}, \dfrac{9 + \sqrt{65}}{4}\right\}$ ہے۔

(iv) قوت نمائی مساواتیں:

قوت نمائی مساواتوں میں متغیر قوت نماؤں میں ہوتا ہے۔

اس طرح کی مساواتوں کو حل کرنے کے طریقے کی وضاحت درجِ ذیل مثال سے کی گئی ہے۔

مثال 4: مساوات $5^{1+x} + 5^{1-x} = 26$ حل کریں

حل: $5^{1+x} + 5^{1-x} = 26$

$5^1 . 5^x + 5^1 . 5^{-x} = 26$ یا $5 . 5^x + \dfrac{5}{5^x} - 26 = 0 \qquad$ (i)

فرض کیا کہ $5^x = y$ تو مساوات (i) اسطرح بن جاتی ہے۔

$5y + \dfrac{5}{y} - 26 = 0$

$5y^2 + 5 - 26y = 0$ یا $5y^2 - 26y + 5 = 0$

$5y^2 - 25y - y + 5 = 0$

$5y(y - 5) - 1(y - 5) = 0$

$(y - 5)(5y - 1) = 0$

یعنی $5y - 1 = 0$, یا $y - 5 = 0$

$y = 5$ یا $5y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{5}$

$y = 5^x$ درج کرنے سے

$5^x = 5^1$ یا $5^x = 5^{-1} \Rightarrow x = 1$ یا $x = -1$

پس حل سیٹ $\{\pm 1\}$ ہے۔

(v) مساواتوں کی قسم:

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = k$ جبکہ $a + b = c + d$

مثال 5: $(x - 1)(x + 2)(x + 8)(x + 5) = 19$ حل کریں۔

حل:

$$(x-1)(x+2)(x+8)(x+5) = 19$$

یا $[(x-1)(x+8)][(x+2)(x+5)] - 19 = 0 \quad (\because -1+8 = 2+5)$

$(x^2+7x-8)(x^2+7x+10) - 19 = 0 \quad$ (i)

فرض کیا کہ $x^2 + 7x = y$

مساوات (i) اس طرح بن جاتی ہے۔

$$\begin{aligned}
&(y-8)(y+10) - 19 = 0\\
&y^2 + 2y - 80 - 19 = 0\\
&y^2 + 2y - 99 = 0\\
&y^2 + 11y - 9y - 99 = 0\\
&y(y+11) - 9(y+11) = 0\\
&(y+11)(y-9) = 0
\end{aligned}$$

یعنی $y - 9 = 0$ یا $y + 11 = 0$

$y = x^2 + 7x$ درج کرنے سے

پس $x^2 + 7x + 11 = 0$ یا $x^2 + 7x - 9 = 0$

دو درجی فارمولہ کے طریقہ سے حل کرنے سے

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4(1)(11)}}{2(1)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-44}}{2} = = \frac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}$$

یا

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+36}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{85}}{2}$$

پس حل سیٹ $\left\{\frac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-7 \pm \sqrt{85}}{2}\right\}$ ہے۔

مشق 1.3

درجِ ذیل مساواتوں کو حل کیجیے۔

1. $2x^4 - 11x^2 + 5 = 0$
2. $2x^4 = 9x^2 - 4$
3. $5x^{1/2} = 7x^{1/4} - 2$
4. $x^{2/3} + 54 = 15x^{1/3}$
5. $3x^{-2} + 5 = 8x^{-1}$
6. $(2x^2 + 1) + \dfrac{3}{2x^2 + 1} = 4$
7. $\dfrac{x}{x-3} + 4\left(\dfrac{x-3}{x}\right) = 4$
8. $\dfrac{4x+1}{4x-1} + \dfrac{4x-1}{4x+1} = 2\frac{1}{6}$

9. $\dfrac{x-a}{x+a}-\dfrac{x+a}{x-a}=\dfrac{7}{12}$ 10. $x^4-2x^3-2x^2+2x+1=0$

11. $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$ 12. $4.2^{2x+1}-9.2^x+1=0$

13. $3^{2x+2}=12.3^x-3$ 14. $2^x+64.2^{-x}-20=0$

15. $(x+1)((x+3)(x-5)(x-7)=192$

16. $(x-1)(x-2)(x-8)(x+5)+360=0$

1.5 ریڈیکل (جذری) مساواتیں:

وہ مساوات جس میں اکیلے جملے یا جملوں پر جذری علامت ہو، جذری مساوات کہلاتی ہے۔

مثال کے طور پر $\sqrt{x-1}=\sqrt{x-2}+1$ اور $\sqrt{x+3}=x+1$

1.5(i) $\sqrt{ax+b}=cx+d$ قسم کی مساوات:

مثال 1: مساوات $\sqrt{3x+7}=2x+3$ کو حل کریں۔

حل:

$$\sqrt{3x+7}=2x+3 \quad \text{(i)}$$

مساوات (i) کے دونوں اطراف کا مربع لینے سے

$$(\sqrt{3x+7})^2=(2x+3)^2$$

یا

$$3x+7=4x^2+12x+9$$

اوپر دی ہوئی مساوات کو مختصر کرنے سے

$$4x^2+9x+2=0$$

> **نوٹ:** مساوات کا مربع لینے سے یا اس سے کسر کو ختم کرنے سے، فالتو اصل موجود ہو سکتا ہے۔

دو درجی فارمولا استعمال کرنے سے

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{(9)^2-4\times4\times2}}{2\times4}$$

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{81-32}}{8}=\frac{-9\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{-9\pm7}{8}$$

اس لیے

$$x=\frac{-9+7}{8}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}$$

یا

$$x=\frac{-9-7}{8}=\frac{-16}{8}=-2$$

پڑتال: مساوات (i) میں $x=-\frac{1}{4}$ درج کرنے سے

$$\sqrt{3\left(-\frac{1}{4}\right)+7}=2\left(-\frac{1}{4}\right)+3 \Rightarrow \sqrt{\frac{-3+28}{4}}=-\frac{1}{2}+3 \Rightarrow \sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$ جو کہ درست ہے

مساوات (i) میں $x=-2$ درج کرنے سے

$$\sqrt{3(-2)+7}=2(-2)+3 \Rightarrow \sqrt{1}=-1$$ جو کہ غلط ہے

پڑتال کرنے سے معلوم ہوا کہ $x = -2$ مساوات (i) کو درست ثابت نہیں کرتا۔ اس لیے یہ ایک فالتو حل ہے۔

پس حل سیٹ $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$ ہے۔

1.5(ii) $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{x+c}$ قسم کی مساوات

مثال 2: مساوات $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=\sqrt{x+11}$ کو حل کریں۔

حل:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=\sqrt{x+11} \qquad \text{(i)}$$

مساوات (i) کے دونوں اطراف کا مربع لینے سے

$$x+3+x+6+2\left(\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x+6}\right)=x+11$$

یا

$$2\sqrt{x^2+9x+18}=-x+2 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (ii) کے دونوں اطراف کا مربع لینے سے

$$4\left(x^2+9x+18\right)=x^2-4x+4$$

یا

$$3x^2+40x+68=0$$

دودرجی فارمولا استعمال کرنے سے

$$x=\frac{-40\pm\sqrt{(40)^2-4\times3\times68}}{2\times3}=\frac{-40\pm\sqrt{1600-816}}{6}$$

$$=\frac{-40\pm\sqrt{784}}{6}=\frac{-40\pm28}{6}$$

یعنی $x=\frac{-40-28}{6}=\frac{-68}{6}=\frac{-34}{3}$ یا $x=\frac{-40+28}{6}=\frac{-12}{6}=-2$

پڑتال: مساوات (i) میں $x=\frac{-34}{3}$ درج کرنے سے

$$\sqrt{\frac{-34}{3}+3}+\sqrt{\frac{-34}{3}+6}=\sqrt{\frac{-34}{3}+11}$$

یا

$$\sqrt{\frac{-34+9}{3}}+\sqrt{\frac{-34+18}{3}}=\sqrt{\frac{-34+33}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{25}{3}\times(-1)}+\sqrt{\frac{16}{3}\times(-1)}=\sqrt{\frac{1}{3}\times(-1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{\sqrt{3}}i+\frac{4}{\sqrt{3}}i=\frac{1}{\sqrt{3}}i$$ جو کہ درست نہیں

کیونکہ $\frac{-34}{3}$ ایک فالتو حل ہے۔ لہٰذا حل سیٹ $\{-2\}$ ہے۔

1.5(iii) $\sqrt{x^2+px+m}+\sqrt{x^2+px+n}=q$ قسم کی مساواتیں:

مثال 3: مساوات $\sqrt{x^2-3x+36}-\sqrt{x^2-3x+9}=3$ کو حل کریں۔

حل:
$$\sqrt{x^2-3x+36}-\sqrt{x^2-3x+9}=3$$

فرض کیا کہ $x^2-3x=y$

تب $\sqrt{y+36}-\sqrt{y+9}=3$

دونوں اطراف کا مربع لینے سے

$$y+36+y+9-2\left(\sqrt{y+36}\right)\left(\sqrt{y+9}\right)=9$$
$$2y+45-2\sqrt{(y+36)(y+9)}=9$$
$$-2\sqrt{y^2+45y+324}=-2y-36 \quad \text{یا} \quad -2\sqrt{y^2+45y+324}=-2(y+18)$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{y^2+45y+324}=y+18$$

دوبارہ دونوں اطراف کا مربع لینے سے

$$y^2+45y+324=y^2+36y+324$$
$$9y=0 \quad \Rightarrow \quad y=0$$

کیونکہ $x^2-3x=y$۔ پس $x^2-3x=0$

$$\Rightarrow \quad x(x-3)=0$$

یعنی $x=0$ یا $x-3=0 \Rightarrow x=3$

$x=0\,,\,3$ مساوات کے حل ہیں۔

پس حل سیٹ $\{0, 3\}$ ہے۔

مشق 1.4

درجِ ذیل مساواتوں کو حل کریں۔

1. $2x+5=\sqrt{7x+16}$
2. $\sqrt{x+3}=3x-1$
3. $4x=\sqrt{13x+14}-3$
4. $\sqrt{3x+100}-x=4$
5. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+21}=\sqrt{x+60}$
6. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+6}$
7. $\sqrt{11-x}-\sqrt{6-x}=\sqrt{27-x}$
8. $\sqrt{4a+x}-\sqrt{a-x}=\sqrt{a}$
9. $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1}=1$
10. $\sqrt{x^2+3x+8}+\sqrt{x^2+3x+2}=3$
11. $\sqrt{x^2+3x+9}+\sqrt{x^2+3x+4}=5$

متفرق مشق 1

کثیر الانتخابی سوالات

-1 دیے گئے سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) دو درجی مساوات کی معیاری شکل ہے۔

(a) $bx + c = 0 , b \neq 0$ (b) $ax^2 + bx + c = 0 , a \neq 0$

(c) $ax^2 = bx , a \neq 0$ (d) $ax^2 = 0 , a \neq 0$

(ii) دو درجی معیاری مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ میں رقموں کی تعداد ہے۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(iii) دو درجی مساوات کو حل کرنے کے کتنے طریقے ہیں؟

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(iv) دو درجی فارمولا ہے۔

(a) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (b) $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(c) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$ (d) $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

(v) $x^2 - 15x + 56$ کے دو یک درجی فیکٹرز ہیں۔

(a) $(x + 8)$ اور $(x - 7)$ (b) $(x - 8)$ اور $(x + 7)$

(c) $(x - 8)$ اور $(x - 7)$ (d) $(x + 8)$ اور $(x + 7)$

(vi) وہ مساوات جس میں x کی جگہ $\frac{1}{x}$ درج کرنے سے تبدیل نہ ہو، کہلاتی ہے۔ ایک

(a) قوت نمائی مساوات (b) معکوس مساوات

(c) جذری مساوات (d) کوئی نہیں

(vii) مساوات $3^x + 3^{2-x} + 6 = 0$ کی قسم ہے۔ ایک

(a) قوت نمائی مساوات (b) جذری مساوات

(c) معکوس مساوات (d) کوئی نہیں

(viii) مساوات $4x^2 - 16 = 0$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) $\{\pm 4\}$ (b) $\{4\}$

(c) $\{\pm 2\}$ (d) $\{\pm 2\}$

(ix) مساوات $2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 3x + 2 = 0$ کہلاتی ہے۔ایک

(a) معکوس مساوات (b) جذری مساوات

(c) قوت نمائی مساوات (d) کوئی نہیں

-2 درجِ ذیل سوالوں کے مختصر جواب لکھیں۔

(i) حل کریں $x^2 + 2x - 2 = 0$ (ii) بذریعہ تجزی حل کریں $5x^2 = 15x$

(iii) مساوات کی معیاری شکل میں لکھیں $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} = 3$

(iv) دودرجی مساوات کو حل کرنے کے طریقوں کے نام لکھیں۔

(v) حل کریں $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ (vi) حل کریں $\sqrt{3x + 18} = x$

(vii) دودرجی مساوات کی تعریف لکھیں۔ (viii) معکوس مساوات کی تعریف لکھیں۔

(ix) قوت نمائی مساوات کی تعریف لکھیں۔ (x) جذری مساوات کی تعریف لکھیں۔

-3 خالی جگہ پُر کریں۔

(i) دودرجی مساوات کی معیاری شکل ہے__________۔

(ii) دودرجی مساوات کو حل کرنے کے کتنے طریقے ہیں__________۔

(iii) دودرجی فارمولہ معلوم کرنے کے طریقہ کا نام ہے__________۔

(iv) مساوات $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ کا حل ہے__________۔

(v) $25x^2 - 1 = 0$ کا حل سیٹ ہے__________۔

(vi) $2^{2x} - 3.2^x + 5 = 0$ قسم کی مساوات کہلاتی ہے ایک__________مساوات۔

(vii) $x^2 - 9 = 0$ مساوات کا حل سیٹ ہے__________۔

(viii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ قسم کی مساوات کہلاتی ہے ایک__________مساوات۔

(ix) مساوات کا وہ حل جو اس مساوات کو صحیح ثابت نہ کرے، __________ حل کہلاتا ہے۔

(x) ایک مساوات جس میں متغیر والا جملہ __________ کے نیچے ہو، جذری مساوات کہلاتی ہے۔

خلاصہ

- ایک مساوات جو کہ نامعلوم مقدار متغیر کے مربع پر مشتمل ہو مگر دو سے زیادہ طاقت نہ رکھے، ایک دو درجی مساوات یا دوسرے درجے کی مساوات کہلاتی ہے۔
- x متغیر (variable) میں دوسرے درجے کی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ جبکہ a, b, c حقیقی اعداد ہوں اور $a \neq 0$۔ عام یا معیاری دو درجی مساوات کہلاتی ہے۔
- ایک مساوات معکوس مساوات کہلاتی ہے اگر یہ تبدیل نہ ہو جب x کو $\frac{1}{x}$ میں تبدیل کیا جائے۔
- قوت نمائی (exponential) مساواتوں میں متغیر قوت نماؤں میں ہوتا ہے۔
- ایک مساوات جس میں جملہ (expression) جذری علامت کے نیچے ہو، جذری مساوات کہلاتی ہے۔
- مساوات $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ کے لیے دو درجی فارمولا $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ہوتا ہے۔
- دو درجی مساواتوں کو مندرجہ ذیل طریقوں سے حل کیا جاتا ہے

(i) تجزی (ii) تکمیل مربع

(iii) دو درجی فارمولا