یونٹ 3

تغیرات

(VARIATIONS)

طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

- نسبت، تناسب اور تغیرات (راست اور معکوس) کی تعریف کرنا
- تیسرا، چوتھا، وسط اور مسلسل تناسب معلوم کرنا
- تناسب معلوم کرنے کے لیے عکس نسبت، ابدال نسبت، ترکیب نسبت تفصیل نسبت اور ترکیب و تفصیل نسبت کے مسئلوں کا استعمال کرنا
- مشترک تغیر کی تعریف
- مشترک تغیر سے متعلق سوالات کا حل کرنا
- تناسب پر مشتمل مشروط مساواتوں کو K- طریقہ کے استعمال سے حل کرنا
- روز مرہ زندگی میں تغیرات پر مشتمل سوالات کا حل

3.1 نسبت، تناسب اور تغیرات
(Ratio, Proportions and Variations)

3.1(i) (a) نسبت (b) تناسب اور (c) تغیرات (راست اور معکوس) کی تعریف کریں۔

(a) نسبت (Ratio)

دو ہم قسم مقداروں کے درمیان تعلق نسبت کہلاتا ہے۔ اگر a اور b دو ہم قسم مقداریں ہوں اور b صفر نہ ہو تو a اور b کی نسبت کو $a : b$ یا کسر میں $\frac{a}{b}$ لکھتے ہیں۔ یاد رہے کہ دونوں مقداروں کی پیمائش کی اکائی ایک ہی ہوتی ہے۔

مثلاً اگر ایک ہاکی کی ٹیم کھیل میں 4 میچ جیتی اور 5 میچ ہارتی ہے۔ تو میچوں میں جیت اور ہار کی نسبت 4:5 یا کسر میں $\frac{4}{5}$ ہوتی ہے۔

یاد رکھیے۔

(i) نسبت کے ارکان کی ترتیب اہم ہوتی ہے۔

(ii) نسبت $a : b$ میں پہلی رقم a (antecedent) کہلاتی ہے۔ اور دوسری رقم b (consequent) کہلاتی ہے۔

(iii) نسبت کی کوئی اکائی نہیں ہوتی۔

مثال 1: نسبت معلوم کریں۔

(i) 200 گرام سے 700 گرام　　(ii) 1 کلو میٹر سے 600 میٹر

حل: (i) 200 گرام سے 700 گرام کی نسبت

$$200 : 700 = \frac{200}{700} = \frac{2}{7} = 2 : 7$$

جبکہ $2 : 7$ نسبت $200 : 700$ کی آسان (مختصر) شکل ہے۔

(ii) 1 کلو میٹر سے 600 میٹر کی نسبت

کیونکہ　　1 کلو میٹر = 1000 میٹر

تب　　$1000 : 600 = \frac{1000}{600} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 5 : 3$

یا　　1 کلو میٹر : 600 میٹر $= 1000 : 600 = \frac{1000}{100} : \frac{600}{100}$

$$= 10 : 6 = 5 : 3$$

مثال 2: اگر نسبت $a+3:7+a$ اور $4:5$ برابر ہوں۔ تو a معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ نسبتیں $a+3:7+a$ اور $4:5$ برابر ہیں۔

اس لیے کسری شکل میں

$$\frac{a+3}{7+a}=\frac{4}{5}$$

$$5(a+3)=4(7+a)$$

$$5a+15=28+4a$$

$$5a-4a=28-15$$

$$a=13$$

پس دی ہوئی نسبتیں برابر ہوں گی اگر $a=13$ ہو۔

مثال 3: اگر نسبت $4:3$ کے ہر عدد میں 2 جمع کیا جائے۔ تو ہم ایک نئی نسبت $6:5$ حاصل ہوتی ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ دو اعداد کی نسبت $4:3$ ہے۔ نسبت کے ہر عدد کو x سے ضرب دیں تو اعداد $3x, 4x$ ہو جاتے ہیں اور نسبت $4x:3x$ ہو جاتی ہے۔

دی ہوئی شرط کے مطابق

$$\frac{3x+2}{4x+2}=\frac{5}{6}$$

$$6(3x+2)=5(4x+2) \quad \Rightarrow \quad 18x+12=20x+10$$

$$18x-20x=10-12 \quad \Rightarrow \quad -2x=-2 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

پس مطلوبہ اعداد درج ذیل ہیں۔

$4x=4(1)=4$ اور $3x=3(1)=3$

مثال 4: اگر $a:b=5:8$ ہو تو نسبت $3a+4b:5a+7b$ معلوم کیجیے۔

حل: دی ہوئی نسبت $a:b=5:8$ ہے جس کو کسر میں یوں لکھتے ہیں $\frac{a}{b}=\frac{5}{8}$

اب

$$3a+4b:5a+7b=\frac{3a+4b}{5a+7b}$$

شمار کنندہ اور مخرج کو b پر تقسیم کرنے سے

$$=\frac{\frac{3a+4b}{b}}{\frac{5a+7b}{b}}=\frac{3\left(\frac{a}{b}\right)+4\left(\frac{b}{b}\right)}{5\left(\frac{a}{b}\right)+7\left(\frac{b}{b}\right)}$$

$$=\frac{3\left(\frac{5}{8}\right)+4(1)}{5\left(\frac{5}{8}\right)+7(1)} \qquad \left(\because \frac{a}{b}=\frac{5}{8}\right)$$

$$= \frac{\frac{15}{8} + 4}{\frac{25}{8} + 7} = \frac{\frac{15 + 32}{8}}{\frac{25 + 56}{8}} = \frac{47}{81}$$

پس $3a + 4b : 5a + 7b = 47 : 81$

(b) تناسب (Proportion)

تناسب بیان کردہ دو نسبتوں کی برابری کو ظاہر کرتا ہے۔

اگر دو نسبتیں $a : b$ اور $c : d$ برابر ہوں تو ہم ان کو $a : b = c : d$ لکھ سکتے ہیں۔

پہلی اور آخری مقداروں a, d کو طرفین، جبکہ b, c کو وسطین کہتے ہیں۔ علامت کے طور پر a, b, c اور d کو اس طرح لکھتے ہیں۔ $a : b :: c : d$

$\Rightarrow \quad a : b = c : d$ یا $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

یعنی $ad = bc$

مثال 5: x معلوم کیجیے۔ اگر x کلوگرام : 20 کلوگرام :: 90 میٹر : 60 میٹر

حل: x کلوگرام : 20 کلوگرام :: 90 میٹر : 60 میٹر

یعنی $60 : 90 = 20 : x$

کیونکہ وسطین کی حاصل ضرب = طرفین کی حاصل ضرب

اس لیے $60x = 90 \times 20$

$$x = \frac{90 \times 20}{60} = 30$$

پس x، 30 کلوگرام کے برابر ہے۔

مثال 6: اگر 7 کلوگرام چینی کی قیمت 560 روپے ہو تو 15 کلوگرام چینی کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ 15 کلوگرام چینی کی قیمت x روپے ہے۔

تب تناسب کی شکل میں 15 کلوگرام : 7 کلوگرام :: x روپے : 560 روپے

یعنی $15 : 7 = x : 560$

کیونکہ وسطین کی حاصل ضرب = طرفین کی حاصل ضرب

$$15 \times 560 = 7x$$
$$7x = 15 \times 560$$
$$x = \frac{15 \times 560}{7} = 15(80) = 1200$$

پس 15 کلو گرام چینی کی قیمت 1200 روپے ہے۔

مشق 3.1

-1 مندرجہ ذیل کو نسبت $a : b$ اور کسر کی آسان (مختصر) شکل میں ظاہر کریں۔

(i) 1250 روپے : 750 روپے (ii) 3 میٹر : 450 سم

(iii) 2 کلو گرام 750 گرام : 4 کلو گرام (iv) 1 گھنٹہ : 27 منٹ 30 سکینڈ

(v) $75^\circ : 225^\circ$

-2 60 طلبا کی کلاس میں 25 لڑکیاں اور باقی لڑکے ہیں۔ نسبت معلوم کریں۔

(i) لڑکوں کی تمام طلبا سے (ii) لڑکوں کی لڑکیوں سے

-3 اگر $3(4x - 5y) = 2x - 7y$، تو نسبت $x : y$ معلوم کیجیے۔

-4 p کی قیمت معلوم کیجیے۔ اگر نسبتیں $2p + 5 : 3p + 4$ اور $3 : 4$ برابر ہوں۔

-5 اگر نسبتیں $3x + 1 : 6 + 4x$ اور $2 : 5$ برابر ہوں تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

-6 دو اعداد میں نسبت $5 : 8$ ہے۔ اگر ہر عدد میں 9 جمع کریں۔ تو ہم نئی نسبت $8 : 11$ حاصل کرتے ہیں۔ اعداد معلوم کیجیے۔

-7 اگر نسبت $4 : 13$ کے ہر عدد میں 10 جمع کریں تو ہم نئی نسبت $1 : 2$ حاصل کرتے ہیں۔ اعداد کیا ہیں؟

-8 اگر 5 کلو گرام آموں کی قیمت 250 روپے ہو تو 8 کلو گرام کی قیمت معلوم کیجیے۔

-9 اگر $a : b = 7 : 6$ تو $3a + 5b : 7b - 5a$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

-10 مکمل کریں۔

(i) اگر $\frac{24}{7} = \frac{6}{x}$ تو $4x =$ __________

(ii) اگر $\frac{5a}{3x} = \frac{15b}{y}$ تو $ay =$ __________

(iii) اگر $\frac{9pq}{2lm} = \frac{18p}{5m}$ تو $5q =$ __________

11- مندرجہ ذیل تناسب میں x کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $3x-2:4::2x+3:7$ (ii) $\frac{3x-1}{7}:\frac{3}{5}::\frac{2x}{3}:\frac{7}{5}$

(iii) $\frac{x-3}{2}:\frac{5}{x-1}::\frac{x-1}{3}:\frac{4}{x+4}$ (iv) $p^2+pq+q^2:x::\frac{p^3-q^3}{p+q}:(p-q)^2$

(v) $8-x:11-x::16-x:25-x$

(c) تغیر (Variation)

تمام سائنسی علوم میں تغیر کا لفظ بہت استعمال ہوتا ہے۔ تغیرات کی دو اقسام ہیں۔

(i) تغیر راست (ii) تغیر معکوس

(i) تغیر راست (Direct Variation)

اگر دو مقداروں کے درمیان تعلق اس طرح کا ہو کہ ایک مقدار کے بڑھنے (کم ہونے) سے دوسری مقدار اسی نسبت سے بڑھے (کم) ہو تو ایسا تعلق تغیر راست کہلاتا ہے۔ اس کا مطلب یہ بھی ہے کہ اگر ایک مقدار y راست تناسب میں ہے x کے۔ تو ہم کہتے ہیں کہ y تغیر راست ہے x کا اور اس کو $y \propto x$ یا $y = kx$ لکھتے ہیں۔ اس لیے

$$\frac{y}{x}=k \quad , \quad k\neq 0$$

$\propto$ تغیر کی علامت ہے۔ اسکو تناسب یا تغیر کی علامت کہتے ہیں۔ جبکہ $k \neq 0$ تغیر کا مستقل ہے۔

مثلاً (i) جتنی گاڑی کی رفتار تیز ہو گی اتنا زیادہ فاصلہ وہ طے کرے گی۔

(ii) جتنا دائرے کا رداس چھوٹا ہو گا اتنا ہی محیط چھوٹا ہو گا۔

مثال 1: حالت سکون میں بلندی d سے گرنے والے جسم اور وقت t کے مربع کے راست تناسب میں تعلق معلوم کیجیے۔ جبکہ ہوا کی مزاحمت نہ ہو۔ اگر 1 سیکنڈ $= t$، فاصلہ 16 فٹ $= d$ ہو تو k معلوم کیجیے۔ d اور t کے درمیان تعلق بھی اخذ کیجیے۔

حل: کیونکہ t وقت میں حالت سکون سے گرنے والے جسم کی بلندی d ہے۔ تو سوال کی شرط کے مطابق

$$d \propto t^2$$

اس لیے (i) $$d = kt^2$$

چونکہ $d =$ 16 فٹ اور 1 سیکنڈ $= t$

تو مساوات (i) سے

$$16 = k(1)^2$$

یعنی $$k = 16$$

مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$d = 16t^2$$

جو کہ وقت t اور فاصلہ d کے درمیان تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔

سرگرمی

اوپر دی گئی مساوات میں (i) وقت t معلوم کیجیے، جب 64 فٹ $= d$

(ii) فاصلہ d معلوم کیجیے، جب 3 سیکنڈ $= t$

مثال 2: اگر x اور y میں تغیر راست ہو تو معلوم کیجیے۔

(a) x اور y میں مساوات

(b) تغیر کا مستقل k، x اور y میں تعلق جب $x = 7$ اور $y = 6$

(c) y کی قیمت، جب $x = 21$

حل: (a) دیے ہوئے x اور y میں تغیر راست ہے۔ اس لیے

$y \propto x$

اگر k تغیر کا مستقل ہو تو

$y = kx$ (i)

(b) مساوات (i) میں $x = 7$ اور $y = 6$ درج کرنے سے

مساوات (i) میں $k = \frac{6}{7}$ درج کرنے سے

$y = \frac{6}{7}x$ (ii)

(c) اب مساوات (ii) میں $x = 21$ درج کرنے سے

$y = \frac{6}{7}(21) = 18$

مثال 3: اگر A اور r کے مربع میں تغیر راست دیا ہوا ہو اور $A = \frac{1782}{7}$ مربع سم، جب 9 سم $= r$

اگر 14 سم $= r$ تو A کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ A اور r کے مربع میں تغیر راست ہے۔

اس لیے $A \propto r^2$

یا $A = kr^2$ (i)

$\frac{1782}{7} = k(9)^2$

$\frac{1782}{7 \times 81} = k$ یا $k = \frac{22}{7}$

مساوات (i) میں $k = \frac{22}{7}$ اور 14 سم $= r$ درج کرنے سے

$$A = \frac{22}{7}(14)^2 = \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 616$$

پس A، 616 مربع سم ہے۔

مثال 4: اگر y اور x کے مکعب میں تغیر راست دیا ہوا ور $y = 81$ جب $x = 3$، پس y کی قیمت معلوم کیجیے جب $x = 5$

حل: y اور x کے مکعب میں تغیر راست دیا ہوا ہے۔ اس لیے

یعنی (i) $y \propto x^3$ (جبکہ k مستقل ہے)

$y = kx^3$

$x = 3$ اور $y = 81$ مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$81 = k(3)^3 \quad \Rightarrow \quad 27k = 81 \quad \Rightarrow \quad k = 3$$

$k = 3$ اور $x = 5$ مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$y = 3(5)^3 = 375$$

(ii) تغیر معکوس (Inverse Variation)

اگر دو مقداروں کے درمیان تعلق اس طرح کا ہو کہ ایک مقدار کے بڑھنے (کم ہونے) سے دوسری مقدار اسی نسبت سے کم ہو (بڑھے) تو ایسا تعلق **تغیر معکوس** کہلاتا ہے۔

اس کا مطلب یہ بھی ہے کہ ایک مقدار y دوسری مقدار x کے لحاظ سے تغیر معکوس میں ہے۔

اس کو ہم y تناسب معکوس ہے x کا یا تغیر معکوس ہے x کا پڑھتے ہیں، اور $y \propto \frac{1}{x}$ یا $y = \frac{k}{x}$ لکھتے ہیں۔

یعنی $xy = k$، جبکہ $k \neq 0$ تغیر کا مستقل ہے۔

مثال 1: اگر x اور y تغیر معکوس میں ہوں اور $y = 8$ جب $x = 4$، تو y معلوم کیجیے جب $x = 16$

حل: کیونکہ x اور y تغیر معکوس میں ہیں اس لیے

$$y \propto \frac{1}{x}$$

یا (i) $$y = \frac{k}{x}$$

(ii) $$\Rightarrow \quad xy = k$$

$x = 4$ اور $y = 8$ مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$$k = (x)(y) = (4)(8) = 32$$

$k = 32$ اور $x = 16$ مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$y = \frac{32}{16} = 2$$

مثال 2: اگر y اور x^2 تغیر معکوس میں ہوں اور $y = 16$ جب $x = 5$ ہو تو x معلوم کیجیے جب $y = 100$

حل: چونکہ y اور x^2 تغیر معکوس میں ہیں۔ اس لیے $y = \frac{k}{x^2}$ یا $y \propto \frac{1}{x^2}$

$$k = x^2y \qquad \text{(i)}$$

$x = 5$ اور $y = 16$ کی قیمتیں مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$k = (5)^2 \times 16 = 400$$

$k = 400$ اور $y = 100$ کی قیمتیں مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$400 = 100x^2$$

$$x^2 = \frac{400}{100} = 4 \qquad \text{یا} \qquad x = \pm 2$$

مشق 3.2

-1 اگر x اور y تغیر راست میں ہوں اور $y = 8$ جبکہ $x = 2$ ہو تو معلوم کیجیے:

(i) y کی قیمت x میں (ii) y جبکہ $x = 5$ (iii) x جبکہ $y = 28$

-2 اگر $y \propto x$ ہو اور $y = 7$ جب $x = 3$ ہو تو معلوم کیجیے۔

(i) y کی قیمت x میں (ii) x جبکہ $y = 35$ اور y جبکہ $x = 18$ ہے۔

-3 اگر $T \propto R$ ہو اور $R = 5$ جبکہ $T = 8$، تو R اور T میں مساوات معلوم کیجیے۔ نیز R معلوم کریں جب $T = 64$ اور T معلوم کیجیے جبکہ $R = 20$ ہو۔

-4 اگر $R \propto T^2$ اور $R = 8$ جب $T = 3$ ہو، تو R معلوم کیجیے جبکہ $T = 6$ ہو۔

-5 اگر $V \propto R^3$ اور $V = 5$ جب $R = 3$ ہو، تو R معلوم کیجیے جبکہ $V = 625$ ہو۔

-6 اگر w اور u^3 میں تغیر راست ہے اور $w = 81$ جب $u = 3$ ہو۔ w معلوم کیجیے جبکہ $u = 5$ ہو۔

-7 اگر y اور x میں تغیر معکوس ہو اور $y = 7$ جب $x = 2$ ہو، y معلوم کیجیے جبکہ $x = 126$ ہو۔

-8 اگر $y \propto \frac{1}{x}$ اور $y = 4$ جب $x = 3$ ہو تو x معلوم کیجیے جبکہ $y = 24$ ہو۔

-9 اگر $w \propto \frac{1}{z}$ اور $w = 5$ جب $z = 7$ ہو تو w معلوم کیجیے جبکہ $z = \frac{175}{4}$ ہو۔

-10 $A \propto \frac{1}{r^2}$ اور $A = 2$ جب $r = 3$ ہے، r معلوم کیجیے جبکہ $A = 72$ ہو۔

-11 $a \propto \frac{1}{b^2}$ اور $a = 3$ جب $b = 4$ ہے، a معلوم کیجیے جبکہ $b = 8$ ہو۔

-12 $V \propto \frac{1}{r^3}$ اور $V = 5$ جب $r = 3$ ہے۔ V معلوم کیجیے جب $r = 6$ اور r معلوم کیجیے جبکہ $V = 320$ ہو۔

-13 $m \propto \frac{1}{n^3}$ اور $m = 2$ جبکہ $n = 4$ ہو تو m معلوم کیجیے جب $n = 6$ اور n معلوم کیجیے جب $m = 432$ ہو۔

3.1(ii) تیسرا، چوتھا وسطِ فی التناسب اور مسلسل تناسب

ہم پہلے ہی تناسب سے واقف ہیں کہ اگر چار مقداریں a، b، c اور d تو ناسب میں ہوں تو $a : b :: c : d$

یعنی وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب

تیسرا متناسب (Third Proportional)

اگر تین مقداروں a،b اور c میں اس طرح کا تعلق ہو کہ $a : b :: b : c$

تو c تیسرا متناسب کہلاتا ہے۔

مثال 1: $x + y$ اور $x^2 - y^2$ کا تیسرا متناسب معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ تیسرا متناسب c ہے تو

$$x + y : x^2 - y^2 :: x^2 - y^2 : c$$

$$c\,(x + y) = (x^2 - y^2)\,(x^2 - y^2)$$

$$c = \frac{(x^2 - y^2)\,(x^2 - y^2)}{x + y} = \frac{(x^2 - y^2)\,(x - y)\,(x + y)}{(x + y)}$$

$$c = (x^2 - y^2)\,(x - y) = (x + y)\,(x - y)^2$$

چوتھا متناسب (Fourth Proportional)

اگر مقداروں a, b, c اور d میں تعلق اس طرح ہو کہ

$$a : b :: c : d$$

تو d چوتھا متناسب کہلاتا ہے۔

مثال 2: $a^3 + b^3$, $a + b$ اور $a^2 + ab + b^2$ کا چوتھا متناسب معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ چوتھا متناسب x ہے تو

$$(a^3 - b^3) : (a + b) :: (a^2 + ab + b^2) : x$$

یعنی

$$x\,(a^3 - b^3) = (a + b)\,(a^2 + ab + b^2)$$

$$x = \frac{(a + b)\,(a^2 + ab + b^2)}{a^3 - b^3} = \frac{(a + b)\,(a^2 + ab + b^2)}{(a - b)\,(a^2 + ab + b^2)}$$

یا

$$x = \frac{a + b}{a - b}$$

وسطی التناسب (Mean Proportional)

اگر تین مقداروں a, b اور c میں تعلق اس طرح ہو کہ $a : b :: b : c$
تو "b" وسطی التناسب کہلاتا ہے۔

مثال 3: $9p^6q^4$ اور r^8 کا وسطی التناسب معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ m وسطی التناسب ہے تو $9p^6q^4 : m :: m : r^8$

یا $m \cdot m = 9p^6q^4 (r^8)$

$$m^2 = 9p^6q^4r^8$$

$$m = \pm\sqrt{9p^6q^4r^8} = \pm 3p^3q^2r^4$$

مسلسل تناسب (Continued Proportion)

اگر تین مقداروں a, b اور c میں تعلق اس طرح ہو کہ $a : b :: b : c$
جب کہ a پہلا تناسب ہو، b وسطی التناسب ہو اور c تیسرا متناسب ہو تو a, b اور c مسلسل تناسب میں ہوتے ہیں۔

مثال 4: اگر 12, p اور 3 مسلسل تناسب میں ہوں۔ تو p معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ 12, p اور 3 میں مسلسل تناسب ہے۔ اس لیے

$$12 : p :: p : 3$$

$$p \cdot p = (12)(3) \Rightarrow p^2 = 36$$

پس $p = \pm 6$

مشق 3.3

-1 تیسرا متناسب معلوم کیجیے۔

(i) $6, 12$ (ii) $a^3, 3a^2$

(iii) $a^2 - b^2, a - b$ (iv) $(x - y)^2, x^3 - y^3$

(v) $(x + y)^2, x^2 - xy - 2y^2$ (vi) $\dfrac{p^2 - q^2}{p^3 + q^3}, \dfrac{p - q}{p^2 - pq + q^2}$

-2 چوتھا متناسب معلوم کیجیے۔

(i) $5, 8, 15$ (ii) $4x^4, 2x^3, 18x^5$

(iii) $15a^5b^6, 10a^2b^5, 21a^3b^3$ (iv) $x^2 - 11x + 24, (x - 3), 5x^4 - 40x^3$

(v) $p^3 + q^3, p^2 - q^2, p^2 - pq + q^2$

(vi) $(p^2 - q^2)(p^2 + pq + q^2), p^3 + q^3, p^3 - q^3$

3- وسط فی التناسب معلوم کیجیے۔

(i) 20, 45 (ii) $20x^3y^5, 5x^7y$

(iii) $15p^4qr^3, 135q^5r^7$ (iv) $x^2-y^2, \frac{x-y}{x+y}$

4- مندرجہ ذیل میں مسلسل تناسب ہے۔ دیے گئے متغیر کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) 5, p, 45 (ii) 8, x, 18

(iii) 12, $3p-6$, 27 (iv) 7, $m-3$, 28

3.2 تناسب کے مسئلے (Theorems on Proportions)

اگر چار مقداریں a، b، c اور d تناسب میں ہوں تو کسور کی خصوصیات سے بہت سی دوسری مفید خصوصیات اخذ کی جا سکتی ہیں۔

(1) مسئلہ عکس نسبت (Theorem of Invertendo)

اگر $a:b=c:d$ ہو تو $b:a=d:c$ ہوتا ہے۔

مثال 1: اگر $3m:2n=p:2q$ ہو تو ثابت کریں $2n:3m=2q:p$

حل: چونکہ $3m:2n=p:2q$ اس لیے

$$\frac{3m}{2n}=\frac{p}{2q}$$

مسئلہ عکس نسبت کی رو سے

$$\frac{2n}{3m}=\frac{2q}{p}$$

پس $2n:3m=2q:p$

(2) مسئلہ ابدال نسبت (Theorem of Alternando)

اگر $a:b=c:d$ تو $a:c=b:d$

مثال 2: اگر $3p+1:2q=5r:7s$ تو ثابت کیجیے کہ $3p+1:5r=2q:7s$

حل: دیا ہوا ہے کہ $3p+1:2q=5r:7s$

اس لیے

$$\frac{3p+1}{2q}=\frac{5r}{7s}$$

مسئلہ ابدال کی رو سے

$$\frac{3p+1}{5r}=\frac{2q}{7s}$$

پس $3p+1:5r=2q:7s$

(3) مسئلہ ترکیب نسبت (Theorem of Componendo)

اگر $a : b = c : d$ تو

(i) $a + b : b = c + d : d$

اور (ii) $a : a + b = c : c + d$

مثال 3: اگر $m + 3 : n = p : q - 2$ ہو تو ثابت کیجیے۔ $m + n + 3 : n = p + q - 2 : q - 2$

حل: چونکہ $m + 3 : n = p : q - 2$ اس لیے

$$\frac{m+3}{n} = \frac{p}{q-2}$$

مسئلہ ترکیب نسبت کی رو سے
$$\frac{(m+3)+n}{n} = \frac{p+(q-2)}{q-2}$$

یا
$$\frac{m+n+3}{n} = \frac{p+q-2}{q-2}$$

پس
$$m + n + 3 : n = p + q - 2 : q - 2$$

(4) مسئلہ تفصیل نسبت (Theorem of Dividendo)

اگر $a : b = c : d$ ہو تو

(i) $a - b : b = c - d : d$

اور (ii) $a : a - b = c : c - d$

مثال 4: اگر $m + 1 : n - 2 = 2p + 3 : 3q + 1$ ہو تو ثابت کیجیے۔

$$m - n + 3 : n - 2 = 2p - 3q + 2 : 3q + 1$$

حل: فرض کریں کہ $m + 1 : n - 2 = 2p + 3 : 3q + 1$ تو
$$\frac{m+1}{n-2} = \frac{2p+3}{3q+1}$$

مسئلہ تفصیل نسبت کی رو سے
$$\frac{(m+1)-(n-2)}{n-2} = \frac{(2p+3)-(3q+1)}{3q+1}$$

یا
$$\frac{m-n+3}{n-2} = \frac{2p-3q+2}{3q+1}$$

پس
$$m - n + 3 : n - 2 = 2p - 3q + 2 : 3q + 1$$

(5) مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت (Theorem of Componendo-dividendo)

اگر $a : b = c : d$ ہو تو

(i) $a + b : a - b = c + d : c - d$

اور (ii) $a - b : a + b = c - d : c + d$

مثال 5: اگر $m : n = p : q$ ہو تو ثابت کیجیے۔

$$3m + 7n : 3m - 7n = 3p + 7q : 3p - 7q$$

حل: چونکہ $m : n = p : q$

یا $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$

طرفین کو $\frac{3}{7}$ سے ضرب دینے سے $\frac{3m}{7n} = \frac{3p}{7q}$

مسئلہ ترکیب و تفصیل کی رو سے $\frac{3m + 7n}{3m - 7n} = \frac{3p + 7q}{3p - 7q}$

پس $3m + 7n : 3m - 7n = 3p + 7q : 3p - 7q$

مثال 6: اگر $5m + 3n : 5m - 3n = 5p + 3q : 5p - 3q$ ہو تو ثابت کیجیے۔ $m : n = p : q$

حل: فرض کریں کہ $5m + 3n : 5m - 3n = 5p + 3q : 5p - 3q$

یا $\frac{5m + 3n}{5m - 3n} = \frac{5p + 3q}{5p - 3q}$

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{(5m + 3n) + (5m - 3n)}{(5m + 3n) - (5m - 3n)} = \frac{(5p + 3q) + (5p - 3q)}{(5p + 3q) - (5p - 3q)}$$

$$\frac{5m + 3n + 5m - 3n}{5m + 3n - 5m + 3n} = \frac{5p + 3q + 5p - 3q}{5p + 3q - 5p + 3q}$$

$$\frac{10m}{6n} = \frac{10p}{6q}$$

طرفین کو $\frac{6}{10}$ سے ضرب دینے سے $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$

یعنی $m : n = p : q$

مثال 7: اگر $m = \frac{6pq}{p + q}$ ہو تو $\frac{m + 2q}{m - 2q} + \frac{m + 3p}{m - 3p}$ کی قیمت مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ $m = \frac{6pq}{p + q}$

یا $m = \frac{(3p)(2q)}{p + q}$ (i)

اس لیے $\dfrac{m}{3p} = \dfrac{2q}{p+q}$

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{m+3p}{m-3p} = \frac{2q+(p+q)}{2q-(p+q)} = \frac{2q+p+q}{2q-p-q}$$

$$\frac{m+3p}{m-3p} = \frac{p+3q}{q-p} \qquad \text{(ii)}$$

اب مساوات (i) سے $\dfrac{m}{2q} = \dfrac{3p}{p+q}$

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{m+2q}{m-2q} = \frac{3p+(p+q)}{3p-(p+q)} = \frac{3p+p+q}{3p-p-q}$$

$$\frac{m+2q}{m-2q} = \frac{4p+q}{2p-q} \qquad \text{(iii)}$$

(ii) اور (iii) کو جمع کرنے سے

$$\frac{m+3p}{m-3p} + \frac{m+2q}{m-2q} = \frac{p+3q}{q-p} + \frac{4p+q}{2p-q} = -\frac{p+3q}{p-q} + \frac{4p+q}{2p-q}$$

$$= \frac{-(p+3q)(2p-q)+(p-q)(4p+q)}{(p-q)(2p-q)}$$

$$= \frac{-2p^2-5pq+3q^2+4p^2-3pq-q^2}{(p-q)(2p-q)}$$

$$= \frac{2p^2-8pq+2q^2}{(p-q)(2p-q)} = \frac{2(p^2-4pq+q^2)}{(p-q)(2p-q)}$$

مثال 8: مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت استعمال کرتے ہوئے مساوات $\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}} = \dfrac{4}{3}$ کو حل کریں۔

حل: مساوات $\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}} = \dfrac{4}{3}$ دی ہوئی ہے۔

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}} = \frac{4+3}{4-3}$$

$$\frac{\cancel{2}\sqrt{x+3}}{\cancel{2}\sqrt{x-3}} = \frac{7}{1} \Rightarrow \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} = 7$$

طرفین کا مربع لینے سے

$$\frac{x+3}{x-3} = 49$$

$$x + 3 = 49\,(x - 3) \quad \Rightarrow x + 3 = 49x - 147 \quad \Rightarrow x - 49x = -147 - 3$$

$$-48x = -150 \quad \Rightarrow 48x = 150 \quad \Rightarrow x = \frac{150}{48} = \frac{25}{8}$$

مثال 9: مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کے استعمال سے مساوات $\frac{(x+3)^2 - (x-5)^2}{(x+3)^2 + (x-5)^2} = \frac{4}{5}$ کو حل کیجیے۔

حل: مساوات $\frac{(x+3)^2 - (x-5)^2}{(x+3)^2 + (x-5)^2} = \frac{4}{5}$ دی ہوئی ہے۔

مسئلہ ترکیب و تفصیل کی رو سے

$$\frac{(x+3)^2 - (x-5)^2 + (x+3)^2 + (x-5)^2}{(x+3)^2 - (x-5)^2 - (x+3)^2 - (x-5)^2} = \frac{4+5}{4-5}$$

$$\frac{2(x+3)^2}{-2(x-5)^2} = \frac{9}{-1} \quad \Rightarrow \left(\frac{x+3}{x-5}\right)^2 = (\pm 3)^2$$

جذر المربع لینے سے

$$\frac{x+3}{x-5} = \pm 3$$

$$\frac{x+3}{x-5} = 3$$

$$x + 3 = 3(x - 5)$$

$$x + 3 = 3x - 15$$

$$-2x = -18$$

$$x = 9$$

یا

$$\frac{x+3}{x-5} = -3$$

$$x + 3 = -3(x - 5)$$

$$x + 3 = -3x + 15$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

پس حل سیٹ $\{3, 9\}$ ہے۔

مشق 3.4

-1 اگر $a : b = c : d$ تو ثابت کیجیے کہ

(i) $\frac{4a+5b}{4a-5b} = \frac{4c+5d}{4c-5d}$

(ii) $\frac{2a+9b}{2a-9b} = \frac{2c+9d}{2c-9d}$

(iii) $\frac{ac^2+bd^2}{ac^2-bd^2} = \frac{c^3+d^3}{c^3-d^3}$

(iv) $\frac{a^2c+b^2d}{a^2c-b^2d} = \frac{ac^2+bd^2}{ac^2-bd^2}$

(v) $pa + qb : pa - qb = pc + qd : pc - qd$

(vi) $\dfrac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\dfrac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$

(vii) $\dfrac{2a+3b+2c+3d}{2a+3b-2c-3d}=\dfrac{2a-3b+2c-3d}{2a-3b-2c+3d}$

(viii) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{ac+bd}{ac-bd}$

-2 مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت استعمال کرتے ہوئے

(i) $\dfrac{x+2y}{x-2y}+\dfrac{x+2z}{x-2z}$ کی قیمت معلوم کیجیے اگر $x=\dfrac{4yz}{y+z}$ ہو۔

(ii) $\dfrac{m+5n}{m-5n}+\dfrac{m+5p}{m-5p}$ کی قیمت معلوم کیجیے اگر $m=\dfrac{10np}{n+p}$ ہو۔

(iii) $\dfrac{x-6a}{x+6a}-\dfrac{x+6b}{x-6b}$ کی قیمت معلوم کیجیے اگر $x=\dfrac{12ab}{a-b}$ ہو۔

(iv) $\dfrac{x-3y}{x+3y}-\dfrac{x+3z}{x-3z}$ کی قیمت معلوم کیجیے اگر $x=\dfrac{3yz}{y-z}$ ہو۔

(v) $\dfrac{s-3p}{s+3p}+\dfrac{s+3q}{s-3q}$ کی قیمت معلوم کیجیے اگر $s=\dfrac{6pq}{p-q}$ ہو۔

(vi) $\dfrac{(x-2)^2-(x-4)^2}{(x-2)^2+(x-4)^2}=\dfrac{12}{13}$ کو حل کریں۔

(vii) $\dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}}=2$ کو حل کریں۔

(viii) $\dfrac{\sqrt{x^2+8p^2}-\sqrt{x^2-p^2}}{\sqrt{x^2+8p^2}+\sqrt{x^2-p^2}}=\dfrac{1}{3}$ کو حل کریں۔

(ix) $\dfrac{(x+5)^3-(x-3)^3}{(x+5)^3+(x-3)^3}=\dfrac{13}{14}$ کو حل کریں۔

3.3(i) مشترک تغیر (Joint variation)

ایک یا ایک سے زیادہ متغیرات میں راست اور معکوس تغیروں کے ملنے سے **مشترک تغیر** بنتا ہے۔

اگر ایک متغیر y کا x کے ساتھ تغیر راست اور z کے ساتھ تغیر معکوس ہو تو $y \propto x$ اور $y \propto \dfrac{1}{z}$

مشترک تغیر میں، ہم اس کو اس طرح لکھتے ہیں۔ $y \propto \dfrac{x}{z}$

یعنی $y = k\dfrac{x}{z}$

جبکہ $k \neq 0$ تغیر کا مستقل ہے۔

مثلاً نیوٹن کے قانون کششِ ثقل کے مطابق، اگر ایک جسم سے دوسرے پر لگائی جانے والی قوت G، جو کہ اجسام کی کمیتوں m_1, m_2 کے حاصل ضرب میں تغیر راست اور ان کے درمیانی فاصلہ d کے مربع میں تغیر معکوس ہو۔

تو $$G \propto \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

یا (جبکہ $k \neq 0$ مستقل ہے) $$G = k\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

3.3(ii) مشترک تغیر کے متعلق سوالات (Problems related to joint variation)

مشترک تغیر سے متعلق سوالات کو حل کرنے کے طریقے کی وضاحت مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1: اگر y، x^2 اور z میں مشترک تغیر اور $y = 6$ جب $x = 6$، $z = 9$ ہو۔ y کو بطور x اور z کا تفاعل لکھیے اور y کی قیمت معلوم کیجیے جب $x = -8$ اور $z = 12$ ہو۔

حل: چونکہ y کا x^2 اور z میں مشترک تغیر ہے، اس لیے

$$y \propto x^2 z$$

یعنی $$y = kx^2 z \qquad \text{(i)}$$

مساوات (i) میں $y = 6, x = 4, z = 9$ درج کرنے سے

$$6 = k(4)^2(9)$$

$$\frac{6}{16 \times 9} = k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{24}$$

$$y = \frac{1}{24}x^2 z \qquad \text{(ii)}$$

اب مساوات (ii) میں $x = -8, z = 12$ درج کرنے سے

$$y = \frac{1}{24}(-8)^2(12) = 32$$

مثال 2: p کا q اور r^2 میں تغیر راست ہے اور s اور t^2 میں تغیر معکوس ہے۔ $p = 40$ جب $q = 8, r = 5,$ $s = 3, t = 2$، p کو بصورت q، r، s اور t معلوم کیجیے نیز p کی قیمت معلوم کیجیے جب $q = -2, r = 4, s = 3$ اور $t = -1$ ہو۔

حل: دی ہوئی شرط کے مطابق

$$p \propto \frac{qr^2}{st^2}$$

$$p = k\frac{qr^2}{st^2} \qquad \text{(i)}$$

$p = 40$، $q = 8$، $r = 5$، $s = 3$ اور $t = 2$ مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$40 = k\,\frac{(8)\,(5)^2}{3(2)^2}$$

$$\frac{40 \times 3 \times 4}{8 \times 25} = k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{12}{5}$$

تو $k = \frac{r}{2}$ رکھنے سے مساوات (i) ہو جاتی ہے۔ $p = \frac{12}{5}\;\frac{qr^2}{st^2}$

اب $q = -2$، $r = 4$، $s = 3$ اور $t = -1$ اوپر دی ہوئی مساوات میں درج کرنے سے

$$p = \frac{12}{5}\;\frac{(-2)\,(4)^2}{(3)\,(-1)^2} = -\,\frac{128}{5}$$

مشق 3.5

1- اگر s کا u^2 سے تغیر راست اور v سے تغیر معکوس اور $s = 7$ جب $u = 3$, $v = 2$ ہو۔
s کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $u = 6$ اور $v = 10$ ہو۔

2- اگر w کا x, y^2 اور z میں تغیر مشترک ہو اور $w = 5$ جب $x = 2$, $y = 3$, $z = 10$ ہو۔
w معلوم کیجیے جبکہ $x = 4$, $y = 7$ اور $z = 3$ ہو۔

3- اگر y کا x^3 سے تغیر راست اور z^2، t میں تغیر معکوس ہو اور $y = 16$ جب $x = 4$, $z = 2$, $t = 3$۔ y کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $x = 2$, $z = 3$ اور $t = 4$ ہو۔

4- اگر u کا x^2 سے تغیر راست اور حاصل ضرب yz^3 سے تغیر معکوس ہو اور $u = 2$ جب $x = 8$, $y = 7$, $z = 2$ ہو۔ $x = 6$, $y = 3$, $z = 2$ ہو کی u قیمت معلوم کیجیے جبکہ $x = 6$، $y = 3$، $z = 2$ ہو۔

5- اگر v کا حاصل ضرب xy^3 سے تغیر راست اور z^2 سے تغیر معکوس ہو اور $v = 27$ جب $x = 7$، $y = 6$، $z = 7$ ہو۔
v کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $x = 6$، $y = 2$، $z = 3$ ہو۔

6- اگر w کا u کے مکعب سے تغیر معکوس ہو اور $w = 5$ جبکہ $u = 3$ ہو۔ w معلوم کیجیے جب $u = 6$ ہو۔

3.4 K- طریقہ (K-Method)

(i) 3.4 k- طریقہ کے استعمال سے تناسب پر مشتمل مشروط مساواتوں کو ثابت کرنا۔

اگر $a : b :: c : d$ ایک تناسب ہو تو ہر نسبت k کے برابر اس طرح رکھنے سے

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

$\frac{a}{b} = k$ اور $\frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk$ اور $c = dk$

اوپر دی گئی مساواتوں کے استعمال سے ہم تناسب سے متعلق بعض سوالات کو زیادہ آسانی سے حل کر سکتے ہیں۔

یہ طریقہ، k-طریقہ کہلاتا ہے۔ ہم k- طریقہ کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کرتے ہیں۔

مثال 1: اگر $a : b = c : d$ تو ثابت کیجیے کہ $\frac{3a+2b}{3a-2b} = \frac{3c+2d}{3c-2d}$

حل:

$a : b = c : d$

فرض کریں کہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

تب $a = bk$ اور $c = dk$

ثابت کرنے کے لیے $\frac{3a+2b}{3a-2b} = \frac{3c+2d}{3c-2d}$

اب $L.H.S = \frac{3a+2b}{3a-2b} = \frac{3kb+2b}{3kb-2b} = \frac{b(3k+2)}{b(3k-2)}$

$= \frac{3k+2}{3k-2}$ (i)

نیز $R.H.S = \frac{3c+2d}{3c-2d} = \frac{3kd+2d}{3kd-2d} = \frac{d(3k+2)}{d(3k-2)}$

$= \frac{3k+2}{3k-2}$ (ii)

اس لیے $L.H.S = R.H.S$

یعنی $\frac{3a+2b}{3a-2b} = \frac{3c+2d}{3c-2d}$

مثال 2: اگر $a : b = c : d$ تو ثابت کیجیے کہ $pa + qb : ma - nb = pc + qd : mc - nd$

حل: فرض کریں کہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

تب $a = bk$ اور $c = dk$

$L.H.S = pa + qb : ma - nb = \frac{pa+qb}{ma-nb} = \frac{pkb+qb}{mkb-nb}$

$= \frac{b(pk+q)}{b(mk-n)} = \frac{pk+q}{mk-n}$

$$\text{R.H.S} = pc + qd : mc - nd = \frac{pc + qd}{mc - nd} = \frac{pkd + qd}{mkd - nd} \qquad (c = kd)$$

$$= \frac{d(pk + q)}{d(mk - n)} = \frac{pk + q}{mk - n}$$

یعنی $pa + qb : ma - nb = pc + qd : mc - nd$

مثال 3: اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $\frac{a^3 + c^3 + e^3}{b^3 + d^3 + f^3} = \frac{ace}{bdf}$

حل: فرض کریں کہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

تب $\frac{a}{b} = k , \frac{c}{d} = k$ اور $\frac{e}{f} = k$

یعنی $a = bk , c = dk$ اور $e = fk$

ثابت کرنے کے لیے $\frac{a^3 + c^3 + e^3}{b^3 + d^3 + f^3} = \frac{ace}{bdf}$

اب

$$\text{L.H.S} = \frac{a^3 + c^3 + e^3}{b^3 + d^3 + f^3} = \frac{(bk)^3 + (dk)^3 + (fk)^3}{b^3 + d^3 + f^3}$$

$$= \frac{b^3k^3 + d^3k^3 + f^3k^3}{b^3 + d^3 + f^3} = k^3\left(\frac{b^3 + d^3 + f^3}{b^3 + d^3 + f^3}\right) = k^3$$

نیز

$$\text{R.H.S} = \frac{ace}{bdf} = \frac{(bk)\,(dk)\,(fk)}{bdf} = k^3\frac{bdf}{bdf} = k^3$$

اس لیے $\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

یعنی $\frac{a^3 + c^3 + e^3}{b^3 + d^3 + f^3} = \frac{ace}{bdf}$

مثال 4: اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $\frac{a^2b + c^2d + e^2f}{ab^2 + cd^2 + ef^2} = \frac{a + c + e}{b + d + f}$

حل: فرض کریں کہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

$a = bk, c = dk, e = fk$

ثابت کرنے کے لیے $\frac{a^2b + c^2d + e^2f}{ab^2 + cd^2 + ef^2} = \frac{a + c + e}{b + d + f}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{a^2b + c^2d + e^2f}{ab^2 + cd^2 + ef^2}$$

$$= \frac{(bk)^2b + (dk)^2d + (fk)^2f}{(bk)b^2 + (dk)d^2 + (fk)f^2} = \frac{k^2b^3 + k^2d^3 + k^2f^3}{kb^3 + kd^3 + kf^3}$$

$$= \frac{k^2(b^3 + d^3 + f^3)}{k(b^3 + d^3 + f^3)} = k$$

$$\text{R.H.S.} = \frac{a + c + e}{b + d + f} = \frac{bk + dk + fk}{b + d + f}$$

$$= \frac{k(b + d + f)}{b + d + f} = k$$

L.H.S. = R.H.S.

پس
$$\frac{a^2b + c^2d + e^2f}{ab^2 + cd^2 + ef^2} = \frac{a + c + e}{b + d + f}$$

مشق 3.6

-1 اگر $a : b = c : d$ $(a, b, c, d \neq 0)$ تو ثابت کیجیے کہ

(i) $\dfrac{4a - 9b}{4a + 9b} = \dfrac{4c - 9d}{4c + 9d}$ (ii) $\dfrac{6a - 5b}{6a + 5b} = \dfrac{6c - 5d}{6c + 5d}$

(iii) $\dfrac{a}{b} = \sqrt{\dfrac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}}$ (iv) $a^6 + c^6 : b^6 + d^6 = a^3c^3 : b^3d^3$

(v) $p(a + b) + qb : p(c + d) + qd = a : c$

(vi) $a^2 + b^2 : \dfrac{a^3}{a + b} = c^2 + d^2 : \dfrac{c^3}{c + d}$

(vii) $\dfrac{a}{a - b} : \dfrac{a + b}{b} = \dfrac{c}{c - d} : \dfrac{c + d}{d}$

-2 اگر $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$ $(a, b, c, d, e, f \neq 0)$ تو ثابت کیجیے کہ

(i) $\dfrac{a}{b} = \sqrt{\dfrac{a^2 + c^2 + e^2}{b^2 + d^2 + f^2}}$ (ii) $\dfrac{ac + ce + ea}{bd + df + fb} = \left[\dfrac{ace}{bdf}\right]^{2/3}$

(iii) $\dfrac{ac}{bd} + \dfrac{ce}{df} + \dfrac{ea}{fb} = \dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{c^2}{d^2} + \dfrac{e^2}{f^2}$

3.4(ii) تغیر پر مشتمل روز مرہ زندگی کے سوالات

مثال 1: ایک مستطیلی شہتیر کی طاقت "s" کا اس کی چوڑائی b اور گہرائی d کے مربع میں تغیر راست ہے۔ اگر ایک شہتیر 9 سم چوڑا اور 12 سم گہرا 1200 پونڈ وزن اٹھاتا ہو تو 12 سم چوڑا اور 9 سم گہرا شہتیر کتنا وزن اٹھائے گا؟

حل: مشترک تغیر سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ $\quad s \propto bd^2$

یعنی $\quad s = kbd^2 \quad$ (i)

مساوات (i) میں $s = 1200$، $b = 9$ اور $d = 12$ درج کرنے سے

$$k(9)(12)^2 = 1200$$

$$k = \frac{1200}{9 \times 144} = \frac{25}{27}$$

مساوات (i) میں $k = \frac{25}{27}$ درج کرنے سے $\quad s = \frac{25}{27} bd^2$

اب اوپر دی ہوئی مساوات میں $b = 12$ اور $d = 9$ درج کرنے سے

$$s = \frac{25}{27}(12)(9)^2 = \frac{25(12)(9)(9)}{27} = 900$$

پس s، 900 پونڈ ہے۔

مثال 2: ایک تار میں برقی رو کا برقی قوت محرکہ E میں تغیر راست اور مزاحمت R میں تغیر معکوس ہے۔ اگر $I = 32$ ایمپیئر، جبکہ وولٹز $E = 128$ اور اوہمز $R = 80$ جب وولٹز $E = 150$ اور اوہمز $R = 180$ ہو تو I معلوم کیجیے۔

حل: مشترک تغیر سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ $\quad I \propto \frac{E}{R}$

یعنی $\quad I = \frac{kE}{R} \quad$ (i)

مساوات (i) میں $I = 32$, $E = 128$ اور $R = 8$ درج کرنے سے

$$32 = \frac{k(128)}{8} \Rightarrow \frac{32 \times 8}{128} = k \Rightarrow k = 2$$

مساوات (i) میں $k = 2$ درج کرنے سے $\quad I = \frac{2E}{R}$

اب اوپر دی ہوئی مساوات میں $E = 150$ اور $R = 18$ درج کرنے سے

$$I = \frac{2(150)}{18} = \frac{50}{3}$$

پس I، $\frac{50}{3}$ ایمپیئرز ہے۔

مشق 3.7

-1 ایک مکعب کے سطحی رقبہ A کا اس کے ایک کنارہ کی لمبائی l کے مربع میں تغیر راست ہے۔
اور 27 مربع یونٹس $= A$ جبکہ 3 یونٹس $= l$ ہو تو معلوم کیجیے۔
(i) A جب 4 یونٹس $= l$
(ii) l جب 12 مربع یونٹس $= A$

-2 ایک کرّہ کے سطحی رقبہ S کا اس کے رداس r کے مربع میں تغیر راست ہے اور $S = 16\pi$ جب $r = 2$ ہو۔ r معلوم کیجیے جب $S = 36\pi$ ہو۔

-3 ہکس کے قانون میں ایک سپرنگ کو کھینچنے والی قوت F کا اس کے کھچاؤ کی مقدار S سے تغیر راست ہے اور 32 پونڈ $= F$ جب 1.6 انچ $= S$ معلوم کیجیے۔
(i) S جب 50 پونڈ $= F$ (ii) F جب 0.8 انچ $= S$

-4 کسی دیے ہوئے منبع سے روشنی کی شدت I کا اس سے فاصلے d کے مربع میں تغیر معکوس ہے۔ اگر روشنی کی شدت منبع سے 12 فٹ کے فاصلے پر 20 کینڈل پاور ہو تو منبع سے 8 فٹ کے فاصلہ پر روشنی کی شدت معلوم کیجیے۔

-5 ایک جسم میں مائع کے دباؤ P کا اس کی گہرائی d میں تغیر راست ہے۔ اگر 5 فٹ بلندی والے مائع کے ایک حصّہ کا تالاب کی تہہ پر دباؤ 2.25 پونڈ فی مربع انچ ہو تو 9 پونڈ فی مربع انچ دباؤ لگانے کے لیے مائع کی گہرائی کتنی ہونی چاہیے؟

-6 مزدوری خرچہ c کا مزدوروں کی تعداد n اور دنوں کی تعداد d میں تغیر مشترک ہے اگر 800 مزدوروں کا 13 دن کا خرچ 286000 روپے ہو تو 600 مزدوروں کا 18 دن کا خرچہ کیا ہوگا؟

-7 ایک ستون کے بوجھ c کا اس کے قطر d کی چوتھی قوت میں تغیر راست اور اس کی لمبائی l کے مربع میں تغیر معکوس ہے۔ اگر 63 ٹن بوجھ، 16 انچ ستون کو 30 فٹ تک برداشت کر سکتا ہے تو 28 ٹن کا بوجھ برداشت کرنے والا 4 انچ کا ستون کتنا بلند ہوگا؟

-8 ایک لفٹ کے بوجھ اٹھانے کے لئے مخصوص وقت T کا وزن w گہرائی d کے ساتھ تغیر راست اور موٹر کی قوت p کے ساتھ تغیر معکوس ہے۔ اگر وزن 500 پونڈ، 40 فٹ تک اٹھانے کے لیے 4 ہارس پاور موٹر کو 25 سیکنڈ کی ضرورت ہو تو 40 سیکنڈ میں 800 پونڈ وزن کو 120 فٹ تک اٹھانے کے لیے کتنی قوت درکار ہوگی؟

-9 ایک جسم کی حرکی توانائی (K.E) کا جسم کی کمیت "m" اور اس کی رفتار "v" کے مربع میں تغیر مشترک ہے۔ اگر 45 پونڈ کمیت اور 24 فٹ فی سیکنڈ والے جسم کی حرکی توانائی 4320 فٹ فی پونڈ ہو تو 44 فٹ فی سیکنڈ سے سفر کرنے والی 3000 پونڈ وزن کی گاڑی کی حرکی توانائی معلوم کیجیے۔

متفرق مشق 3

کثیر الانتخابی سوالات

-1 دیے گئے سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) نسبت $a:b$ میں a کہلاتا ہے۔

(a) تعلق (b) پہلی رقم (c) دوسری رقم (d) کوئی نہیں

(ii) نسبت $x:y$ میں y کہلاتا ہے۔

(a) تعلق (b) پہلی رقم (c) دوسری رقم (d) کوئی نہیں

(iii) تناسب $a:b::c:d$ میں a اور d کہلاتے ہیں۔

(a) وسطین (b) طرفین (c) چوتھا تناسب (d) کوئی نہیں

(iv) تناسب $a:b::c:d$ میں b اور c کہلاتے ہیں۔

(a) وسطین (b) طرفین (c) چوتھا تناسب (d) کوئی نہیں

(v) مسلسل تناسب $a:b=b:c$، $ac=b^2$ میں a اور c کے درمیان b ________ تناسب کہلاتا ہے۔

(a) تیسرا (b) چوتھا (c) وسط (d) کوئی نہیں

(vi) مسلسل تناسب $a:b=b:c$ میں a اور b سے c ________ تناسب کہلاتا ہے۔

(a) تیسرا (b) چوتھا (c) وسط (d) کوئی نہیں

(vii) تناسب $4:x::5:15$ میں x معلوم کیجیے۔

(a) $\frac{75}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) 12

(viii) اگر $u \propto v^2$ تو

(a) $u=v^2$ (b) $u=kv^2$ (c) $uv^2=k$ (d) $uv^2=1$

(ix) اگر $y^2 \propto \frac{1}{x^3}$ تو

(a) $y^2=\frac{k}{x^3}$ (b) $y^2=\frac{1}{x^3}$ (c) $y^2=x^2$ (d) $y^2=kx^3$

(x) اگر $\frac{u}{v}=\frac{v}{w}=k$ تو

(a) $u=wk^2$ (b) $u=vk^2$ (c) $u=w^2k$ (d) $u=v^2k$

(xi) x^2 اور y^2 کا تیسرا تناسب ہے۔

(a) $\frac{y^2}{x^2}$ (b) x^2y^2 (c) $\frac{y^4}{x^2}$ (d) $\frac{y^2}{x^4}$

(xii) $x : y :: v : w$ میں چوتھا تناسب w ہے۔

(a) $\frac{xy}{v}$ (b) $\frac{vy}{x}$ (c) xyv (d) $\frac{x}{vy}$

(xiii) اگر $a : b = x : y$ ہو تو ابدال نسبت ہے۔

(a) $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ (b) $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$

(c) $\frac{a+b}{b} = \frac{x+y}{y}$ (d) $\frac{a-b}{x} = \frac{x-y}{y}$

(xiv) اگر $a : b = x : y$ ہو تو عکس نسبت ہے۔

(a) $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ (b) $\frac{a}{a-b} = \frac{x}{x-y}$

(c) $\frac{a+b}{b} = \frac{x+y}{y}$ (d) $\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$

(xv) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تو ترکیب نسبت ہے۔

(a) $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ (b) $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$

(c) $\frac{ad}{bc}$ (d) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

-2 درجِ ذیل سوالوں کے مختصر جواب لکھیں۔

(i) نسبت کی تعریف کیجیے اور ایک مثال دیجیے۔ (ii) تناسب کی تعریف کیجیے۔

(iii) تغیر راست کی تعریف کیجیے۔ (iv) تغیر معکوس کی تعریف کیجیے۔

(v) مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت بیان کیجیے۔ (vi) اگر $5 : 3 :: x : 6$ تو x معلوم کیجیے۔

(vii) اگر x اور y^2 میں تغیر معکوس ہو اور $x = 27$ جب $y = 4$، y کی قیمت معلوم کیجیے جب $x = 3$ ہو۔

(viii) اگر u اور v میں تغیر معکوس ہو اور $u = 8$ جب $v = 3$، v کی قیمت معلوم کیجیے۔ جب $u = 12$ ہو۔

(ix) 8, 7, 6 کا چوتھا تناسب معلوم کیجیے۔ (x) 16 اور 49 کا وسطی التناسب معلوم کیجیے۔

(xi) 28،4 کا تیسرا تناسب معلوم کیجیے۔

(xii) اگر $y \propto \frac{x^2}{z}$ اور $y = 28$ جب $x = 7, z = 2$ ہو تو y معلوم کیجیے۔

(xiii) اگر $z \propto xy$ اور $z = 36$ جب $x = 2, y = 3,$ ہو تو z معلوم کیجیے۔

(xiv) اگر $w \propto \frac{1}{v^2}$ اور $w = 2$ جب $v = 3$ ہو تو w معلوم کیجیے۔

-3 خالی جگہ پُر کریں۔

(i) نسبت $\frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{x^3-y^3}$ آسان ترین شکل میں ________ ہے۔

(ii) نسبت $x : y$ میں x کو ________ کہتے ہیں۔

(iii) نسبت $a : b$ میں b کو ________ کہتے ہیں۔

(iv) تناسب $a : b :: x : y$ میں a اور y کو ________ کہتے ہیں۔

(v) تناسب $p : q :: m : n$ میں q اور m کو ________ کہتے ہیں۔

(vi) تناسب $8 : 4 :: p : 7$ میں $p =$ ________

(vii) اگر $12 : 9 :: m : 6$ تو $m =$ ________

(viii) اگر x اور y میں تغیر راست ہو تو $x =$ ________

(ix) اگر v اور u^3 میں تغیر راست ہو تو $u^3 =$ ________

(x) اگر w اور p^2 میں تغیر معکوس ہو تو $k =$ ________

(xi) 4، 12 کا تیسرا تناسب ________ ہے۔

(xii) 5، 6، 15 کا چوتھا تناسب ________ ہے۔

(xiii) $4m^2n^4$ اور p^6 کا وسطِ فی التناسب ________ ہے۔

(xiv) 9، m، 4 کا مسلسل تناسب ________ ہے۔

خلاصہ

- دو ہم قسم مقداروں کے درمیان تعلق **نسبت** کہلاتا ہے۔
- تناسب بیان کردہ دو نسبتوں کی برابری کو ظاہر کرتا ہے۔
- اگر دو نسبتیں $a : b$ اور $c : d$ برابر ہوں۔ تو ہم ان کو $a : b = c : d$ لکھ سکتے ہیں۔
- اگر دو مقداروں کے درمیان تعلق اس طرح کا ہو کہ ایک مقدار کے بڑھنے (کم ہونے) سے دوسری مقدار اسی نسبت سے بڑھے (کم ہو) تو ایسے تغیر کو **تغیر راست** کہتے ہیں۔

- اگر دو مقداروں کے درمیان جس میں ایک مقدار کے بڑھنے (کم ہونے سے) اور دوسری مقدار اسی نسبت سے کم ہو (بڑھے) تو ایسا تعلق **تغیر معکوس** کہلاتا ہے۔
- تناسب کے مسئلے:

(1) **مسئلہ عکس نسبت:**

اگر $a : b = c : d$ ہو تو $b : a = d : c$

(2) **مسئلہ ابدال نسبت:**

اگر $a : b = c : d$ ہو تو $a : c = b : d$

(3) **مسئلہ ترکیب نسبت:**

اگر $a : b = c : d$ ہو تو

(i) $a + b : b = c + d : d$

اور (ii) $a : a + b = c : c + d$

(4) **مسئلہ تفصیل نسبت:**

اگر $a : b = c : d$ ہو تو

(i) $a - b : b = c - d : d$

اور (ii) $a : a - b = c : c - d$

(5) **مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت:**

اگر $a : b = c : d$ ہو تو

$a + b : a - b = c + d : c - d$

- ایک یا ایک سے زیادہ متغیرات میں راست اور معکوس تغیروں کے ملنے سے **مشترک تغیر** بنتا ہے۔
- **K-طریقہ**

(a) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تو $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ یا $a = bk$ اور $c = dk$

(b) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ ہو تو $a = bk$, $c = dk$ اور $c = fk$