یونٹ 12

قطعہ دائرہ میں زاویہ

(ANGLE IN A SEGMENT OF A CIRCLE)

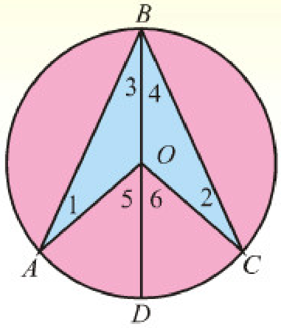
طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

درج ذیل اثباتی مسائل بمعہ نتائج صریح کو ثابت کرنا اور متعلقہ سوالات حل کرنے کے لیے ان کا استعمال کرنا۔

- کسی دائرے میں قوس صغیرہ سے بننے والا مرکزی زاویہ مقدار میں اپنی متعلقہ قوس کبیرہ کے محصور زاویے سے دوگنا ہوتا ہے۔
- زاویے جو ایک ہی قطعہ دائرہ میں واقع ہوں، باہم برابر ہوتے ہیں۔
- زاویہ جو نصف قطعہ دائرہ میں ہو قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔ جو نصف سے بڑے قطعہ دائرے میں ہو حادہ زاویہ ہوتا ہے اور جو نصف سے چھوٹے قطعہ دائرے میں ہو، منفرجہ زاویہ ہوتا ہے۔
- کسی دائرے کی دائروی چوکور کے متقابلہ زاویے سپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔

مسئلہ 1

12.1 (i) کسی دائرے میں قوس صغیرہ سے بننے والا مرکزی زاویہ مقدار میں اپنی متعلقہ قوس کبیرہ کے محصور زاویے سے دوگنا ہوتا ہے۔



معلوم: O مرکز والے دائرے میں $\widehat{AC}$ قوسِ صغیرہ ہے جبکہ $\angle AOC$ اِسکا مرکزی زاویہ اور متعلقہ قوسِ کبیرہ کا محصور زاویہ ABC ہے۔

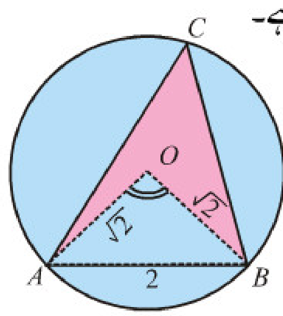
مطلوب: $m\angle AOC = 2m\angle ABC$

عمل: نقطہ B کو O سے ملا کر اتنا بڑھائیں کہ یہ دائرہ کو نقطہ D پر قطع کرے۔ دی ہوئی شکل کے مطابق $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$، $\angle 4$، $\angle 5$ اور $\angle 6$ لکھیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
کیونکہ (i) $m\angle 1 = m\angle 3$	ΔOAB میں مساوی اضلاع کے مخالف زاویے
اور (ii) $m\angle 2 = m\angle 4$	ΔOBC میں مساوی اضلاع کے مخالف زاویے
اب (iii) $m\angle 5 = m\angle 1 + m\angle 3$	مثلث میں خارجہ زاویہ متقابلہ داخلہ زاویوں کے مجموعہ کے برابر
اسی طرح (iv) $m\angle 6 = m\angle 2 + m\angle 4$	
$m\angle 5 = m\angle 3 + m\angle 3 = 2m\angle 3$ (v)	(i) اور (iii) کی رو سے
اور $m\angle 6 = m\angle 4 + m\angle 4 = 2m\angle 4$ (vi)	(ii) اور (iv) کی رو سے
$m\angle 5 + m\angle 6 = 2m\angle 3 + 2m\angle 4$	(v) اور (vi) کو جمع کرنے سے
$m\angle AOC = 2(m\angle 3 + m\angle 4) = 2m\angle ABC$	شکل کے مطابق

مثال 1: ایک دائرے کا رداس $2\sqrt{}$ سم ہے۔ ایک 2 سم لمبائی کا وَتر دائرے کو دو قطعات میں تقسیم کرتا ہے۔ ثابت کریں۔ کہ قطعہ کبیرہ میں زاویہ 45^{o} بنتا ہے۔



معلوم: O مرکز والے ایک دائرے کا رداس $\sqrt{2}$ سم ہے۔ 2 سم لمبائی والے وتر $\overline{AB}$ دائرے کو دو قطعات میں تقسیم کرتا ہے۔
یعنی $\sqrt{2}$ سم $m\overline{OA} = m\overline{OB}$ دائرے کو دو قطعات میں تقسیم کرتا ہے۔ جس میں ACB قطعہ کبیرہ ہے۔

مطلوب: $m\angle ACB = 45^o$

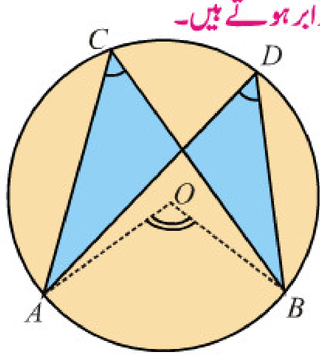
عمل: نقطہ O کو A اور B سے ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta\ OAB$ میں	
$(OA)^2 + (OB)^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$	$m\overline{OA} = m\overline{OB} = \sqrt{2}$ سم
$= 2 + 2 = 4 = (2)^2 = (AB)^2$	$m\ \overline{AB} = 2$ سم (معلوم)
اس لیے ΔAOB ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے	
جس میں $m\ \angle AOB = 90^o$	قوس AB سے بننے والا مرکزی زاویہ
تب $m\angle ACB = \frac{1}{2}\ m\angle AOB$	مسئلہ 1 کی رو سے مرکزی زاویہ محصور زاویے سے دوگنا
$= \frac{1}{2}\ (90^o) = 45^o$	

مسئلہ 2

12.1 (ii) زاویے جو ایک ہی قطعہ دائرہ میں واقع ہوں، باہم برابر ہوتے ہیں۔



معلوم: O مرکز والے دائرے میں $\angle ACB$ اور $\angle ADB$ محصور زاویے ہیں۔

مطلوب: $m\ \angle ACB = m\ \angle ADB$

عمل: نقطہ O کو A اور B سے ملائیں۔ اِس طرح قوس AB سے بننے والا مرکزی زاویہ AOB ہے۔

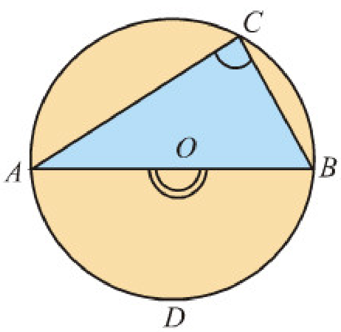
ثبوت:

بیانات	دلائل
دائرے کی قوس AB سے بننے والا مرکزی زاویہ AOB ہے	عمل

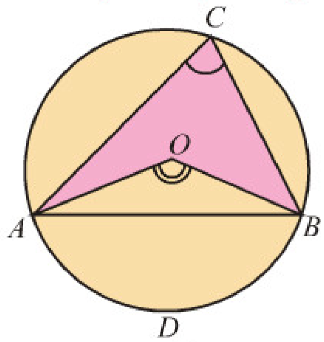
اور محصور زاویے ACB اور ADB ہیں۔	معلوم
اسلیے (i) $m\angle AOB = 2m\angle ACB$	مسئلہ 1 کی رو سے
اور (ii) $m\angle AOB = 2m\angle ADB$	مسئلہ 1 کی رو سے
$2m\angle ACB = 2m\angle ADB$	(i) اور (ii) کی رو سے
پس $m\angle ACB = m\angle ADB$	

مسئلہ 3

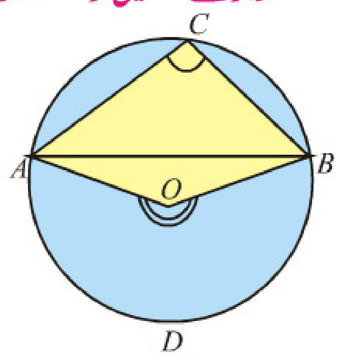
(iii) 12.1 زاویہ جو نصف قطعہ دائرہ میں ہو' قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔ جو نصف سے بڑے قطعہ دائرے میں ہو، حادہ زاویہ ہوتا ہے اور جو نصف سے چھوٹے قطعہ دائرے میں ہو' منفرجہ زاویہ ہوتا ہے۔



شکل (I)



شکل (II)



شکل (III)

معلوم: O مرکز والے دائرے میں وتر $\overline{AB}$ کے لحاظ سے ADB قوس ہے۔ جبکہ AOB مرکزی زاویہ اور $\angle ACB$ محصور زاویہ ہے۔

مطلوب: شکل (I) میں اگر قطعہ دائرہ ACB نصف دائرہ ہے تو قائمہ زاویہ $= m\angle ACB$

شکل (II) میں اگر قطعہ دائرہ ACB نصف دائرے سے بڑا ہے تو قائمہ زاویہ $> m\angle ACB$

شکل (III) میں اگر قطعہ دائرہ ACB نصف دائرے سے کم ہے تو قائمہ زاویہ $< m\angle ACB$

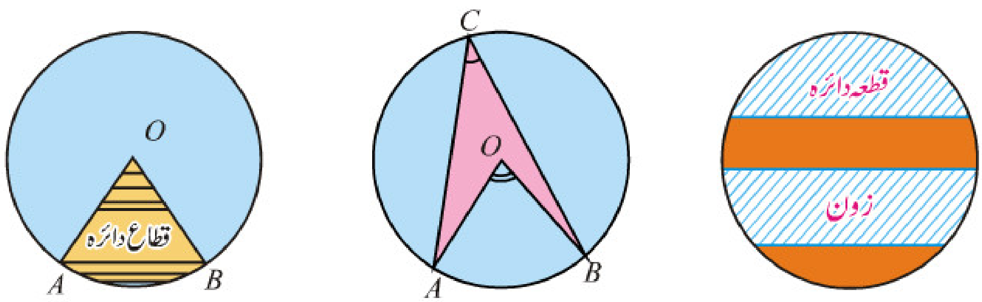
ثبوت:

بیانات	دلائل
O مرکز والے دائرے کی ہر شکل میں $\overline{AB}$ وتر ہے	معلوم
قوس ADB سے بننے والا مرکزی زاویہ AOB ہے۔	معلوم
جبکہ محصور زاویہ ACB ہے۔	مسئلہ 1 کی رو سے

بیان	وجوہات
$m\angle AOB = 2m\angle ACB$ (i)	
شکل(I) میں $m\angle AOB = 180^{\circ}$	
اس لیے (ii) $m\angle AOB = 2\,(90^{\circ})$	
$m\angle ACB =$ قائمہ زاویہ	(i)اور(ii) کی رو سے
شکل(II) میں $m\angle AOB < 180^{\circ}$	
اس لیے (iii) $m\angle AOB <$ قائمہ زاویہ	
$m\angle ACB <$ قائمہ زاویہ	(i)اور(iii) کی رو سے
شکل(III) میں $m\angle AOB > 180^{\circ}$	
(iv) $\therefore$ $m\angle AOB >$ قائمہ زاویہ	
$m\angle ACB >$ قائمہ زاویہ	(i)اور(iv) کی رو سے

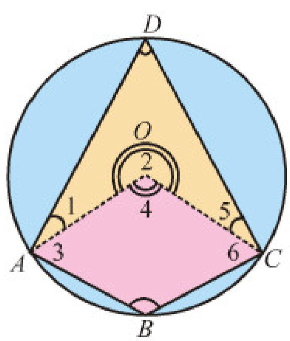
نتیجہ صریح 1 : کسی دائرے کی ایک قوس سے بننے والے محصور زاویے برابر ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح 2 : ایک ہی قطعہ دائرہ میں بننے والے زاویے باہم برابر ہوتے ہیں۔



مسئلہ 4

12.1 (iv) کسی دائرے کی دائروی چوکور کے متقابلہ زاویے، سپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔



معلوم: O مرکز والے دائرہ میں $ABCD$ ایک دائروی چوکور ہے۔

مطلوب:
$$\begin{cases} m\angle A + m\angle C = 180^{\circ} \\ m\angle B + m\angle D = 180^{\circ} \end{cases}$$

عمل: نقطہ O کو A اور C سے ملائیں۔ شکل کے مطابق $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$، $\angle 4$، $\angle 5$ اور $\angle 6$ لکھیں۔

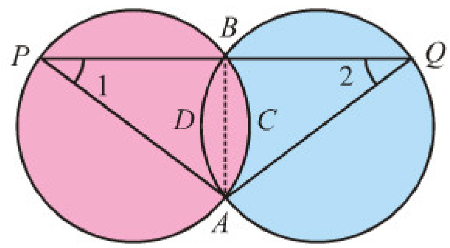
ثبوت:

دلائل	بیانات
O مرکزوالے دائرے کی قوس ADC	قوس ADC سے بننے والا مرکزی زاویہ 2 ہے۔
	جبکہ محصور زاویہ B ہے۔
مسئلہ 1 کی رو سے	اس لیے (i) $m\angle B = \frac{1}{2}(m\angle 2)$
O مرکزوالے دائرے کی قوس ABC	قوس ABC سے بننے والا مرکزی زاویہ 4 ہے۔
	جبکہ محصور زاویہ D ہے۔
مسئلہ 1 کی رو سے	اس لیے (ii) $m\angle D = \frac{1}{2}(m\angle 4)$
(i) اور (ii) جمع کرنے سے	$m\angle B + m\angle D = \frac{1}{2}m\angle 2 + \frac{1}{2}m\angle 4$
(کلی مرکزی زاویہ $m\angle 2 + m\angle 4 = 360^o$	$= \frac{1}{2}(m\angle 2 + m\angle 4)$
	یعنی، $m\angle B + m\angle D = \frac{1}{2}(4\angle rt) = 2\angle rt$
	اِسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $m\angle A + m\angle C = 2\angle rt$

نتیجہ صریح 1 : دو مساوی دائروں یا ایک ہی دائرہ میں دو صغیرہ قوسیں مساوی ہوں تو متعلقہ دو کبیرہ قوسوں پر بننے والے محصور زاویے بھی مساوی ہونگے۔

نتیجہ صریح 2 : اگر دو مساوی دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو قوسیں برابر ہوں تو محصور زاویے آپس میں برابر ہوں گے۔ نیز اِس نتیجہ کا عکس بھی درست ہو گا۔

مثال 1: دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو نقاط A اور B پر قطع کرتے ہیں۔ نقطہ B میں سے گزرتا ہوا ایک قطعہ خطِ دائروں کو بالترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے۔



معلوم: دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو نقاط A اور B پر قطع کرتے ہیں۔ نقطہ B میں سے گزرتا ہوا ایک قطعہ خط PBQ دائروں کو بالترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے۔

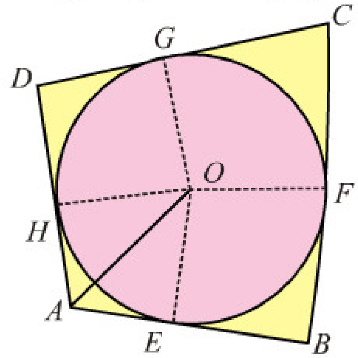
مطلوب: $m\overline{AP} = m\overline{AQ}$

عمل: نقاط A اور B کو ملائیں۔ شکل کے مطابق $\angle 1$ اور $\angle 2$ لکھیں۔

ثبوت:

بیانات		دلائل
کیونکہ	$m\,\widehat{ACB} = m\widehat{ADB}$	مشترک وتر AB کے سامنے قوسوں کی لمبائی
اس لیے	$m\angle 1 = m\angle 2$	قوسوں کے متقابلہ زاویے
پس	$m\overline{AQ} = m\overline{AP}$	ΔAPQ میں مساوی زاویوں کے مقابل اضلاع
یا	$m\overline{AP} = m\overline{AQ}$	

مثال 2: اگر چوکور ABCD ایک دائرے کو محیط کیے ہوئے ہو تو ثابت کریں $m\overline{AB} + m\overline{CD} = m\overline{BC} + m\overline{DA}$



معلوم: O مرکز والے دائرے کو چوکور ABCD نے اس طرح محیط کیا ہے کہ چوکور کا ہر ضلع دائرے پر مماس ہے۔

مطلوب: $m\overline{AB} + m\overline{CD} = m\overline{BC} + m\overline{DA}$

عمل: $\overline{OF} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{OG} \perp \overline{CD}$ اور $\overline{OH} \perp \overline{DA}$ کھینچیں۔

ثبوت:

بیانات		دلائل
$m\overline{AE} = m\overline{HA}$; $m\overline{EB} = m\overline{BF}$	(i)	کسی بیرونی نقطہ سے دائرے پر بنائے گئے مماس آپس میں برابر ہیں۔
$m\overline{CG} = m\overline{FC}$ and $m\overline{GD} = m\overline{DH}$	(ii)	
$(m\overline{AE} + m\overline{EB}) + (m\overline{CG} + m\overline{GD})$		(i) اور (ii) کو جمع کرنے سے

$= (m\overline{BF} + m\overline{FC}) + (m\overline{DH} + m\overline{HA})$

یا $m\overline{AB} + m\overline{CD} = m\overline{BC} + m\overline{DA}$

مشق 12.1

-1 ثابت کریں کہ کسی دی ہوئی دائروی چوکور کے متقابلہ زاویوں کا مجموعہ 180° کے برابر ہے۔

-2 ثابت کریں کہ دائروی متوازی الاضلاع ایک مستطیل ہوگی۔

-3 O مرکز والے دائرے کے AOB اور COD دو متقاطع وتر ہیں۔ ثابت کریں کہ AOD اور BOC دو مساوی الزاویہ مثلثان ہیں۔

-4 $\overline{AD}$ اور $\overline{BC}$ کسی دائرے کے دو متوازی وَتر ہیں۔ ثابت کریں کہ

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$ اور $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

متفرق مشق 12

کثیر الانتخابی سوالات

-1 درج ذیل سوالات کے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب پر (✓) کانشان لگائیں۔

(i) کسی قائمۃ الزاویہ ΔABC میں 3 سم $= m\overline{AC}$، 4 سم $= m\overline{BC}$ اور $m\angle C = 90^\circ$ اِس مثلث کے راسوں میں سے گزرنے والے دائرے کا رداس ہے۔

(a) 1.5 cm (b) 2.0 cm

(c) 2.5 cm (d) 3.5 cm

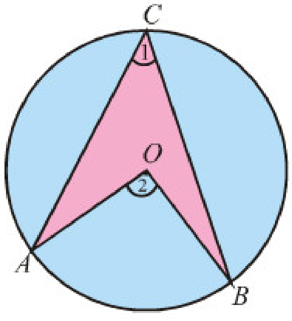
(ii) شکل میں AB ایک ہی قوس پر مرکزی اور محصور زاویے بنتے ہیں۔ تب

(a) $m\angle 1 = m\angle 2$

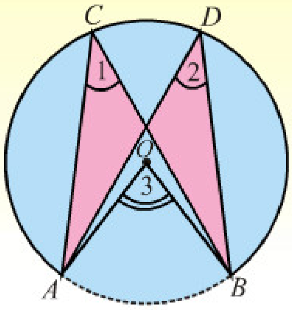
(b) $m\angle 1 = 2m\angle 2$

(c) $m\angle 2 = 3m\angle 1$

(d) $m\angle 2 = 2m\angle 1$



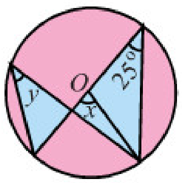
(iii) شکل میں اگر $m\angle 3 = 75^\circ$ تب $m\angle 1$ اور $m\angle 2$ معلوم کیجیے۔



(a) $37\frac{1}{2}^\circ, 37\frac{1}{2}^\circ$ (b) $37\frac{1}{2}^\circ, 75^\circ$

(c) $75^\circ, 37\frac{1}{2}^\circ$ (d) $75^\circ, 75^\circ$

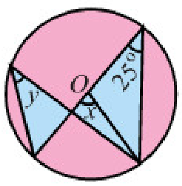
(iv) دائرے کا مرکزی نقطہ O معلوم ہو تو نشان زدہ زاویہ x ہو گا۔



(a) $12\frac{1}{2}^\circ$ (b) 25°

(c) 50° (d) 75°

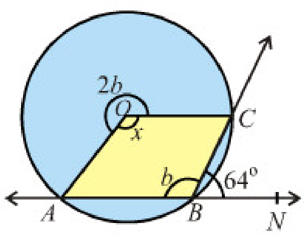
(v) دائرے کا مرکزی نقطہ O معلوم ہو تو نشان زدہ زاویہ y ہو گا۔



(a) $12\frac{1}{2}^\circ$ (b) 25°

(c) 50° (d) 75°

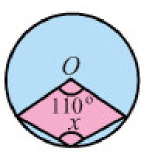
(vi) شکل میں دائرے کا مرکز O ہے اور $\overleftrightarrow{ABN}$ ایک خطِ مستقیم ہو تو منفرجہ زاویہ AOC، x ________ ہے۔



(a) 32° (b) 64°

(c) 96° (d) 128°

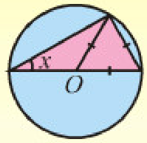
(vii) شکل میں دائرے کا مرکز O ہے تب زاویہ x ________ ہے۔



(a) 55° (b) 110°

(c) 220° (d) 125°

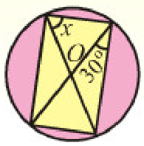
(viii) شکل میں دائرے کا مرکز O ہے تب زاویہ x ________ ہے۔



(a) 15^o (b) 30^o

(c) 45^o (d) 60^o

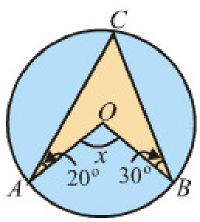
(ix) شکل میں دائرے کا مرکز O ہے تب x ________ ہے۔



(a) 15^o (b) 30^o

(c) 45^o (d) 60^o

(x) شکل میں دائرے کا مرکز O ہے تب x ________ ہے۔



(a) 50^o (b) 75^o

(c) 100^o (d) 125^o

خلاصہ

- ایک قوس دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بناتی ہے اسے **مرکزی زاویہ** کہتے ہیں۔
- مرکزی زاویہ دائرے کے مرکز پر دو راسوں اور ایک قوس سے بنتا ہے۔
- دائرے کی ایک قوس جو اس کے محیط پر زاویہ بناتی ہے اس کو **محاصر زاویہ** کہتے ہیں۔
- دائرے کے کوئی سے دو وتر جو محیط پر مشترک نقطہ پر ملیں ان سے بننے والا زاویہ **محاصر زاویہ** کہلاتا ہے۔
- وہ چوکور، **سائیکلک** کہلاتی ہے جس کے چاروں راسوں سے دائرہ کھینچا جاسکتا ہو۔
- کسی دائرے میں قوس صغیرہ سے بننے والا مرکزی زاویہ مقدار میں اپنی متعلقہ قوس کبیرہ کے محصور زاویے سے دو گنا ہوتا ہے۔
- زاویے جو ایک ہی قطعہ دائرہ میں واقع ہوں، باہم برابر ہوتے ہیں۔
- زاویہ جو نصف دائرہ میں ہو قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔ جو نصف سے بڑے قطعہ دائرے میں ہو حادہ زاویہ ہوتا ہے۔ جو نصف سے چھوٹے قطعہ دائرے میں ہو، منفرجہ زاویہ ہوتا ہے۔
- کسی دائرے کی سائیکلک چوکور کے متقابلہ زاویے سپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔