یونٹ 9

دَائرے کاوَتر

(CHORDS OF A CIRCLE)

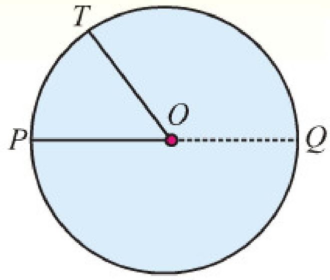
طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

درج ذیل اثباتی مسائل بمعہ نتائج صریح کو ثابت کرنا اور متعلقہ سوالات حل کرنے کے لیے ان کا استعمال کرنا۔

- تین غیر خطی نقاط سے ایک اور صرف ایک ہی دائرہ گزر سکتا ہے۔
- دائرے کے مرکز سے کسی وَتر (جو قطر نہ ہو) کی تنصیف کرنے والا قطعہ خط، وَتر پر عمود ہوتا ہے۔
- دائرے کے مرکز سے کسی وَتر پر عمود، اس کی تنصیف کرتا ہے۔
- اگر دائرے کے دو وتر متماثل ہوں تو وہ مرکز سے مساوی الفاصلہ ہوں گے۔
- دائرے کے دو وَتر جو مرکز سے برابر فاصلہ پر ہوں، وہ متماثل ہوتے ہیں۔

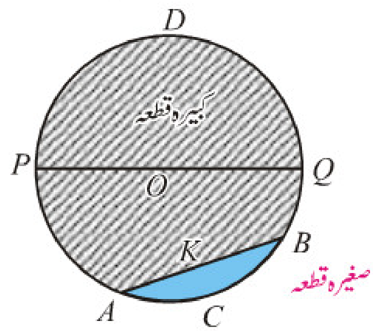
دائرے کے بنیادی تصورات (Basic Concepts of the Circle)

کسی سطح میں متحرک نقطہ P کا وہ راستہ جو ایک معین نقطہ O سے ہمیشہ یکساں فاصلے پر رہے، دائرہ کہلاتا ہے۔ دائرہ پر یہ غیر موجود معین نقطہ O دائرے کا مرکز جبکہ مُستقل فاصلہ $\overline{OP}$ اِس کا رداس یا نصف قطر ہے جبکہ متحرک نقطہ P اس کا محیط بناتا ہے۔



شکل (i)

شکل (i) میں رداس کی لمبائی $m\overline{OP} = m\overline{OQ} = m\overline{OT}$ ہے۔ اگر دائرے کا رداس r ہو تو اِسکا محیط $2\pi r$ ہوتا ہے۔ جبکہ غیر ناطق ہندسہ π کی قیمت، دائرے کے محیط اور اُس کے قطر کی نسبت ہوتی ہے۔



شکل (ii)

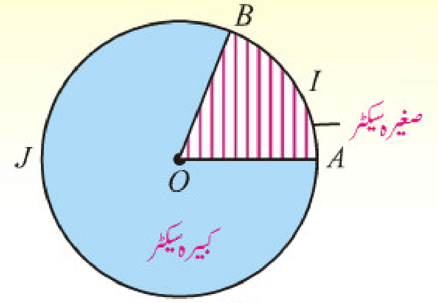
دائرے کے محیط کا ایک ٹکڑا ACB دائرے کی قوس ہوتی ہے۔ محیط پر دیے ہوئے دو نقاط کا ملانے والا قطعہ خط AKB ایک وَتر ہے جبکہ مرکز سے گزرنے والا وَتر POQ دائرے کا قطر ہوتا ہے۔

دائِرے کا وہ خطہ جو اس کی قوس اور متعلقہ وَتر نے گھیرا ہو، قطعہ دائرہ ہوتا ہے۔ شکل (ii) میں دکھایا گیا سیاہ خطہ، صغیرہ قطعہ دائرہ اور ترچھے قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا خطہ، کبیرہ قطعہ دائرہ ہے۔

دائِرے کے دوررداسی قطعات اور اُن کے متعلقہ قوس سے گِھرا ہوا علاقہ دائرے کا سیکٹر کہلاتا ہے۔

دائرے کے رداسوں کا ایک جوڑا اِس دائرہ کو دو سیکٹروں میں تقسیم کرتا ہے شکل (iii) میں $OAIB$ دائِرے کا

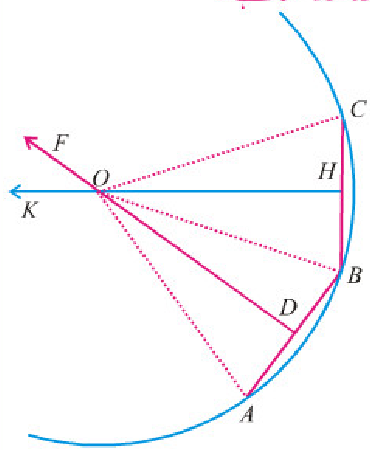
صغیرہ سیکٹر اور $OAJB$ کبیرہ سیکٹر ہو گا۔ دائرے کی قوس AB اس کے مرکز O پر جو زاویہ AOB بناتی ہے۔ اس کو مرکزی زاویہ کہتے ہیں۔



شکل (iii)

مسئلہ 1

9.1(i) تین غیر خطی نقاط سے ایک اور صرف ایک ہی دائرہ گزر سکتا ہے۔



معلوم: مستوی میں تین غیر ہم خط نقاط A، B اور C ہیں۔

مطلوب: تین غیر ہم خط نقاط A، B اور C میں سے ایک اور صرف ایک ہی دائرہ گزر سکتا ہے۔

عمل: نقطہ A کو B سے اور نقطہ B کو C سے ملایا۔ $\overline{AB}$ پر عمودی ناصف $\overrightarrow{DF}$ اور $\overline{BC}$ پر عمودی ناصف $\overrightarrow{HK}$ بنائیں۔ اِس طرح $\overrightarrow{DF}$ اور $\overrightarrow{HK}$ دو غیر متوازی قطعات خط ہیں اور وہ ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ نیز نقاط A، B اور C کو نقطہ O سے ملائیں۔

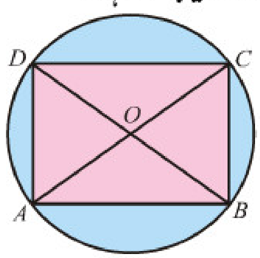
ثبوت:

بیانات	دلائل
عمودی ناصف $\overrightarrow{DF}$ پر ہر نقطہ A اور B سے یکساں فاصلے پر واقع ہے۔ خصوصاً (i) $m\overline{OA} = m\overline{OB}$ اِسی طرح عمودی ناصف $\overrightarrow{HK}$ پر ہر نقطہ B اور C سے یکساں فاصلے پر واقع ہے۔	$\overrightarrow{DF}$، $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے۔ (عمل) $\overrightarrow{HK}$، $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف ہے۔

خصوصاً (ii) $m\overline{OB} = m\overline{OC}$	
اب $\overrightarrow{DF}$ اور $\overrightarrow{HK}$ کا صرف ایک ہی مشترک نقطہ O ہے۔ جو نقاط B، A اور C سے یکساں فاصلے پر واقع ہے۔	
یعنی $m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC}$	(i) اور (ii) کی رو سے
البتہ O کے علاوہ کوئی ایسا دوسرا نقطہ نہیں۔	
اس لیے مرکز O اور رداس $\overline{OA}$ والا دائرہ نقاط A، B اور C میں سے گزرتا ہے۔	

پس دیے ہوئے تین نقاط A، B اور C میں سے ایک اور صرف ایک ہی دائرہ گزر سکتا ہے۔

مثال: ثابت کریں کہ ایک مستطیل کے راسی نقاط میں سے گزرتا ہوا صرف ایک ہی دائرہ بنایا جاسکتا ہے۔



معلوم: $ABCD$ ایک مستطیل ہے۔

مطلوب: مستطیل $ABCD$ کے راسی نقاط میں سے گزرتا ہوا صرف ایک ہی دائرہ بنایا جاسکتا ہے۔

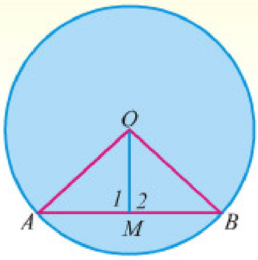
عمل: مستطیل $ABCD$ کے وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر ملتے ہیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$ABCD$ ایک مستطیل ہے۔	معلوم
(i) $m\overline{AC} = m\overline{BD}$	مستطیل کے وتر برابر ہوتے ہیں
$\because$ $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر ملتے ہیں۔	عمل
(ii) $m\,OA = mOC$ اور $mOB = mOD$	مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں
(iii) $\Rightarrow$ $mOA = mOB = mOC = mOD$	(i) اور (ii) کی رو سے
یعنی نقطہ O، مستطیل کے تمام راسوں سے مساوی فاصلے پر واقع ہے۔	
O کو مرکز مان کر بنایا جانے والا دائرہ مستطیل کے راسوں سے گزرتا ہے جبکہ $m\overline{OA}$، $m\overline{OB}$، $m\overline{OC}$ اور $m\overline{OD}$ دائرے کے رداس ہیں۔	

مسئلہ 2

9.1 (ii) دائرے کے مرکز سے کسی وَتر (جو قطر نہ ہو) کی تنصیف کرنے والا قطعہ خط، وَتر پر عمود ہوتا ہے۔



معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے۔ M وتر $\overline{AB}$ کا نُقطہ تنصیف ہے۔ جبکہ وتر $\overline{AB}$ دائرہ کا قطر نہیں ہے۔

مطلوب: وَتر $\overline{OM} \perp \overline{AB}$

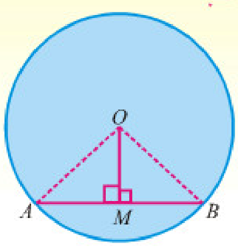
عمل: نقاط A اور B کو مرکز O سے ملائیں۔ $\angle 1$ اور $\angle 2$ لکھیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
میں $\Delta OAM \leftrightarrow \Delta OBM$	
$m\overline{OA} = m\overline{OB}$	ایک ہی دائرے کے رداس
$m\overline{AM} = m\overline{BM}$	معلوم
$m\overline{OM} = m\overline{OM}$	مشترک
$\therefore \quad \Delta OAM \cong \Delta OBM$	$S.S.S \cong S.S.S$
$\Rightarrow \quad m\angle 1 = m\angle 2 \quad$ (i)	
یعنی $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle AMB = 180^\circ \quad$ (ii)	متصلہ سپلیمنٹری زاویے
$\therefore \quad m\angle 1 = m\angle 2 = 90^\circ$	(i) اور (ii) کی رو سے
یعنی وتر $\overline{OM} \perp \overline{AB}$	

مسئلہ 3

9.1 (iii) دائرے کے مرکز سے کسی وَتر پر عمود، اُس کی تنصیف کرتا ہے۔



معلوم: مرکز O وَالے دائرے کا وَتر $\overline{AB}$ ہے۔ اِس طرح کہ وتر $\overline{OM} \perp \overline{AB}$

مطلوب: نقطہ M، وتر $\overline{AB}$ کا وسطی نقطہ ہے۔ یعنی $m\overline{AM} = m\overline{BM}$

عمل: نقاط A اور B کو مرکز O سے ملائیں۔

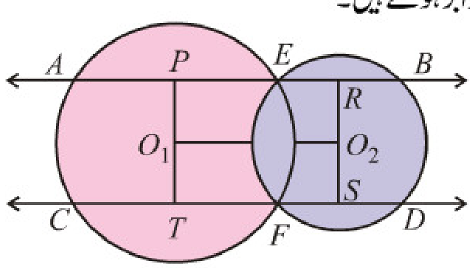
ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta OAM \leftrightarrow \Delta OBM$ میں	
$m\angle OMA = m\angle OMB = 90^{\circ}$	معلوم
$m\overline{OA} = m\overline{OB}$	ایک ہی دائرے کے رداس
$m\overline{OM} = m\overline{OM}$	مشترک
$\therefore \quad \Delta OAM \cong \Delta OBM$	قائمۃ لزاویہ مثلثان میں $H.S \cong H.S$
پس $m\overline{AM} = m\overline{BM}$	
$\overline{OM}$، وتر $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے۔	

نتیجہ صریح 1 : کسی دائرے کے وتر کا عمودی ناصف دائرے کے مرکز سے گزرتا ہے۔

نتیجہ صریح 2 : کسی دائرے کا قطر اُس کے دو متوازی وتروں کے وسطی نقاط میں سے گزرتا ہے۔

مثال: دو دائروں کے مراکز کو ملانے والے قطعہ خط کے متوازی خطوط جو دائروں کے متقاطع نقاط میں سے گزرتے ہوں۔ ان کے وہ حصے جو دائرے قطع کرتے ہیں لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔



معلوم: O_1 اور O_2 مراکز والے دو دائرے ایک دوسرے کو نقاط E اور F پر قطع کرتے ہیں۔ نیز قطع شدہ قطعات خط $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$، $\overline{O_1O_2}$ کے متوازی ہیں۔

مطلوب: $m\overline{AB} = m\overline{CD}$

عمل: $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ پر بالترتیب $\overline{PT}$ اور $\overline{RS}$ عمود کھینچیں۔

ثبوت:

دلائل	بیانات
عمل	$PRST$ ایک مستطیل ہے۔
	$\therefore \quad m\overline{PR} = m\overline{TS} \quad$ (i)
	اب $\quad m\overline{PR} = m\overline{PE} + m\overline{ER}$
مسئلہ 3 کی رو سے	$= \frac{1}{2} m\overline{AE} + \frac{1}{2} m\overline{EB}$
	$= \frac{1}{2}(m\overline{AE} + m\overline{EB})$
$m\overline{AE} + m\overline{EB} = m\overline{AB}$	$m\overline{PR} = \frac{1}{2}(m\overline{AB}) \quad$ (ii)
	اسی طرح $\quad m\overline{TS} = \frac{1}{2} m\overline{CD} \quad$ (iii)
(i)،(ii)اور(iii) کی رو سے	$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m\overline{AB} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$
	یعنی، $\quad m\overline{AB} = m\overline{CD}$

مشق 9.1

1- ثابت کریں کہ دائرے کے قطر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

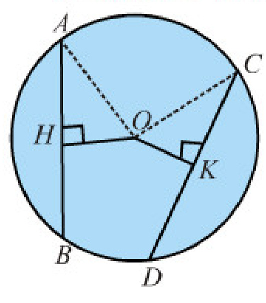
2- ثابت کریں کہ دائرے کے دو متقاطع وتر جو مرکز سے نہ گزرتے ہوں وہ ایک دوسرے کی تنصیف نہیں کرتے۔

3- اگر $\overline{AB}$ وتر کی لمبائی 8 سم ہو اور اس کا مرکز سے فاصلہ 3 سم ہو تو اس دائرہ کا قطر معلوم کریں۔

4- ایک دائرہ جس کا رداس 9 سم ہے اور اس کے وتر کا فاصلہ مرکز سے 5 سم ہو تو وتر کی لمبائی معلوم کریں۔

مسئلہ 4

9.1 (iv) اگر دائرے کے دو وتر متماثل ہوں تو وہ مرکز سے مساوی الفاصلہ ہوں گے۔



معلوم: ایک دائرے کا مرکز O ہے۔اِسکے دو وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ برابر ہیں۔اِس طرح $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ اور $\overline{OK} \perp \overline{CD}$

مطلوب: $m\overline{OH} = m\overline{OK}$

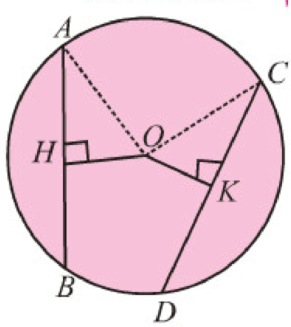
عمل: نقطہ O کو A سے اور O کو C سے ملائیں۔ اس طرح OAH اور OCK دو قائمۃ الزاویہ مثلثان ہیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\overline{OH}$، وتر $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے۔	مسئلہ 3 کی رو سے $\overline{OH} \perp \overline{AB}$
یعنی (i) $m\overline{AH} = \frac{1}{2} m\overline{AB}$	
اسی طرح $\overline{OK}$، وتر $\overline{CD}$ کی تنصیف کرتا ہے۔	مسئلہ 3 کی رو سے $\overline{OK} \perp \overline{CD}$
یعنی (ii) $m\overline{CK} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$	
لیکن (iii) $m\overline{AB} = m\overline{CD}$	معلوم
اس لیے (iv) $m\overline{AH} = m\overline{CK}$	(i) اور (ii), (iii) کی رو سے
اب قائمۃ الزاویہ مثلثان کی مطابقت	$\overline{OH} \perp \overline{AB}$ and $\overline{OK} \perp \overline{CD}$ (معلوم)
$\Delta OAH \leftrightarrow \Delta OCK$	
$m\overline{OA} = m\overline{OC}$	ایک ہی دائرے کے رداس
$m\overline{AH} = m\overline{CK}$	(iv) کی رو سے ثابت شدہ
$\therefore$ $\Delta OAH \cong \Delta OCK$	H. S کے اصول کا موضوعہ
$\Rightarrow$ $m\overline{OH} = m\overline{OK}$	

مسئلہ 5

9.1 (v) دائرے کے دو وتر جو مرکز سے مساوی الفاصلہ ہوں باہم متماثل ہوتے ہیں۔



معلوم: ایک دائرے کا مرکز O اور دو وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ ہیں۔

جب کہ $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ اور $\overline{OK} \perp \overline{CD}$

تو $m\overline{OH} = m\overline{OK}$

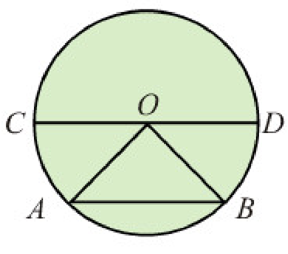
مطلوب: $m\overline{AB} = m\overline{CD}$

عمل: نقاط A اور C کو نقطہ O سے ملائیں اِس طرح دو قائمۃ الزاویہ مثلثان OAH اور OCK بن گئی ہیں۔

ثبوت:

دلائل		بیانات
		قائمتہ الزاویہ مثلثان $OAH \leftrightarrow OCK$ میں
ایک ہی دائرے کے رداس	$\because$	$m\overline{OA} = m\overline{OC}$
معلوم		$m\overline{OH} = m\overline{OK}$
H.S کے اصول کا موضوعہ		$\therefore$ $\Delta\, OAH \cong \Delta\, OCK$
		پس $m\overline{AH} = m\overline{CK}$ (i)
$\overline{AB}$ وتر $\perp$ $\overline{OH}$ (معلوم)		لیکن $m\overline{AH} = \frac{1}{2} m\overline{AB}$ (ii)
$\overline{CD}$ وتر $\perp$ $\overline{OK}$ (معلوم)		اسی طرح $m\overline{CK} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$ (iii)
(i) میں ثابت شدہ		نیز $m\overline{AH} = m\overline{CK}$
(ii) اور (iii) کی رو سے		لہٰذا $\frac{1}{2} m\, \overline{AB} = \frac{1}{2} m\, \overline{CD}$
		یا $m\, \overline{AB} = m\, \overline{CD}$

مثال: ثابت کریں کہ دائرہ میں سب سے لمبا وتر ایک قطر ہی ہوتا ہے۔



معلوم: ایک دائرے کا مرکز O ہے۔ $\overline{AB}$ وتر اور $\overline{CD}$ قطر ہے۔

مطلوب: اگر وتر AB اور قطر $\overline{CD}$ دونوں مختلف ہوں تو $m\overline{CD} > m\overline{AB}$

عمل: نقطہ O کو A اور B سے ملانے سے ΔOAB بنتی ہے۔

ثبوت:

ΔOAB کے دو اضلاع کا مجموعہ اِسکے تیسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔ — مثلث کا اصولِ موضوعہ

(i) $m\overline{OA} + m\overline{OB} > m\overline{AB}$ $\Rightarrow$ (جبکہ $\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ ایک ہی دائرہ کے رداس ہیں۔)

(ii) $m\overline{OA} + m\overline{OB} = m\overline{CD}$ نیز $\overline{CD}$ دائرے کا قطر ہے۔ (معلوم)

$m\overline{CD} > m\overline{AB}$ $\Rightarrow$ (i) اور (ii) کی رو سے

یعنی $m\overline{CD} > m\overline{AB}$

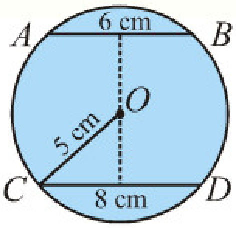
پس قطر سب سے لمبا وتر ہوتا ہے۔

مشق 9.2

-1 ایک دائرے کے دو مساوی وتر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ ثابت کریں کہ ایک وتر کے قطعات کی لمبائیاں، دوسرے وتر کے متعلقہ قطعات کی لمبائیوں کے برابر ہوتی ہیں۔

-2 ایک دائرے کا قطر $\overline{CD}$، اسکے وتر $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے۔ ثابت کریں۔ کہ $m\overline{AC} = m\overline{BC}$

-3 دی ہوئی شکل کے مطابق ایک دائرے کے دو متوازی وتروں $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں۔

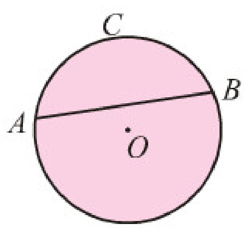


متفرق مشق 9

کثیر الانتخابی سوالات

-1 درج ذیل سوالات کے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں۔

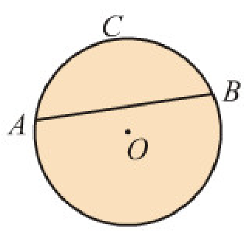
(i) دائروی شکل میں ADB کہلاتا/ کہلاتی ہے۔



(a) ایک قوس   (b) ایک قاطع خط

(c) ایک وتر   (d) ایک قطر

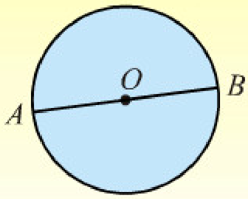
(ii) دائروی شکل میں ACB کہلاتا / کہلاتی ہے۔



(a) ایک قوس   (b) ایک قاطع خط

(c) ایک وتر   (d) ایک قطر

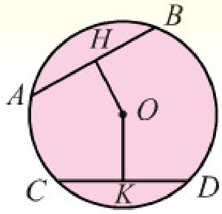
(iii) دائروی شکل میں AOB کہلاتا/کہلاتی ہے۔



(a) ایک قوس (b) ایک قاطع خط

(c) ایک وتر (d) ایک قطر

(iv) دائروی شکل میں دو وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ مرکز سے یکساں فاصلے پر واقع ہیں وہ آپس میں ہونگے۔



(a) متوازی (b) غیر متماثل

(c) متماثل (d) عمود

(v) ایک ہی دائرے کے رداس ہیں۔

(a) تمام برابر (b) قطر سے دوگنا

(c) تمام غیر برابر (d) کسی بھی وَتر سے آدھے

(vi) دائرے کے مرکز سے گزرنے وَالا وتر کہلاتا ہے۔

(a) رداس (b) قطر (c) قطعہ خط (d) محیط

(vii) دائرے کے وتر کے عمودی ناصف ہمیشہ گزرتے ہیں ________ سے

(a) رداس (b) محیط (c) مرکز (d) قطر

(viii) دائرے کا وہ رقبہ جو دو رداسوں اور اُن کے متعلقہ قوس سے گھرا ہوا ہو کہلاتا ہے۔

(a) دائرے کا محیط (b) دائرے کا سیکٹر

(c) دائرے کا قطر (d) قطعہ دائرہ

(ix) دائرے کے کسی نقطے کا اس کے مرکز تک کا فاصلہ کہلاتا ہے۔

(a) رداس (b) قُطر (c) ایک وتر (d) ایک قوس

(x) دائرے کے کسی نقطہ سے مرکز کو ملانے والا ________ کہلاتا ہے۔

(a) محیط (b) قُطر (c) رداسی قطعہ (d) احاطہ

(xi) مستوی کے تمام نقاط کا سیٹ جو معین نقطہ سے برابر فاصلے پر ہوں ________ کہلاتا ہے۔

(a) رداس (b) دائرہ (c) محیط (d) قطر

(xii) مثلث کو ظاہر کرنے کے لیے علامت ہے۔

(a) $\angle$ (b) Δ (c) $\perp$ (d) $\odot$

(xiii) مکمل دائرے کو تقسیم کیا جاتا ہے۔ __________

(a) 90^o (b) 180^o (c) 270^o (d) 360^o

(xiv) دائرہ کتنے غیر خطی نقاط سے گزرتا ہے؟ __________

(a) ایک (b) دو (c) تین (d) ان میں سے کوئی نہیں

-2 درج ذیل اصطلاحات میں فرق بیان کریں۔ اور اِن کی بذریعہ اشکال وضاحت کریں۔

(i) ایک دائرہ اور اس کا محیط۔ (ii) ایک دائرے کا وتر اور اِس کا قطر۔

(iii) ایک دائرے کا وتر اور اِسکی قوس۔ (iv) ایک دائرہ میں صغیرہ قوس اور کبیرہ قوس۔

(v) ایک دائرے کا اندرونہ اور بیرونہ۔ (vi) ایک دائرے کا سیکٹر اور قطعہ۔

خلاصہ

- دائرے کا رداس r ہو تو اِسکا **محیط** $2\pi r$ ہوتا ہے۔
- دائرے کا رداس r ہو تو اِسکا **رقبہ** πr^2 ہوتا ہے۔
- تین یا تین سے زیادہ نقاط ایک ہی خطِ مستقیم پر وَاقع ہوں تو انہیں **ہم خط نقاط** کہتے ہیں بصورت دیگر وہ **غیر ہم خط نقاط** ہوں گے۔
- مثلث کے راسوں سے گزرنے والا دائرہ **محاصر دائرہ** کہلاتا ہے۔ جبکہ مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف اِس کے مرکز کی نشاندہی کرتے ہیں۔
- تین غیر خطی نقاط سے ایک اور صرف ایک ہی دائرہ گزر سکتا ہے۔
- دائرے کے مرکز سے کسی وَتر (جو قطر نہ ہو) کی تنصیف کرنے وَالا قطعہ خطِ، وَتر پر عمود ہوتا ہے۔
- دائِرے کے مرکز سے کسی وَتر پر عمود، اس کی تنصیف کرتا ہے۔
- اگر دائرے کے دو وتر متماثل ہوں تو وہ مرکز سے مساوی الفاصلہ ہوں گے۔
- دائِرے کے دو وَتر جو مرکز سے برابر فاصلہ پر ہوں، وہ متماثل ہوتے ہیں۔