یونٹ 2

دو درجی مساواتوں کا نظریہ
(THEORY OF QUADRATIC EQUATIONS)

طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

- دو درجی جملے $ax^2 + bx + c$ کے فرق کنندہ (Discriminant) $b^2 - 4ac$ کی تعریف کرنا۔
- دی ہوئی دو درجی مساوات کا فرق کنندہ معلوم کرنا۔
- دو درجی مساوات کے فرق کنندہ سے روٹس کی اقسام (Nature the Roots) پر بحث کرنا۔
- دی ہوئی دو درجی مساوات کے روٹس کی اقسام معلوم کرنا اور مساوات حل کر کے نتیجہ کی تصدیق کرنا۔
- دی ہوئی دو درجی مساوات میں دی ہوئی نامعلوم مقدار کی قیمت دریافت کرنا جبکہ اس کے روٹس کی اقسام دی ہوئی ہوں۔
- اکائی کا جذر المکعب (Cube roots of units) معلوم کرنا۔
- اکائی کے کمپلیکس (Complex) جذر المکعب کی پہچان بطور ω اور ω^2 کرنا۔
- اکائی کے جذر المکعب کی خصوصیات (Properties) ثابت کرنا۔
- اکائی کے جذر المکعب کی خصوصیات کے استعمال سے مناسب سوالوں کو حل کرنا۔
- دو درجی مساوات کے روٹس (Roots) اور عددی سروں (Co-efficients) کا تعلق معلوم کرنا۔
- دی ہوئی دو درجی مساوات کو حل کیے بغیر اس کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کرنا۔
- دی ہوئی دو درجی مساوات میں نامعلوم مقدار یا مقداروں کی قیمت / قیمتیں معلوم کرنا۔ جبکہ
  - روٹس کا مجموعہ اور روٹس کے حاصل ضرب کا ضعف (Multiple) برابر ہوں۔
  - روٹس کے مربعوں کا مجموعہ دیے ہوئے عدد کے برابر ہو
  - روٹس کا فرق دیے ہوئے عدد کے برابر ہو۔
  - روٹس کے دیے ہوئے تعلق (Relation) کو ثابت کرنا
    (مثلاً تعلق $2\alpha + 5\beta = 7$، جبکہ α اور β دی ہوئی مساوات کے روٹس ہوں)
  - روٹس کا مجموعہ اور حاصلِ ضرب دونوں کسی دیے ہوئے عدد کے برابر ہوں۔

- دو درجی مساوات کے روٹس کے متشاکل تفاعل یا سمیٹرک تفاعل (*Symmetric function*) کی تعریف کرنا۔
- دو درجی مساوات کے روٹس کے سمیٹرک تفاعل کو اس کے عددی سروں کے لحاظ سے معلوم کرنا۔
- دو درجی مساوات کے دیے ہوئے روٹس سے درجِ ذیل کلیہ بنانا

$x^2 -$ (روٹس کا مجموعہ) $x +$ (روٹس کا حاصل ضرب) $= 0$

- اگر α اور β دی ہوئی مساوات کے روٹس ہوں تو درج ذیل قسم کے روٹس کی مساواتیں بنانا
  - $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$
  - α^2, β^2
  - $2\alpha+1, 2\beta+1$
  - $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$
  - $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$
- ترکیبی تقسیم (*Synthetic Division*) کا طریقہ بیان کرنا۔
- ترکیبی تقسیم کے استعمال سے
  - دی ہوئی کثیر رقمی کو یک درجی کثیر رقمی سے تقسیم کرنے سے باقی (*Remainder*) اور حاصل قسمت (*Quotient*) معلوم کرنا۔
  - اگر کثیر رقمی کے زیروز (*Zeros*) دیے ہوں تو نامعلوم مقدار کی قیمت معلوم کرنا۔
  - اگر کثیر رقمی کے اجزائے ضربی دیے ہوں تو نامعلوم مقدار یا نامعلوم مقداروں کی قیمت معلوم کرنا۔
  - اگر مساوات کا ایک حل دیا ہو تو تین درجی مساوات حل کرنا۔
  - اگر مساوات کے دو حقیقی حل دیے ہوں تو چار درجی مساوات (*Biquadratic equation*) حل کرنا۔
- دو متغیر میں دو ہمزاد مساواتوں (*Simultaneous equations*) کو حل کرنا۔ جبکہ
  - ایک مساوات یک درجی اور دوسری دو درجی ہو۔
  - دونوں مساواتیں دو درجی ہوں۔
- روزمرہ زندگی (*Real life*) کے سوالات (*Problems*) کو دو درجی مساوات بنا کر حل کرنا۔

2.1 دو درجی مساواتوں کے روٹس کی اقسام:

دو درجی مساواتوں کے حل سے ہم مختلف روٹس حاصل کرتے ہیں۔ اب ہم دو درجی مساوات کو بغیر حل کیے اس کے روٹس کی خصوصیات معلوم کریں گے۔

2.1.1 دو درجی جملے $ax^2 + bx + c$ کے فرق کنندہ $(b^2 - 4ac)$ کی خصوصیات:

ہم جانتے ہیں کہ مساوات

$$ax^2 + bx + c = 0 \, , \, a \neq 0 \qquad \text{(i)}$$

کے دو روٹس $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ اور $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ہیں۔

ان روٹس کی اقسام کا انحصار جملہ "$b^2 - 4ac$" کی قیمت پر ہے جو دو درجی مساوات (i) یا دو درجی جملہ $ax^2 + bx + c$ کا فرق کنندہ کہلاتا ہے۔

2.1.2 دو درجی مساوات کا فرق کنندہ معلوم کرنا

ہم دی ہوئی دو درجی مساوات کا فرق کنندہ معلوم کرنے کے طریقہ کی وضاحت درجِ ذیل مثالوں سے کرتے ہیں۔

مثال 1: درجِ ذیل مساواتوں کا فرق کنندہ معلوم کیجیے۔

(a) $2x^2 - 7x + 1 = 0$ (b) $x^2 - 3x + 3 = 0$

حل:

(a) $2x^2 - 7x + 1 = 0$

یہاں $a = 2, \; b = -7, \; c = 1$

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$= (-7)^2 - 4(2)(1)$

$= 49 - 8 = 41$

(b) $x^2 - 3x + 3 = 0$

یہاں $a = 1 \, , b = -3 \, , c = 3$

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$= (-3)^2 - 4(1)(3)$

$= 9 - 12 = -3$

2.1.3 دو درجی مساوات کے روٹس کی اقسام بذریعہ فرق کنندہ

دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0 \, , \, (a \neq 0)$ کے روٹس $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ہیں اور اس کا فرق کنندہ $b^2 - 4ac$ ہے۔

جبکہ a, b اور c ناطق اعداد ہوں۔ تب روٹس کی اقسام یوں بیان کی جاسکتی ہیں۔

(i) اگر $b^2 - 4ac > 0$ اور $b^2 - 4ac$ مکمل مربع ہو تو اس کے روٹس ناطق (حقیقی) اور نابرابر ہوتے ہیں۔

(ii) اگر $b^2 - 4ac > 0$ اور $b^2 - 4ac$ مکمل مربع نہ ہو۔ تو اس کے روٹس غیر ناطق (حقیقی) اور نابرابر ہوتے ہیں۔

(iii) اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہو تو اس کے روٹس ناطق (حقیقی) اور برابر ہوتے ہیں۔

(iv) اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہو تو اس کے روٹس خیالی یا غیر حقیقی (Imaginary) ہوتے ہیں۔

2.1.4 دی ہوئی دو درجی مساوات کے روٹس کی اقسام معلوم کرنا اور مساوات حل کر کے جوابات کی تصدیق کرنا

ہم مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعہ طریقہ کار کی وضاحت کرتے ہیں۔

مثال 2: مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس کی اقسام بذریعہ فرق کنندہ معلوم کیجیے اور مساواتوں کو حل کر کے جوابات کی تصدیق کیجیے۔

(a) $x^2 - 5x + 5 = 0$ (b) $2x^2 - x + 1 = 0$

(c) $x^2 + 8x + 16 = 0$ (d) $7x^2 + 8x + 1 = 0$

حل: (a) $x^2 - 5x + 5 = 0$

دو درجی معیاری مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے سے

یہاں $a = 1, b = -5$ اور $c = 5$

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$$= (-5)^2 - 4(1)(5) = 25 - 20 = 5 > 0$$

کیونکہ فرق کنندہ مثبت ہے اور مکمل مربع نہیں ہے۔

اس لیے روٹس غیر ناطق (حقیقی) اور نابرابر ہیں۔

اب مساوات کو کلیہ سے حل کرنے سے $x^2 - 5x + 5 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ظاہر ہے کہ روٹس غیر ناطق (حقیقی) اور نابرابر ہیں۔

(b) $2x^2 - x + 1 = 0$

یہاں $a = 2, b = -1$ اور $c = 1$

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$$= (-1)^2 - 4(2)(1) = 1 - 8 = -7 < 0$$

کیونکہ فرق کنندہ منفی ہے۔
اس لیے روٹس غیر حقیقی اور نابرابر ہیں۔
مساوات کو بذریعہ دو درجی کلیہ حل کرنے سے

$$2x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

ظاہر ہے کہ مساوات کے روٹس غیر حقیقی اور نابرابر ہیں۔

(c) $x^2 + 8x + 16 = 0$

یہاں $a = 1, b = 8$ اور $c = 16$

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$$= (8)^2 - 4(1)(16)$$

$$= 64 - 64 = 0$$

کیونکہ فرق کنندہ صفر ہے۔ اس لیے روٹس ناطق (حقیقی) اور برابر ہیں۔
مساوات کی تصدیق بذریعہ حل

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$(x+4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -4, -4$$

پس روٹس ناطق (حقیقی) اور برابر ہیں۔

(d) $7x^2 + 8x + 1 = 0$

یہاں $a = 7, \ b = 8$ اور $c = 1$

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$$= (8)^2 - 4(7)(1)$$

$$= 64 - 28 = 36 = (6)^2$$

جو کہ مثبت اور مکمل مربع ہے۔
اس لیے روٹس ناطق (حقیقی) اور نابرابر ہیں۔
اب مساوات کو بذریعہ تجزی حل کرنے سے

$$7x^2 + 8x + 1 = 0$$

$$7x^2 + 7x + x + 1 = 0$$

$7x(x+1)+1(x+1)=0$

$(x+1)(7x+1)=0$

اس طرح $7x+1=0$ یا $x+1=0$

$x=-1$ یا $7x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{7}$

پس روٹس ناطق (حقیقی) اور نابرابر ہیں۔

2.1.5 دی ہوئی دو درجی مساوات میں دی ہوئی نامعلوم مقدار کی قیمت دریافت کرنا جب کہ اس کے روٹس کی اقسام دی ہوئی ہوں۔

ہم مندرجہ ذیل مثال سے طریقہ کار کی وضاحت کرتے ہیں۔

مثال 3: اگر $k \neq 3$ ہو اور مساوات $(k+3)x^2-2(k+1)x-(k+1)=0$ کے روٹس برابر ہوں۔ تو k معلوم کیجیے۔

حل:

$$(k+3)x^2-2(k+1)x-(k+1)=0$$

یہاں $a=k+3,\ b=-2(k+1)$ اور $c=-(k+1)$

کیونکہ روٹس برابر ہیں۔ پس فرق کنندہ کی قیمت صفر ہے۔

یعنی $b^2-4ac=0$

$[-2(k+1)]^2-4(k+3)[-(k+1)]=0$

$4[k+1]^2+4(k+3)(k+1)=0$ یا $4(k+1)(k+1+k+3)=0$

$\Rightarrow\ 4(k+1)(2k+4)=0$ یا $8(k+1)(k+2)=0$

$\Rightarrow\ k+1=0$ یا $k+2=0$

$\Rightarrow\ k=-1$ یا $k=-2$

اگر $k=-1,-2$ ہو تو روٹس برابر ہونگے۔

مشق 2.1

-1 مندرجہ ذیل دی ہوئی دو درجی مساواتوں کا فرق کنندہ معلوم کیجیے۔

(i) $2x^2+3x-1=0$ (ii) $6x^2-8x+3=0$

(iii) $9x^2-30x+25=0$ (iv) $4x^2-7x-2=0$

-2 مندرجہ ذیل دی ہوئی دو درجی مساواتوں کے روٹس کی اقسام معلوم کیجیے اور مساواتوں کو حل کر کے روٹس کی تصدیق کیجیے۔

(i) $x^2-23x+120=0$ (ii) $2x^2+3x+7=0$

(iii) $16x^2-24x+9=0$ (iv) $3x^2+7x-13=0$

-3 k کی کس قیمت کے لیے دیا ہوا جملہ $k^2x^2 + 2(k+1)x + 4$ مکمل مربع ہے؟

-4 اگر مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس برابر ہوں تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $(2k-1)x^2 + 3kx + 3 = 0$

(ii) $x^2 + 2(k+2)x + (3k+4) = 0$

(iii) $(3k+2)x^2 - 5(k+1)x + (2k+3) = 0$

-5 ثابت کیجیے کہ مساوات $x^2 + (mx+c)^2 = a^2$ کے روٹس برابر ہونگے۔ اگر $c^2 = a^2(1+m^2)$

-6 شرط معلوم کیجیے کہ مساوات $(mx+c)^2 - 4ax = 0$ کے روٹس برابر ہوں۔

-7 اگر مساوات $(c^2 - ab)x^2 - 2(a^2 - bc)x + (b^2 - ac) = 0$ کے روٹس برابر ہوں تو $a = 0$ یا $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

-8 ثابت کیجیے کہ مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس ناطق ہیں۔

(i) $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$

(ii) $(a+2b)x^2 + 2(a+b+c)x + (a+2c) = 0$

-9 k کی تمام قیمتوں کے لیے مساوات $(k \neq 0)$ ، $x^2 - 2\left(k + \frac{1}{k}\right)x + 3 = 0$ کے روٹس حقیقی ہیں۔

-10 ثابت کریں کہ مساوات $(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$ کے روٹس حقیقی ہیں۔

2.2 اکائی کا جذر المکعب اور اس کی خصوصیات:

2.2.1 اکائی کا جذر المکعب:

فرض کریں کہ x اکائی کا جذر المکعب ہے۔

یعنی $x = (1)^{1/3}$

یا $x^3 = 1$

$\Rightarrow \quad x^3 - 1 = 0$ یا $(x)^3 - (1)^3 = 0$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$ [$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ کے استعمال سے]

اس طرح $x - 1 = 0$ یا $x^2 + x + 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad x = 1 \quad \text{یا} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

اس لیے اکائی کے تین جذر المکعب ہیں۔

1، $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ اور $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ جبکہ $i = \sqrt{-1}$

2.2.2 ω اور ω^2 کی بطور اکائی کے کمپلیکس جذر المکعب کی پہچان کرنا۔

اکائی کے دو کمپلیکس جذر المکعب $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ اور $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ہیں۔

اگر ہم کسی ایک کا نام ω (اومیگا) رکھیں تو دوسرا ω^2 ہو گا۔ ہم اس بیان کو اگلے آرٹیکل (Article) میں ثابت کریں گے۔

2.2.3 اکائی کے جذر المکعب کی خصوصیات:

(a) ثابت کیجیے کہ اکائی کا ہر ایک غیر حقیقی (کمپلیکس) جذر المکعب دوسرے کا مربع ہوتا ہے۔

ثبوت: اکائی کے کمپلیکس جذر المکعب $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ اور $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ

$$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{اور} \quad \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2&=\frac{1+(-3)+2\sqrt{-3}}{4}\\&=\frac{-2+2\sqrt{-3}}{4}\\&=\frac{2\left(-1+\sqrt{-3}\right)}{4}\\&=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2&=\frac{1+(-3)-2\sqrt{-3}}{4}\\&=\frac{-2-2\sqrt{-3}}{4}\\&=\frac{2\left(-1-\sqrt{-3}\right)}{4}\\&=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\end{aligned}$$

پس اکائی کا ہر ایک غیر حقیقی جذر المکعب دوسرے کا مربع ہے۔ یعنی اگر $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ہو تو $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\omega^2$ ہے۔ اور اگر $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\omega$ ہو تو $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\omega^2$ ہے۔

(b) ثابت کیجیے کہ اکائی کے تینوں جذر المکعب کا حاصل ضرب ایک ہوتا ہے:

ثبوت: اکائی کے تین جذر المکعب 1، $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ اور $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ہیں۔

اکائی کے جذر المکعب کا حاصل ضرب $=(1)\left(\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$

$$=\frac{(-1)^2-(\sqrt{-3})^2}{4}=\frac{1-(-3)}{4}=\frac{1+3}{4}=\frac{4}{4}=1$$

یعنی $\omega^3 = 1$ or $(1)(\omega)(\omega^2) = 1$ یاد رکھیں کہ

$\omega^4 = \omega^3 . \omega = 1 . \omega = \omega$

(c) ثابت کیجیے کہ اکائی کا ہر ایک غیر حقیقی جذر المکعب دوسرے کا معکوس ہوتا ہے۔

ثبوت : ہم جانتے ہیں کہ $\omega^3 = 1 \Rightarrow \omega . \omega^2 = 1$

پس $\omega^2 = \frac{1}{\omega}$ یا $\omega = \frac{1}{\omega^2}$

لہٰذا اکائی کا ہر ایک کمپلیکس جذر المکعب دوسرے کا الٹ ہے۔

(d) ثابت کریں کہ اکائی کے تمام جذر المکعب کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

یعنی $\mathbf{1 + \omega + \omega^2 = 0}$

ثبوت 1 : ، $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ اور $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ اکائی کے جذر المکعب ہیں۔

اگر $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ تو $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

تمام روٹس کا مجموعہ $= 1 + \omega + \omega^2$

$$= 1 + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{2-1+\sqrt{-3}-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

پس $1 + \omega + \omega^2 = 0$

ہم آسانی سے مندرجہ ذیل نتائج اخذ کر سکتے ہیں۔

(i) $1 + \omega^2 = -\omega$ (ii) $1 + \omega = -\omega^2$ (iii) $\omega + \omega^2 = -1$

2.2.4 اکائی کے جذر المکعب کی خصوصیات کے استعمال سے مناسب سوالوں کو حل کرنا۔

ہم ω کی بڑی طاقتوں کو 1, ω اور ω^2 میں بدل سکتے ہیں۔

مثلاً

$\omega^7 = (\omega^3)^2 . \omega = (1)^2 . \omega = \omega$

$\omega^{23} = (\omega^3)^7 . \omega^2 = (1)^7 . \omega^2 = \omega^2$

$\omega^{63} = (\omega^3)^{21} = (1)^{21} = 1$

$\omega^{-5} = \frac{1}{\omega^5} = \frac{1}{\omega^3 . \omega^2} = \frac{1}{1 . \omega^2} = \frac{\omega^3}{\omega^2} = \omega$

$$\omega^{-16} = \frac{1}{\omega^{16}} = \frac{1}{(\omega^3)^5 \cdot \omega} = \frac{1}{(1)^5 \cdot \omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2$$

$$\omega^{-27} = \frac{1}{\omega^{27}} = \frac{1}{(\omega^3)^9} = \frac{1}{(1)^9} = 1$$

مثال 1: $(-1+\sqrt{-3})^8 + (-1-\sqrt{-3})^8$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$(-1+\sqrt{-3})^8 + (-1-\sqrt{-3})^8$$

$$= \left[2\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\right]^8 + \left[2\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\right]^8$$

$$= (2\omega)^8 + (2\omega^2)^8$$

$$= 256\,\omega^8 + 256\,\omega^{16}$$

$$= 256\,[\omega^8 + \omega^{16}]$$

$$= 256\,[(\omega^3)^2 \cdot \omega^2 + (\omega^3)^5 \cdot \omega] \qquad (\because\ \omega^3 = 1)$$

$$= 256\,[\omega^2 + \omega] \qquad (\omega + \omega^2 = -1)$$

$$= 256\,(-1) = -256$$

مثال 2: ثابت کیجیے کہ $x^3 - y^3 = (x-y)(x-\omega y)(x-\omega^2 y)$

حل:

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x-\omega y)(x-\omega^2 y)$$

$$\begin{aligned}
\text{R.H.S} &= (x-y)(x-\omega y)(x-\omega^2 y)\\
&= (x-y)[x^2 - \omega^2 xy - \omega xy + \omega^3 y^2]\\
&= (x-y)[x^2 - xy(\omega^2+\omega) + (1)y^2]\\
&= (x-y)[x^2 - xy(-1) + y^2]\\
&= (x-y)[x^2 + xy + y^2]\\
&= x^3 - y^3 = \text{L.H.S}
\end{aligned}$$

مشق 2.2

-1 -1، 8، -27، 64 کے جذر المکعب معلوم کیجیے۔

-2 قیمت معلوم کیجیے۔

(i)	$(1-\omega-\omega^2)^7$	(ii)	$(1-3\omega-3\omega^2)^5$
(iii)	$(9+4\omega+4\omega^2)^3$	(iv)	$(2+2\omega - 2\omega^2)(3 - 3\omega+3\omega^2)$
(v)	$(-1+\sqrt{-3})^6 + (-1-\sqrt{-3})^6$	(vi)	$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^9 + \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^9$
(vii)	$\omega^{37}+\omega^{38}-5$	(viii)	$\omega^{-13}+\omega^{-17}$

-3 ثابت کیجیے کہ $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$

-4 ثابت کیجیے کہ $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\ \ldots..\ 2n$ factors $= 1$

2.3 دودرجی مساوات کے روٹس اور عددی سر:

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اور $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے روٹس ہیں۔

جبکہ a, b بالترتیب x^2 اور x کے عددی سر ہیں اور c مستقل رقم ہے۔

2.3.1 دودرجی مساوات کے روٹس (Roots) اور عددی سروں میں تعلق:

اگر $\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اور $\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ تو ہم مندرجہ ذیل طریقہ سے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کرسکتے ہیں۔

روٹس کا مجموعہ $= \alpha + \beta$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

روٹس کا حاصل ضرب $= \alpha\beta$

$$= \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

اگر ہم روٹس کے مجموعے اور حاصل ضرب کو بالترتیب S اور P سے ظاہر کریں تو

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ کا عددی سر}}{x^2 \text{ کا عددی سر}}$$

اور

$$P = \frac{c}{a} = \frac{\text{مستقل رقم}}{x^2 \text{ کا عددی سر}}$$

2.3.2 دی ہوئی دو درجی مساوات کو حل کیے بغیر اس کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کرنا:

ہم مندرجہ ذیل مثالوں سے طریقہ کار کی وضاحت کرتے ہیں۔

مثال 1: مساواتوں کو حل کیے بغیر روٹس (Roots) کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(a) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (b) $x^2 + 4x - 9 = 0$

حل: (a) فرض کریں کہ α اور β مساوات $3x^2 - 5x + 7 = 0$ کے روٹس ہیں۔

تب $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -\left(\dfrac{-5}{3}\right) = \dfrac{5}{3}$ = روٹس کا مجموعہ

اور $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{7}{3}$ = روٹس کا حاصل ضرب

(b) فرض کریں کہ α اور β مساوات $x^2 + 4x - 9 = 0$ کے روٹس ہیں۔

تب $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{4}{1} = -4$

اور $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-9}{1} = -9$

2.3.3 دی ہوئی دو درجی مساوات میں نامعلوم مقدار کی قیمت معلوم کرنا

ہم مندرجہ ذیل مثالوں سے طریقہ کار کی وضاحت کرتے ہیں۔

(a) جب روٹس کا مجموعہ (Sum of Roots) روٹس کے حاصل ضرب (Product of Roots) کے ضعف (Multiple) کے برابر ہو:

مثال 1: اگر مساوات $3x^2 + (9 - 6h)\,x + 5h = 0$ کے روٹس کا مجموعہ (Sum of roots) روٹس کے حاصل ضرب (Product of Roots) کے 3 گنا کے برابر ہو تو "h" کی قیمت معلوم کریں۔

حل: فرض کریں کہ α اور β مساوات $3x^2 + (9 - 6h)\,x + 5h = 0$ کے روٹس ہیں۔

تب $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -\left(\dfrac{9 - 6h}{3}\right) = \dfrac{6h - 9}{3}$

$\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5h}{3}$

کیونکہ $\alpha + \beta = 3(\alpha\beta)$

اس لیے $\dfrac{6h - 9}{3} = 3\left(\dfrac{5h}{3}\right)$ اور $\dfrac{3\,(2h - 3)}{3} = 5h$

$$2h - 3 = 5h \Rightarrow 2h - 5h = 3$$

$$-3h = 3 \Rightarrow h = \frac{3}{-3} = -1$$

(b) جب روٹس (Roots) کے مربعوں کا مجموعہ دیئے ہوئے عدد کے برابر ہو۔

مثال 2: p کی قیمت معلوم کیجیے۔ اگر مساوات $4x^2 + 3px + p^2 = 0$ کے روٹس (Roots) کے مربعوں کا مجموعہ ایک کے برابر ہو۔

حل: اگر α, β مساوات $4x^2 + 3px + p^2 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3p}{4}$$

اور $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{p^2}{4}$

کیونکہ $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

اس لیے $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{-3p}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{p^2}{4}\right) = 1 \quad \text{اور} \quad \frac{9p^2}{16} - \frac{p^2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 9p^2 - 8p^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad p = \pm 4$$

(c) جب روٹس (Roots) کا فرق دیے ہوئے عدد کے برابر ہو:

مثال 3: اگر مساوات $x^2 - hx + 10 = 0$ کے روٹس (Roots) میں 3 کا فرق ہو تو h کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ α اور $\alpha - 3$ مساوات $x^2 - hx + 10 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو

$$\alpha + \alpha - 3 = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-h}{1}\right) = h$$

$$2\alpha - 3 = h \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = h + 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{h+3}{2} \qquad \text{(i)}$$

$$\alpha(\alpha - 3) = \frac{c}{a} = \frac{10}{1} = 10 \qquad \text{اور} \qquad \alpha(\alpha - 3) = 10 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (i) سے α کی قیمت مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$$\left(\frac{h+3}{2}\right)\left(\frac{h+3}{2} - 3\right) = 10 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{h+3}{2}\right)\left(\frac{h+3-6}{2}\right) = 10$$

لہٰذا

$$\left(\frac{h+3}{2}\right)\left(\frac{h-3}{2}\right) = 10 \quad \Rightarrow \quad h^2 - 9 = 40,$$

$$h^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad h = \pm 7$$

(d) روٹس (Roots) کے دیے ہوئے ربط کو ثابت کریں:

(مثلاً $2\alpha + 5\beta = 7$، جبکہ α, β دی ہوئی مساوات کے روٹس (Roots) ہیں)

مثال 4: p کی قیمت معلوم کیجیے اگر

α اور β مساوات $x^2 - 5x + p = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں اور دیا ہوا تعلق $2\alpha + 5\beta = 7$ ہے۔

حل: اگر α, β مساوات $x^2 - 5x + p = 0$ کے روٹس ہوں تو

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-5}{1}\right) = 5$$

$$\alpha + \beta = 5 \Rightarrow \beta = 5 - \alpha \qquad \text{(i)}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{p}{1} = p \Rightarrow \alpha\beta = p \qquad \text{(ii)}$$

کیونکہ $\quad 2\alpha + 5\beta = 7 \quad$ (معلوم) $\quad$ (iii)

مساوات (i) سے β کی قیمت مساوات (iii) میں درج کرنے سے

$$2\alpha + 5(5 - \alpha) = 7$$

لہٰذا $\quad 2\alpha + 25 - 5\alpha = 7 \quad$ اور $\quad -3\alpha = 7 - 25,$

$$-3\alpha = -18 \Rightarrow \alpha = 6 \qquad \text{(iv)}$$

(i) اور (iv) کے استعمال سے $\quad \beta = 5 - 6 = -1$

α اور β کی قیمتیں مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$$6(-1) = p \Rightarrow p = -6$$

(e) جب روٹس (Roots) کا مجموعہ اور حاصل ضرب دونوں کسی دیے ہوئے عدد کے برابر ہوں۔

مثال 5: m کی قیمت معلوم کیجیے۔ اگر مساوات $5x^2 + (7 - 2m)x + 3 = 0$ کے روٹس (Roots) کا مجموعہ اور حاصل ضرب دیے ہوئے عدد λ کے برابر ہو۔

حل: فرض کریں α, β مساوات $5x^2 + (7 - 2m)x + 3 = 0$ کے روٹس ہوں تو

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{7 - 2m}{5} = \frac{2m - 7}{5}$$

اور $\quad \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$

فرض کریں کہ $\quad \alpha + \beta = \lambda \qquad$ (i)

اور $\quad \alpha\beta = \lambda \qquad$ (ii)

(i) اور (ii) کی رو سے $\quad \alpha + \beta = \alpha\beta$

اس لیے $\quad \dfrac{2m - 7}{5} = \dfrac{3}{5}$

$$\Rightarrow 2m - 7 = 3 \Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5$$

مشق 2.3

-1 مندرجہ ذیل دو درجی مساواتوں کو حل کیے بغیر مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $x^2 - 5x + 3 = 0$ (ii) $3x^2 + 7x - 11 = 0$

(iii) $px^2 - qx + r = 0$ (iv) $(a + b)\, x^2 - ax + b = 0$

(v) $(l + m)\, x^2 + (m + n)\, x + n - l = 0$ (vi) $7x^2 - 5mx + 9n = 0$

-2 k کی قیمت معلوم کیجیے اگر

(i) مساوات $2kx^2 - 3x + 4k = 0$ کے روٹس (Roots) کا مجموعہ اس کے روٹس (Roots) کے حاصل ضرب کا دو گنا ہو۔

(ii) مساوات $x^2 + (3k - 7)\, x + 5k = 0$ کے روٹس (Roots) کا مجموعہ اس کے روٹس (Roots) کے حاصل ضرب کا $\frac{3}{2}$ گنا ہو۔

-3 k کی قیمت معلوم کیجیے اگر

(i) مساوات $4kx^2 + 3kx - 8 = 0$ کے روٹس (Roots) کے مربعوں کا مجموعہ 2 ہو۔

(ii) مساوات $x^2 - 2kx + (2k + 1) = 0$ کے روٹس (Roots) کے مربعوں کا مجموعہ 6 ہو۔

-4 p کی قیمت معلوم کیجیے اگر

(i) مساوات $x^2 - x + p^2 = 0$ کے روٹس (Roots) میں 1 کا فرق ہو۔

(ii) مساوات $x^2 + 3x + p - 2 = 0$ کے روٹس (Roots) میں 2 کا فرق ہو۔

-5 m کی قیمت معلوم کیجیے اگر

(i) مساوات $x^2 - 7x + 3m - 5 = 0$ کے روٹس دیے گئے تعلق $3\alpha + 2\beta = 4$ کو ثابت کریں۔

(ii) مساوات $x^2 + 7x + 3m - 5 = 0$ کے روٹس دیے گئے تعلق $3\alpha - 2\beta = 4$ کو ثابت کریں۔

(iii) مساوات $3x^2 - 2x + 7m + 2 = 0$ کے روٹس دیے گئے تعلق $7\alpha - 3\beta = 18$ کو ثابت کریں۔

-6 m کی قیمت معلوم کیجیے۔

اگر مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس (Roots) کا مجموعہ اور حاصل ضرب دونوں ایک دیے گئے عدد λ کے برابر ہوں۔

(i) $(2m + 3)x^2 + (7m - 5)x + (3m - 10) = 0$

(ii) $4x^2 - (3 + 5m)x - (9m - 17) = 0$

2.4 دو درجی مساوات کے روٹس (Roots) کے (سیمٹرک) تفاعل: (Symmetric Functions)

2.4.1 دو درجی مساوات کے روٹس (Roots) کے سیمٹرک تفاعل کی تعریف:

تعریف:

دو درجی مساوات کے روٹس کے سیمٹرک تفاعل ایسے جملوں پر مشتمل ہوتا ہے جن (جملے) میں روٹس کی جگہ تبدیل کرنے سے تفاعل میں فرق نہیں آتا۔

$$f(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2$$

تو

$$f(\beta, \alpha) = \beta^2 + \alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 \qquad (\because\ \beta^2 + \alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2)$$
$$= f(\alpha, \beta)$$

مثال: اگر $\alpha = 2,\ \beta = 1$ ہو تو $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ اگر $\alpha = 1$ اور $\beta = 2$ ہو تو $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta$ کی قیمت بھی معلوم کیجیے۔

حل: جب $\alpha = 2$ اور $\beta = 1$

$$\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta = (2)^3 + (1)^3 + 3(2)(1)$$
$$= 8 + 1 + 6 = 15$$

جب $\alpha = 1$ اور $\beta = 2$

$$\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta = (1)^3 + (2)^3 + 3(1)(2)$$
$$= 1 + 8 + 6 = 15$$

جملہ $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta$، α اور β کے سیمٹرک تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔

2.4.2 دو درجی مساوات کے روٹس (Roots) کے سیمٹرک تفاعل کی اس کے عددی سروں کی شکل میں قیمت معلوم کرنا:

اگر α, β دو درجی مساوات

$ax^2 + bx + c = 0,\ (a \neq 0)$ (i) کے روٹس ہوں تو

$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ (ii)

اور $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ (iii)

مساوات (ii) اور (iii) میں دیے گئے تفاعل دو درجی مساوات (i) کے سیمٹرک تفاعل ہیں۔

دو متغیروں α, β میں کچھ مزید سیمٹرک تفاعل نیچے دیے گئے ہیں۔

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\alpha^3 + \beta^3$

(iii) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$ (iv) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}$

مثال 1: اگر α, β دودرجی مساوات $(p \neq 0)$ $px^2 + qx + r = 0$, کے روٹس (Roots) ہوں تو $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ α, β مساوات $px^2 + qx + r = 0$ کے روٹس (Roots) ہیں۔ اس لیے

$$\alpha + \beta = -\frac{q}{p} \quad \text{اور} \quad \alpha\beta = \frac{r}{p}$$

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= \frac{r}{p}\left(-\frac{q}{p}\right) = \frac{-qr}{p^2}$$

مثال 2: اگر α, β مساوات $2x^2 + 3x + 4 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

حل: کیونکہ α, β مساوات $2x^2 + 3x + 4 = 0$ کے روٹس ہیں۔ اس لیے

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{2} \quad \text{اور} \quad \alpha\beta = \frac{4}{2} = 2$$

(i) $$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2\,(2)$$

$$= \frac{9}{4} - 4 = \frac{9 - 16}{4} = -\frac{7}{4}$$

(ii) $$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = (\alpha + \beta)\,\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{4}$$

مشق 2.4

-1 اگر α, β مساوات $x^2 + px + q = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\alpha^3\beta + \alpha\beta^3$ (iii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

-2 اگر α, β مساوات $4x^2 - 5x + 6 = 0$ کے ہوں روٹس (Roots) ہوں تو مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ (ii) $\alpha^2\beta^2$

(iii) $\frac{1}{\alpha^2\beta} + \frac{1}{\alpha\beta^2}$ (iv) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$

-3 اگر α, β مساوات $(l \neq 0)$ $lx^2 + mx + n = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3$ (ii) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

2.5 دو درجی مساوات کی تشکیل:

اگر α اور β مطلوبہ دو درجی مساوات کے روٹس(Roots) ہوں۔

فرض کریں کہ $x = \beta$ اور $x = \alpha$

یعنی $x - \beta = 0$, $x - \alpha = 0$

اور $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

جو کہ مطلوبہ دو درجی مساوات کی معیاری شکل ہے۔

2.5.1 دیئے گئے روٹس(Roots) سے دو درجی مساوات کا کلیہ تشکیل دینا:

$x^2 -$ (روٹس کا مجموعہ) $x +$ (روٹس کا حاصل ضرب) $= 0$:

فرض کریں کہ α, β درج ذیل دو درجی مساوات کے روٹس ہیں۔

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad (a \neq 0) \qquad \text{(i)}$$

تب $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ اور $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

مساوات (i) کو اس طرح لکھنے سے

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

یا

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

یا $x^2 -$ (روٹس کا مجموعہ) $x +$ (روٹس کا حاصل ضرب) $= 0$,

$x^2 - Sx + P = 0$ جبکہ $S = \alpha + \beta$ اور $P = \alpha\beta$

مثال 1: دو درجی مساوات بنایئے۔ جس کے روٹس (Roots) 3 اور 4 ہوں۔

حل: کیونکہ 3 اور 4 مطلوبہ دو درجی مساوات کے روٹس(Roots) ہیں۔

اس لیے $S =$ روٹس کا مجموعہ $= 3 + 4 = 7$

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= (3)(4) = 12$

کیونکہ $x^2 - Sx + P = 0,$

پس $x^2 - 7x + 12 = 0$ مطلوبہ دو درجی مساوات ہے۔

2.5.2 دو درجی مساوات کی تشکیل جس کے روٹس (Roots) درج ذیل اقسام کے ہوں:

(i) $2\alpha+1, 2\beta+1$ (ii) α^2, β^2 (iii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (iv) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (v) $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

جبکہ α, β دی ہوئی دو درجی مساوات کے روٹس ہوں۔

مثال 2: اگر α, β مساوات $2x^2 - 3x - 5 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو دیے ہوئے روٹس سے مساوات بنائیے۔

(i) $2\alpha+1, 2\beta+1$ (ii) α^2, β^2 (iii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

(iv) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (v) $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

حل: چونکہ α, β مساوات $2x^2 - 3x - 5 = 0$ کے روٹس ہیں۔

اس لیے $\alpha+\beta = -\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ اور $\alpha\beta = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$

(i) $S =$ روٹس کا مجموعہ $= 2\alpha+1+2\beta+1$

$$= 2(\alpha+\beta)+2 = 2\left(\frac{3}{2}\right)+2 = 5$$

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= (2\alpha+1)(2\beta+1)$

$$= 4\alpha\beta + 2(\alpha+\beta)+1$$
$$= 4\left(-\frac{5}{2}\right)+2\left(\frac{3}{2}\right)+1$$
$$= -10+3+1 = -6$$

اب $x^2 - Sx + P = 0$

P اور S کو استعمال کرنے سے $x^2-(5)x+(-6)=0 \Rightarrow x^2-5x-6=0$

(ii) $S =$ روٹس کا مجموعہ $= \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}+5 = \frac{29}{4}$$

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= \alpha^2 . \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

اب $x^2 - Sx + P = 0$

P اور S کو استعمال کرنے سے $x^2 - \frac{29}{4}x + \frac{25}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2-29x+25=0$

(iii) $S =$ روٹس کا مجموعہ $= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = (\alpha + \beta) \cdot \frac{1}{\alpha\beta}$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \qquad (\because \ \alpha\beta = -\frac{5}{2})$$

$$= -\frac{3}{5}$$

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = -\frac{2}{5} \qquad (\because \ \alpha\beta = -\frac{5}{2})$

اب $x^2 - Sx + P = 0$

P اور S کو استعمال کرنے سے $x^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)x + \left(-\frac{2}{5}\right) = 0 \Rightarrow 5x^2 + 3x - 2 = 0$

(iv) $S =$ روٹس کا مجموعہ $= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] \cdot \frac{1}{\alpha\beta}$

$$= \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{5}{2}\right)\right] \times \left(-\frac{2}{5}\right) \qquad (\because \ \alpha\beta = -\frac{5}{2})$$

$$= \left(\frac{9}{4} + 5\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{29}{4} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{29}{10}$$

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1$

اب $x^2 - Sx + P = 0$

P اور S کو استعمال کرنے سے $x^2 - \left(-\frac{29}{10}\right)x + 1 = 0 \Rightarrow 10x^2 + 29x + 10 = 0$

(v) $S =$ روٹس کا مجموعہ $= \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \alpha + \beta + \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta}$

$$= (\alpha + \beta)\left(1 + \frac{1}{\alpha\beta}\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{9}{10}$$

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= (\alpha + \beta) \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = (\alpha + \beta)\left(\frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta}\right)$

$$= (\alpha + \beta)^2 \times \frac{1}{\alpha\beta} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{9}{4} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{9}{10}$$

اب $x^2 - Sx + P = 0$

P اور S کو استعمال کرنے سے $\quad x^2 - \frac{9}{10}x + \left(-\frac{9}{10}\right) = 0 \quad \Rightarrow 10x^2 - 9x - 9 = 0$

مثال 3: اگر α, β مساوات $x^2 - 7x + 9 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو ایسی مساوات تشکیل دیں جس کے روٹس 2α اور 2β ہوں۔

حل: کیونکہ α, β مساوات $x^2 - 7x + 9 = 0$ کے روٹس ہیں۔اس لیے

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-7}{1}\right) = 7$$

اور

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9$$

2α اور 2β مطلوبہ مساوات کے روٹس (Roots) ہیں۔

$S =$ روٹس کا مجموعہ $= 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2(7) = 14$

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= (2\alpha)(2\beta) = 4\alpha\beta = 4(9) = 36$

پس مطلوبہ دو درجی مساوات درجِ ذیل ہو گی۔

$x^2 - Sx + P = 0$ یعنی

$x^2 - 14x + 36 = 0$

مشق 2.5

1- مندرجہ ذیل روٹس (Roots) والی دو درجی مساواتیں لکھیں۔

(a) $1, 5$ (b) $4, 9$ (c) $-2, 3$

(d) $0, -3$ (e) $2, -6$ (f) $-1, -7$

(g) $1 + i, 1 - i$ (h) $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}$

2- اگر α, β مساوات $x^2 - 3x + 6 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو دیے ہوئے روٹس (Roots) سے مساواتیں بنائیں۔

(a) $2\alpha + 1, 2\beta + 1$ (b) α^2, β^2 (c) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

(d) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (e) $\alpha + \beta, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

3- اگر α, β مساوات $x^2 + px + q = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو دیے ہوئے روٹس (Roots) سے مساواتیں بنائیں۔

(a) α^2, β^2 (b) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$

2.6 ترکیبی تقسیم (Synthetic Division)

ترکیبی تقسیم کے عمل سے ہم کثیر رقمی کو یک درجی کثیر رقمی سے تقسیم کر کے حاصل قسمت اور باقی معلوم کرتے ہیں۔ درحقیقت ترکیبی تقسیم، تقسیم کا ایک مختصر طریقہ ہے۔

2.6.1 ترکیبی تقسیم کا طریقہ کار:

درج ذیل مثال میں ترکیبی تقسیم کے طریقہ کار کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 1: ترکیبی تقسیم کے طریقہ سے کثیر رقمی $P(x) = 5x^4 + x^3 - 3x$ کو $x - 2$ پر تقسیم کیجیے۔

حل:

$$(5x^4 + x^3 - 3x) \div (x - 2)$$

یہاں تقسیم کنندہ $x - a$ میں $a = 2$

اب مقسوم علیہ کے عددی سروں کو دیے ہوئے طریقہ سے نیچے ترکیب نزولی میں اور غیر موجود x کے عددی سر کو صفر لکھیں۔

$$P(x) = 5x^4 + 1 \times x^3 + 0 \times x^2 - 3x + 0 \times x^0$$

اب مقسوم علیہ سے x کے عددی سروں کو ایک قطار میں اور $a = 2$ کو بائیں طرف لکھیں۔

	5	1	0	−3	0
2	↓	10	22	44	82
	5	11	22	41	82

(i) پہلے عددی سر 5 کو قطار میں افقی قطعہ خط کے نیچے لکھیں۔

(ii) 5 کو 2 سے ضرب دیں اور جواب 10 کو 1 کے نیچے لکھیں۔ مجموعہ $10 + 1 = 11$ کو افقی قطعہ خط کے نیچے لکھیں۔

(iii) 11 کو 2 سے ضرب دے کر جواب 22 کو 0 کے نیچے لکھیں۔ 0 اور 22 کو جمع کر کے جواب 22 افقی قطعہ خط کے نیچے لکھیں۔

(iv) 22 کو 2 سے ضرب دے کر جواب 44 کو -3 کے نیچے لکھیں۔ 44 اور -3 کے مجموعے 41 کو افقی قطعہ خط کے نیچے لکھیں۔

(v) 41 کو 2 سے ضرب دیں اور جواب 82 کو 0 کے نیچے لکھیں۔ 82 اور 0 کا مجموعہ 82 ہے۔

آخری قطار میں باقی 82 کو راسی قطعہ خط سے الگ کیا گیا ہے اور 5, 11, 22, 41 حاصل قسمت کے عددی سر ہیں۔

جیسا کہ مقسوم علیہ میں x کی سب سے بڑی قوت 4 ہے۔ اس لیے حاصل قسمت میں x کی سب سے بڑی قوت $4 - 1 = 3$ ہوگی۔

پس $Q(x) = 5x^3 + 11x^2 + 22x + 41 =$ حاصل قسمت

اور $R = 82 =$ باقی

2.6.2 ترکیبی تقسیم کے استعمال سے:

(a) دی ہوئی کثیر رقمی کو یک درجی کثیر رقمی (Linear polynomial) سے تقسیم کر کے حاصل قسمت (Quotient) اور باقی (Remainder) معلوم کرنا:

مثال 2: ترکیبی تقسیم کے استعمال سے $P(x) = x^4 - x^2 + 15$ کو $x + 1$ سے تقسیم کیجیے۔

حل: $(x^4 - x^2 + 15) \div (x + 1)$

کیونکہ $x + 1 = x - (-1)$ پس $a = -1$

اب مقسوم علیہ کے عددی سروں کو ایک قطار میں اور $a = -1$ کو بائیں طرف لکھیں۔

	1	0	−1	0	15
−1	↓	−1	1	0	0
	1	−1	0	0	15

اس لیے $Q(x) = x^3 - x^2 + 0.\,x + 0 = x^3 - x^2$ = حاصل قسمت

اور 15 = باقی

(b) اگر کثیر رقمی کے زیروز دیے ہوں تو متغیر/متغیروں کی قیمت/قیمتیں معلوم کرنا۔

مثال 3: اگر '1'، کثیر رقمی $P(x) = 3x^2 + 4x - 7h$ کا زیرو ہو تو ترکیبی تقسیم کے استعمال سے h کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: $P(x) = 3x^2 + 4x - 7h$

اور '1'، کثیر رقمی کا زیرو ہو تو ترکیبی تقسیم کے طریقہ سے

	3	4	$-7h$
1	↓	3	7
	3	7	$7 - 7h$

$7 - 7h$ = باقی

کیونکہ '1'، کثیر رقمی کا زیرو ہے۔

اس لیے 0 = باقی

یعنی $7 - 7h = 0$

$7 = 7h \Rightarrow h = 1$

(c) اگر کثیر رقمی کے اجزائے ضربی دیے ہوں تو متغیر/متغیروں کی قیمت/قیمتیں معلوم کرنا۔

مثال 4: اگر $x - 1$ اور $x + 1$ کثیر رقمی $P(x) = x^3 + 3lx^2 + mx - 1$ کے اجزائے ضربی ہوں تو ترکیبی تقسیم کے استعمال سے l اور m کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ $x - 1$ اور $x + 1$ کثیر رقمی $P(x) = x^3 + 3lx^2 + mx - 1$ کے اجزائے ضربی ہیں۔ اس لیے "1" اور

"-1" کثیر رقمی $P(x)$ کے زیروز ہیں۔

اب ترکیبی تقسیم سے

	1	$3l$	m	-1
1	↓	1	$3l+1$	$3l+m+1$
	1	$3l+1$	$3l+m+1$	$3l+m$

کیونکہ '1'، کثیر رقمی کا صفر ہے۔اس لیے باقی صفر ہے۔یعنی

$$3l + m = 0 \qquad \text{(i)}$$

اور

	1	$3l$	m	-1
-1	↓	-1	$-3l+1$	$3l-m-1$
	1	$3l-1$	$-3l+m+1$	$3l-m-2$

کیونکہ '-1'، کثیر رقمی کا زیرو ہے اس لیے باقی صفر ہے۔

یعنی

$$3l - m - 2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (i) اور (ii) کو جمع کرنے سے

$$6l - 2 = 0$$

$$6l = 2 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

l کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$3\left(\frac{1}{3}\right) + m = 0 \quad \text{or} \quad 1 + m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -1$$

پس

$$l = \frac{1}{3} \quad \text{اور} \quad m = -1$$

(d) اگر مساوات کا ایک روٹ دیا ہوا ہو تو تین درجی مساوات حل کرنا۔

مثال 5: ترکیبی تقسیم کے استعمال سے مساوات $3x^3 - 11x^2 + 5x + 3 = 0$ کو حل کیجیے جب 3 مساوات کا روٹس ہے۔

حل: کیونکہ 3 مساوات $3x^3 - 11x^2 + 5x + 3 = 0$ کا روٹ ہے۔

تب ترکیبی تقسیم سے ہم حاصل کرتے ہیں۔

	3	-11	5	3
3	↓	9	-6	-3
	3	-2	-1	0

اس لیے کم درجے والی مساوات

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$3x^2 - 3x + x - 1 = 0$$
$$3x(x - 1) + 1(x - 1) = 0$$
$$(x - 1)(3x + 1) = 0$$

$x - 1 = 0$ یا $3x + 1 = 0$,

یعنی $x = 1$ یا $3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

پس 3 ,1 اور $-\frac{1}{3}$ دی ہوئی مساوات کے روٹس ہیں۔

(e) اگر مساوات کے دو حقیقی روٹس (Roots) دیے گئے ہوں تو چار درجی مساوات حل کرنا:

مثال 6: ترکیبی تقسیم کے طریقہ سے مساوات $x^4 - 49x^2 + 36x + 252 = 0$ کو حل کریں جب 2– اور 6 اس کے روٹس (Roots) ہوں۔

حل: کیونکہ 2– اور 6 دی ہوئی مساوات $x^4 - 49x^2 + 36x + 252 = 0$ کے روٹس ہیں۔

ترکیبی تقسیم سے

	1	0	−49	36	252
−2	↓	−2	4	90	−252
	1	−2	−45	126	0
6		6	24	−126	
	1	4	−21	0	

اس لیے کم درجے والی مساوات

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$
$$x^2 + 7x - 3x - 21 = 0$$
$$x(x + 7) - 3(x + 7) = 0$$
$$(x + 7)(x - 3) = 0$$

$x + 7 = 0$ یا $x - 3 = 0$

$x = -7$ یا $x = 3$

پس 2– ,6 ,7– اور 3 دی ہوئی مساوات کے روٹس (Roots) ہیں۔

مشق 2.6

-1 ترکیبی تقسیم کو استعمال کرتے ہوئے حاصل قسمت اور باقی معلوم کیجیے۔ جب

(i) $(x^2 + 7x - 1) \div (x + 1)$ (ii) $(4x^3 - 5x + 15) \div (x + 3)$

(iii) $(x^3 + x^2 - 3x + 2) \div (x - 2)$

-2 ترکیبی تقسیم کے استعمال سے h کی قیمت معلوم کیجیے اگر

(i) عدد '3' کثیر رقمی $2x^3 - 3hx^2 + 9$ کا زیرو ہو۔

(ii) عدد '1' کثیر رقمی $x^3 - 2hx^2 + 11$ کا زیرو ہو۔

(iii) '1−' کثیر رقمی $2x^3 + 5hx - 23$ کا زیرو ہو۔

-3 ترکیبی تقسیم کے استعمال سے l اور m کی قیمتیں معلوم کیجیے اگر

(i) $(x + 3)$ اور $(x - 2)$ کثیر رقمی $x^3 + 4x^2 + 2lx + m$ کے اجزائے ضربی ہوں۔

(ii) $(x - 1)$ اور $(x + 1)$ کثیر رقمی $x^3 - 3lx^2 + 2mx + 6$ کے اجزائے ضربی ہوں۔

-4 بذریعہ ترکیبی تقسیم حل کیجیے اگر

(i) عدد '2' مساوات $x^3 - 28x + 48 = 0$ کا روٹ ہو۔

(ii) عدد '3' مساوات $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$ کا روٹ ہو۔

(iii) عدد '1−' مساوات $4x^3 - x^2 - 11x - 6 = 0$ کا روٹ ہو۔

-5 بذریعہ ترکیبی تقسیم حل کیجیے اگر

(i) '1' اور '3' مساوات $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں۔

(ii) '3' اور '4−' مساوات $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں۔

2.7 ہمزاد مساواتیں (Simultaneous Equations)

دو متغیروں میں دو مساواتیں جس کا حل سیٹ مشترک ہو وہ **ہمزاد مساواتیں** کہلاتی ہیں۔

تمام مترتب جوڑوں (x, y) کا وہ سیٹ جو ہمزاد مساواتوں کو درست ثابت کرے ان کا حل سیٹ کہلاتا ہے۔

2.7(i) دو متغیروالی دو مساواتوں کو حل کرنا:

(a) جب ایک مساوات یک درجی اور دوسری دودرجی ہو:

ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے کے لیے ہم یک درجی مساوات میں y کی قیمت کو x کی فارم میں تبدیل کر کے دودرجی مساوات میں رکھنے سے x میں دودرجی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ x والی دودرجی مساوات کو حل کرنے سے x کی دو قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔ x کی ہر قیمت سے y کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔ اس طرح وہ مترتب جوڑے (x, y) ہمزاد مساواتوں کا حل سیٹ ہوتے ہیں۔

مثال 1: ہمزاد مساواتوں $3x^2 + y^2 = 52$ اور $3x + y = 4$ کو حل کیجیے۔

حل: دی ہوئی مساواتیں

$3x + y = 4$ (i)

اور $3x^2 + y^2 = 52$ (ii)

مساوات (i) سے

$y = 4 - 3x$ (iii)

مترتب جوڑے (x, y) میں، x ہمیشہ پہلے اور y ہمیشہ بعد میں آتا ہے۔

y کی قیمت مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$$3x^2 + (4 - 3x)^2 = 52$$
$$3x^2 + 16 - 24x + 9x^2 - 52 = 0$$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ یا $12x^2 - 24x - 36 = 0$

تجزی کرنے سے

$$x^2 - 3x + x - 3 = 0$$
$$x(x - 3) + 1(x - 3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x - 3)(x + 1) = 0$$

$x + 1 = 0$ یا $x - 3 = 0$

$x = -1$ یا $x = 3$

x کی قیمتیں مساوات (iii) میں درج کرنے سے

جب $x = -1$	جب $x = 3$
تو $y = 4 - 3x$	تو $y = 4 - 3x$
$y = 4 - 3(-1) = 4 + 3$	$y = 4 - 3(3) = 4 - 9$
$y = 7$	$y = -5$

اس لیے مترتب جوڑے $(3, -5)$ اور $(-1, 7)$ بنتے ہیں۔

پس حل سیٹ $\{(3, -5), (-1, 7)\}$ ہے۔

(b) جب دونوں مساواتیں دو درجی ہوں:

مساواتوں کو حل کرنے کا طریقہ مندرجہ ذیل مثالوں سے واضح کیا گیا ہے۔

مثال 2: مساواتوں $x^2 + y^2 + 2x = 8$ اور $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$ کو حل کیجیے۔

حل: دی ہوئی مساواتیں یہ ہیں۔

$x^2 + y^2 + 2x = 8$ (i)

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$ (ii)

مساوات (ii) سے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 8$$

یا $$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 6 \qquad \text{(iii)}$$

مساوات (iii) کو مساوات (ii) سے تفریق کرنے سے

$$4x - 2y = 2 \quad \text{یا} \quad 2x - y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 1 \qquad \text{(iv)}$$

مساوات (ii) میں y کی قیمت درج کرنے سے

$$(x-1)^2 + (2x - 1 + 1)^2 = 8$$
$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 8 = 0$$
$$5x^2 - 2x - 7 = 0$$
$$5x^2 - 7x + 5x - 7 = 0 \quad \text{یا} \quad x(5x-7) + 1\,(5x-7) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (5x-7)(x+1) = 0$$
$$5x - 7 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 1 = 0$$

یعنی $$5x = 7 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7}{5} \quad \text{یا} \quad x = -1$$

x کی قیمتیں مساوات (iv) میں درج کرنے سے

جب $x = -1$	جب $x = \frac{7}{5}$
تو $y = 2(-1) - 1$	تو $y = 2\left(\frac{7}{5}\right) - 1$
$y = -3$	$y = \frac{14}{5} - 1 = \frac{14-5}{5} = \frac{9}{5}$

پس حل سیٹ $\left\{(-1, -3), \left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)\right\}$ ہے۔

مثال 3: مساواتوں $x^2 + y^2 = 7$ اور $2x^2 + 3y^2 = 18$ کو حل کیجیے۔

حل: دی ہوئی مساواتیں یہ ہیں۔

$$x^2 + y^2 = 7 \qquad \text{(i)}$$
$$2x^2 + 3y^2 = 18 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (i) کو 3 سے ضرب دینے سے

$$3x^2 + 3y^2 = 21 \qquad \text{(iii)}$$

مساواتوں (ii) کو (iii) سے تفریق کرنے سے

$$x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$$

جب $x = \sqrt{3}$ ہو تو مساوات (i) سے

$x^2 + y^2 = 7$ یا $3 + y^2 = 7 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

جب $x = -\sqrt{3}$ تو $y = \pm 2$

پس مطلوبہ حل سیٹ $\{(\pm\sqrt{3}, \pm 2)\}$ ہے۔

مثال 4: مساواتوں $x^2 + y^2 = 20$ اور $6x^2 + xy - y^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل: دی ہوئی مساواتیں یہ ہیں۔

$$x^2 + y^2 = 20 \qquad \text{(i)}$$

$$6x^2 + xy - y^2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (ii) کو یوں لکھنے سے

$$y^2 - xy - 6x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-(-x) \pm \sqrt{(-x)^2 - 4 \times 1 \times (-6x^2)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 24x^2}}{2} = \frac{x \pm \sqrt{25x^2}}{2} = \frac{x \pm 5x}{2}$$

$$y = \frac{x + 5x}{2} = \frac{6x}{2} = 3x \quad \text{یا} \quad y = \frac{x - 5x}{2} = \frac{-4x}{2} = -2x$$

مساوات (i) میں $y = 3x$ درج کرنے سے

$$x^2 + (3x)^2 = 20 \quad \text{یا} \quad x^2 + 9x^2 = 20$$

$$\Rightarrow \quad 10x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

جب $x = \sqrt{2}$ ہو تو $y = 3(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$ اور جب $x = -\sqrt{2}$ ہو تو $y = 3(-\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}$

مساوات (i) میں $y = -2x$ درج کرنے سے

$$x^2 + (-2x)^2 = 20 \quad \text{یا} \quad x^2 + 4x^2 = 20$$

$$\Rightarrow \quad 5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

جب $x = 2$ ہو تو $y = -2(2) = -4$ اور جب $x = -2$ ہو تو $y = -2(-2) = 4$

پس حل سیٹ $\{(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -3\sqrt{2}), (2, -4), (-2, 4)\}$ ہے۔

مثال 5: مساواتوں $x^2 + y^2 = 40$ اور $3x^2 - 2xy - y^2 = 80$ کو حل کیجیے۔

حل: دی ہوئی مساواتیں یہ ہیں۔

$$x^2 + y^2 = 40 \qquad \text{(i)}$$

$$3x^2 - 2xy - y^2 = 80 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (i) کو 2 سے ضرب دینے سے

$$2x^2 + 2y^2 = 80 \qquad \text{(iii)}$$

مساوات (iii) کو مساوات (ii) سے تفریق کرنے سے

$$x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \qquad \text{(iv)}$$

مساوات (iv) کی تجزی کرنے سے

$$x^2 - 3xy + xy - 3y^2 = 0$$

یا $x(x - 3y) + y(x - 3y) = 0$

$$\Rightarrow \quad (x - 3y)(x + y) = 0$$

$x - 3y = 0$ یا $x + y = 0$

$x = 3y$ یا $x = -y$

مساوات (i) میں درج کرنے سے

$x = 3y$		$x = -y$	
$(3y)^2 + y^2 = 40$		$(-y)^2 + y^2 = 40$	
$10y^2 = 40$		$2y^2 = 40$	
$y^2 = 4$		$y^2 = 20$	
$y = \pm 2$		$y = \pm 2\sqrt{5}$	
$y = 2$	$y = -2$	$y = 2\sqrt{5}$	$y = -2\sqrt{5}$
$x = 3y$	$x = 3y$	$x = -y$	$x = -y$
$x = 3(2)$	$x = 3(-2)$	$x = -(2\sqrt{5})$	$x = -(-2\sqrt{5})$
$x = 6$	$x = -6$	$x = -2\sqrt{5}$	$= 2\sqrt{5}$

اس لیے حل سیٹ $\{(6, 2), (-6, -2), (2\sqrt{5}, -2\sqrt{5}), (-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})\}$ ہے۔

مشق 2.7

مندرجہ ذیل ہمزاد مساواتیں حل کریں۔

1. $x + y = 5$; $x^2 - 2y - 14 = 0$
2. $3x - 2y = 1$; $x^2 + xy - y^2 = 1$
3. $x - y = 7$; $\dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{y} = 2$
4. $x + y = a - b$; $\dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{y} = 2$
5. $x^2 + (y - 1)^2 = 10$; $x^2 + y^2 + 4x = 1$
6. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$; $(x + 2)^2 + y^2 = 5$
7. $x^2 + 2y^2 = 22$; $5x^2 + y^2 = 29$

8. $4x^2 - 5y^2 = 6$; $3x^2 + y^2 = 14$

9. $7x^2 - 3y^2 = 4$; $2x^2 + 5y^2 = 7$

10. $x^2 + 2y^2 = 3$; $x^2 + 4xy - 5y^2 = 0$

11. $3x^2 - y^2 = 26$; $3x^2 - 5xy - 12y^2 = 0$

12. $x^2 + xy = 5$; $y^2 + xy = 3$

13. $x^2 - 2xy = 7$; $xy + 3y^2 = 2$

2.7(ii) روزمرہ زندگی سے متعلق سوالات کو دو درجی مساوات کی مدد سے حل کرنا:

کئی سوالات کو دو درجی مساوات کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے۔ ایک مساوات بنانے میں نامعلوم مقداروں کے لیے علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ مساواتوں کے جوابات ان کے روٹس (Roots) کی شکل میں حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 1: کسی عدد سے 3 کم کرنے اور دوگنا عدد سے 9 تفریق کرنے سے حاصل ضرب 104 بنتا ہے۔ عدد معلوم کریں۔

حل: فرض کریں کہ مطلوبہ عدد x ہے۔

عدد سے 3 کم $= x - 3$

اور عدد کے دوگنا سے 9 کم $= 2x - 9$

سوال کی شرط کے مطابق

$$(x-3)(2x-9) = 104$$
$$2x^2 - 15x + 27 = 104$$
$$2x^2 - 15x - 77 = 0$$

تجزی کرنے سے

$$2x^2 + 7x - 22x - 77 = 0$$
$$x(2x+7) - 11(2x+7) = 0$$
$$(2x+7)(x-11) = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{7}{2}\ , \quad x = 11$$

یعنی مطلوبہ اعداد $-\frac{7}{2}$ اور 11 ہیں۔

مثال 2: ایک مستطیل کی لمبائی، چوڑائی سے 4 سم زیادہ ہے۔ اگر مستطیل کا رقبہ 45 مربع سم ہو تو اس کے اضلاع کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ سم میں چوڑائی x ہے تو لمبائی $x + 4$ ہوگی۔

دی ہوئی شرط کے مطابق

$$x(x+4) = 45$$
$$x^2 + 4x - 45 = 0$$
$$(x+9)(x-5) = 0$$

$x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$ یا $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

اگر $x = 5$، تو $x + 4 = 5 + 4 = 9$ (منفی قیمت کو نظر انداز کرتے ہوئے)

پس چوڑائی 5 سم اور لمبائی 9 سم ہے۔

مثال 3: ایک نقطہ کے محددات کا مجموعہ 6 اور ان کے مربعوں کا مجموعہ 20 ہے۔ نقطہ کے محددات معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ (x, y) نقطے کے محدد ہیں۔

دی ہوئی شرائط کے مطابق

$$x + y = 6 \qquad \text{(i)}$$
$$x^2 + y^2 = 20 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (i) سے

$$y = 6 - x \qquad \text{(iii)}$$

مساوات (ii) میں $y = 6 - x$ درج کرنے سے

$$x^2 + (6 - x)^2 = 20$$
$$x^2 + 36 + x^2 - 12x - 20 = 0$$

$2x^2 - 12x + 16 = 0$ یا $x^2 - 6x + 8 = 0$

تجزی کرنے سے

$(x - 4)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 4$ یا $x = 2$

مساوات (iii) کے استعمال سے

$y = 6 - 4 = 2$ یا $y = 6 - 2 = 4$

پس نقطہ کے محددات $(4, 2)$ یا $(2, 4)$ ہیں۔

مشق 2.8

-1 دو مسلسل مثبت اعداد کا حاصل ضرب 182 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

-2 تین مسلسل مثبت اعداد کے مربعوں کا مجموعہ 77 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

-3 ایک عدد کے 5 گنا اور اس کے مربع کا مجموعہ 204 ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

-4 ایک عدد کے 3 گنا سے 5 کم اور 4 گنا سے 1 کم کا حاصل ضرب 7 ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

-5 ایک عدد اور اس کے معکوس کا فرق $\frac{15}{4}$ ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

-6 ایک مثبت صحیح عدد کے دو ہندسوں کے مربعوں کا مجموعہ 65 ہے اور عدد اپنے ہندسوں کے مجموعے کا 9 گنا ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

-7 ایک نقطہ کے محددات کا مجموعہ 9 اور ان کے مربعوں کا مجموعہ 45 ہے۔ نقطہ کے محددات معلوم کیجیے۔

-8 دو صحیح اعداد کا مجموعہ 9 اور ان کے مربعوں کا فرق بھی 9 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

-9 دو صحیح اعداد کا فرق 4 ہے اور ان کے مربعوں کا فرق 72 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

-10 ایک مستطیل کے اضلاع معلوم کیجیے جس کا احاطہ 80 سم اور اس کا رقبہ 375 مربع سم ہے۔

متفرق مشق 2

کثیر الانتخابی سوالات

-1 دیے گئے سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) اگر α, β مساوات $3x^2 + 5x - 2 = 0$ کے روٹس ہوں تو $\alpha + \beta$ برابر ہے۔

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{-5}{3}$ (d) $\frac{-2}{3}$

(ii) اگر α, β مساوات $7x^2 - x + 4 = 0$ کے روٹس ہوں تو $\alpha\beta$ برابر ہے۔

(a) $\frac{-1}{7}$ (b) $\frac{4}{7}$ (c) $\frac{7}{4}$ (d) $\frac{-4}{7}$

(iii) مساوات $4x^2 - 5x + 2 = 0$ کے روٹس ہیں۔

(a) غیر ناطق (b) غیر حقیقی (c) ناطق (d) کوئی نہیں

(iv) '1-' کے جذر المکعب ہیں۔

(a) $-1, -\omega, -\omega^2$ (b) $-1, \omega, -\omega^2$

(c) $-1, -\omega, \omega^2$ (d) $1, -\omega, -\omega^2$

(v) اکائی کے جذر المکعب کا مجموعہ ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 3

(vi) اکائی کے جذر المکعب کا حاصل ضرب ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 3

(vii) اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہو تو مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس ہوتے ہیں۔

(a) غیر ناطق (b) ناطق (c) غیر حقیقی (d) کوئی نہیں

(viii) اگر $b^2 - 4ac > 0$ لیکن مکمل مربع نہ ہو تو مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس ہیں۔

(a) غیر حقیقی (b) ناطق (c) غیر ناطق (d) کوئی نہیں

(ix) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ برابر ہے۔

(a) $\frac{1}{\alpha}$ (b) $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}$ (c) $\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}$ (d) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

(x) $\alpha^2+\beta^2$ برابر ہے۔

(a) $\alpha^2-\beta^2$ (b) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$

(c) $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ (d) $\alpha+\beta$

(xi) اکائی کے دو جذر المربع ہیں۔

(a) $1, -1$ (b) $1, \omega$ (c) $1, -\omega$ (d) ω, ω^2

(xii) مساوات $4x^2-4x+1=0$ کے روٹس ہیں۔

(a) برابر، حقیقی (b) نابرابر، حقیقی (c) غیر حقیقی (d) غیر ناطق

(xiii) اگر β، α مساوات $px^2+qx+r=0$ کے روٹس ہوں تو روٹس (Roots) ہوں تو 2α اور 2β کا مجموعہ ہے۔

(a) $\frac{-q}{p}$ (b) $\frac{r}{p}$ (c) $\frac{-2q}{p}$ (d) $-\frac{q}{2p}$

(xiv) اگر α, β مساوات $x^2-x-1=0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو 2α اور 2β کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

(a) -2 (b) 2 (c) 4 (d) -4

(xv) مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے روٹس کی اقسام کو ۔۔۔۔۔۔۔ کہا جاتا ہے۔

(a) روٹس کا مجموعہ (b) روٹس کا حاصل ضرب

(c) ترکیبی تقسیم (d) فرق کنندہ

(xvi) مساوات $ax^2+bx+c=0$ کا فرق کنندہ ہوتا ہے۔

(a) b^2-4ac (b) b^2+4ac (c) $-b^2+4ac$ (d) $-b^2-4ac$

2- درج ذیل سوالات کے مختصر جواب لکھیں۔

(i) مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس (Roots) کی اقسام پر بحث کیجیے۔

(a) $x^2+3x+5=0$ (b) $2x^2-7x+3=0$

(c) $x^2+6x-1=0$ (d) $16x^2-8x+1=0$

(ii) اگر $\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ہو تو ω^2 معلوم کیجیے۔

(iii) ثابت کریں کہ اکائی کے تمام جذر المکعب کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

(iv) اکائی کے غیر حقیقی جذر المکعب کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(v) ثابت کیجیے کہ $x^3+y^3=(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y)$

(vi) $\omega^{37} + \omega^{38} + 1$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(vii) $(1 - \omega + \omega^2)^6$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(viii) اگر "ω" اکائی کا جذر المکعب ہو تو ایسی مساوات بنائیں جس کے روٹس "3ω" اور "$3\omega^2$" ہوں۔

(ix) ترکیبی تقسیم کی مدد سے باقی اور حاصل قسمت معلوم کیجیے جبکہ $(x^3 + 3x^2 + 2) \div (x - 2)$

(x) ترکیبی تقسیم کی مدد سے ثابت کیجیے کہ $x^3 + x^2 - 7x + 2$ کا جزو ضربی $x - 2$ ہے۔

(xi) مساوات $2px^2 + 3qx - 4r = 0$ کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(xii) اگر α, β مساوات $x^2 - 4x + 3 = 0$ کے روٹس ہوں تو $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(xiii) اگر α, β مساوات $4x^2 - 3x + 6 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو معلوم کیجیے۔

(a) $\alpha^2 + \beta^2$ (b) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ (c) $\alpha - \beta$

(xiv) اگر α, β مساوات $x^2 - 5x + 7 = 0$ کے روٹس ہوں تو دیے ہوئے روٹس کی مساوات معلوم کیجیے۔

(a) $-\alpha, -\beta$ (b) $2\alpha, 2\beta$.

-3 خالی جگہ پُر کریں۔

(i) مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا فرق کنندہ __________ ہے۔

(ii) اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہو تو مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس __________ ہوتے ہیں۔

(iii) اگر $b^2 - 4ac > 0$ ہو تو مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس __________ ہوتے ہیں۔

(iv) اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہو تو مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس __________ ہوتے ہیں۔

(v) اگر $b^2 - 4ac > 0$ اور مکمل مربع ہو تو $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس __________ ہوتے ہیں۔

(vi) اگر $b^2 - 4ac > 0$ اور مکمل مربع نہ ہو تو $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس __________ ہوتے ہیں۔

(vii) اگر α, β مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو ان کا مجموعہ __________ ہوتا ہے۔

(viii) اگر α, β مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو ان کا حاصل ضرب ______ ہوتا ہے۔

(ix) اگر α, β مساوات $7x^2 - 5x + 3 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو ان کا مجموعہ __________ ہوتا ہے۔

(x) اگر α, β مساوات $5x^2 + 3x - 9 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو ان کا حاصل ضرب __________ ہوتا ہے۔

(xi) دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے لیے $\frac{1}{\alpha\beta}$ __________ کے برابر ہوتا ہے۔

(xii) اکائی کے جذر المکعب __________ ہیں۔

(xiii) مستعمل علامتوں میں اکائی کے جذر المکعب کا مجموعہ __________ ہوتا ہے۔

(xiv) اگر اکائی کے جذر المکعب $1, \omega, \omega^2$ ہوں تو ω^{-7}، __________ کے برابر ہوتا ہے۔

(xv) اگر α, β دو درجی مساوات کے روٹس(Roots) ہوں تو مساوات کو __________ یوں لکھا جاتا ہے۔

(xvi) اگر 2ω اور $2\omega^2$ مساوات کے روٹس(Roots) ہوں تو مساوات __________ ہوتی ہے۔

خلاصہ

- دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c$ کا فرق کنندہ "$b^2 - 4ac$" ہوتا ہے۔
- اکائی کے جذر المکعب 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ اور $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ہوتے ہیں۔
- اکائی کے غیر حقیقی جذر المکعب ω اور ω^2 ہیں۔
- اکائی کے جذر المکعب کی خصوصیات:

(a) اکائی کے جذر المکعب کا حاصل ضرب "1" کے برابر ہوتا ہے یعنی $1 \,.\, \omega \,.\, \omega^2 = \omega^3 = 1$

(b) اکائی کا ہر ایک غیر حقیقی جذر المکعب دوسرے کا معکوس ہے۔

(c) اکائی کا ہر ایک غیر حقیقی جذر المکعب دوسرے کے مربع (Square) کے برابر ہوتا ہے۔

(d) اکائی کے تمام جذر المکعب کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔ یعنی $1 + \omega + \omega^2 = 0$

- دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ کے روٹس (Roots)

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ اور } \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ ہیں۔

- دو درجی $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ کے روٹس (Roots) کا مجموعہ اور حاصل ضرب بالترتیب

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ اور } \alpha\beta = \frac{c}{a}$$ ہیں۔

- دو درجی مساوات کے روٹس پر مشتمل جملے جو تفاعل کو بیان کرتے ہیں۔ اگر روٹس کو بدلنے سے جملے کی قیمت تبدیل نہ ہو تو ایسے تفاعل کو سمیٹرک تفاعل کہتے ہیں۔
- اگر روٹس (Roots) دیئے ہوئے ہوں تو دو درجی مساوات بنتی ہے۔

$$x^2 - (\text{اصلوں کا مجموعہ})\,x + (\text{اصلوں کا حاصلِ ضرب}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - (\alpha + \beta)\,x + \alpha\beta = 0.$$

- جب کثیر رقمی کو یک درجی کثیر رقمی سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ تو حاصل قسمت اور باقی معلوم کرنے کے طریقہ کو ترکیبی تقسیم کہتے ہیں۔
- دو متغیروں میں دو مساواتیں جن کا حل سیٹ مشترک ہو ہمزاد مساواتیں کہلاتی ہیں۔