یونٹ 5

سیٹ اور تفاعل
(SETS AND FUNCTIONS)

طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

- سیٹ
- سیٹوں N، W، Z، E، O، P اور Q کی دہرائی کرنا۔
- سیٹوں پر عوامل ($\cup, \cap, \backslash, \ldots$) کی پہچان کرنا۔
- سیٹوں پر یونین، تقاطع، فرق اور کمپلیمنٹ کا عمل درآمد کرنا۔
- دو یا تین سیٹوں کے یونین اور تقاطع کی مندرجہ ذیل خصوصیات کو ثابت کرنا۔
  - یونین کی خاصیت مبادلہ
  - تقاطع کی خاصیت مبادلہ
  - یونین کی خاصیت تلازم
  - تقاطع کی خاصیت تلازم
  - یونین کی تقاطع پر خاصیت تقسیمی
  - تقاطع کی یونین پر خاصیتِ تقسیمی
  - ڈی مارگنز کے قوانین
- دیے ہوئے سیٹوں کی بنیادی خصوصیات کو صحیح ثابت کرنا۔
- وین ڈایاگرام کے ذریعہ مندرجہ ذیل خصوصیات کو ظاہر کرنا۔
  - سیٹوں کا یونین اور تقاطع
  - سیٹ کا کمپلیمنٹ
- وین ڈایاگرام کے ذریعہ مندرجہ ذیل کو صحیح ثابت کرنا۔
  - سیٹوں کے یونین اور تقاطع کا قانون مبادلہ
  - ڈی مارگنز کے قوانین

- قانون تلازم
- قانون تقسیمی

- مترتب جوڑوں اور کارتیسی ضربی سیٹ کی پہچان کرنا۔
- ثنائی ربط کی تعریف کرنا اور اس کے ڈومین سیٹ اور رینج سیٹ کی پہچان کرنا۔
- تفاعل (فنکشن) کی تعریف اور اس کے ڈومین سیٹ، کوڈومین سیٹ، اور رینج سیٹ کی پہچان کرنا۔
- مندرجہ ذیل کا عملی طور واضح کرنا۔
  - ان ٹو تفاعل
  - ون۔ون تفاعل
  - ان ٹو اور ون۔ون تفاعل (ان جیکٹیو فنکشن)
  - آن ٹو تفاعل (سر جیکٹیو فنکشن)
  - ون۔ون اور آن ٹو تفاعل (بائی جیکٹیو فنکشن)
- جانچنا کہ دیا ہوا ربط تفاعل ہے یا نہیں۔
- ون۔ون مطابقت اور ون۔ون تفاعل کے درمیان فرق کو ظاہر کرنا۔
- اوپر دیے گئے تمام تصورات کے درمیان فرق کو ظاہر کرنے کے لیے کافی سوال مشقوں میں شامل کرنا۔

5.1 سیٹ (SET)

واضح اشیا کا مجموعہ، سیٹ کہلاتا ہے اور سیٹ کو C, B, A وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

5.1.1(i) چند اہم سیٹ (Some Important Sets):

سیٹ تھیوری میں، ہم عام طور پر درج ذیل اعداد کے سیٹوں کو بنیادی علامتوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

قدرتی اعداد کا سیٹ $= N = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$

مکمل اعداد کا سیٹ $= W = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$

صحیح اعداد کا سیٹ $= Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$

تمام جفت اعداد کا سیٹ $= E = \{0, \pm 2, \pm 4, \cdots\}$

تمام طاق اعداد کا سیٹ $= O = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots\}$

مفرد اعداد کا سیٹ $= P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots\}$

تمام ناطق اعداد کا سیٹ $= Q = \{x \mid x = \frac{m}{n}$ ، جبکہ $m, n \in Z$ اور $n \neq 0\}$

تمام غیر ناطق اعداد کا سیٹ $= Q' = \{x \mid x \neq \frac{m}{n}$ ، جبکہ $m, n \in Z$ اور $n \neq 0\}$

تمام حقیقی اعداد کا سیٹ $= R = Q \cup Q'$

5.1.1(ii) سیٹوں پر عوامل $(\cup, \cap, \backslash, \ldots)$ کی پہچان

Recognize operations on sets $(\cup, \cap, \backslash, \ldots)$:

(a) سیٹوں کا یونین (Union of sets)

دو سیٹوں A اور B کا یونین سیٹ ان تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے جو A میں یا B میں یا دونوں میں ہوں۔ اس کو $A \cup B$ لکھتے اور A یونین B پڑھتے ہیں۔

پس $A \cup B = \{x \mid x \in A$ یا $x \in B$ یا $x \in A$ اور $B\}$

مثال کے طور پر، اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $B = \{4, 5, 6, 7\}$

تو $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(b) سیٹوں کا تقاطع (Intersection of sets)

دو سیٹوں A اور B کا تقاطع ایک ایسا سیٹ ہوتا ہے جو A اور B کے تمام مشترک ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔ اس کو $A \cap B$ لکھتے اور A تقاطع B پڑھتے ہیں۔

پس $A \cap B = \{x | x \in A$ اور $x \in B\}$

ظاہر ہے کہ $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ اور $x \in B$

مثال کے طور پر، اگر $A = \{a, b, c, d\}$ اور $B = \{c, d, e, f\}$

تو $A \cap B = \{c, d\}$

(c) سیٹوں کا فرق (Difference of sets)

اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو ان کے فرق A-B یا A\B کو یوں بیان کرتے ہیں۔

$A - B = \{x | x \in A$ اور $x \notin B\}$

اسی طرح $B - A = \{x | x \in B$ اور $x \notin A\}$

مثال کے طور پر، اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

اور $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$

تو $A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 4, 5, 6, 8\} = \{1, 3\}$

اور $B - A = \{2, 4, 5, 6, 8\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 8\}.$

(d) سیٹ کا کمپلیمنٹ (Complement of a set)

اگر U ایک یونیورسل سیٹ ہو اور A اس کا تحتی سیٹ ہو تو A کے کمپلیمنٹ میں U کے وہ تمام ارکان شامل ہوتے ہیں جو سیٹ A کے رکن نہیں ہوتے۔ اس کو A^c یا A' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس لیے $A' = U - A = \{x | x \in U$ اور $x \notin A\}$

مثال کے طور پر، اگر $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ اور $A = \{2, 4, 6, 8\}$

تو $A' = U - A = \{1, 2, 3, ..., 10\} - \{2, 4, 6, 8\}$
$= \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

5.1.1 (iii) سیٹوں پر عوامل کا سر انجام دینا (Perform operations on sets)

مثال: اگر $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}, A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{3, 5, 8\}$ تو معلوم کریں۔

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $A - B$ (iv) A' اور B'

حل:

(i) $A \cup B = \{2, 3, 5, 7\} \cup \{3, 5, 8\} = \{2, 3, 5, 7, 8\}$

(ii) $A \cap B = \{2, 3, 5, 7\} \cap \{3, 5, 8\} = \{3, 5\}$

(iii) $A \backslash B = \{2, 3, 5, 7\} \backslash \{3, 5, 8\} = \{2, 7\}$

(iv) $A' = U - A = \{1, 2, 3, ..., 10\} - \{2, 3, 5, 7\} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

$B' = U - B = \{1, 2, 3, ..., 10\} - \{3, 5, 8\} = \{1, 2, 4, 6, 7, 9, 10\}$

مشق 5.1

-1 اگر $Y=\{2, 4, 5, 9\}$ اور $X=\{1, 4, 7, 9\}$ ہو تو معلوم کریں۔

(i) $X\cup Y$ (ii) $X\cap Y$ (iii) $Y\cup X$ (iv) $Y\cap X$

-2 اگر $X =$ مفرد اعداد جو 17 سے چھوٹے یا برابر ہوں، کا سیٹ

اور $Y =$ پہلے 12 قدرتی اعداد کا سیٹ

تو مندرجہ ذیل معلوم کریں۔

(i) $X\cup Y$ (ii) $Y\cup X$ (iii) $X\cap Y$ (iv) $Y\cap X$

-3 اگر $T=O^{+}, Y=Z^{+}, X=\phi$ تو معلوم کریں۔

(i) $X\cup Y$ (ii) $X\cup T$ (iii) $Y\cup T$

(iv) $X\cap Y$ (v) $X\cap T$ (vi) $Y\cap T$

-4 اگر $U=\{x \mid x\in N \wedge 3<x\leq 25\}$،

$X=\{x \mid x P \wedge 8<x<25\}$ اور $Y=\{x \mid x\in W \wedge 4\leq x\leq 17\}$ تو قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $(X\cup Y)'$ (ii) $X'\cap Y'$ (iii) $(X\cap Y)'$ (iv) $X'\cup Y'$

-5 اگر $X=\{2, 4, 6, \cdots, 20\}$ اور $Y=\{4, 8, 12, \ldots, 24\}$ تو مندرجہ ذیل معلوم کریں۔

(i) $X-Y$ (ii) $Y-X$

-6 اگر $A=N$ اور $B=W$ تو قیمت معلوم کریں۔

(i) $A-B$ (ii) $B-A$

5.1.2 (iv) یونین اور تقاطع کی خصوصیات (Properties of Union and Intersection)

(a) یونین کی خاصیت مبادلہ (Commutative property of union)

دو سیٹوں A اور B کے لیے ثابت کریں کہ $A\cup B=B\cup A$

ثبوت (Proof)

فرض کریں کہ $x\in A\cup B$

$\Rightarrow x\in A$ یا $x\in B$ (سیٹوں کے یونین کی تعریف کے مطابق)

$\Rightarrow x\in B$ یا $x\in A$

$\Rightarrow x\in B\cup A$

$\Rightarrow A\cup B\subseteq B\cup A$ (i)

اب فرض کریں کہ $y\in B\cup A$

$\Rightarrow y\in B$ یا $y\in A$ (سیٹوں کی یونین کی تعریف کے مطابق)

$\Rightarrow \quad y \in A$ یا $y \in B$
$\Rightarrow \quad y \in A \cup B$
$\Rightarrow \quad B \cup A \subseteq A \cup B$ (ii)

مساوات (i) اور (ii) کی رو سے

$A \cup B = B \cup A$ (مساوی سیٹوں کی تعریف کے مطابق)

(b) تقاطع کی خاصیت مبادلہ (Commutative property of intersection)

دو سیٹوں A اور B کے لیے ثابت کریں کہ $A \cap B = B \cap A$

ثبوت (Proof)

فرض کریں کہ $x \in A \cap B$

$\Rightarrow \quad x \in A$ اور $x \in B$ (سیٹوں کے تقاطع کی تعریف کے مطابق)
$\Rightarrow \quad x \in B$ اور $x \in A$
$\Rightarrow \quad x \in B \cap A$

اس لیے (i) $A \cap B \subseteq B \cap A$

اب فرض کریں کہ $y \in B \cap A$

$\Rightarrow \quad y \in B$ اور $y \in A$ (سیٹوں کے تقاطع کی تعریف کے مطابق)
$\Rightarrow \quad y \in A$ اور $y \in B$
$\Rightarrow \quad y \in A \cap B$

اس لیے (ii) $B \cap A \subseteq A \cap B$

مساوات (i) اور (ii) کی رو سے

$A \cap B = B \cap A$ (مساوی سیٹوں کی تعریف کے مطابق)

(c) یونین کی خاصیت تلازم (Associative property of union)

کوئی سے تین سیٹوں A، B اور C کے لیے ثابت کریں کہ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

ثبوت (Proof)

فرض کریں کہ $x \in (A \cup B) \cup C$

$\Rightarrow \quad x \in (A \cup B)$ یا $x \in C$
$\Rightarrow \quad x \in A$ یا $x \in B$ یا $x \in C$
$\Rightarrow \quad x \in A$ یا $x \in B \cup C$
$\Rightarrow \quad x \in A \cup (B \cup C)$

$\Rightarrow \quad (A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ (i)

اسی طرح $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ (ii)

مساوات (i) اور (ii) کی رو سے

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(d) تقاطع کی خاصیت تلازم (Associative property of intersection)

کوئی سے تین سیٹوں A، B اور C کے لیے ثابت کریں کہ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ثبوت (Proof)

فرض کریں کہ $x \in (A \cap B) \cap C$

$\Rightarrow \quad x \in (A \cap B)$ اور $x \in C$

$\Rightarrow \quad (x \in A$ اور $x \in B)$ اور $x \in C$

$\Rightarrow \quad x \in A$ اور $(x \in B$ اور $x \in C)$

$\Rightarrow \quad x \in A$ اور $x \in B \cap C$

$\Rightarrow \quad x \in A \cap (B \cap C)$

اس لیے $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$ (i)

اسی طرح $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$ (ii)

مساوات (i) اور (ii) کی رو سے

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(e) یونین کی تقاطع پر خاصیت تقسیمی (Distributive property of $\cup$ over $\cap$)

کوئی سے تین سیٹوں A، B اور C کے لیے ثابت کریں کہ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ثبوت (Proof)

فرض کریں کہ $x \in A \cup (B \cap C)$

$\Rightarrow \quad x \in A$ یا $x \in B \cap C$

$\Rightarrow \quad x \in A$ یا $(x \in B$ اور $x \in C)$

$\Rightarrow \quad (x \in A$ یا $x \in B)$ اور $(x \in A$ یا $x \in C)$

$\Rightarrow \quad x \in A \cup B$ اور $x \in A \cup C$

$\Rightarrow \quad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow \quad A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (i)

اسی طرح فرض کریں کہ $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow \quad y \in (A \cup B)$ اور $y \in (A \cup C)$

$\Rightarrow \quad (y \in A$ یا $y \in B)$ اور $(y \in A$ یا $y \in C)$

$\Rightarrow \quad y \in A$ یا $(y \in B$ اور $y \in C)$

$\Rightarrow \quad y \in A$ یا $y \in B \cap C$

$\Rightarrow \quad y \in A \cup (B \cap C)$

$\Rightarrow \quad (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C) \qquad$ (ii)

مساوات (i)اور(ii) کی رو سے $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(f) تقاطع کی یونین پر خاصیت تقسیمی (Distributive property of $\cap$ over $\cup$)

کوئی سے تین سیٹوں A، B اور C کے لیے ثابت کریں کہ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ثبوت (Proof)

فرض کریں کہ $\quad x \in A \cap (B \cup C)$

$\Rightarrow \quad x \in A$ اور $x \in B \cup C$

$\Rightarrow \quad x \in A$ اور $(x \in B$ یا $x \in C)$

$\Rightarrow \quad (x \in A$ اور $x \in B)$ یا $(x \in A$ اور $x \in C)$

$\Rightarrow \quad (x \in A \cap B)$ یا $(x \in A \cap C)$

$\Rightarrow \quad x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow \quad A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad$ (i)

اسی طرح $\quad (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C) \qquad$ (ii)

مساوات (i)اور(ii) کی رو سے

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(g) ڈی مارگن کے قوانین (De-Morgan's laws)

دو سیٹوں A اور B کے لیے ثابت کریں کہ

(a) $\quad (A \cup B)' = A' \cap B' \qquad$ (b) $\quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

ثبوت (Proof)

(a) فرض کریں کہ $\quad x \in (A \cup B)'$

$\Rightarrow \quad x \notin A \cup B \qquad$ (سیٹ کے کمپلیمنٹ کی تعریف کے مطابق)

$\Rightarrow \quad x \notin A$ اور $x \notin B$

$\Rightarrow \quad x \in A'$ اور $x \in B'$

$\Rightarrow \quad x \in A' \cap B' \qquad$ (سیٹ کے تقاطع کی تعریف کے مطابق)

	$\Rightarrow (A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$	(i)
اسی طرح	$A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$	(ii)
مساوات (i) اور (ii) کو استعمال کرتے ہوئے	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	

(b) فرض کریں کہ $x \in (A \cap B)'$

$\Rightarrow x \notin A \cap B$

$\Rightarrow x \notin A$ یا $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A'$ یا $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A' \cup B'$

$\Rightarrow (A \cap B)' \subseteq A' \cup B'$ (i)

فرض کریں کہ $y \in A' \cup B'$

$\Rightarrow y \in A'$ یا $y \in B'$

$\Rightarrow y \notin A$ یا $y \notin B$

$\Rightarrow y \notin A \cap B$

$\Rightarrow y \in (A \cap B)'$

$\Rightarrow A' \cup B' \subseteq (A \cap B)'$ (ii)

مساوات (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

مشق 5.2

-1 اگر $X = \{1, 3, 5, 7, \cdots, 19\}$ ، $Y = \{0, 2, 4, 6, 8, \cdots, 20\}$
اور $Z = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ ہو تو مندرجہ ذیل معلوم کریں۔

(i) $X \cup (Y \cup Z)$ (ii) $(X \cup Y) \cup Z$
(iii) $X \cap (Y \cap Z)$ (iv) $(X \cap Y) \cap Z$
(v) $X \cup (Y \cap Z)$ (vi) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
(vii) $X \cap (Y \cup Z)$ (viii) $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

-2 اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ اور $C = \{1, 4, 8\}$
ہو تو مندرجہ ذیل کو ثابت کریں۔

(i) $A \cap B = B \cap A$ (ii) $A \cup B = B \cup A$
(iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

-3 اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ، $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ اور $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ہو تو
ڈی مارگن قوانین کی تصدیق کریں۔

یعنی $(A \cup B)' = A' \cap B'$ اور $(A \cap B)' = A' \cup B'$

-4 اگر $U = \{1, 2, 3, \cdots, 20\}$، $X = \{1, 3, 7, 9, 15, 18, 20\}$ اور $Y = \{1, 3, 5, \cdots, 17\}$ تو ثابت کریں کہ

(i) $X - Y = X \cap Y'$ (ii) $Y - X = Y \cap X'$

5.1.2 (v) دیے ہوئے سیٹوں کی مدد سے بنیادی خصوصیات کو صحیح ثابت کرنا:
(Verify the fundamental properties for given sets)

(a) A اور B، U کے کوئی سے دو تحتی سیٹ ہوں تو $A \cup B = B \cup A$ (مبادلہ کا قانون)

مثال کے طور $A = \{1, 3, 5, 7\}$ اور $B = \{2, 3, 5, 7\}$

پر

تو $A \cup B = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{2, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

اور $B \cup A = \{2, 3, 5, 7\} \cup \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

پس ثابت ہوا کہ $A \cup B = B \cup A$

(b) تقاطع کی خاصیت مبادلہ: (Commutative property of intersection)

مثال کے طور پر $A = \{1, 3, 5, 7\}$ اور $B = [2, 3, 5, 7\}$

تو $A \cap B = \{1, 3, 5, 7\} \cap \{2, 3, 5, 7\} = \{3, 5, 7\}$

اور $B \cap A = \{2, 3, 5, 7\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{3, 5, 7\}$

پس ثابت ہوا کہ $A \cap B = B \cap A$

(c) اگر A، B اور C، U کے تحتی سیٹ ہوں تو $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (تلازم کا قانون)

فرض کریں کہ $A = \{1, 2, 4, 8\}$، $B = \{2, 4, 6\}$ اور $C = \{3, 4, 5, 6\}$

تو
$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= (A \cup B) \cup C \\ &= (\{1, 2, 4, 8\} \cup \{2, 4, 6\}) \cup \{3, 4, 5, 6\} \\ &= \{1, 2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 4, 5, 6\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \end{aligned}$$

اور
$$\begin{aligned} \text{R.H.S} &= A \cup (B \cup C) \\ &= \{1, 2, 4, 8\} \cup (\{2, 4, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6\}) \\ &= \{1, 2, 4, 8\} \cup \{2, 3, 4, 5, 6\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \end{aligned}$$

L.H.S = R.H.S.

پس سیٹوں کا یونین خاصیت تلازم رکھتا ہے۔

(d) اگر A، B اور C، U کے تحتی سیٹ ہوں تو $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (تلازم کا قانون)

فرض کریں کہ $A = \{1, 2, 4, 8\}$، $B = \{2, 4, 6\}$ اور $C = \{3, 4, 5, 6\}$

تو

$$\text{L.H.S} = (A \cap B) \cap C$$
$$= (\{1, 2, 4, 8\} \cap \{2, 4, 6\}) \cap \{3, 4, 5, 6\}$$
$$= \{2, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4\}$$

اور

$$\text{R.H.S} = A \cap (B \cap C)$$
$$= \{1, 2, 4, 8\} \cap (\{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6\})$$
$$= \{1, 2, 4, 8\} \cap \{4, 6\} = \{4\}$$
$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

پس سیٹوں کا تقاطع خاصیت تلازم رکھتا ہے۔

تقسیمی قوانین (Distributive laws)

(e) یونین کی سیٹوں کے تقاطع پر خاصیت تقسیمی:

اگر A, B اور C یونیورسل سیٹ U کے تحتی سیٹ ہوں تو $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

فرض کریں کہ $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ اور $C = \{3, 4, 5, 6\}$

تو

$$\text{L.H.S} = A \cup (B \cap C)$$
$$= \{1, 2, 4, 8\} \cup (\{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6\})$$
$$= \{1, 2, 4, 8\} \cup \{4, 6\} = \{1, 2, 4, 6, 8\}$$

اور

$$\text{R.H.S} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$= (\{1, 2, 4, 8\} \cup \{2, 4, 6\}) \cap (\{1, 2, 4, 8\} \cup \{3, 4, 5, 6\})$$
$$= \{1, 2, 4, 6, 8\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$
$$= \{1, 2, 4, 6, 8\}$$
$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

(f) تقاطع کی سیٹوں کے یونین پر خاصیت تقسیمی:

($\cap$ is distributive over $\cup$ of sets)

یعنی **$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$**

فرض کریں کہ

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 20\}$$
$$B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$$
$$C = \{3, 9, 15, 21, 27, 33\}$$

$$\text{L.H.S} = A \cap (B \cup C)$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 20\} \cap (\{5, 10, 15, 20, 25, 30\} \cup \{3, 9, 15, 21, 27, 33\})$$
$$= \{1,2,3,4,5, \cdots, 20\} \cap \{3, 5, 9, 10, 15, 20, 21, 25, 27, 30, 33\}$$
$$= \{3, 5, 9, 10, 15, 20\}$$

R.H.S $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$= (\{1, 2, 3, 4, \cdots, 20\} \cap \{5, 10, 15, 20, 25, 30\})$
$\cup (\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 20\} \cap \{3, 9, 15, 21, 27, 33\})$
$= \{5, 10, 15, 20\} \cup \{3, 9, 15\} = \{3, 5, 9, 10, 15, 20\}$

L.H.S = R.H.S.

(g) ڈی مارگن کے قوانین (De Morgan's laws)

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ اور $(A \cup B)' = A' \cap B'$

فرض کریں کہ

$U = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow B' = \{7, 8, 9, 10\}$

اب

$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$= \{2, 4, 6\}$

تو

L.H.S $= (A \cap B)' = U - (A \cap B)$
$= \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\} - \{2, 4, 6\}$
$= \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$

اور

R.H.S $= A' \cup B'$
$= \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{7, 8, 9, 10\}$
$= \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$

L.H.S = R.H.S

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

فرض کیا کہ

$U = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow B' = \{7, 8, 9, 10\}$

اب

$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$

L.H.S $= (A \cup B)' = U - (A \cup B)$
$= \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$
$= \{7, 9\}$

اور

R.H.S $= A' \cap B' = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{7, 8, 9, 10\}$
$= \{7, 9\}$

L.H.S = R.H.S

5.1.3 وین ڈایاگرام (Venn Diagram)

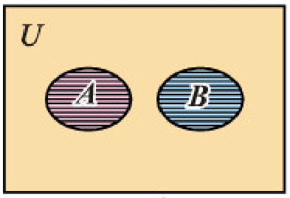
برطانوی ریاضی دان جان وین (1834-1923) نے یونیورسل سیٹ U کے لیے مستطیل کو پہلی دفعہ استعمال کیا اور اس کے تحتی سیٹوں A اور B کو اس کے اندر بند شکلوں کے طور پر استعمال کیا۔

5.1.3 (i) وین ڈایاگرام کو سیٹوں کے یونین اور تقاطع کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کرنا

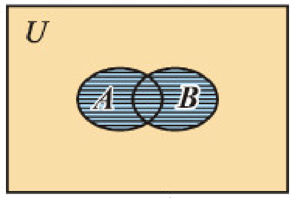
(a) سیٹوں کے یونین اور تقاطع:

غیر متراکب سیٹوں کے لیے | متراکب سیٹوں کے لیے | $A \subseteq B$

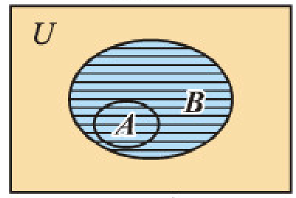
$A \quad B$



شکل 1

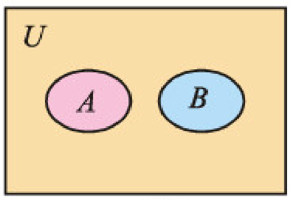


شکل 2

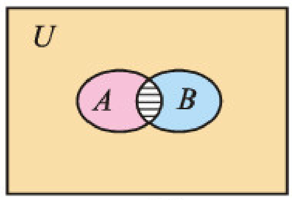


شکل 3

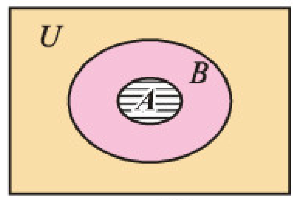
A B



شکل 4

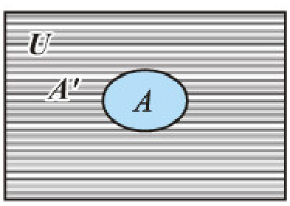


شکل 5



شکل 6

(اشکال 1 سے 6 تک خطوں کو افقی قطعات خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔)



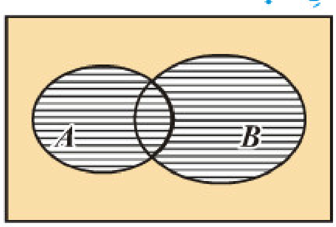
(b) سیٹ کا کمپلیمنٹ (Complement of set)

$U - A = A'$ کو افقی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

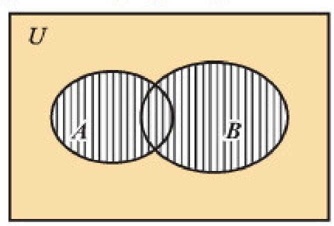
5.1.3 (vii) وین ڈایاگرام کو قانونِ مبادلہ کی تصدیق کے لیے استعمال کرنا:

(a) سیٹوں کے یونین اور تقاطع کے لیے قانونِ مبادلہ:

$A \quad B$



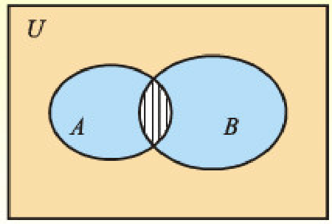
$B \quad A$



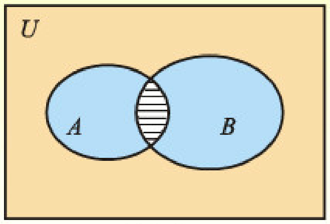
$A \cup B$ کو افقی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔ $B \cup A$ کو عمودی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

دونوں صورتوں میں خطے برابر ہیں۔ پس $A \cup B = B \cup A$

$B \quad A$



$A \quad B$



$B \cap A$ کو عمودی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

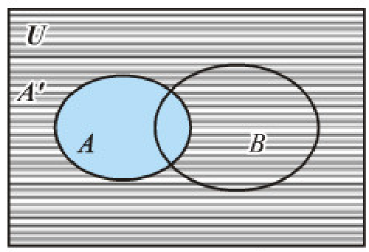
$A \cap B$ کو افقی قطعات خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

دونوں صورتوں میں خطے برابر ہیں۔ پس $A \cap B = B \cap A$

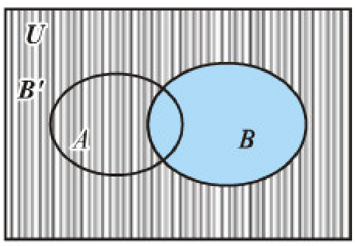
(b) ڈی مارگن کے قوانین (De Morgan's laws)

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

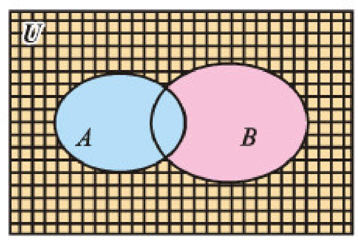


شکل 1: A' کو افقی قطعات خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔



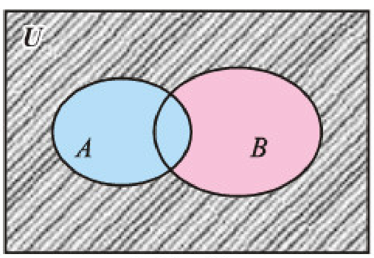
شکل 2: B' کو عمودی قطعات خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$A' \quad B'$



شکل 3: $A' \cap B'$ کو مربعوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$(A \quad B)'$



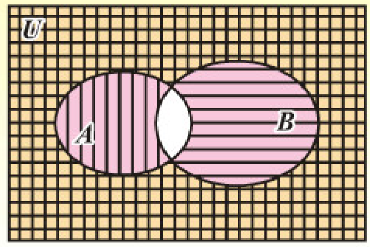
شکل 4: $(A \cup B)'$ کو ترچھے قطعات خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اشکال 3 اور 4 کے خطے برابر ہیں

پس $(A \cup B)' = A' \cap B'$

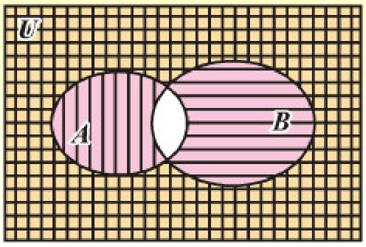
(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

A' B'



شکل 5: $A' \cup B'$ کو افقی، عمودی قطعاتِ خط اور مربعوں کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔

$(A \cap B)'$

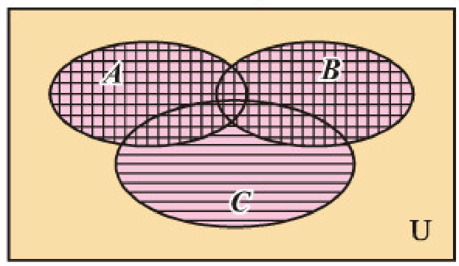


شکل 6: $U - (A \cap B) = (A \cap B)'$ کو افقی، عمودی قطعاتِ خط اور مربعوں کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔

اشکال 5 اور 6 کے خطے برابر ہیں۔

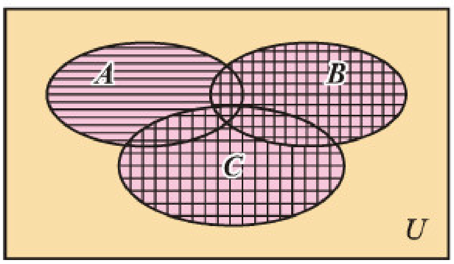
پس $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(c) قانونِ تلازم (Associative law)



شکل 1

$(A \cup B) \cup C$ کو شکل 1 میں دکھایا گیا ہے۔

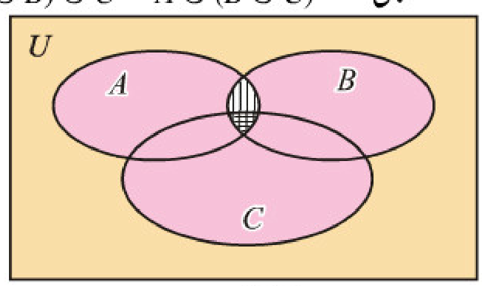


شکل 2

$A \cup (B \cup C)$ کو شکل 2 میں دکھایا گیا ہے۔

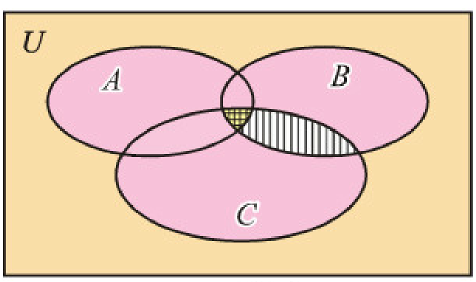
اشکال 1 اور 2 کے خطے برابر ہیں۔

پس $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$



شکل 3

$(A \cap B) \cap C$ کو شکل 3 میں ڈبل کراسنگ قطعات خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔



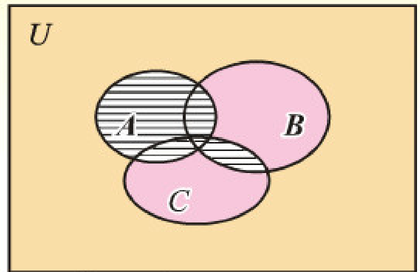
شکل 4

$A \cap (B \cap C)$ کو شکل 4 میں ڈبل کراسنگ قطعات خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

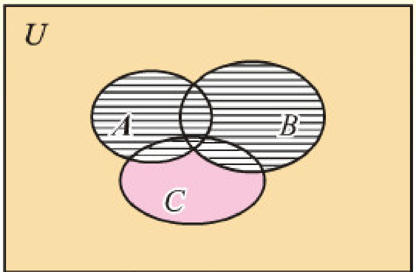
اشکال 3 اور 4 کے خطے برابر ہیں۔

پس $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

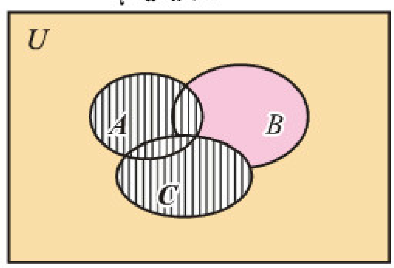
(d) قانونِ تقسیمی (Distributive law):



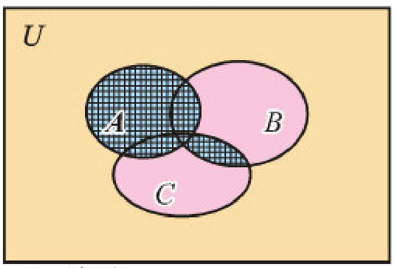
شکل 1: $A \cup (B \cap C)$ کو شکل میں افقی قطعات خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل 2: $A \cup B$ کو شکل میں افقی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔



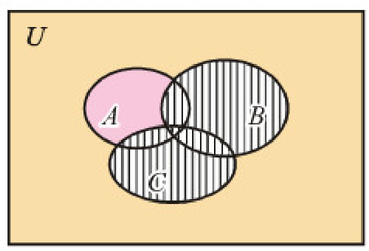
شکل 3: $A \cup C$ کو شکل میں عمودی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔



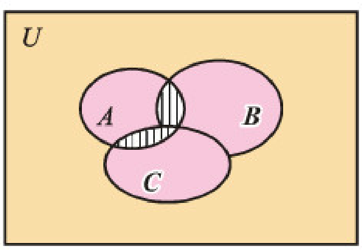
شکل 4: $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ کو شکل میں ڈبل کراسنگ قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اشکال 1 اور 4 کے خطے برابر ہیں۔

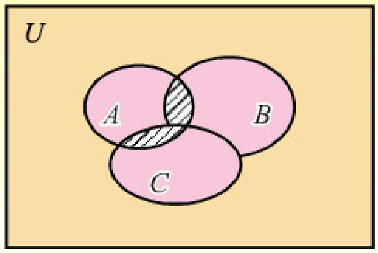
پس $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



شکل 5: $B \cup C$ کو شکل میں عمودی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل 6: $A \cap (B \cup C)$ کو شکل میں عمودی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل 7: $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ کو شکل میں ترچھے قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اشکال 6 اور 7 کے خطے برابر ہیں۔

پس $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

مشق 5.3

-1 اگر $U = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$، $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ اور $B = \{1, 4, 7, 10\}$

ہو تو مندرجہ ذیل سوالات کو صحیح ثابت کریں۔

(i) $A - B = A \cap B'$ (ii) $B - A = B \cap A'$

(iii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (iv) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(v) $(A - B)' = A' \cup B$ (vi) $(B - A)' = B' \cup A$

-2 اگر $U = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$، $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$، $B = \{1, 4, 7, 10\}$

اور $C = \{1, 5, 8, 10\}$ ہو تو مندرجہ ذیل سوالات کو صحیح ثابت کریں۔

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

-3 اگر $U = N$ تو $A = \phi$ اور $B = P$ کو استعمال کرتے ہوئے ڈی مارگن قوانین کی تصدیق کریں۔

-4 اگر $U = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$، $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ اور $B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$

ہو تو مندرجہ ذیل سوالات کو وین ڈایاگرام سے ثابت کریں۔

(i) $A - B = A \cap B'$ (ii) $B - A = B \cap A'$

(iii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (iv) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(v) $(A - B)' = A' \cup B$ (vi) $(B - A)' = B' \cup A$

مترتب جوڑے اور کارتیسی حاصل ضرب 5.1.4 (viii)
(Ordered pairs and Cartesian product)

5.1.4 (a) مترتب جوڑے (Ordered pairs)

کوئی سے دو اعداد x اور y کو (x, y) کی شکل میں لکھنے کو مترتب جوڑا کہا جاتا ہے۔ مترتب جوڑے (x, y) میں اعداد کی ترتیب بہت اہمیت رکھتی ہے۔ جس میں x پہلا رکن اور y دوسرا رکن ہے۔ مثال کے طور پر $(3,2)$ مختلف ہے $(2, 3)$ سے صاف ظاہر ہے کہ $(x, y) \neq (y, x)$ جب تک کہ $x = y$

یاد رہے کہ

اگر $(x, y) = (s, t)$ تو $x = s$ اور $y = t$

5.1.4 (b) کارتیسی حاصل ضرب (Cartesian product)

دو غیر خالی سیٹوں A اور B کے کارتیسی حاصل ضرب $A \times B$ میں تمام مترتب جوڑے (x, y) شامل ہوتے ہیں جبکہ $x \in A$ اور $y \in B$ ہو۔

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{2, 5\}$، تو $A \times B$ اور $B \times A$ معلوم کریں۔

حل: $A \times B = \{(1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\}$

سیٹ A کے 3 ارکان ہیں اور سیٹ B کے 2 ارکان ہیں۔

پس $A \times B$، $3 \times 2 = 6$ مترتب جوڑے رکھتا ہے۔

$$B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$$

بلاشبہ $A \times B \neq B \times A.$

مشق 5.4

1- اگر $A = \{a, b\}$ اور $B = \{c, d\}$ تو $A \times B$ اور $B \times A$ معلوم کریں۔

2- اگر $A = \{0, 2, 4\}$، $B = \{-1, 3\}$، تو $A \times B$، $B \times A$، $A \times A$، $B \times B$ معلوم کریں۔

3- a اور b معلوم کریں اگر

(i) $(a - 4, b - 2) = (2, 1)$ (ii) $(2a + 5, 3) = (7, b - 4)$

(iii) $(3 - 2a, b - 1) = (a - 7, 2b + 5)$

4- X اور Y معلوم کریں اگر $X \times Y = \{(a, a), (b, a), (c, a), (d, a)\}$

5- اگر $X = \{a, b, c\}$ اور $Y = \{d, e\}$ تو مندرجہ ذیل ضربی سیٹوں کے ارکان کی تعداد معلوم کریں۔

(i) $X \times Y$ (ii) $Y \times X$ (iii) $X \times X$

5.2 ثنائی ربط (Binary Relation)

اگر A اور B کوئی سے دو غیر خالی سیٹ ہوں اور $R \subseteq A \times B$ تو سب سیٹ R، A سے B میں ثنائی ربط کہلاتا ہے۔ کیونکہ R میں ہر مترتب جوڑے کے پہلے اور دوسرے رکن کے درمیان کچھ تعلق ہوتا ہے۔

ربط کے ڈومین سیٹ میں ہر مترتب جوڑے کا پہلا رکن شامل ہوتا ہے۔ اور اسکو Dom R سے ظاہر کرتے ہیں۔

ربط کے رینج سیٹ میں ہر مترتب جوڑے کا دوسرا رکن شامل ہوتا ہے۔ اسے Range R سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1: اگر $A = \{2, 3, 4, 5\}$، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ اور

$R : A \to B = \{x\, R\, y \mid y = 2x \wedge x \in A, y \in B\}$ تو Dom R اور Range R معلوم کریں۔

حل:

$$R = \{(2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$$

$$\text{Dom } R = \{2, 3, 4\} \subseteq A \quad \text{اور} \quad \text{Range } R = \{4, 6, 8\} \subseteq B$$

مثال 2: فرض کیا $A = \{1, 2, 3, 4\}$، $B = \{1, 2, 3, 5\}$

ربط بنانے سے $R : A \to B = \{x\, R\, y \mid x + y = 6 \wedge x \in A, y \in B\}$ تو Dom R اور Range R معلوم کریں۔

حل:

$$R = \{(1, 5), (3, 3), (4, 2)\}$$

$$\text{Dom } R = \{1, 3, 4\} \subseteq A \quad \text{اور} \quad \text{Range } R = \{2, 3, 5\} \subseteq B$$

5.3 تفاعل یا میپنگ (Function or mapping)

(i) فرض کریں کہ A اور B دو غیر خالی سیٹ ہوں تو ربط '$f : A \to B$' تفاعل کہلاتا ہے۔

اگر (i) Dom $f = A$ (ii) ہر x جو A میں ہو۔ f کے صرف ایک ہی مترتب جوڑے کا پہلا رکن ہوتا ہے۔

متبادل تعریف (Alternate Definition)

فرض کریں کہ A اور B دو غیر خالی سیٹ ہیں تو ربط $f : A \to B$ تفاعل کہلاتا ہے۔

اگر (i) Dom $f = A$

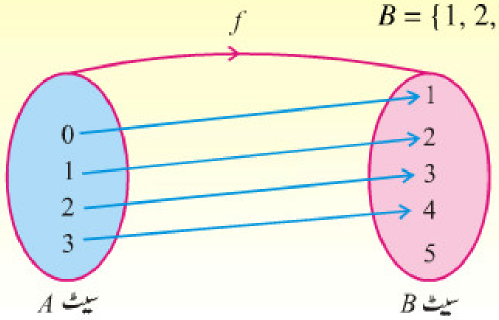
(ii) ہم A کے ہر رکن x کے لیے B کے کسی رکن y سے یکتا تعلق جوڑ سکتے ہیں۔ جیسے $y = f(x) \in B$

فنکشن کے ڈومین سیٹ، کوڈومین سیٹ اور رینج سیٹ (Domain, Co-domain and Range Foundation):

اگر $f : A \to B$ ایک تفاعل ہو تو A تفاعل f کا ڈومین سیٹ اور B تفاعل f کا کوڈومین سیٹ کہلاتے ہیں۔

f کا ڈومین سیٹ، f کے مترتب جوڑوں کے تمام پہلے ارکان پر مشتمل ہوتا ہے اور f کا رینج سیٹ، f کے مترتب جوڑوں کے تمام دوسرے ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔

مثال: فرض کریں کہ $A = \{0, 1, 2, 3\}$ اور $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



تفاعل $f : A \to B$ ہے جب کہ

$f = \{(x, y) \mid y = x + 1 \wedge \forall\, x \in A\, ,\, y \in B\}$

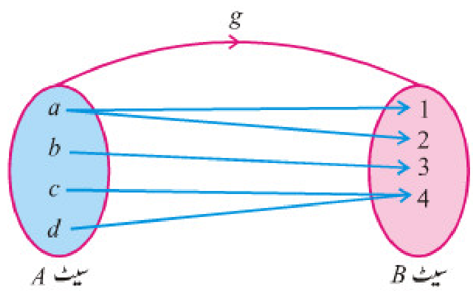
$f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

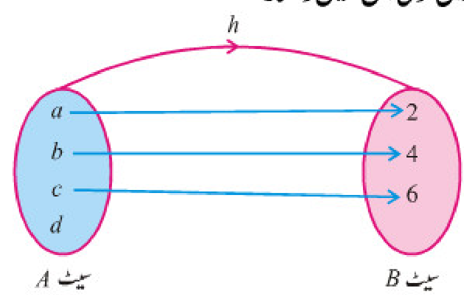
$\text{Dom } f = \{0, 1, 2, 3\} = A$

$\text{Range } f = \{1, 2, 3, 4\} \subseteq B.$

مندرجہ ذیل روابط کی مثالیں ہیں نہ کہ تفاعلوں کی۔

g ایک فنکشن نہیں ہے کیونکہ $a \in A$، سیٹ B میں دو امیجز رکھتا ہے اور h فنکشن نہیں ہے کیونکہ $d \in A$، سیٹ B میں کوئی امیج نہیں رکھتا۔





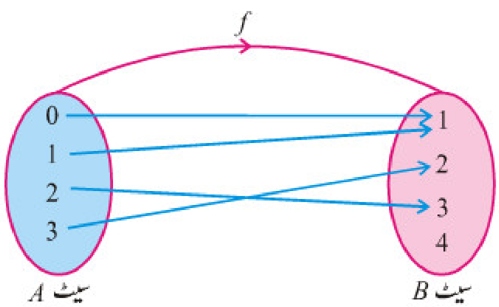
5.3 (ii) مندرجہ ذیل کا اظہار کرنا (Demonstrate the following)

(a) ان ٹو تفاعل (Into function)

$f : A \to B$ **ان ٹو فنکشن**، کہلاتا ہے اگر B کا کم از کم ایک رکن، سیٹ A کے کسی بھی رکن کا عکس نہ ہو یعنی

$\text{Range } f \subset B$

مثال کے طور پر ہم $f : A \to B$ کو بطور تفاعل بیان کرتے ہیں جو کہ



$f = \{(0, 1), (1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

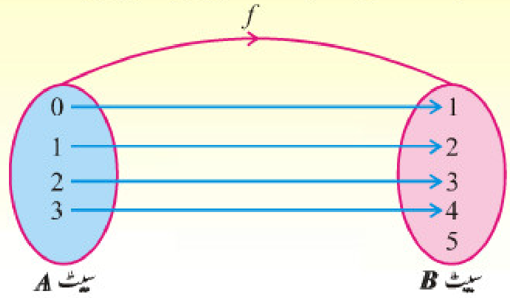
یہاں $A = \{0, 1, 2, 3\}$ اور $B = \{1, 2, 3, 4\}$

f ایک ان ٹو تفاعل (فنکشن) ہے۔

(b) ون۔ون تفاعل (One-One function)

ایک فنکشن $f : A \to B$ **ون۔ون فنکشن** کہلاتا ہے۔اگر A کے تمام ارکان کے واضح عکس (Image) B میں ہوں۔

یعنی $\forall x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ یا $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \in A$



مثال کے طور پر اگر $A = \{0, 1, 2, 3\}$ اور $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ تب $f : A \to B$ کو بطور تفاعل بیان کرتے ہیں۔ جو کہ

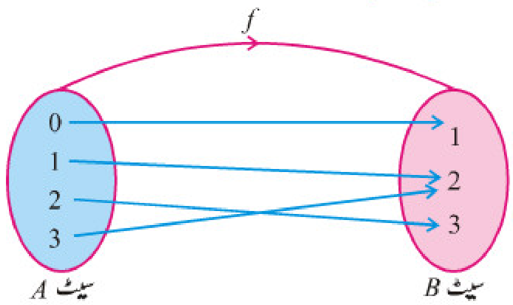
$f = \{(x, y) \mid y = x + 1, \forall x \in A, y \in B\}.$
$= \{(0, 1,), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

f، ون۔ ون تفاعل (فنکشن) ہے۔

(c) ان ٹو اور ون۔ ون تفاعل (فنکشن) (ان جیکٹیو فنکشن) (Injective function)

تفاعل f جس کی (b) میں بحث کی گئی ہے۔ ان ٹو تفاعل بھی ہے۔ پس f ایک ان ٹو اور ون۔ ون تفاعل (فنکشن) ہے۔

(d) آن ٹو یا سرجیکٹیو تفاعل (Surjective function)



ایک تفاعل $f : A \to B$ **آن ٹو فنکشن** کہلاتا ہے اگر سیٹ B کا ہر رکن، سیٹ A کے کم از کم ایک رکن کا امیج ہو۔ یعنی $\text{Range } f = B$

مثال کے طور پر اگر $A = \{0, 1, 2, 3\}$ اور

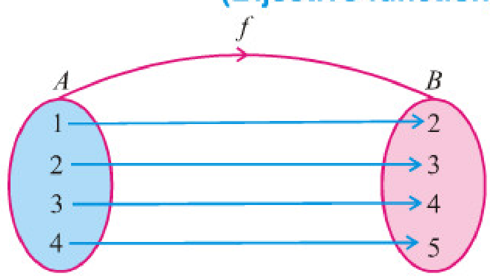
جبکہ $B = \{1, 2, 3\}$ تو $f : A \to B$

$f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$

یہاں $\text{Range } f = \{1, 2, 3\} = B$

پس f ایک آن ٹو تفاعل (فنکشن) کو بیان کرتا ہے۔

(e) بائی جیکٹیو تفاعل یا ون ٹو ون مطابقت (Bijective function)



ایک تفاعل $f : A \to B$ **بائی جیکٹیو فنکشن** کہلاتا ہے اگر تفاعل f ون۔ ون اور آن ٹو ہو۔

مثال کے طور پر اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $B = \{2, 3, 4, 5\}$ تو تفاعل $f : A \to B$ کو اس طرح بیان کرتے ہیں۔

$f = \{(x, y) \mid y = x + 1, \forall x \in A, y \in B\}$

تو $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

بلاشبہ یہ تفاعل ون۔ون ہے کیونکہ A کے تمام واضح ارکان کے واضح عکس B میں ہیں۔ یہ آن ٹو تفاعل بھی ہے کیونکہ B کا ہر رکن کم از کم A کے ایک رکن کا عکس ہے۔

نوٹ:

(i) ہر فنکشن ایک ربط ہے لیکن اس کا معکوس درست نہیں۔

(ii) ہر فنکشن ون۔ون نہیں ہوتا۔

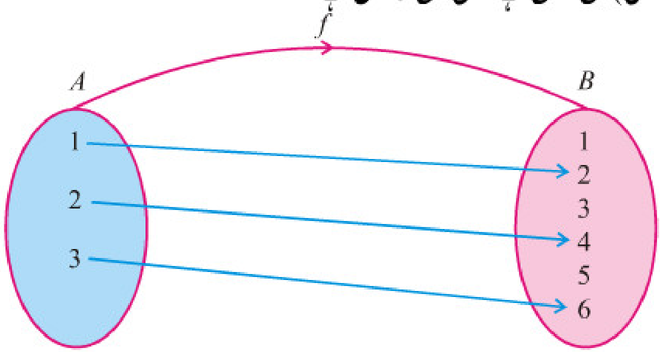
(iii) ہر فنکشن آن۔ٹو نہیں ہوتا۔

مثال: فرض کرو کہ $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ہم تفاعل اس طرح بیان کرتے ہیں $f : A \to B = \{(x, y) \mid y = 2x, \forall\, x \in A\,, y \in B\}$

تو $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$

یہ تفاعل (فنکشن) ون۔ون ہے لیکن آن ٹو نہیں ہے۔



5.3 (iii) جانچنا آیا کہ دیا ہوا ربط ایک تفاعل ہے:

(Examine whether a given relation is a function):

ایک ربط جس کی ڈومین کے ہر رکن x کا یکتا عکس اس کی رینج میں ہو تو ایسا ربط، تفاعل ہوتا ہے۔

5.3 (iv) ون ٹو ون مطابقت اور ون ون تفاعل (فنکشن) کے درمیان موازنہ کرنا۔

(Differentiate between one-to-one correspondence and one-one function)

ایک تفاعل f سیٹ A سے سیٹ B پر ون۔ون ہوتا ہے اگر A کے تمام واضح ارکان کے واضح عکس B میں ہوں اور f کی ڈومین سیٹ A کے برابر ہو اور رینج B میں ہو۔ دو سیٹوں A اور B کے درمیان ون ٹو ون مطابقت میں ہر ایک سیٹ کا ہر رکن دوسرے سیٹ کے رکن سے منسلک ہوتا ہے۔ اگر سیٹ A اور B متناہی ہوں تو ان سیٹوں میں ارکان کی تعداد ایک جتنی ہوتی ہے۔ یعنی $n(A) = n(B)$

مشق 5.5

-1 اگر $L = \{a, b, c\}$, $M = \{3, 4\}$ ہو تو $L \times M$ اور $M \times L$ کے دو ثنائی روابط معلوم کریں۔

-2 اگر $Y = \{-2, 1, 2\}$ ہو تو $Y \times Y$ کے لیے دو ثنائی روابط بنائیں۔ ان کی ڈومین اور رینج بھی معلوم کریں۔

-3 اگر $L = \{a, b, c\}$ اور $M = \{d, e, f, g\}$ ہو تو درج ذیل ہر ایک کے دو ثنائی روابط معلوم کریں۔

(i) $L \times L$ (ii) $L \times M$ (iii) $M \times M$

-4 اگر M کے 5 ارکان ہوں تو M میں ثنائی روابط کی تعداد معلوم کریں۔

-5 اگر $L = \{x \mid x \in \mathrm{N} \wedge x \leq 5\}$، $M = \{y \mid y \in P \wedge y < 10\}$ تو مندرجہ ذیل کے لیے L سے M پر روابط بنائیں۔

(i) $R_1 = \{(x, y) \mid y < x\}$ (ii) $R_2 = \{(x, y) \mid y = x\}$

(iii) $R_3 = \{(x, y) \mid x + y = 6\}$ (iv) $R_4 = \{(x, y) \mid y - x = 2\}$

نیز ہر ربط کی ڈومین اور رینج لکھیں۔

-6 مندرجہ ذیل میں سے روابط، اِن ٹو تفاعل، ون۔ون تفاعل، آن ٹو تفاعل اور بائی جیکٹیو تفاعل کی نشاندہی کریں۔ نیز ان کے ڈومین سیٹ اور رینج سیٹ معلوم کریں۔ (i) سے (vi) تک ہر جزو میں کو ڈومین سیٹ کو رینج سیٹ کے برابر لیا گیا ہے۔

(i) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

(ii) $R_2 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (3, 5)\}$

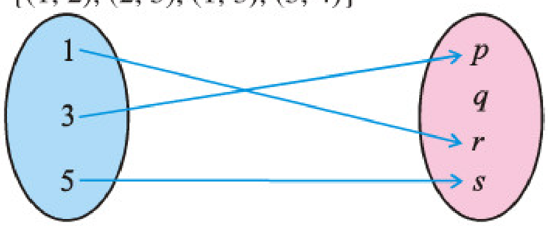
(iii) $R_3 = \{(b, a), (c, a), (d, a)\}$

(iv) $R_4 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 3), (5, 4)\}$

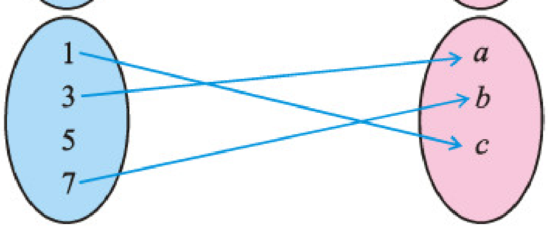
(v) $R_5 = \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, e)\}$

(vi) $R_6 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 4)\}$

(vii) $R_7 =$



(viii) $R_8 =$



متفرق مشق 5

1- کثیر الانتخابی سوالات

مندرجہ ذیل سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) واضح اشیا کا مجموعہ کہلاتا ہے۔

(a) تحتی سیٹ (b) پاور سیٹ

(c) سیٹ (d) ان میں سے کوئی نہیں

(ii) $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z \wedge b \neq 0 \right\}$ سیٹ کہلاتا ہے۔

(a) مکمل اعداد (b) قدرتی اعداد

(c) غیر ناطق اعداد (d) ناطق اعداد

(iii) سیٹ کو بیان کرنے کے مختلف طریقوں کی تعداد ہوتی ہے۔

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

(iv) سیٹ جس میں کوئی رکن نہ ہو، کہلاتا ہے۔

(a) تحتی سیٹ (b) خالی سیٹ

(c) یکتا سیٹ (d) سپر سیٹ

(v) $\{x \mid x \in W \wedge x \leq 101\}$ کہلاتا ہے۔

(a) غیر متناہی سیٹ (b) تحتی سیٹ

(c) خالی سیٹ (d) متناہی سیٹ

(vi) سیٹ جس میں صرف ایک رکن ہو، کہلاتا ہے۔

(a) خالی سیٹ (b) پاور سیٹ

(c) یکتا سیٹ (d) تحتی سیٹ

(vii) خالی سیٹ کا پاور سیٹ ہوتا ہے۔

(a) ϕ (b) $\{a\}$

(c) $\{\phi, \{a\}\}$ (d) $\{\phi\}$

(viii) $\{1, 2, 3\}$ کے پاور سیٹ کے ارکان کی تعداد ہوتی ہے۔

(a) 4 (b) 6

(c) 8 (d) 9

(ix) اگر $A \subseteq B$ ہو تو $A \cup B$ برابر ہوتا ہے۔

(a) A (b) B

(c) ϕ (d) ان میں سے کوئی نہیں

(x) اگر $A \subseteq B$ ہو تو $A \cap B$ برابر ہوتا ہے۔

(a) A (b) B

(c) ϕ (d) ان میں سے کوئی نہیں

(xi) اگر $A \subseteq B$ ہو تو $A - B$ برابر ہوتا ہے۔

(a) A (b) B

(c) ϕ (d) $B - A$

(xii) $(A \cup B) \cup C$ برابر ہوتا ہے۔

(a) $A \cap (B \cup C)$ (b) $(A \cup B) \cap C$

(c) $A \cup (B \cup C)$ (d) $A \cap (B \cap C)$

(xiii) $A \cup (B \cap C)$ برابر ہوتا ہے۔

(a) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ (b) $A \cap (B \cap C)$

(c) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (d) $A \cup (B \cup C)$

(xiv) اگر A اور B غیر مشترک سیٹ ہوں تو $A \cup B$ برابر ہوتا ہے۔

(a) A (b) B

(c) ϕ (d) $B \cup A$

(xv) اگر سیٹ A میں ارکان کی تعداد 3 اور سیٹ B میں 4 ہو تو $A \times B$ میں ارکان کی تعداد ہوتی ہے۔

(a) 3 (b) 4

(c) 12 (d) 7

(xvi) اگر سیٹ A میں ارکان کی تعداد 3 اور B میں 2 ہو تو $A \times B$ کے ثنائی روابط کی تعداد ہوتی ہے۔

(a) 2^3 (b) 2^6

(c) 2^8 (d) 2^2

(xvii) اگر $R = \{(0, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$ ہو تو Dom R ہوتی ہے۔

(a) $\{0, 3, 4\}$ (b) $\{0, 2, 3\}$

(c) $\{0, 2, 4\}$ (d) $\{2, 3, 4\}$

(xviii) اگر $R = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 4)\}$ ہو تو Range R ہوتی ہے۔

(a) $\{1, 2, 4\}$ (b) $\{3, 2, 4\}$

(c) $\{1, 2, 3, 4\}$ (d) $\{1, 3, 4\}$

(xix) نقطہ $(-1, 4)$ ربع میں ہوتا ہے۔

(a) I (b) II

(c) III (d) IV

(xx) ربط $\{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$ مندرجہ ذیل میں کونسا ہے؟

(a) آن ٹو (فنکشن) تفاعل (b) ان ٹو (فنکشن) تفاعل

(c) (فنکشن) تفاعل نہیں ہے (d) ون۔ون (فنکشن) تفاعل

-2 درجِ ذیل سوالوں کے مختصر جواب لکھیں۔

(i) تحتی سیٹ کی تعریف بیان کریں اور ایک مثال بھی دیں۔

(ii) سیٹ $\{a, b\}$ کے تمام تحتی سیٹ لکھیں۔

(iii) $A \cap B$ کو وین ڈایا گرام سے ظاہر کریں اگر $A \subseteq B$ ہو۔

(iv) $A \cap (B \cup C)$ کو وین ڈایا گرام سے ظاہر کریں۔

(v) دو سیٹوں کے تقاطع کی تعریف کریں۔

(vi) تفاعل کی تعریف کریں۔

(vii) ون۔ون تفاعل کی تعریف کریں۔

(viii) آن۔ٹو تفاعل کی تعریف کریں۔

(ix) بائی جیکٹیو تفاعل کی تعریف کریں۔

(x) ڈی مارگن کے قوانین لکھیں۔

-3 خالی جگہ پُر کریں۔

(i) اگر $A \subseteq B$، تو $A \cup B =$ _________

(ii) اگر $A \cap B = \phi$ تو A اور B __________ ہیں۔

(iii) اگر $A \subseteq B$ اور $B \subseteq A$ تو __________۔

(iv) $A \cap (B \cup C) =$ __________

(v) $A \cup (B \cap C) =$ ________

(vi) U کا کمپلیمنٹ __________ ہوتا ہے۔

(vii) ϕ کا کمپلیمنٹ __________ ہوتا ہے۔

(viii) $A \cap A^c =$ ___________

(ix) $A \cup A^c =$ ___________

(x) $\{x \mid x \in A$ اور $x \notin B\} =$ _________

(xi) نقطہ $(-5, -7)$ __________ ربع میں ہے۔

(xii) نقطہ $(4, -6)$ __________ ربع میں ہے۔

(xiii) x-axis پر ہر نقطہ کا y کوآرڈینیٹ __________ ہوتا ہے۔

(xiv) y-axis پر ہر نقطہ کا x کوآرڈینیٹ __________ ہوتا ہے۔

(xv) وین ڈایاگرام پہلی دفعہ __________ نے استعمال کی۔

(xvi) $\{(a, b), (b, c), (c, d)\}$ کی ڈومین ہوتی ہے۔

(xvii) $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ کی رینج ہوتی ہے۔

(xviii) $A \times A$ کا سب سیٹ، A میں __________ کہلاتا ہے۔

(xix) اگر $f : A \rightarrow B$ اور f کی رینج B ہو تو f ایک __________ تفاعل ہے۔

(xx) ربط $\{(a, b), (b, c), (a, d)\}$ ایک تفاعل __________ ہے۔

خلاصہ

- واضح اشیا کے مجموعہ کو **سیٹ** کہتے ہیں۔
- دو سیٹوں A اور B کا **یونین** ایسے ارکان پر مشتمل سیٹ ہوتا ہے جو A میں یا B میں یا دونوں میں ہوں۔ اس کو $A \cup B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔
- دو سیٹوں A اور B کا **تقاطع** دونوں سیٹوں کے مشترک ارکان پر مشتمل سیٹ ہوتا ہے۔ اس کو $A \cap B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ علامتی طور پر اسے $A \cap B = \{x \mid x \in A$ اور $x \in B\}$ لکھتے ہیں۔

- سیٹ B اور A کے فرق کو $A - B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس سیٹ میں B کے وہ ارکان ہوتے ہیں جو A میں نہیں ہوتے۔
- U کے لحاظ سے سیٹ A کے **کمپلیمنٹ سیٹ** میں U کے وہ تمام ارکان ہوتے ہیں جو A میں نہیں ہوتے۔ اس کو $A^C = A' = U - A$ سے ظاہر کرتے ہیں۔
- برطانوی ریاضی دان جان وین (1923-1834) نے یونیورسل سیٹ U کے لیے مستطیل کو پہلی دفعہ استعمال کیا اور اس کے تحتی سیٹوں A اور B کو اس کے اندر بند اشکال کے طور پر استعمال کیا۔
- ایک مترتب جوڑے کے ارکان کو ایک خاص ترتیب سے لکھا جاتا ہے۔ جس میں ارکان کی ترتیب کی پابندی کی جاتی ہے۔
- دو غیر خالی سیٹوں A اور B کی کارتیسی حاصلِ ضرب میں تمام مترتب جوڑے (x, y) ہوتے ہیں۔ جب کہ $x \in A, y \in B$ تو اس سیٹ کو $A \times B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔
- اگر A اور B دو غیر خالی سیٹ ہوں اور $R \subseteq A \times B$ تو تحتی سیٹ R، A سے B میں **ثنائی ربط** کہلاتا ہے۔
- اگر دو غیر خالی سیٹ A اور B ہوں تو ربط $f : A \to B$ **تفاعل** کہلاتا ہے اگر

    (i) $\text{Dom } f = A$

    (ii) ہر رکن x جو A میں ہو، f کے صرف ایک ہی مترتب جوڑے کا پہلا رکن ہوتا ہے۔
- f کا ڈومین سیٹ، f کے مترتب جوڑوں کے پہلے تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے اور f کا رینج سیٹ، f کے مترتب جوڑوں کے تمام دوسرے ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔
- ایک تفاعل '$f : A \to B$' **اِن ٹو تفاعل** کہلاتا ہے اگر B کا کم از کم ایک رکن سیٹ A کے کسی رکن کا عکس (امیج) نہ ہو۔ یعنی $\text{Range } f \subseteq B$
- ایک تفاعل '$f : A \to B$' **آن ٹو تفاعل** کہلاتا ہے اگر سیٹ B کا ہر رکن سیٹ A کے کم از کم ایک رکن کا عکس ہو یعنی $\text{Range } f = B$
- ایک تفاعل '$f : A \to B$' **وِن۔ ون تفاعل** کہلاتا ہے اگر سیٹ A کے تمام واضح ارکان کے واضح عکس سیٹ B میں ہوں۔
- '$f : A \to B$' **بائی جیکٹیو تفاعل** کہلاتا ہے۔ اگر تفاعل f ون۔ ون اور آن ٹو ہو۔