یونٹ 7

تکونیات

(INTRODUCTION TO TRIGONOMETRY)

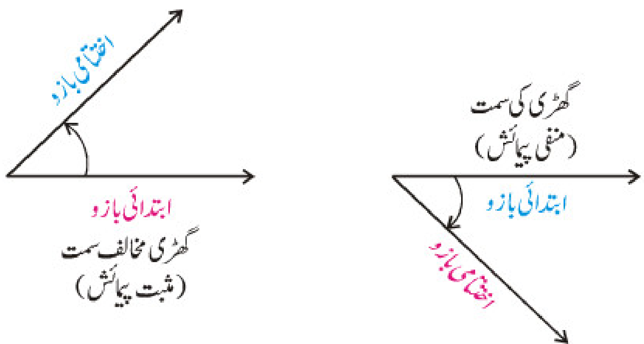
طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

- زاویہ کی ڈگری، منٹ اور سیکنڈ میں پیمائش کرنا۔
- ڈگری منٹس اور سیکنڈز میں دیے گئے زاویہ کو اعشاریہ کی شکل میں تبدیل کرنا۔
- زاویہ کی ریڈین (*Radian*) میں تعریف کرنا اور ریڈین اور ڈگری کے درمیان تعلق ثابت کرنا۔
- دائرے کے رداس، قوس اور مرکزی زاویہ کا آپس میں تعلق، $l = r\theta$ قائم کرنا۔
- دائرے کے قطاع (Sector) کا رقبہ $\frac{1}{2}r^2\theta$ کے برابر ثابت کرنا۔
- مندرجہ ذیل کی تعریف اور ان کی شناخت کرنا۔
  - عمومی زاویے (ہم بازو زاویے)
  - زاویہ کی معیاری حالت
- ربعوں (*Quadrants*) اور ربع زاویوں (*Quadrental Angles*) کی پہچان کرنا۔
- تکونیاتی نسبتوں (*Trigonometric Ratios*) اور ان کی معکوس نسبتوں کی اکائی دائرہ کی مدد سے تعریف کرنا۔
- تکونیاتی نسبتوں 45^o, 30^o اور 60^o کی قیمتوں کی یاد تازہ کرنا۔
- مختلف ربعوں میں تکونیاتی نسبتوں کی علامتوں کی پہچان کرنا۔
- مختلف ربعوں (*Quadrants*) میں تکونیاتی نسبتوں کی قیمت معلوم کرنا اگر ایک تکونیاتی نسبت دی ہوئی ہو۔
- تکونیاتی نسبتوں 0^o, 90^o, 180^o, 270^o اور 360^o کی قیمتیں معلوم کرنا۔
- تکونیاتی مماثلتوں (*Trigonometric Identities*) کو ثابت کرنا اور مختلف تکونیاتی روابط (*Relationship*) کو ظاہر کرنے کے لیے انہیں استعمال کرنا۔
- زاویہ صعود اور زاویہ نزول معلوم کرنا۔
- روز مرہ زندگی میں ایسے سوالات (مسائل) کو حل کرنا جن میں زاویہ صعود اور زاویہ نزول کا استعمال ہوا ہو۔

7.1 زاویہ کی پیمائش (Measurement of an Angle)

دو غیر ہم خط شعاعیں جو کہ ہم سرا بھی ہوں ایک زاویہ کا تعین کرتی ہیں۔ شعاعیں زاویہ کے بازو کہلاتی ہیں اور نقطہ جس پر شعاعیں آپس میں ملتی ہیں، زاویہ کا راس (Vertex) کہلاتا ہے۔

یہ بہت آسان ہے اگر ہم ایک شعاع کو (ایک نقطہ کے گرد) ایک سمت سے دوسری سمت میں گھما کر زاویہ بنائیں۔ اِس طرح زاویہ بنانے سے شعاع کی پہلی سمت زاویہ کا ابتدائی بازو (Initial arm) اور شعاع کی آخری سمت (زاویہ کا) اختتامی بازو کہلاتی ہے۔ اگر شعاع کی گردش گھڑی کی سمت یا گھڑی مخالف سمت ہو تو زاویہ کی پیمائش بھی مثبت یا منفی ہوتی ہے۔



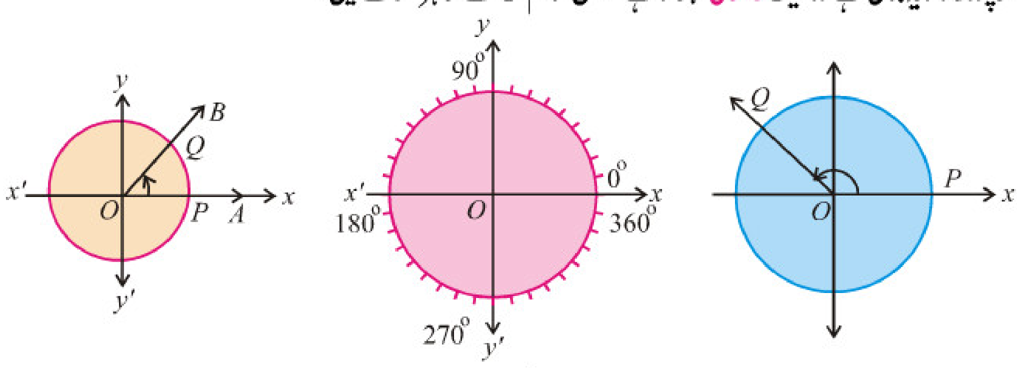
شکل 7.1

7.1(i) زاویہ کی ساٹھ کے اساس کے نظام میں پیمائش

Measurement of an angle in sexagesimal system (degree, minute and second)

درجہ/ڈگری (Degree)

ہم ایک دائرے کے محیط کو 360 برابر قوسوں (Arcs) میں تقسیم کرتے ہیں۔ ان میں سے ایک قوس دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بناتی ہے وہ ایک ڈگری کہلاتا ہے۔ اس کو ہم 1^o سے ظاہر کرتے ہیں۔



شکل 7.1.1

1° ، $1'$ اور $1''$ بالترتیب ایک ڈگری، ایک منٹ اور ایک سیکنڈ کو ظاہر کرتے ہیں۔

پس 60 سیکنڈ مل کر ایک منٹ ($1'$) بناتے ہیں۔

60 منٹ مل کر ایک درجہ (1°) بناتے ہیں۔

90 درجے مل کر ایک قائمہ زاویہ بناتے ہیں۔

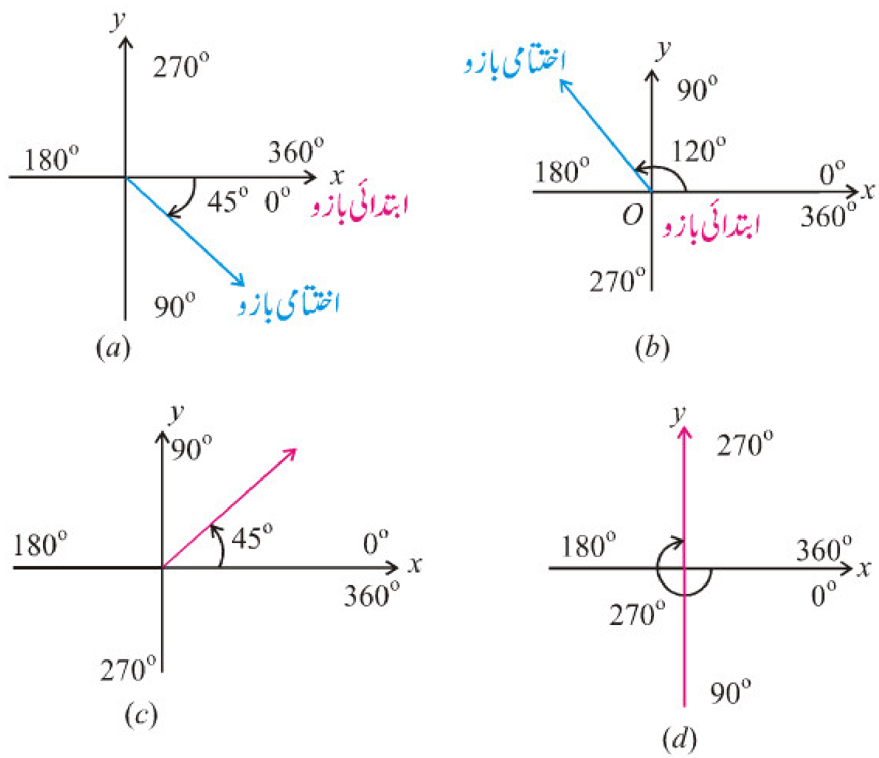
360 درجے مل کر چار قائمہ زاویہ بناتے ہیں۔

360° کا زاویہ ایک دائرے یا ایک مکمل چکر کو ظاہر کرتا ہے۔ کسی زاویہ کو بنانے کے لیے ہم مستوی (Coordinate Plane) کا استعمال کرتے ہیں، جہاں زاویہ کی ابتدائی شعاع (Initial Ray) مثبت خطِ x- محور (x-axis) پر ہوگی اور اس کا راس مبدا (Origin) پر ہوگا۔

مثال: مندرجہ ذیل زاویوں کو واضح کیجیے۔

(a) -45° (b) 120° (c) 45° (d) -270°

حل:



شکل 7.1.2

7.1(ii) D^o، M'، S'' میں دیے گئے زاویہ کو اعشاریہ کی شکل میں یا اس کے برعکس لکھنا

تبدیلی کا یہ عمل مثالوں کے ذریعے واضح کیا گیا ہے۔

مثال 1: (i) $25^o30'$ کو اعشاریہ ڈگری میں تبدیل کریں۔

(ii) 32.25^o کو D^o، M' اور S'' کی شکل میں لکھیے۔

حل:

(i) $$25^o30' = 25^o + \left(\frac{30}{60}\right)^o = 25^o + 0.5^o = 25.5^o$$

(ii) $$32.25^o = 32^o + 0.25^o = 32^o + \left(\frac{25}{100}\right)^o$$

$$= 32^o + \frac{1^o}{4} = 32^o + \left(\frac{1}{4} \times 60\right)' = 32^o\ 15'$$

مثال 2: $12^o23'35''$ کو اعشاریہ ڈگری میں تین درجہ اعشاریہ تک لکھیں۔

حل:

$$12^o23'35'' = 12^o + \frac{23^o}{60} + \frac{35^o}{60 \times 60} = \left(12^o + \frac{23^o}{60} + \frac{35^o}{3600}\right)$$

$$\approx 12^o + .3833^o + 0.00972^o$$

$$\approx 12.3930^o = 12.393^o$$

مثال 3: 45.36^o کو D^o، M' اور S'' کی شکل میں لکھیے۔

حل:

$$(45.36)^o = 45^o + (.36)^o = 45^o + \left(\frac{36}{100}\right)^o = 45^o + \left(\frac{9}{25} \times 60'\right)$$

$$= 45^o + 21.6' = 45^o + 21' + (0.6 \times 60)''$$

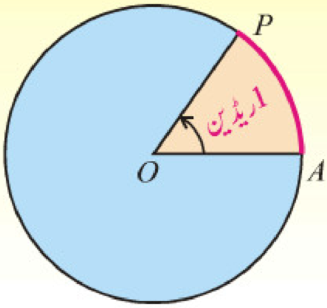
$$= 45^o21'36''$$

7.1(iii) زاویہ کی ریڈین (Radian) میں پیمائش (دائروی نظام)

Radian measure of an angle (circular system)

زاویہ کی پیمائش کا دوسرا انظام، دائروی نظام (Circular System) بہت اہمیت کا حامل ہے اور ریاضی کی دوسری اعلیٰ برانچوں میں اس کا استعمال ہوتا ہے۔

ریڈین (Radian)



شکل7.1.3

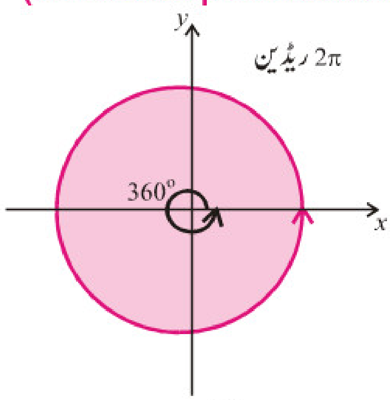
جب دائرے پر کسی قوس کی لمبائی اسی دائرے کے نصف قطر کے برابر ہو تو دائرے کے مرکز پر بننے والا زاویہ ایک **ریڈین** کہلاتا ہے۔

نقطہ O کو مرکز مان کر رداس 'r' کا ایک دائرہ لیں۔ دائرہ پر نقطہ A سے نقطہ P تک قوس کی لمبائی دائرے کے رداس کے برابر لیں۔ نقطہ O کو نقطہ A اور نقطہ P سے ملا دیں۔ اس طرح حاصل ہونے والا زاویہ $\angle AOP$ ایک ریڈین کہلاتا ہے، اگر

قوس $\widehat{AP}$ کی لمبائی = رداس $\overline{OA}$ کی لمبائی،

تو $m\angle AOP = 1$ ریڈین

ڈگری اور ریڈین کے درمیان تعلق (Relationship Between Degree and Radian)



شکل7.1.4

ہم جانتے ہیں کہ کسی دائرے کا محیط $2\pi r$ ہوتا ہے جہاں 'r' دائرے کا رداس ہے۔ چونکہ دائرہ ایک قوس ہے جس کی لمبائی $2\pi r$ کے برابر ہوتی ہے۔ ایک مکمل دائرے میں زاویہ کی ریڈین میں پیمائش $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ ہے۔

اس لیے $360^\circ = 2\pi$ ریڈین

یا (i) $\boxed{180^\circ = \pi \text{ ریڈین}}$

اس ربط کو استعمال کرتے ہوئے ہم ڈگری کو ریڈین میں اور ریڈین کو ڈگری میں آسانی سے تبدیل کرسکتے ہیں۔

$$180^\circ = \pi \text{ ریڈین} \Rightarrow 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ریڈین},$$

$$x^\circ = x\,.\,1^\circ = x\left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ ریڈین} \qquad \text{(ii)}$$

$$1 \text{ ریڈین} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ,\; y \text{ ریڈین} = y\left(\frac{180}{\pi}\right) \text{ ڈگری} \qquad \text{(iii)}$$

ڈگری اور ریڈین میں اہم زاویے

$180^\circ = 1\,(180^\circ) = \pi$ ریڈین

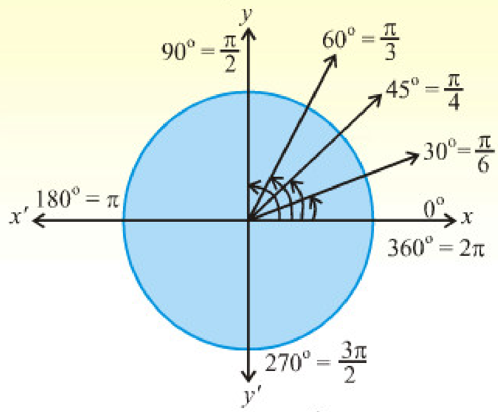
$90^\circ = \frac{1}{2}(180^\circ) = \frac{\pi}{2}$ ریڈین

$60^\circ = \frac{1}{3}(180^\circ) = \frac{\pi}{3}$ ریڈین

$45^\circ = \frac{1}{4}(180^\circ) = \frac{\pi}{4}$ ریڈین

$30^\circ = \frac{1}{6}(180^\circ) = \frac{\pi}{6}$ ریڈین

$270^\circ = \frac{3}{2}(180^\circ) = \frac{3\pi}{2}$ ریڈین



شکل 7.1.5

مثال 4: درج ذیل زاویوں کو ریڈین میں تبدیل کریں۔

(a) 15° (b) $124^\circ 22'$

حل:

مساوات (i) کو استعمال کرنے سے

(a) $15^\circ = 15\left(\frac{\pi}{180}\right.$ ریڈین$\left.\right)$

$= \frac{\pi}{12}$ ریڈین

(b) $124^\circ 22' = \left(124 + \frac{22}{60}\right)^\circ \approx (124.3666)\left(\frac{\pi}{180}\right)$ ریڈین

≈ 2.171 ریڈین

مثال 5: درج ذیل کو ڈگری میں ظاہر کریں۔

(a) $\frac{2\pi}{3}$ ریڈین (b) 6.1 ریڈین

حل:

(a) $\frac{2\pi}{3}$ ریڈین $= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{180}{\pi}\right)$ ڈگری

$= 120^\circ$

(b) 6.1 ریڈین $= (6.1)\left(\frac{180}{\pi}\right)$ ڈگری $= 6.1\,(57.295779) = 349.5043$ ڈگری

یاد رکھیے:

1 ریڈین $\approx \left(\frac{180}{3.1416}\right)^\circ \approx 57.295795^\circ \approx 57^\circ 17' 45''$, $1^\circ \approx \frac{3.1416}{180} \approx 0.0175$ ریڈین

مشق نمبر 7.1

-1 مندرجہ ذیل زاویوں کو xy–مستوی میں ظاہر کریں۔

(i) 30^o (ii) $22\frac{1}{2}^o$ (iii) 135^o (iv) 225^o

(v) -60^o (vi) -120^o (vii) -150^o (viii) -225^o

-2 ساٹھ کے اساس میں دیے گئے درج ذیل زاویوں کو اعشاریہ کی شکل میں لکھیے۔

(i) $45^o30'$ (ii) $60^o30'30''$ (iii) $125^o22'50''$

-3 مندرجہ ذیل کو D^o، M' اور S'' میں لکھیے۔

(i) 47.36^o (ii) 125.45^o (iii) 225.75^o (iv) -22.5^o

(v) -67.58^o (vi) 315.18^o

-4 مندرجہ ذیل زاویوں کو ریڈین میں لکھیے۔

(i) 30^o (ii) $(60)^o$ (iii) 135^o (iv) 225^o (v) -150^o

(vi) -225^o (vii) 300^o (viii) 315^o

-5 مندرجہ ذیل کو ڈگری میں تبدیل کریں۔

(i) $\frac{3\pi}{4}$ (ii) $\frac{5\pi}{6}$ (iii) $\frac{7\pi}{8}$ (iv) $\frac{13\pi}{16}$ (v) 3

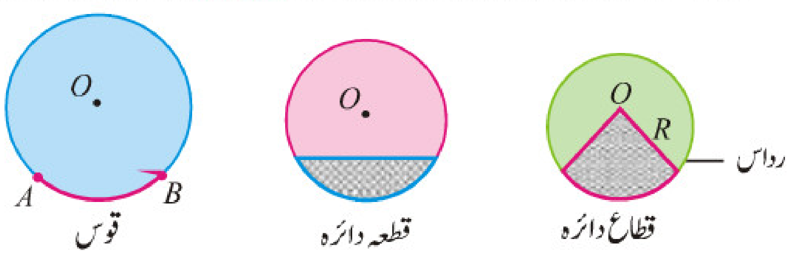
(vi) 4.5 (vii) $\frac{-7\pi}{8}$ (viii) $-\frac{13}{16}\pi$

7.2 قطاع دائرہ (Sector of a Circle)

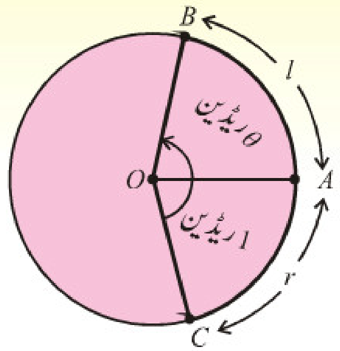
(i) کسی دائرے کے محیط کا حصہ، **قوس**(Arc) کہلاتا ہے۔

(ii) دائرے کے وتر اور قوس کا درمیانی حصہ، **قطعہ دائرہ** (Segment of a circle) کہلاتا ہے۔

(iii) دو رداسوں اور ایک قوس(arc) کے درمیانی حصے کو **قطاع دائرہ**(Sector of a circle) کہتے ہیں۔



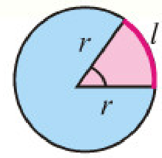
7.2(i) اگر کسی دائرے کا رداس r، قوس کی لمبائی l اور قوس کا زاویہ θ ہو جو کہ وہ مرکز پر بناتی ہے تو ثابت کیجیے کہ $l = r\theta$، جبکہ θ کی پیمائش ریڈین میں ہے۔



شکل 7.2.1

فرض کریں کہ قوس $l = \widehat{AB}$ دائرہ کے مرکز پر زاویہ θ ریڈین بناتی ہے۔ مستوی جیومیٹری کی رو سے مختلف قوسوں سے بننے والے زاویے ان قوسوں کی لمبائی کے متناسب ہوتے ہیں۔

$$\frac{m\angle AOB}{m\angle AOC} = \frac{m\widehat{AB}}{m\widehat{AC}}$$



$$\Rightarrow \quad \frac{\theta \text{ ریڈین}}{1 \text{ ریڈین}} = \frac{l}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{r} = \theta \quad \text{or} \quad \boxed{l = r\theta}$$

مثال 1 : ایک دائرے کا رداس 10 میٹر ہو تو

(a) دائرے کے مرکز پر 1.6 ریڈین کا زاویہ دائرے پر کتنی لمبائی کے برابر قوس بنائے گا؟

(b) 60 ڈگری کا زاویہ دائرے کے محیط پر کس لمبائی کی قوس بنائے گا؟

حل :

(a) $\theta = 1.6$ ریڈین ، $r = 10$ میٹر اور $l = ?$

$$l = r\,\theta \quad \Rightarrow \quad l = 10 \times 1.6 = 16 \text{ میٹر}$$

(b) $\theta = 60^{\circ} = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ ریڈین

$$l = r\,\theta = 10 \times \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} \text{ میٹر}$$

مثال 2 : ایک سائیکل سوار ایک دائرے کے گرد جس کا رداس 15 میٹر ہے، 3.5 چکر لگاتا ہے۔ بتایئے اس نے کتنا سفر طے کیا؟

حل : ہم جانتے ہیں کہ

ایک مکمل چکر میں زاویہ کی مقدار = 2π ریڈین

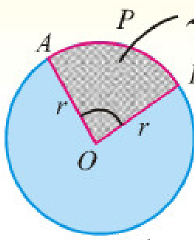
3.5 چکر میں کل زاویہ کی مقدار = $2\pi \times 3.5$

کل طے کردہ فاصلہ = $l = r\theta = 15 \times 2\pi \times 3.5$

$$\text{کل طے کردہ فاصلہ} = l = r\theta = 15 \times 2\pi \times 3.5$$
$$= 105\,\pi \text{ میٹر}$$

7.2(ii) قطاع دائرہ کا رقبہ (Area of Circular Sector)

رداس 'r' کا ایک دائرہ لیں اور l یونٹ کے برابر ایک قوس لگائیں جو کہ دائرہ کے مرکز 'O' پر زاویہ θ بناتی ہو۔



شکل 7.2.2

دائرے کا رقبہ $= \pi r^2$

دائرے کا زاویہ $= 2\pi$

قطاع دائرے کا زاویہ $= \theta$ ریڈین

بنیادی جیومیٹری کے اصول کے مطابق درج ذیل تناسب کا کلیہ استعمال کرسکتے ہیں۔

$$\frac{\text{قطاع دائرے کا زا}}{\text{دائرے کا زاویہ}} = \frac{\text{قطاع دائرے } AOBP \text{ کا رقبہ}}{\text{دائرے کا رقبہ}}$$

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\text{قطاع دائرے } AOBP \text{ کا رقبہ}}{\pi r^2}$$

$$\pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \text{قطاع دائرے } AOBP \text{ کا رقبہ}$$

پس

$$\boxed{\text{قطاع دائرے کا رقبہ} = \frac{1}{2} r^2 \theta}$$

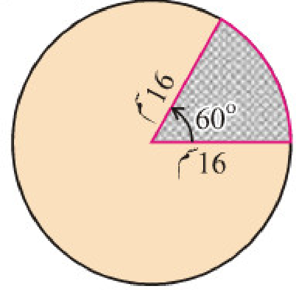
مثال 3: ایک قطاع دائرے کا رقبہ معلوم کریں جس کا رداس 16 سم اور مرکز پر زاویہ 60° ہے۔

حل: رداس = 16 سم، زاویہ $= \theta = 60^\circ = 60^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ ریڈین

$$\text{قطاع دائرے کا رقبہ} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$= \frac{1}{2}(16)^2 \left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(256) \times \left(\frac{22}{7 \times 3}\right) = 134.1 \text{ cm}^2$$



مشق نمبر 7.2

-1 θ معلوم کیجیے جبکہ:

(ii) $l = 4.5$ میٹر , $r = 2.5$ میٹر　　　(i) $l = 2$ سم , $r = 3.5$ سم

-2 l معلوم کیجیے جبکہ:

(ii) $\theta = 60^{o}30'$, $r = 15$ ملی میٹر　　　(i) $\theta = 180^{o}$, $r = 4.9$ سم

-3 r معلوم کیجیے جبکہ:

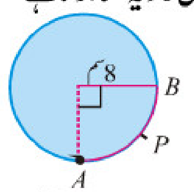
(ii) $l = 52$ سم , $\theta = 45^{o}$　　　(i) $l = 4$ سم , $\theta = \frac{1}{4}$ ریڈین

-4 قوس کی لمبائی معلوم کریں جو دائرہ کے مرکز پر 1.5 ریڈین کا زاویہ بناتی ہے جبکہ دائرے کا رداس 12 میٹر ہے۔

-5 ایک نقطہ دائرے کے گرد 3.5 چکر لگا کر کتنا فاصلہ طے کرے گا جبکہ دائرے کا رداس 10 میٹر ہے؟
(3.5 چکر $= 7\pi$)

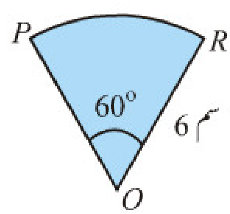
-6 3 بجے گھڑی کی سوئیوں کے درمیان دائروی پیمائش میں زاویہ کتنا ہوتا ہے؟

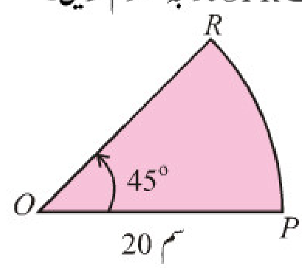
-7 قوس APB کی لمبائی کتنی ہے؟



-8 دائرہ جس کا رداس 12 سم ہے، قوس، دائرہ کے مرکز پر 84^{o} کا زاویہ بناتی ہے؟ قوس کی لمبائی کیا ہوگی؟

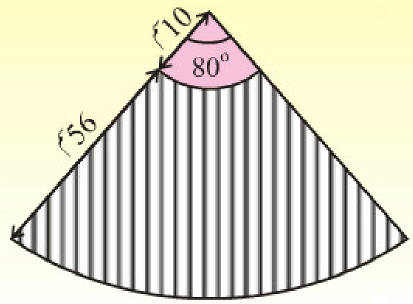
-9 قطاع دائرے OPR کا رقبہ معلوم کریں۔

(a)


(b)


-10 قطاع دائرے کا رداس 7 میٹر اور زاویہ 20^{o} ہو تو اس کا رقبہ معلوم کیجیے۔

-11 سحر ایک سکرٹ بنا رہی ہے۔ سکرٹ کے گھیرے کی ساخت تصویر میں دکھائی گئی ہے ایک گھیرے کے لیے کتنا کپڑا درکار ہے؟



12- قطاع دائرے کا رقبہ معلوم کیجیے جبکہ اس کا رداس 10 سم اور زاویہ $\frac{\pi}{5}$ ریڈین ہے۔

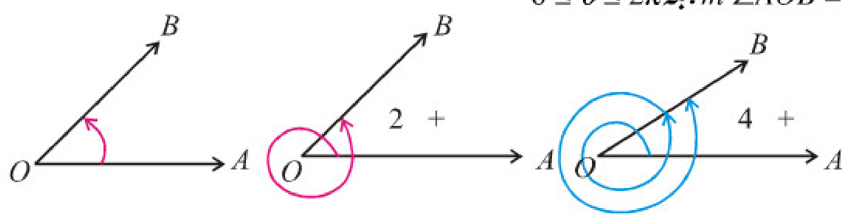
13- ایک قطاع دائرہ کا رقبہ 10 مربع میٹر اور رداس 2 میٹر ہے۔ قطاع دائرے کا زاویہ کتنے ریڈین ہو گا؟

7.3 تکونیاتی نسبتیں (Trigonometric Ratios)

7.3(i-a) عمومی زاویے (ہم بازوزاویے) General Angle (Coterminal angle)

زاویہ کو ہم ایک خمدار تیر کے نشان سے ظاہر کرتے ہیں جو زاویہ کی گردش کے ابتدائی بازو سے اختتامی بازو کی طرف سمت کو ظاہر کرتا ہے۔ دو یا دو سے زیادہ زاویے ایک ہی ابتدائی بازو سے شروع ہو کر ایک ہی اختتامی بازو کے متحمل ہو سکتے ہیں۔

ہم زاویہ $\angle AOB$ کو ابتدائی بازو $\overline{OA}$، اختتامی بازو $\overline{OB}$ اور راس O کے ساتھ زیرِ بحث لاتے ہیں۔ فرض کریں کہ ریڈین $\theta = m\angle AOB$ جبکہ $0 \le \theta \le 2\pi$



(i) (ii) (iii)

اگر اختتامی بازو ایک، دو یا دو سے زیادہ دفعہ چکر مکمل کرنے کے بعد اپنی ابتدائی حالت میں واپس آ جاتا ہے تو زاویہ کی پیمائش اس طرح ہو گی۔

(i)	θ ریڈین	صفر چکر کے بعد
(ii)	$(2\pi + \theta)$ ریڈین	ایک چکر کے بعد
(iii)	$(4\pi + \theta)$ ریڈین	دو چکروں کے بعد

کوٹرمینل زاویے (ہم بازوزاویے) (Coterminal Angles)

دو یا دو سے زیادہ زاویے جن کے ابتدائی بازو اور اختتامی بازو ایک جیسے ہوں، کوٹرمینل زاویے کہلاتے ہیں۔

اس کا مطلب یہ ہے کہ اختتامی بازو ہر گردش پر (گھڑی کی سمت یا گھڑی کی مخالف سمت میں) 2π ریڈین زاویہ مکمل

کر کے اپنی ابتدائی حالت میں واپس آجاتا ہے۔

اگر θ ڈگری میں ہو تو $(360^\circ\, k + \theta)$ زاویہ θ کے ساتھ کوٹرمینل (ہم بازو) ہوگا جبکہ $k \in Z$

اگر θ ریڈین میں ہو تو $2k\pi + \theta$، زاویہ θ کے ساتھ کوٹرمینل ہوگا جبکہ $k \in Z$

پس $\quad$ عمومی زاویہ $\theta = 2(k)\,\pi + \theta$ جبکہ $k \in Z$

مثال: مندرجہ ذیل میں سے کون سے زاویے 120° کے ساتھ ہم بازو 'کوٹرمینل' ہیں؟

-240°، 480°، $\frac{14\pi}{3}$ اور $-\frac{14\pi}{3}$

حل: -240° زاویہ 120° کے ساتھ ہم بازو ہے کیونکہ ان کا اختتامی بازو ایک ہی ہے۔

$480^\circ = 360^\circ + 120^\circ$، زاویہ 480° ایک مکمل گردش (چکر) کے بعد 120° پر اختتام پذیر ہوتا ہے لہٰذا 120° کے ساتھ ہم بازو ہے۔

$$\frac{14}{3}\pi \equiv 4\pi + \frac{2\pi}{3} = 720^\circ + 120^\circ$$

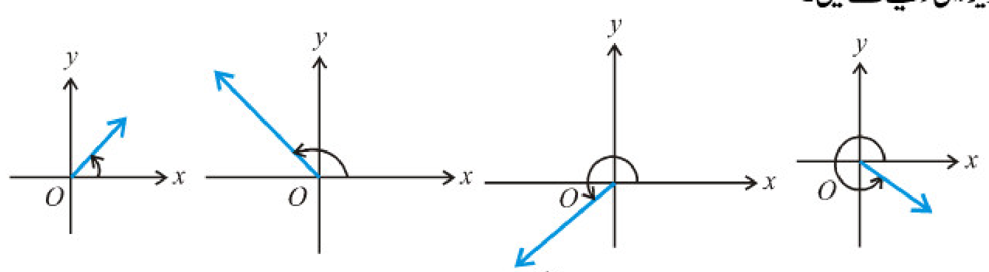
پس زاویہ $\frac{14\pi}{3}$، 120° کے ساتھ ہم بازو ہے۔

$$\frac{-14\pi}{3} = -4\pi + \frac{-2\pi}{3} = -720^\circ - 120^\circ$$

پس، $\frac{-14\pi}{3}$ زاویہ 120° کے ساتھ ہم بازو نہیں ہے۔

7.3(i-b) معیاری صورت میں زاویہ (Angle in Standard Position)

اگر عمومی زاویے کا راس (Vertex) مبدا (Origin) پر ہو اور ابتدائی بازو مستوی میں x- محور کی مثبت سمت میں ہو تو ایسا زاویہ معیاری صورت میں ہوتا ہے۔ کیونکہ معیاری صورت میں تمام زاویوں کا ابتدائی بازو ایک ہی ہوتا ہے لہٰذا اختتامی بازو کی حالت / صورت اہمیت کی حامل ہوتی ہے۔ اگر معیاری صورت میں کسی زاویے کو 2π کے ضعف (Multiple) سے کم یا زیادہ کیا جائے تو زاویے کا اختتامی بازو تبدیل نہیں ہوتا۔ کچھ عمومی زاویے جن کا اختتامی بازو تبدیل نہیں ہوتا نیچے تصویر میں دیے گئے ہیں۔

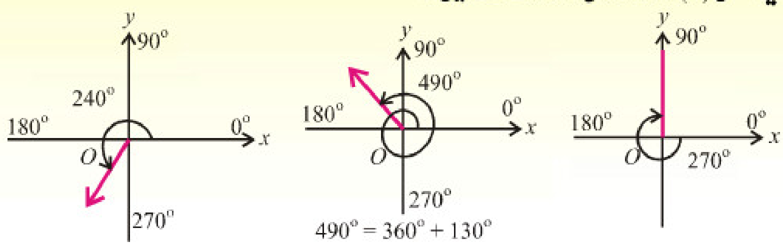


شکل 7.3.1 (a)

مثال: درج ذیل زاویوں کو معیاری صورت میں ظاہر کریں۔

(i) 240^o (ii) 490^o (iii) -270^o

حل: زاویے شکل 7.3.1(b) میں دکھائے گئے ہیں۔

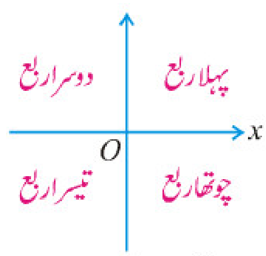


(i) (ii) (iii)

شکل 7.3.1 (b)

7.3(ii) ربعے اور ربع زاویے (The Quadrants and Quadrantal Angles)

جب x- محور اور y- محور ایک دوسرے کو 90^o کے زاویے پر کاٹیں تو یہ مستوی کو چار حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جن کو ربعے کہتے ہیں۔ x- محور اور y- محور جہاں ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں وہ نقطہ مبدا (Origin) کہلاتا ہے اور اسے O سے ظاہر کرتے ہیں۔

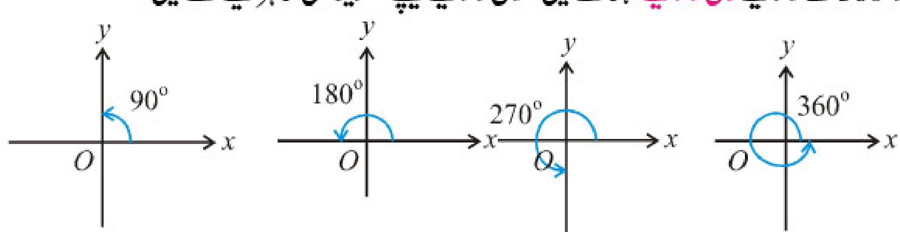


0^o سے 90^o تک زاویے پہلے ربع میں ہوتے ہیں۔
90^o سے 180^o تک کے زاویے دوسرے ربع میں ہوتے ہیں۔
180^o سے 270^o تک زاویے تیسرے ربع میں ہوتے ہیں۔
270^o سے 360^o تک کے زاویے چوتھے ربع میں ہوتے ہیں۔

معیاری صورت میں زاویہ اس ربع میں واقع ہو گا اگر اس کا اختتامی بازو اسی ربع میں واقع ہو۔ شکل 7.3.1 (a) میں α، β، γ اور θ زاویے بالترتیب پہلے، دوسرے، تیسرے اور چوتھے ربع میں واقع ہیں۔

ربع زاویے (Quadrantal Angles)

اگر زاویے کا اختتامی بازو x- محور یا y- محور پر ہو تو اس طرح بننے والا زاویہ ربع زاویہ کہلاتا ہے لہٰذا 90^o، 180^o، 270^o اور 360^o کے زاویے ربع زاویے کہلاتے ہیں۔ ربع زاویے نیچے تصویر میں ظاہر کیے گئے ہیں۔

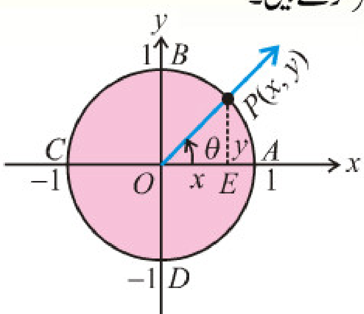


شکل 7.3.2

(iii)7.3 اکائی دائرہ کی مدد سے تکونیاتی نسبتیں اور ان کے معکوس
(Trigonometric ratios and their reciprocals with the help of a unit circle)

بنیادی طور پر چھ تکونیاتی نسبتیں ہیں جن کو sine, cosine, tangent, cotangent, secant اور cosecant کہتے ہیں۔ان نسبتوں کو بیان کرنے کے لیے دائروی طریقہ استعمال کرتے ہیں جو کہ اکائی دائرے پر مشتمل ہے۔

فرض کریں کہ ہم زاویہ کی معیاری صورت کو حقیقی عدد θ ریڈین سے ظاہر کرتے ہیں۔



شکل 7.3.3

فرض کریں کہ کسی زاویہ θ کے اختتامی بازو پر نقطہ $P(x, y)$ واقع ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

ہم $\text{sine}\,\theta$ کو $\sin\theta$ اور $\text{cosine}\,\theta$ کو $\cos\theta$ لکھتے ہیں اور ان کی تعریف یوں لکھتے ہیں:

$$\sin\theta = \frac{EP}{OP} = \frac{y}{1} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = y$$

اور

$$\cos\theta = \frac{OE}{OP} = \frac{x}{1} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = x$$

$\sin\theta$ اور $\cos\theta$ اکائی دائرے پر کسی نقطہ $P\ (x, y)$ کے x- محدد اور y- محدد کہلاتے ہیں۔ مساوات $x = \cos\theta$ اور $y = \sin\theta$ کو دائروی یا تکونیاتی تفاعل کہتے ہیں جبکہ باقی تکونیاتی تفاعل Tangent، Cotangent، Secant اور Cosecant کو، $\tan\theta$، $\cot\theta$، $\sec\theta$ اور $\text{cosec}\,\theta$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\tan\,\theta = \frac{EP}{OE} = \frac{y}{x} \qquad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (x \neq 0)$$

$$y = \sin\theta \quad \text{اور} \quad x = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0) \quad \Rightarrow \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

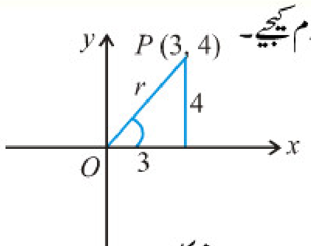
$$\sec\,\theta = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad \text{اور} \quad \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$= \frac{1}{\cos\,\theta} \qquad\qquad\qquad = \frac{1}{\sin\,\theta}$$

معکوس مماثلتیں

$\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$	یا	$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$
$\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$	یا	$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$
$\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$	یا	$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

مثال: اگر نقطہ $(3, 4)$ زاویہ θ کے اختتامی بازو پر ہو تو تکونیاتی نسبتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔



شکل 7.3.4

حل: نقطہ $(3, 4)$ میں $x = 3$ اور $y = 4$

تکونیاتی نسبتوں کے حل کے لیے ہمیں r کی قیمت کی ضرورت ہے

جس کو ہم $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ کی مدد سے معلوم کرتے ہیں جہاں $r = |\overline{OP}|$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad r = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

پس

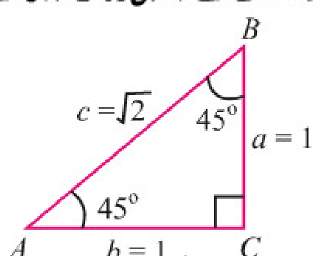
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} \quad ; \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \sec\theta = \frac{5}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{3} \quad ; \quad \cot\theta = \frac{3}{4}$$

7.3(iv) تکونیاتی نسبتوں کی 45°، 30° اور 60° کے زاویوں پر قیمتیں:

ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ABC لیں جس کا زاویہ $m\angle C = 90^\circ$ کا ہو۔ مثلث کے راسوں A، B اور C کے بالمقابل اضلاع کو بالترتیب a، b اور c سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل 7.3.5

(i) 45° کے زاویے کی تکونیاتی نسبتیں:

جب $m\angle A = 45^\circ$ جبکہ $\dfrac{\pi}{4} = 45^\circ$ ریڈین، چونکہ کسی مثلث میں

تمام زاویوں کا مجموعہ $= 180^\circ$ اس لیے $m\angle B = 45^\circ$

تکونیاتی نسبتوں کی قیمت کا انحصار زاویہ کی مقدار پر ہے نہ کہ مثلث کی جسامت پر۔ آسانی کے لیے ہم $a = b = 1$ لیتے ہیں۔ اس طرح بننے والی مثلث مساوی الساقین مثلث ہو گی۔

مسئلہ فیثاغورث کے مطابق

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2$$
$$c^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{2}$$

دی گئی مثلث کے مطابق

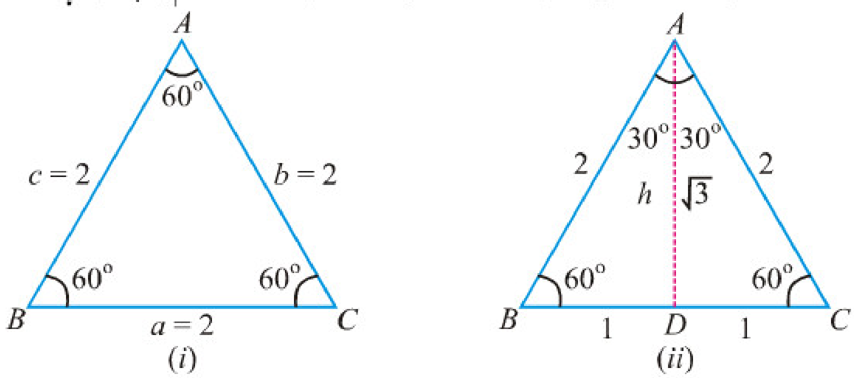
$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1 \ ; \quad \cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1$$

(ii) جب $m\angle A = 30^\circ$ یا $m\angle A = 60^\circ$ ہو۔

ایک مساوی الاضلاع مثلث بنائیں جس میں آسانی کے لیے $a = b = c = 2$ لیں۔ چونکہ مساوی الاضلاع مثلث میں تمام زاویوں کی مقدار برابر ہوتی ہے اور ان کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔ ہر زاویہ 60° کا ہوتا ہے۔ اِس مثلث کے $\angle A$ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنے والی لائن مثلث کو دو قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں تبدیل کرتی ہے جس میں باقی دو زاویے 30° اور 60° کے برابر ہوں گے۔ مثلث کی بلندی $|\overline{AD}|$ مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے معلوم کی جاسکتی ہے۔



شکل 7.3.6

$$(AD)^2 + (BD)^2 = (AB)^2 \ \Rightarrow \ (AD)^2 = (AB)^2 - (BD)^2$$
$$\Rightarrow \ h^2 = (2)^2 - (1)^2 = 3$$
$$\Rightarrow \ h = \sqrt{3}$$

مثلث ADB کے مطابق جبکہ $m\angle A = 30^\circ$ ہو۔

$$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$$

$$\cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 30^o = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30^o = \frac{1}{\tan 30^o} = \sqrt{3}$$

مثلث ABD کے مطابق جبکہ $m\angle B = 60^o$ ہو۔

$$\sin 60^o = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{cosec} 60^o = \frac{1}{\sin 60^o} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60^o = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2} \qquad \sec 60^o = \frac{1}{\cos 60^o} = 2$$

$$\tan 60^o = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{1} \qquad \cot 60^o = \frac{1}{\tan 60^o} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

7.3(v) مختلف ربعوں میں تکونیاتی نسبتوں کی علامات:

تکونیاتی نسبتوں $\sin\theta$، $\cos\theta$ اور $\tan\theta$ میں اگر θ ربع زاویہ نہ ہو تو θ کسی ایک خاص ربع میں ہو گا۔ چونکہ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہمیشہ مثبت عدد ہوتا ہے اور اگر θ کا ربع معلوم ہو تو ہم کسی بھی تکونیاتی نسبت کی علامت معلوم کر سکتے ہیں۔

(i) اگر θ پہلے ربع میں ہو اور نقطہ $P(x, y)$، زاویہ θ کے اختتامی بازو پر واقع ہو تو x- اور y- محدد دونوں مثبت ہوں گے۔ لہٰذا پہلے ربع میں تمام تکونیاتی نسبتیں مثبت ہوں گی۔

(ii) اگر θ دوسرے ربع میں ہو تو نقطہ $P(x, y)$ میں x– محدد منفی اور y- محدد مثبت ہو گا۔

اس لیے $\cos\theta = \frac{x}{r} < 0$ یا منفی ہے $\sin\theta = \frac{y}{r} > 0$ یا مثبت ہے

اور $\tan\theta = \frac{y}{x} < 0$ یا منفی ہے

(iii) جب θ تیسرے ربع میں ہو تو نقطہ $P\ (x, y)$ کے x- محدد اور y- محدد منفی ہونگے۔

اس لیے $\cos\theta = \frac{x}{r}$ یا منفی ہے $\sin\theta = \frac{y}{x} < 0$ یا منفی ہے

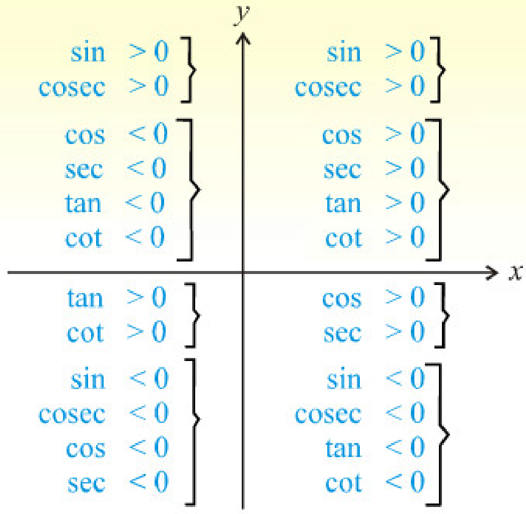
اور $\tan\theta = \frac{y}{x} > 0$ یا مثبت ہے

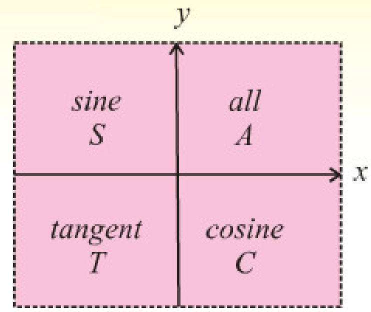
(iv) جب θ چوتھے ربع میں ہو تو نقطہ $P\ (x, y)$ کا x- محدد مثبت اور y- محدد منفی ہو گا۔

اس لیے $\cos\theta = \frac{x}{r} > 0$ یا مثبت ہے $\sin\theta = \frac{y}{r} < 0$ یا منفی ہے

اور $\tan\theta = \frac{y}{x} < 0$ یا منفی ہے

تکونیاتی نسبتوں کی علامات کا خلاصہ نیچے دیا گیا ہے۔





7.3(vi) تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کرنا جبکہ ایک تکونیاتی نسبت دی ہوئی ہو:

تکونیاتی نسبتوں کی قیمت معلوم کرنے کے طریقہ کار کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعے کی گئی ہے۔

مثال 1: اگر $\sin\theta=\frac{-3}{4}$ اور $\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ہو تو $\tan\theta$، $\cot\theta$، $\sec\theta$ اور $\operatorname{cosec}\theta$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: ہم دو مماثلات (Identities) استعمال کرتے ہیں جو باقی تکونیاتی تفاعل کو sine اور cosine میں ظاہر کرتے ہیں۔

$$\because \quad \sin\theta=\frac{-3}{4} \quad \therefore \quad \operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\frac{-3}{4}}=\frac{-4}{3} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cosec}\theta=\frac{-4}{3}$$

$$\because \quad \cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4} \quad \therefore \quad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \quad \Rightarrow \quad \sec\theta=\frac{4}{\sqrt{7}}$$

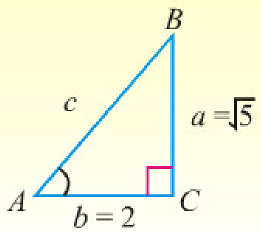
اب

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{-3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{-3}{\sqrt{7}} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta=\frac{-3}{\sqrt{7}}$$

اور

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\frac{-3}{\sqrt{7}}}=-\frac{\sqrt{7}}{3}$$

مثال 2: اگر $\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ہو تو باقی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کیجیے۔



حل: قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{5},\ b = 2$$

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{5})^2 + (2)^2 = c^2$$

$c^2 = 5 + 4 = 9 \quad \Rightarrow \quad c = \pm 3$ یا $c = 3$

$$\because \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \quad \Rightarrow \quad \cot\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\theta = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad , \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \quad \therefore \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c} = \frac{2}{3} \quad , \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \sec\theta = \frac{1}{\frac{2}{3}} \quad \therefore \quad \sec\theta = \frac{3}{2}$$

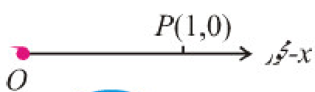
7.3(vii) 0°، 90°، 180°، 270° اور 360° کی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کرنا:

آرٹیکل 7.3(ii) میں ہم ربع زاویوں کو زیر بحث لائے تھے۔ اگر زاویہ θ کا اختتامی بازو x-محور یا y-محور پر ہو تو θ ربع زاویہ کہلاتا ہے۔

(i) جب $\theta = 0°$

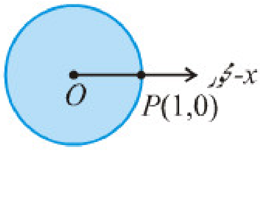
ایک نقطہ $P(1, 0)$ زاویہ $0°$ کے اختتامی بازو پر ہے، ہم ایک اکائی دائرہ بنا سکتے ہیں جس میں زاویہ $0°$ کے اختتامی بازو پر نقطہ $P(1, 0)$ ہو۔

$P(1, 0) \Rightarrow x = 1$ اور $y = 0$ پس $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 0} = 1$



$\therefore \quad \sin0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad , \quad \operatorname{cosec}0° = \frac{1}{\sin0°} = \frac{1}{0} = \infty$ (ناقابل تعریف)

$\cos0° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1 \quad , \quad \sec0° = \frac{1}{\cos0°} = 1$



$\tan0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0 \quad , \quad \cot0° = \frac{1}{\tan0°} = \frac{1}{0} = \infty$ (ناقابل تعریف)

(ii) جب $\theta = 90^\circ$

اس صورت میں نقطہ $P\ (0, 1)$ زاویہ 90° کے اختتامی بازو پر ہوتا ہے۔

$x = 0$ اور $y = 1 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{0^2 + (1)^2} = 1$

اس لیے $\quad \sin 90^\circ = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{1} = 1$

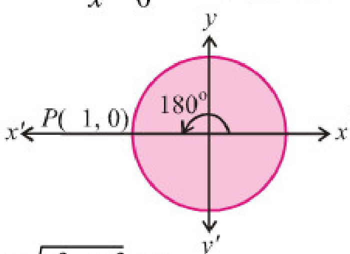
یہ کہ $\quad \sin 90^\circ = 1$ اور $\operatorname{cosec} 90^\circ = \dfrac{r}{y} = 1$

معکوس مماثلات کی رو سے

$\cos 90^\circ = \dfrac{x}{r} = \dfrac{0}{1} = 0 \quad , \quad \sec 90^\circ = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{0} = \infty$ (ناقابل تعریف)

$\tan 90^\circ = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{0} = \infty$ (ناقابل تعریف) $, \ \cot 90^\circ = \dfrac{x}{y} = \dfrac{0}{1} = 0$

(iii) جب $\theta = 180^\circ$



نقطہ $P\ (-1, 0)$ زاویہ 180° کے اختتامی بازو x- محور پر ہوتا ہے جب کہ $x = -1$ اور $y = 0$

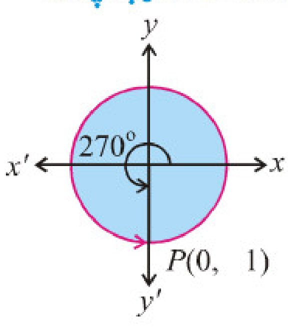
$\Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$\therefore \quad \sin 180^\circ = \dfrac{y}{r} = \dfrac{0}{1} = 0 \quad ; \quad \operatorname{cosec} 180^\circ = \dfrac{r}{y} = \dfrac{1}{0} = \infty$ (ناقابل تعریف)

$\cos 180^\circ = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-1}{1} = -1 \quad ; \quad \sec 180^\circ = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{-1} = -1$

$\tan 180^\circ = \dfrac{y}{x} = \dfrac{0}{-1} = 0 \quad ; \quad \cot 180^\circ = \dfrac{x}{y} = \dfrac{-1}{0} = \infty$ (ناقابل تعریف)

(iv) جب $\theta = 270^\circ$ اور نقطہ $P\ (0, -1)$، y'- محور پر ہو یا زاویہ 270° کے اختتامی بازو پر ہو۔



جب کہ $y = -1$ اور $x = 0$

اس طرح $\quad r = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = 1$

$\therefore \quad \sin 270^\circ = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-1}{1} = -1 \quad ; \quad \operatorname{cosec} 270^\circ = \dfrac{r}{y} = \dfrac{1}{-1} = -1$

$\cos 270^\circ = \dfrac{x}{r} = \dfrac{0}{1} = 0 \quad ; \quad \sec 270^\circ = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{0} = \infty$

$\tan 270^\circ = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-1}{0} = -\infty \quad ; \quad \cot 270^\circ = \dfrac{x}{y} = \dfrac{0}{-1} = 0$

(iv) جب $\theta = 360^o$ ہو تو نقطہ $P\,(1, 0)$ ایک دفعہ پھر x-محور پر ہو گا۔

اب

$$\sin 360^o = \sin 0^o = 0 \quad ; \quad \operatorname{cosec} 360^o = \frac{1}{\sin 360^o} = \frac{1}{\sin 0^o} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{(ناقابل تعریف)}$$

$$= \sin(360^o + 0^o)$$

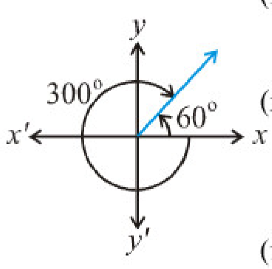
$$\cos 360^o = \cos 0^o = 1 \quad ; \quad \sec 360^o = \frac{1}{\cos 0^o} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 360^o = \tan 0^o = 0 \quad ; \quad \cot 360^o = \frac{1}{\tan 0^o} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{(ناقابل تعریف)}$$

مثال: جدول یا کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر درج ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\cos 540^o$ (ii) $\sin 315^o$ (iii) $\sec(-300^o)$

حل:



(i) $540^o = (360^o + 180^o) = 2(1)\pi + 180^o$

$\cos 540^o = \cos(2\pi + \pi) = \cos\pi = -1$

(ii) $\sec 315^o = \sin(360^o - 45^o) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

(iii) $\sec(-300^o) = \sec(-360^o + 60^o)$

$= \sec(2(-1)\pi + 60^o)$

$= \sec 60^o = \frac{1}{\cos 60^o} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

مشق 7.3

-1 مندرجہ ذیل زاویوں کو پروٹریکٹر (زاویہ پیما) یا فری ہینڈ طریقہ کی مدد سے معیاری حالت میں ظاہر کریں۔ نیز ہر زاویے کا مثبت اور منفی ہم بازو زاویہ بھی معلوم کریں۔

(i) 170^o (ii) 780^o (iii) -100^o (iv) -500^o

-2 قریب ترین ربع زاویوں کی شناخت کریں جن کے درمیان مندرجہ ذیل زاویے ہوں۔

(i) 156^o (ii) 318^o (iii) 572^o (iv) -330^o

-3 قریب ترین ربع زاویے لکھیے جن کے درمیان مندرجہ ذیل زاویے ہوں۔ اپنا جواب ریڈین میں لکھیں۔

(i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{3\pi}{4}$ (iii) $\frac{-\pi}{4}$ (iv) $\frac{-3\pi}{4}$

-4 زاویہ θ کس ربع میں ہو گا جبکہ

(i) $\sin\theta > 0$, $\tan\theta < 0$ (ii) $\cos\theta < 0$, $\sin\theta < 0$

(iii) $\sec\theta > 0$, $\sin\theta < 0$ (iv) $\cos\theta < 0$, $\tan\theta < 0$

(v) $\operatorname{cosec}\theta > 0$, $\cos\theta > 0$ (vi) $\sin\theta < 0$, $\sec\theta < 0$

-5 خالی جگہ پُر کریں۔

(i) $\cos(-150^\circ) = \ldots\ldots\ldots \cos 150^\circ$ (ii) $\sin(-310^\circ) = \ldots\ldots\ldots \sin 310^\circ$

(iii) $\tan(-210^\circ) = \ldots\ldots\ldots \tan 210^\circ$ (iv) $\cot(-45^\circ) = \ldots\ldots\ldots \cot 45^\circ$

(v) $\sec(-60^\circ) = \ldots\ldots\ldots \sec 60^\circ$ (vi) $\operatorname{cosec}(-137^\circ) = \ldots\ldots\ldots \operatorname{cosec} 137^\circ$

-6 دیا گیا نقطہ، زاویہ θ کے اختتامی بازو پر واقع ہے۔ زاویہ θ کا ربع معلوم کیجیے اور تمام چھ تکونیاتی نسبتیں بھی معلوم کیجیے۔

(i) $(-2, 3)$ (ii) $(-3, -4)$ (iii) $(\sqrt{2}, 1)$

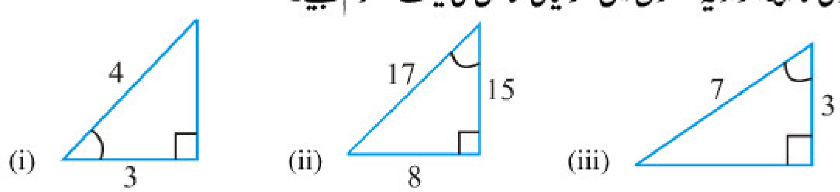
-7 اگر $\cos\theta = \frac{-2}{3}$ اور زاویہ θ کا اختتامی بازو دوسرے ربع میں ہو تو باقی تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

-8 اگر $\tan\theta = \frac{4}{3}$ اور $\sin\theta < 0$ ہو تو باقی تکونیاتی تفاعل کی θ پر قیمت معلوم کریں۔

-9 اگر $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ اور زاویہ θ کا اختتامی بازو تیسرے ربع میں نہ ہو تو $\tan\theta$، $\sec\theta$ اور $\operatorname{cosec}\theta$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

-10 اگر $\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{12}$ اور $\sec\theta > 0$ ہو تو باقی تکونیاتی تفاعل کی قیمت معلوم کیجیے۔

-11 دی ہوئی قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں تکونیاتی تفاعل کی قیمت معلوم کیجیے۔



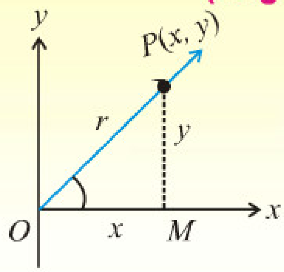
-12 تکونیاتی تفاعل کی قیمت معلوم کیجیے۔ تکونیاتی جدول (Tables) اور کیلکولیٹر استعمال نہ کریں۔

(i) $\tan 30^\circ$ (ii) $\tan 330^\circ$ (iii) $\sec 330^\circ$ (iv) $\cot\frac{\pi}{4}$

(v) $\cos\frac{2\pi}{3}$ (vi) $\operatorname{cosec}\frac{2\pi}{3}$ (vii) $\cos(-450^\circ)$ (viii) $\tan(-9\pi)$

(ix) $\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$ (x) $\sin\frac{7\pi}{6}$ (xi) $\cot\frac{7\pi}{6}$ (xii) $\cos 225^\circ$

7.4 تکونیاتی مماثلات (Trigonometric Identities)



سیکشن 7.3 میں ہم نے تکونیاتی فنکشنز (تفاعل) اور ان کے معکوس پر بحث کی۔ کوئی زاویہ $\angle MOP = \theta$ ریڈین معیاری حالت میں لیں۔ زاویہ کے اختتامی بازو پر نقطہ $P(x, y)$ لیں۔ قائمۃ الزاویہ مثلث OMP میں مسئلہ فیثا غورث کی رو سے

$$OM^2 + MP^2 = OP^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{(i)}$$

(i) کو r^2 پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$

$$\left(\because \sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}\right)$$

$$\therefore \boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1} \qquad (1)$$

(i) کو x^2 پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2 \qquad \because \tan\theta = \frac{y}{x} \text{ اور } \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\Rightarrow 1 + (\tan\theta)^2 = (\sec\theta)^2$$

$$\therefore \boxed{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta} \text{ یا } \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \qquad (2)$$

(i) کو ایک دفعہ پھر y^2 پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{r}{y}\right)^2 \qquad \because \cot\theta = \frac{x}{y} \text{ اور } \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}$$

$$\Rightarrow (\cot\theta)^2 + 1 = (\operatorname{cosec}\theta)^2$$

$$\therefore \boxed{1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta} \text{ یا } \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1 \qquad (3)$$

مماثلات (1)، (2) اور (3) فیثا غورث مماثلات کہلاتی ہیں۔

یہ بنیادی مماثلات تکونیاتی تفاعل (Functions) کو مختصر کرنے کے لیے استعمال کی جاتی ہیں۔

مثال 1: ثابت کیجیے کہ $\cot\theta \sec\theta = \operatorname{cosec}\theta$

حل: دائیں طرف کی مثلثی نسبتوں کو sine اور cosine میں بدلنے سے

$$\text{L.H.S} = \cot\theta\sec\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta = \text{R.H.S}$$

مثال 2: ثابت کیجیے کہ $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \tan^2\theta\sec^2\theta$

حل: $\because \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$$\text{L.H.S} = \tan^4\theta + \tan^2\theta = \tan^2\theta(\tan^2\theta + 1)$$
$$= \tan^2\theta\sec^2\theta$$
$$= \text{R.H.S}$$

مثال 3: ثابت کیجیے کہ $\dfrac{\cot^2\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha - 1} = \operatorname{cosec}\alpha + 1$

حل: $\left(\begin{array}{l}\because\ \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1\\ \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1\end{array}\right)$

$$\text{L.H.S} = \frac{\cot^2\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha - 1}$$
$$= \frac{(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1)}{\operatorname{cosec}\alpha - 1} = \frac{(\operatorname{cosec}\alpha - 1)(\operatorname{cosec}\alpha + 1)}{(\operatorname{cosec}\alpha - 1)}$$
$$= \operatorname{cosec}\alpha + 1 = \text{R.H.S}$$

مثال 4: تکونیاتی تفاعل (Functions) کو $\tan\theta$ کی شکل میں بیان کریں۔

حل: معکوس مماثل (Identity) استعمال کر کے ہم $\cot\theta$ کو $\tan\theta$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ جیسا کہ

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

مماثلت $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ کو حل کرنے سے

$$\sec\theta = \pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}$$

چونکہ $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{\pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$

کیونکہ $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$

اس لیے $\sin\theta = \tan\theta\left(\dfrac{1}{\pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}}\right) = \dfrac{\tan\theta}{\pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}}{\tan\theta}$$

نوٹ: ہم تمام تکونیاتی فنکشنز کو صرف ایک تکونیاتی فنکشن میں بیان کر سکتے ہیں۔

مشق نمبر 7.4

1 تا 6 تک دیے گئے سوالات میں جملوں کو مختصر کر کے ایک تکونیاتی تفاعل میں لکھیے۔

1. $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ 2. $\tan x \sin x \sec x$ 3. $\dfrac{\tan x}{\sec x}$

4. $1 - \cos^2 x$ 5. $\sec^2 x - 1$ 6. $\sin^2 x \,.\, \cot^2 x.$

7 تا 24 تک دیے گئے سوالات میں مماثلات کو ثابت کریں۔

7. $(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta) = \cos^2\theta$ 8. $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta} = 1 + \tan\theta$

9. $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$

10. $(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta)(\tan\theta - \sin\theta) = \sec\theta - \cos\theta$

11. $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\tan^2\theta - 1} = \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$ 12. $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \sin\theta = \operatorname{cosec}\theta$

13. $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$ 14. $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

15. $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\operatorname{cosec}\theta$

16. $(\tan\theta + \cot\theta)(\cos\theta + \sin\theta) = \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta$

17. $\sin\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \sec\theta$ 18. $\dfrac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = 2\operatorname{cosec}\theta$

19. $\dfrac{1}{1 - \cos\theta} + \dfrac{1}{1 + \cos\theta} = 2\operatorname{cosec}^2\theta$

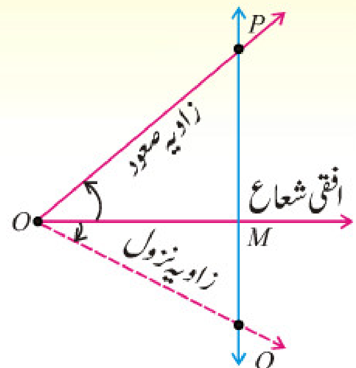
20. $\dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} - \dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta} = 4\tan\theta\sec\theta$

21. $\sin^3\theta = \sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta$ 22. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

23. $\sqrt{\dfrac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}} = \dfrac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$ 24. $\sqrt{\dfrac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}} = \dfrac{\sec\theta + 1}{\tan\theta}$

7.5 زاویہ صعود اور زاویہ نزول
(Angle of Elevation and Angle of Depression)

تکونیات کا ایک اہم مقصد بغیر پیمائش کیے نقاط کے درمیان فاصلے یا بلندیاں معلوم کرنا ہے۔

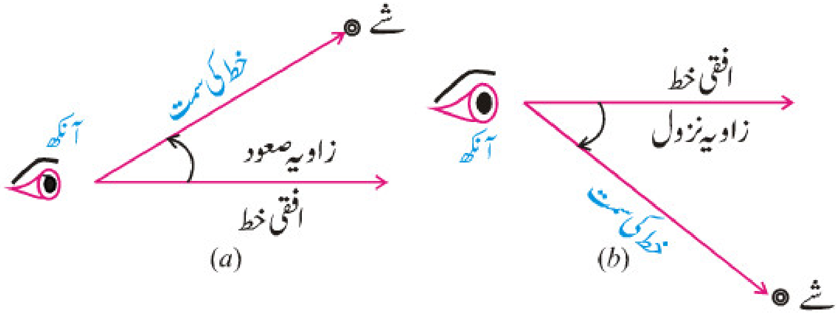


شکل 7.5.1

زاویہ صعود (Angle of Elevation)

فرض کریں کہ O، P اور Q تین نقاط ہیں اس طرح کہ نقطہ P نقطہ O کی سطح سے بلند ہو اور نقطہ Q نقطہ O کی سطح سے نیچے ہو۔

عمودی خط PQ نقطہ P اور Q میں سے کھینچیے اور ایک افقی خط OM کھینچیے۔ نقطہ O سے نقطہ P کو دیکھیں تو بننے والا زاویہ MOP، **زاویہ صعود** کہلاتا ہے۔ O سے نقطہ Q کو دیکھنے کے لیے ہمیں اپنی آنکھیں نیچے کی طرف جھکانا پڑتی ہیں اور $\angle MOQ$ **زاویہ نزول** کہلاتا ہے۔

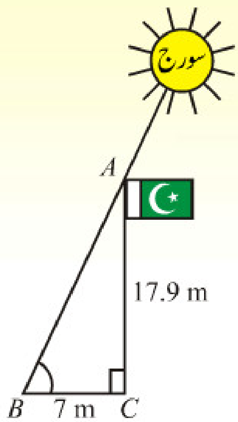


شکل 7.5.2

7.5(i) زاویہ صعود اور زاویہ نزول معلوم کرنا:
(Find Angle of Elevation and Angle of Depression)

فاصلے، بلندیاں اور زاویے معلوم کرنے کے لیے ہم تکونیاتی تفاعل استعمال کرتے ہیں۔ درج ذیل مثالیں ملاحظہ کریں۔

مثال 1: ایک جھنڈے کے پول کی اونچائی 17.9 میٹر ہے جبکہ اس کے سائے کی لمبائی 7 میٹر ہے۔ سورج کا زاویہ صعود معلوم کیجیے۔



حل : تصویر سے واضح ہوتا ہے کہ α زاویہ صعود ہے۔

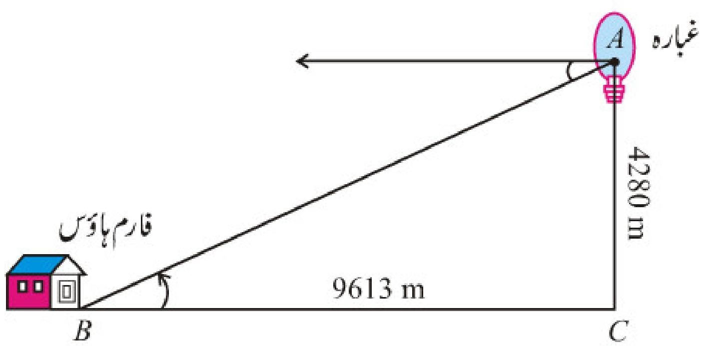
لہٰذا
$$\tan \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{17.9}{7} \approx 2.55714$$

α کی قیمت معلوم کرنے کے لیے

$$\alpha \approx \tan^{-1}(2.55714)$$
$$\approx (68.6666)^{\circ} \approx 68^{\circ}\,40'$$
$$\Rightarrow \quad \alpha \approx 68^{\circ}\,40'$$

مثال 2: ایک مشاہداتی غبارے کی اونچائی سطح زمین سے 4280 میٹر اور ایک فارم ہاؤس سے 9613 میٹر کی دوری پر ہے۔ مشاہداتی غبارے سے فارم ہاؤس کا زاویہ نزول معلوم کیجیے۔

حل :



اس قسم کے سوالات میں B سے A کا زاویہ صعود اور A سے B کے زاویہ نزول کو برابر لیا جائے گا۔ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

$$\tan \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{4280}{9613} \approx 0.44523$$
$$\alpha = \tan^{-1}(0.44523) = 24^{\circ}$$

پس زاویہ نزول 24° ہے۔

مشق 7.5

-1 سورج کا زاویہ صعود معلوم کیجیے جبکہ ایک 6 فٹ لمبے آدمی کا سایہ 3.5 فٹ ہے۔

-2 ایک درخت کا سایہ 40 میٹر ہے جبکہ سورج کا زاویہ صعود 25^o ہے۔ درخت کی اونچائی معلوم کیجیے۔

-3 ایک 20 فٹ لمبی سیڑھی دیوار کے ساتھ لگائی گئی ہے جبکہ سیڑھی اور دیوار کا درمیانی فاصلہ 5 فٹ ہے۔ سیڑھی کا زاویہ صعود معلوم کیجیے جو وہ سطح زمین کے ساتھ بناتی ہے۔

-4 ایک مستطیل کا قاعدہ 25 فٹ اور بلندی 13 فٹ ہے۔ مستطیل کے وتر کا زاویہ صعود معلوم کیجیے جو وہ مستطیل کے قاعدے کے ساتھ بناتا ہے۔

-5 زمین سے 80^o کے مستقل زاویے پر ایک راکٹ چھوڑا گیا ہے۔ 5000 میٹر کا فاصلہ طے کرنے کے بعد راکٹ کی زمین سے بلندی معلوم کیجیے۔

-6 پائلٹ 4000 میٹر کی بلندی پر جہاز اڑا رہا ہے۔ وہ جہاز کو 50^o کے زاویے پر ایئرپورٹ پر اتارنا چاہتا ہے۔ ایئرپورٹ سے کتنی دوری سے پائلٹ جہاز کو اتارنا شروع کرے گا؟

-7 ایک پول کے درمیان سے ایک تار زمین کے ساتھ 78.2^o کا زاویہ بناتی ہے۔ تار کا سطح زمین پر پول سے فاصلہ 3 میٹر ہے۔ پول کی بلندی معلوم کیجیے۔

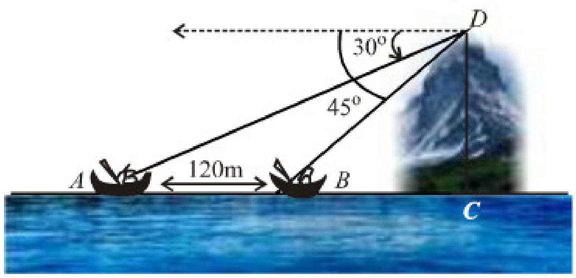
-8 ایک سڑک سطح سمندر سے 5.7^o کا زاویہ ڈھلوان کے ساتھ بناتی ہے۔ فرض کریں کہ ہم سڑک پر اونچائی کی جانب 2 میل کا فاصلہ طے کرتے ہیں۔ بتایئے ہم سطح سمندر سے کتنی بلندی پر ہوں گے؟

-9 ٹیلی وژن کا انٹینا جس کی بلندی 8 فٹ ہے، ایک مکان کی چھت پر نصب ہے۔ زمین سے مکان کی چھت کا زاویہ صعود 17^o اور انٹینا کا زاویہ صعود 21.8^o ہے۔ مکان کی بلندی معلوم کریں۔

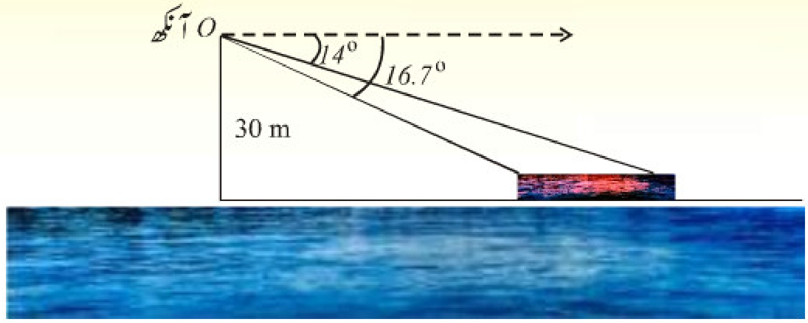
-10 ایک مشاہداتی مقام سے دو کشتیوں کا زاویہ نزول بالترتیب 30^o اور 45^o ہے۔ اگر مشاہداتی مقام کی بلندی 4000 فٹ ہو تو دونوں کشتیوں کے درمیان فاصلہ کتنا ہوگا؟

-11 ایک عمودی چٹان کے پائے سے دو جہاز ایک دوسرے سے 120 میٹر کے فاصلے پر ہیں، چٹان کی چوٹی سے جہازوں کا زاویہ نزول بالترتیب 30^o اور 45^o ہے، جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

(a) BC فاصلہ معلوم کریں۔ (b) چٹان کی بلندی CD معلوم کریں۔



-12 ہم دریا کی سطح سے 30 فٹ کی بلندی پر ایک پل پر کھڑے دریا میں تیرتے ہوئے لکڑی کے ٹکڑے کو دیکھ رہے ہیں۔ اگر لکڑی کے ٹکڑے کے اگلے سرے کے ساتھ زاویہ 16.7° اور پچھلے سرے کے ساتھ زاویہ 14° ہو تو ٹکڑے کی لمبائی معلوم کیجیے۔



متفرق مشق 7

کثیر الانتخابی سوالات

-1 دیے گئے سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) دو غیر ہم خط شعاعوں جن کا ایک سرا مشترک ہو، کا مجموعہ -------- کہلاتا ہے۔

(a) زاویہ (b) ڈگری (c) منٹ (d) ریڈین

(ii) پیمائش کا نظام جس میں زاویہ کی پیمائش ریڈین میں کی جاتی ہے -------- سسٹم کہلاتا ہے۔

(a) سی جی ایس سسٹم (b) ساٹھ کے اساس کا نظام

(c) ایم کے ایس سسٹم (d) دائروی نظام

(iii) $-------- = 20^{\circ}$

(a) $360'$ (b) $630'$ (c) $1200'$ (d) $3600'$

(iv) $\frac{3\pi}{4}$ ریڈین =

(a) 115° (b) 135° (c) 150° (d) 30°

(v) اگر $\tan\theta = \sqrt{3}$ ہو تو $\theta =$ ________

(a) 90° (b) 45° (c) 60° (d) 30°

(vi) $\sec^2\theta =$ ________

(a) $1 - \sin^2\theta$ (b) $1 + \tan^2\theta$ (c) $1 + \cos^2\theta$ (d) $1 - \tan^2\theta$

(vii) $\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta} =$ ________

(a) $2\sec^2\theta$ (b) $2\cos^2\theta$ (c) $\sec^2\theta$ (d) $\cos\theta$

(viii) $\frac{1}{2}\text{cosec}45^\circ =$ ________

(a) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ix) $\sec\theta\cot\theta =$ ________

(a) $\sin\theta$ (b) $\frac{1}{\cos\theta}$ (c) $\frac{1}{\sin\theta}$ (d) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(x) $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta =$ ________

(a) -1 (b) 1 (c) 0 (d) $\tan\theta$

-2 درجِ ذیل سوالوں کے مختصر جواب لکھیں۔

(i) زاویہ کی تعریف کیجیے۔

(ii) زاویوں کی پیمائش کا ساٹھ کے اساس کا نظام کیا ہے؟

(iii) دو قائمۃ الزاویوں میں کل کتنے منٹس ہوتے ہیں؟

(iv) زاویہ کی ریڈین میں تعریف کیجیے۔

(v) $\frac{\pi}{5}$ کو ڈگری میں تبدیل کیجیے۔

(vi) 15° کو ریڈین میں تبدیل کیجیے۔

(vii) دائرے پر قوس کی لمبائی 50 میٹر اور اِس کا رداس 25 میٹر ہے مرکز پر بننے والا زاویہ کتنے ریڈین کا ہوگا؟

(viii) جب میٹر $l = 56$ اور $\theta = 45^\circ$ ہو تو r کی قیمت معلوم کیجیے۔

(ix) اگر $\cos\theta = \frac{9}{41}$ اور θ کا اختتامی بازو چوتھے ربع میں ہو تو $\tan\theta$ معلوم کیجیے۔

(x) ثابت کیجیے کہ $(1 - \sin^2\theta)(1 + \tan^2\theta) = 1$

-3 خالی جگہ پُر کریں۔

(i) π ریڈین = ________ ڈگری۔

(ii) 235° کا اختتامی بازو ________ ربع میں ہے۔

(iii) -30° کا اختتامی بازو ________ ربع میں ہے۔

(iv) دائروی علاقہ کا رقبہ ________ ہے۔

(v) اگر سم $r = 2$ اور ریڈین $\theta = 3$ ہو تو دائروی علاقہ کا رقبہ ________ ہے۔

(vi) 480° زاویے کی معیاری حالت ________ ہے۔

(vii) اگر $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ہو تو $\theta =$ __________

(viii) اگر $\theta = 300^\circ$ ہو تو $\sec(-300)^\circ =$ __________

(ix) $1 + \cot^2\theta =$ ________

(x) $\sec\theta - \tan\theta =$ ________

خلاصہ

- اگر دائرے کے محیط کو 360 برابر قوسوں میں تقسیم کریں تو دائرے کے مرکز پر ایک قوس سے بننے والے زاویوں کو ایک **ڈگری** کہتے ہیں اور اس کو 1° سے ظاہر کرتے ہیں۔
- دائرے کے مرکز پر ایک قوس کی لمبائی دائرے کے رداس کے برابر ہو، سے بننے والے زاویے کی مقدار ایک **ریڈین** کہلاتا ہے۔
- ریڈین اور ڈگری کے درمیان تعلق

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ریڈین} \approx 0.0175 \text{ ریڈین اور ریڈین } 1 = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.295^\circ$$

- مرکزی زاویہ اور دائرے کی قوس کی لمبائی میں تعلق $l = r\theta$ ہے۔
- دائروی قطاع کا رقبہ : $A = \frac{1}{2}r^2\theta$
- دو یا دو سے زیادہ زاویے جن کے ابتدائی بازو اور اختتامی بازو ایک جیسے ہوں، **کوٹرمینل زاویے** کہلاتے ہیں۔
- اگر کسی زاویے کا اختتامی بازو x - محور یا y– محور پر ہو تو اس زاویے کو **ربع زاویہ** کہتے ہیں۔
- اگر عمومی زاویے کا راس (Vertex)، مبدا (Origin) پر ہو اور ابتدائی بازو مستوی میں x– محور کی مثبت سمت میں ہو ایسا زاویہ معیاری صورت میں ہوتا ہے۔
- بنیادی طور پر تکونیاتی نسبتیں چھ ہیں۔ جن کو Cotangent ،Tangent ،Cosine ،Sine، Secant اور Cosecant کہتے ہیں۔
- تکونیاتی مماثلات:

(a) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (b) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

(c) $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$