یونٹ 3

لوگارتھم

(LOGARITHMS)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

3.1 سائنسی ترقیم (Scientific Notation)

3.2 لوگارتھم (Logarithm)

3.3 عام اور قدرتی لوگارتھم (Common and Natural Logarithm)

3.4 لوگارتھم کے قوانین (Laws of Logarithm)

3.5 لوگارتھم کا استعمال (Application of Logarithm)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع ترما حصل/نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر علمی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ عام ترقیم (standard form) میں دیے گئے عدد کو سائنسی ترقیم (scientific notation) میں اور اس کے برعکس لکھ سکیں۔

☆ تعریف کر سکیں کہ اساس 'a' پر کسی عدد y کے لوگارتھم سے مراد 'a' کا وہ قوت نما x ہے جس سے $a^x = y$ حاصل ہو جائے۔

(یعنی $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x, a > 0, a \neq 1$ اور $y > 0$)

☆ عام لوگارتھم، کسی عدد کے لوگارتھم کے خاصہ (Characteristic) اور مینٹیسا (Mantissa) کی تعریف کر سکیں۔

☆ کسی عدد کا log معلوم کرنے کے لیے لوگارتھم کی جدول (log tables) کے استعمال کا طریقہ سیکھ سکیں۔

☆ ضد لوگارتھم (antilog) کے تصور کو سیکھ کر متعلقہ جدول (antilog tables) کی مدد سے کسی عدد کا ضد لوگارتھم معلوم کر سکیں۔

☆ عام اور قدرتی لوگارتھم کے درمیان فرق کر سکیں۔

☆ لوگارتھم کے مندرجہ ذیل قوانین ثابت کر سکیں۔

(i)	$\log_a(mn)$	$= \log_a m + \log_a n$
(ii)	$\log_a\left(\dfrac{m}{n}\right)$	$= \log_a m - \log_a n$
(iii)	$\log_a m^n$	$= n \log_a m$
(iv)	$\log_a m \log_m n$	$= \log_a n$

☆ لوگارتھم کے قوانین کو استعمال کر کے ضرب، تقسیم، اعداد کی کوئی قوت نمائی یا جذر لینے جیسے لمبے (پیچیدہ) ریاضیاتی عوامل کے استعمال کو جمع اور تفریق جیسے آسان تر عوامل میں تبدیل کر سکیں۔

تعارف

لوگارتھم کے استعمال سے مشکل اور پیچیدہ حساب کتاب کے مسائل آسان تر ہو جاتے ہیں۔ اس کی ایجاد کا سہرا مسلمان ریاضی دان ابو محمد موسیٰ الخوارزمی کے سر ہے۔ بعد میں جان نیپیئر (John Napier) نے اس میں مزید اصلاح کی اور لوگارتھم کی جدولیں (log tables) تیار کیں۔ اس جدول کے لیے اس نے اساس (base) 'e' استعمال کی۔ پروفیسر ہنری برگز (Henry Briggs) کو جان نیپیئر کے کام میں خاصی دلچسپی تھی۔ برگز نے اساس 10 والی لوگارتھم جدولیں تیار کیں۔ 1620ء میں جابسٹ برگی (Jobst Burgi) نے ضد لوگارتھم (antilogarithms) کی جدول تیار کی۔

3.1 سائنسی ترقیم (Scientific Notation)

سائنس اور فنی کام میں ہمیں ایسے اعداد کا استعمال بھی کرنا پڑتا ہے جو یا تو بہت چھوٹے یا بہت بڑے ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر زمین سے سورج تک فاصلہ قریباً 150,000,000 کلومیٹر اور ہائڈروجن ایٹم کا وزن 0.000,000,000,000,000,000,000,001,7 گرام ہے۔ جب ان اعداد کو عام ترقیم میں لکھتے ہیں تو اس بات کا قوی امکان ہوتا ہے کہ کوئی ایک صفر چھوڑ دیا جائے یا صفروں کی اصل تعداد سے زیادہ لکھ دیے جانے کی غلطی ہو جائے۔ اس مسئلے پر قابو پانے کے لیے سائنسدانوں نے بہت چھوٹے یا بہت بڑے عام اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے ایک جامع، بالکل ٹھیک اور موزوں طریقہ رائج (develop) کیا جسے "سائنسی ترقیم" کہتے ہیں۔

کسی دیے گئے عدد کو سائنسی ترقیم میں لکھنے کے لیے اسے $a \times 10^n$ کے طور پر لکھا جاتا ہے۔

جبکہ $1 \le a < 10$ اور n ایک صحیح عدد ہو۔

مذکورہ بالا اعداد کو سائنسی ترقیم میں آسانی کے ساتھ بالترتیب 1.5×10^8 کلومیٹر اور 1.7×10^{-24} گرام لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 1 عام ترقیم میں لکھے گئے درج ذیل اعداد کو سائنسی ترقیم میں لکھیں۔

(i) 30600 (ii) 0.000058

حل

(i) $30600 = 3.06 \times 10^4$ (نقطہ اعشاریہ کو چار درجے بائیں طرف حرکت دیں)

(ii) $0.000058 = 5.8 \times 10^{-5}$ (نقطہ اعشاریہ کو پانچ درجے دائیں طرف حرکت دیں)

مشاہدہ کریں کہ کسی عدد کو سائنسی ترقیم میں لکھنے کے لیے

(i) دیے گئے عدد کے بائیں جانب سے پہلے غیر صفر ہندسے کے بعد نقطہ اعشاریہ لگائیں۔

(ii) پہلے مرحلے یعنی (i) میں حاصل کردہ عدد کو 10^n سے ضرب دیتے ہیں اگر ہم نے نقطہ اعشاریہ کی جگہ کو n درجے بائیں جانب حرکت دی ہو۔

(iii) پہلے مرحلے یعنی (i) میں حاصل کردہ عدد کو 10^{-n} سے ضرب دیتے ہیں اگر ہم نے نقطہ اعشاریہ کی جگہ کو n درجے دائیں جانب حرکت دی ہو۔

دوسری طرف اگر ہم کسی عدد کو سائنسی ترقیم سے عام ترقیم میں تبدیل کرنا چاہتے ہوں تو اوپر لکھے ہوئے طریق کار کو صرف برعکس عمل کر دیتے ہیں۔

مثال 2 سائنسی ترقیم میں لکھے گئے درج ذیل اعداد کو عام ترقیم میں تبدیل کریں۔

(i) 6.35×10^6 (ii) 7.61×10^{-4}

حل

(i) $6.35 \times 10^6 = 6350000$ (نقطہ اعشاریہ کو چھ درجے دائیں طرف حرکت دیں)

(ii) $7.61 \times 10^{-4} = 0.000761$ (نقطہ اعشاریہ کو چار درجے بائیں طرف حرکت دیں)

مشق 3.1

-1 مندرجہ ذیل اعداد کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

(i) 5700 (ii) 49,800,000 (iii) 96,000,000

(iv) 416.9 (v) 83,000 (vi) 0.00643

(vii) 0.0074 (viii) 60,000,000 (ix) 0.0000000395

(x) $\dfrac{275,000}{0.0025}$

-2 مندرجہ ذیل اعداد کو عام ترقیم میں لکھیے۔

(i) 6×10^{-4} (ii) 5.06×10^{10}

(iii) 9.018×10^{-6} (iv) 7.865×10^{8}

3.2 لوگارتھم (Logarithm)

اعداد و شمار کے مسائل کو صحیح اور تیزی سے حل کرنے کے لیے لوگارتھم کا عمل بہت مفید اور مؤثر طریقہ ہے۔ اساس '10' کے لوگارتھم کو عام لوگارتھم اور اساس 'e' کے لوگارتھم کو قدرتی لوگارتھم کہتے ہیں۔ اب ہم اساس 'a' کے لوگارتھم کی تعریف کریں گے جبکہ 'a' ایک حقیقی عدد ہو اور $a > 0$ ، $a \neq 1$

3.2.1 حقیقی عدد کا لوگارتھم

اگر $a^x = y$ جبکہ $a, x, y \in \mathrm{R}$ اور $a > 0, y > 0$ اور $a \neq 1$ تو x کو اساس 'a' پر y کا لوگارتھم کہتے ہیں اور اسے $\log_a y = x$ لکھتے ہیں۔

$a^x = y$ اور $\log_a y = x$ دو مترادف مساواتیں ہیں۔ اگر کوئی ایک مساوات دی گئی ہو تو اسے دوسری میں بدلا جا سکتا ہے۔ یعنی

$$\boxed{a^x = y \iff \log_a y = x}$$

$a^x = y$ کو قوت نمائی شکل اور $\log_a y = x$ کو لوگارتھمی شکل کہتے ہیں۔

اس اضافی نقطہ کی وضاحت کے لیے مشاہدہ کریں کہ

$3^2 = 9$ مترادف ہے $\log_3 9 = 2$ کے (یعنی $3^2 = 9 \Rightarrow \log_3 9 = 2$)

اور $2^{-1} = \frac{1}{2}$ مترادف ہے $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ کے (یعنی $2^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$)

اسی طرح $\log_3 27 = 3$ مترادف ہے $27 = 3^3$ کے (یعنی $\log_3 27 = 3 \Rightarrow 27 = 3^3$)

کسی منفی عدد کا لوگارتھم اس مرحلے پر زیرِ بحث نہیں ہے۔

مثال 3 $\log_4 2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل اگر $\log_4 2 = x$

تو قوت نمائی شکل میں لکھنے سے $4^x = 2$

$$\Rightarrow \quad 2^{2x} = 2^1$$
$$\Rightarrow \quad 2x = 1$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

x کی قیمت درج کرنے سے $\Rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

لوگارتھم کی تعریف سے اخذ کردہ نتائج

(i)	$a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$
(ii)	$a^1 = a \Rightarrow \log_a a = 1$

3.2.2 عام لوگارتھم، خاصہ اور مینٹیسا (Common Logarithm, Characteristic and Mantissa)

عام لوگارتھم کی تعریف

روزمرہ زندگی میں اعداد و شمار کے لیے لوگارتھم کی اساس 10 لی جاتی ہے۔ ایسے لوگارتھم کو عام لوگارتھم یا برگز لوگارتھم کہتے ہیں۔ ہنری برگز (Henry Briggs) ایک انگریز ریاضی دان اور ماہر فلکیات تھا جس نے اساس 10 کی لوگارتھم جدولیں تیار کیں۔ اس کے اعزاز میں ہی عام لوگارتھم کو برگز لوگارتھم کہتے ہیں۔

کسی عدد کے لوگارتھم کا خاصہ اور مینٹیسا

مندرجہ ذیل پر غور کیجیے

$$10^3 = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad \log 1000 = 3$$
$$10^2 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad \log 100 = 2$$
$$10^1 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \log 10 = 1$$
$$10^0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log 1 = 0$$
$$10^{-1} = 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad \log 0.1 = -1$$
$$10^{-2} = 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \log 0.01 = -2$$
$$10^{-3} = 0.001 \quad \Leftrightarrow \quad \log 0.001 = -3$$

نوٹ: اگر صرف عام لوگارتھم کا استعمال ہی زیر بحث ہو تو اساس 10 نہیں لکھی جاتی۔ یعنی log کے ساتھ اساس نہ لکھی ہو تو اساس 10 تصور کی جائے گی۔

اب درج ذیل جدول پر بھی غور کیجیے۔

برائے اعداد	لوگارتھم
1 اور 10 کے درمیان	کسر اعشاریہ
10 اور 100 کے درمیان	کسر اعشاریہ +1
100 اور 1000 کے درمیان	کسر اعشاریہ +2
0.1 اور 1 کے درمیان	کسر اعشاریہ +1−
0.01 اور 0.1 کے درمیان	کسر اعشاریہ +2−
0.001 اور 0.01 کے درمیان	کسر اعشاریہ +3−

مشاہدہ کریں کہ

کسی عدد کا لوگارتھم (جو 10 کی صحیح عددی قوت نہ ہو) دو حصوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

(i) ایک صحیح عددی حصہ جو '1' سے بڑے عدد کے لیے مثبت اور '1' سے چھوٹے عدد کے لیے منفی ہوتا ہے۔
کسی عدد کے لوگارتھم کے صحیح عددی حصے کو لوگارتھم کا خاصہ (characteristic) کہتے ہیں۔

(ii) ایک کسری حصہ جو ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔ اس کسری حصے کو مینٹیسا (mantissa) کہتے ہیں۔

(i) '1' سے بڑے عدد کے لوگارتھم کا خاصہ

مندرجہ بالا جدول کے پہلے حصے سے ظاہر ہوتا ہے کہ
اگر کسی عدد کا صحیح عددی حصہ ایک ہندسہ پر مشتمل ہو تو عدد کے لوگارتھم کا خاصہ 0 ہوتا ہے۔
اگر کسی عدد کا صحیح عددی حصہ دو ہندسوں پر مشتمل ہو تو عدد کے لوگارتھم کا خاصہ 1 ہوتا ہے۔
اگر کسی عدد کا صحیح عددی حصہ تین ہندسوں پر مشتمل ہو تو عدد کے لوگارتھم کا خاصہ 2 ہوتا ہے وغیرہ وغیرہ

دوسرے الفاظ میں '1' سے بڑے عدد کے لوگارتھم کا خاصہ ہمیشہ صحیح عددی حصہ کے ہندسوں کی تعداد سے ایک کم ہوتا ہے۔

عدد کو سائنسی ترقیم میں لکھ کر بھی خاصہ معلوم کر سکتے ہیں۔
اگر کسی عدد 'b' کو سائنسی ترقیم میں لکھا جائے۔ یعنی

$$b = a \times 10^n \, , \, 1 \le a < 10$$

تو $\log b$ کا خاصہ 10 کے قوت نما n کے برابر ہوتا ہے۔

مثال سائنسی ترقیم میں لکھ کر اور 10 کی قوت نمائی شکل کو نوٹ کرتے ہوئے درج ذیل اعداد کے لوگارتھم کا خاصہ معلوم کریں:

1.02، 99.6، 102 اور 1662.4

حل

لوگارتھم کا خاصہ	سائنسی ترقیم	عدد
0	1.02×10^0	1.02
1	9.96×10^1	99.6
2	1.02×10^2	102
3	1.6624×10^3	1662.4

'1' سے چھوٹے عدد کے لوگارتھم کا خاصہ

زیر بحث جدول کا دوسرا حصہ ظاہر کرتا ہے کہ

اگر کسی عدد میں نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد کوئی '0' موجود نہ ہو تو عدد کے لوگارتھم کا خاصہ '1-' ہوتا ہے۔

اگر کسی عدد میں نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد ایک '0' موجود ہو تو عدد کے لوگارتھم کا خاصہ '2-' ہوتا ہے۔

اگر کسی عدد میں نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد دو '0' موجود ہوں تو عدد کے لوگارتھم کا خاصہ '3-' ہوتا ہے۔

وغیرہ وغیرہ۔

دوسرے الفاظ میں '1' سے کم عدد کے لوگارتھم کا خاصہ ہمیشہ منفی ہوتا ہے اور عدد کے نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد موجود صفروں کی تعداد سے '1' زیادہ۔

مثال (سائنسی ترقیم کا استعمال)

سائنسی ترقیم میں لکھ کر اور 10 کی قوت نما نوٹ کرتے ہوئے مندرجہ ذیل اعداد کے لوگارتھم کا خاصہ معلوم کریں:

0.02، 0.872 اور 0.00345

حل

لوگارتھم کا خاصہ	سائنسی ترقیم	عدد
-1	8.72×10^{-1}	0.872
-2	2.0×10^{-2}	0.02
-3	3.45×10^{-3}	0.00345

جب کوئی عدد '1' سے چھوٹا ہو تو عام طور پر اس عدد کے لوگارتھم کے خاصہ مثلاً 3- کو $\bar{3}$ ، 2- کو $\bar{2}$ اور 1- کو $\bar{1}$ لکھا جاتا ہے ($\bar{3}$ کو بار 3 پڑھتے ہیں) تاکہ مینٹیسا کو منفی نہ سمجھ لیا جائے۔

نوٹ $\bar{2}.3748$ کا مطلب -2.3748 نہیں ہوتا۔ بلکہ $\bar{2}.3748$ میں 2 منفی ہے اور 0.3748 مثبت، جبکہ -2.3748 میں 2 اور 0.3748 دونوں ہی منفی ہیں۔

(ii) کسی عدد کے لوگارتھم کا مینٹیسا معلوم کرنے کا طریقہ

کسی عدد کے لوگارتھم کا خاصہ مندرجہ بالا راہنمائی نقاط کی مدد سے محض بغور جائزہ لینے سے لکھا جاتا ہے۔ جبکہ مینٹیسا لوگارتھمی جدول کے استعمال سے معلوم کیا جاتا ہے۔ یہ جدول سات درجے کسر اعشاریہ تک لوگارتھم معلوم کرنے کے لیے تیار کیے گئے ہیں۔ لیکن تمام عملی مقاصد کے لیے چار ہندسی لوگارتھمی جدول کافی حد تک صحیح جواب مہیا کر دیں گی۔

لوگارتھمی جدول تین حصوں پر مشتمل ہوتی ہیں:

(a) جدول کا پہلا حصہ انتہائی بائیں جانب والا کالم (column) ہے جس کا بالائی سرا ایک خالی مربع ہے۔ اس کالم میں 10 سے 99 تک دو ہندسوں والے اعداد درج ہیں۔ جس عدد کا لوگارتھم مطلوب ہو اس کے بائیں جانب والے پہلے دو ہندسے اس کالم میں سے تلاش کیے جاتے ہیں۔

(b) جدول کا دوسرا حصہ 10 کالموں پر مشتمل ہے جن کے بالائی سرے خالی مربع کی افقی سیدھ میں بنے ہوئے خانے ہیں۔ جن میں اعداد 0، 1، 2، . . . ، 9 درج ہیں۔ زیر بحث عدد کا بائیں جانب سے تیسرا ہندسہ ان (0 سے 9) میں سے دیکھا جاتا ہے۔ اس تیسرے ہندسے والے کالم اور (a) والے دو ہندسوں کے عین سامنے والی قطار میں (دونوں کے تقاطع پر) درج شدہ عدد نوٹ کر لیتے ہیں۔ (مینٹیسا معلوم کرتے وقت دیے گئے عدد میں نقطہ اعشاریہ آسانی کے لیے وقتی طور پر نظر انداز کر دیتے ہیں)

(c) جدول کا تیسرا حصہ 1 سے 9 تک مزید کالموں پر مشتمل ہوتا ہے جن کو فرق والے کالم (mean differences columns) کہتے ہیں۔ ان میں سے زیر بحث عدد کے چوتھے ہندسے کے مطابق کالم اور (a) میں بیان کردہ قطار کے تقاطع پر جو نمبر درج ہو اسے (b) میں نوٹ کیے ہوئے عدد میں جمع کر لیتے ہیں۔ اس مجموعہ کے ساتھ پہلے نظر انداز کیا ہوا نقطہ اعشاریہ لگا کر مطلوبہ مینٹیسا (کسر اعشاریہ) حاصل ہو گا۔

کسی عدد کے log کا مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے جب چار ہندسی لوگارتھمی جدول کو استعمال کرنا ہو تو دیے گئے عدد میں نقطہ اعشاریہ کو نظر انداز کرتے ہوئے اسے چار اہم ہندسوں (significant figures) تک قریباً صحیح (راؤنڈ آف) کر لیا جاتا ہے۔

3.2.3 کسی عدد کا لوگارتھم معلوم کرنے کے لیے جدول کا استعمال

دیے گئے عدد کا لوگارتھم معلوم کرنے کے طریقہ کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جائے گی۔ پہلی دو مثالوں میں ہم صرف مینٹیسا معلوم کرنے تک محدود رہیں گے۔

مثال 1 log 43.254 کا مینٹیسا معلوم کیجیے۔

حل نقطہ اعشاریہ کو وقتی طور پر نظر انداز کر کے 43.254 کو راؤنڈ آف کرنے سے چار اہم ہندسوں والا عدد 4325 بنایا۔

(i) سب سے پہلے لوگارتھمی جدول کے انتہائی بائیں جانب کے پہلے کالم میں دو ہندسوں والے اعداد میں 43 کے سامنے کی قطار تلاش کریں گے۔

(ii) اس قطار اور کالم 2 کے نیچے (قطار اور کالم کے تقاطع) پر دیے گئے نمبر 6355 کو نوٹ کریں گے۔

(iii) اسی قطار میں فرق والے کالم 5 کے نیچے دونوں کے تقاطع پر عدد 5 درج ہے۔

(iv) ان دونوں اعداد کو جمع کر کے حاصل کردہ نمبر 6360 (6355 + 0005) مطلوبہ مینٹیسا کی نشاندہی کرتا ہے جو 0.6360 ہوگا۔

یعنی log 43.25 کا مینٹیسا = 0.6360 ہوگا۔

مثال 2 log 0.002347 کا مینٹیسا معلوم کیجیے۔

حل یہاں بھی ہم چار اہم ہندسوں کو لیں گے یعنی 2347

پہلے کی طرح لوگارتھمی جدول میں 23 کے سامنے والی قطار اور 4 کے نیچے کالم کے تقاطع پر لکھا ہوا عدد 3692 نوٹ کیا۔

اسی قطار یعنی 23 کے سامنے والی قطار اور فرق والے کالم 7 کے تقاطع پر 13 درج ہے۔

3692 اور 13 کو جمع کر کے حاصل کردہ نمبر 3705 ہے۔

لہٰذا log(0.002347) کا مینٹیسا 0.3705 ہوگا۔

نوٹ: ایسے اعداد جن کے اہم ہندسوں کی ترتیب یکساں ہو ان کے log کا مینٹیسا بھی یکساں ہوتا ہے۔ مثلاً log 0.02347 اور log 0.2347 دونوں کا مینٹیسا 0.3705 ہی ہے۔

کسی دیے گئے عدد کا لوگارتھم معلوم کرنے کے لیے:

(i) عدد کو راؤنڈ آف (round off) کر کے چار اہم ہندسوں تک محدود کر دیں۔

(ii) بغور جائزہ لے کر عدد کے log کا خاصہ معلوم کریں۔

(iii) لوگارتھمی جدول کی مدد سے عدد کے log کا مینٹیسا معلوم کریں۔

(iv) خاصہ اور مینٹیسا دونوں کو ملا کر عدد کے log کی قیمت حاصل ہوگی۔

مثال 3 $\log 278.23$ (i) اور $\log 0.07058$ (ii) کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل (i) 278.23 کو راؤنڈ آف کرنے سے چار اہم ہندسوں والا عدد 278.2 ہے۔

278.2 کا صحیح عددی حصہ 3 ہندسوں پر مشتمل ہے۔ پس

خاصہ $= 2, \ldots\ldots (3 - 1 = 2)$

اب مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے لوگارتھمی جدول کے انتہائی بائیں جانب والے پہلے کالم میں 27 کے سامنے والی قطار میں اور کالم 8 کے عین نیچے (قطار اور کالم کے تقاطع پر) لکھا عدد 4440 نوٹ کیا۔

اسی قطار میں فرق والے کالم 2 کے نیچے لکھا ہوا نمبر 3 ہے۔ 4440 اور 3 کو جمع کرنے سے عدد 4443 حاصل ہوا۔ اس لیے

مینٹیسا $= 0.4443$

لہٰذا $\log 278.23 = 2.4443$

(ii) دیے گئے عدد 0.07058 میں چونکہ اعشاریہ کے فوراً بعد ایک '0' موجود ہے اس لیے $\log (0.07058)$ کا خاصہ 2- ہے جسے عام طور پر $\bar{2}$ لکھا جاتا ہے۔

اب مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے نقطہ اعشاریہ کو نظر انداز کرتے ہوئے چار ہندسی عدد 7058 بنتا ہے۔

لوگارتھمی جدول کی مدد سے

مینٹیسا $= 0.8487$

لہٰذا $\log (0.07058) = \bar{2}.8487$

3.2.4 ضد لوگارتھم (Antilogarithm) کا تصور اور متعلقہ جدول کا استعمال

وہ عدد جس کا لوگارتھم معلوم ہو ضد لوگارتھم کہلاتا ہے۔ یعنی اگر $\log y = x$ ہو تو y کو x کا ضد لوگارتھم کہتے ہیں اور اسے $y = \text{antilog}\ x$ لکھتے ہیں۔

ضد لوگارتھم معلوم کرنے کا طریقہ

خاصہ کو وقتی طور پر نظر انداز کر کے مینٹیسا پر غور کرتے ہوئے ضد لوگارتھم کے جدول کو استعمال کرتے ہیں۔ آخر میں جدول سے حاصل کردہ عدد میں خاصہ کی مدد سے نقطہ اعشاریہ کی نشان دہی کی جاتی ہے۔

ضد لوگارتھم جدول میں انتہائی بائیں جانب کے پہلے کالم (خالی مربع والا) میں مینٹیسا کے پہلے دو ہندسے (بمعہ نقطہ اعشاریہ) تلاش کرتے ہیں۔ ان کے عین سامنے کی قطار اور تیسرے ہندسے کے مطابق کالم کے تقاطع پر لکھا ہوا عدد نوٹ

کر لیتے ہیں۔ اسی قطار اور چوتھے ہندسے کے مطابق فرق والے کالم کے تقاطع پر لکھا ہوا نمبر بھی نوٹ کر لیتے ہیں۔ نوٹ کیے ہوئے ان دونوں نمبرز کو جمع کرنے سے اہم ہندسوں پر مشتمل مطلوبہ عدد حاصل ہوتا ہے۔

اب خاصہ کی مدد سے صرف نقطہ اعشاریہ کی نشان دہی باقی رہ جاتی ہے۔

(i) دیے گئے log کا خاصہ اگر مثبت عدد ہے تو اس میں '1' جمع کرنے سے وہ نمبر حاصل ہوگا جو مطلوبہ عدد میں نقطہ اعشاریہ سے بائیں جانب والے ہندسوں کی تعداد کا تعین کرے گا۔

(ii) اگر خاصہ منفی ہو تو اس کی عددی قدر کو '1' کم کرنے سے صفروں کی وہ تعداد معلوم ہو جائے گی جو مطلوبہ عدد میں نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد دائیں جانب لکھے جائیں گے۔

مثال وہ اعداد معلوم کیجیے جن کے لوگارتھم کی قیمت درج ذیل ہے۔

(i) 1.3247

(ii) $\bar{2}.1324$

حل (i) فرض کریں $\log x = 1.3247$

اب $x = \text{antilog } 1.3247$ کی قیمت معلوم کرنا ہے۔

یہاں $\log x = 1$ کا خاصہ

اور $\log x = 0.3247$ کا مینٹیسا

ضد لوگارتھم جدول کے انتہائی بائیں جانب پہلے کالم میں 0.32 کے عین سامنے والی قطار اور 4 کے نیچے والے کالم کے تقاطع پر لکھا ہوا نمبر 2109 نوٹ کر لیں۔ اسی قطار اور فرق والے کالم 7 کے نیچے دونوں کے تقاطع پر نمبر '3' لکھا ہے۔ 2109 اور 3 کو جمع کرنے سے حاصل کردہ نمبر 2112 ہے۔

خاصہ میں '1' جمع کرنے سے 2=1+1 حاصل ہوا (خاصہ '1' ہو تو صحیح عددی حصہ 2 ہندسوں پر مشتمل ہوتا ہے)۔

اس لیے 2112 میں نقطہ اعشاریہ بائیں جانب سے دو ہندسوں کے بعد لگایا جائے گا۔ لہٰذا

$$x = \text{antilog } (1.3247)$$
$$= 21.12$$

(ii) $\bar{2}.1324$ میں

خاصہ $= \bar{2}$

اور مینٹیسا $= 0.1324$

(i) میں کیے گئے عمل کو دہراتے ہوئے (ضد لوگارتھم جدول کے استعمال سے) مینٹیسا 0.1324 کے مطابق چار اہم ہندسوں والا حاصل کردہ نمبر 1356 ہے۔

خاصہ $\overline{2}$ کی عددی قدر 2 کو '1' کم کرنے سے '1' = 1-2 حاصل ہوئی۔ لہٰذا نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد ایک '0' ہو گا۔

پس $\text{antilog}(\overline{2}.1324) = 0.01356$

مشق 3.2

1 مندرجہ ذیل اعداد کا عام لوگارتھم معلوم کیجیے۔

(i) 232.92 (ii) 29.326

(iii) 0.00032 (iv) 0.3206

2 جدول کو استعمال کیے بغیر مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔ اگر $\log 31.09 = 1.4926$ ہو

(i) $\log 3.109$ (ii) $\log 310.9$ (iii) $\log 0.003109$ (iv) $\log 0.3109$

3 وہ اعداد معلوم کیجیے جن کے عام لوگارتھم کی قیمت درج ذیل ہے۔

(i) 3.5622 (ii) $\overline{2}.7427$

4 نامعلوم کی کس قیمت کے لیے مندرجہ ذیل بیانات درست ہوں گے۔

(i) $\log_3 81 = L$ (ii) $\log_a 6 = 0.5$

(iii) $\log_5 n = 2$ (iv) $10^p = 40$

5 قیمت معلوم کریں۔

(i) $\log_2 \frac{1}{128}$ (ii) log 512 to the base $2\sqrt{2}$

6 مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے x کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $\log_2 x = 5$ (ii) $\log_{81} 9 = x$ (iii) $\log_{64} 8 = \frac{x}{2}$

(iv) $\log_x 64 = 2$ (v) $\log_3 x = 4$

3.3 عام لوگارتھم اور قدرتی لوگارتھم (Common Logarithm and Natural Logarithm)

3.2.2 میں ہم نے اساس 10 والے عام لوگارتھم کو متعارف کروایا ہے۔ عام لوگارتھم اساس 10 کی وجہ سے ڈیکیڈک (decadic) لوگارتھم بھی کہلاتے ہیں۔ ہم عام طور پر $\log_{10} x$ کو $\log x$ لکھتے ہیں اور اس قسم کے لوگارتھم عددی وضاحت کے لیے زیادہ موزوں ہوتے ہیں۔ جان نیپئر (John Napier) نے اساس e والی لوگارتھمی

جدولیں تیار کیں۔ نیپیئر لوگارتھم کو قدرتی لوگارتھم بھی کہتے ہیں۔اس نے سب سے پہلے 1614 میں لوگارتھم جدول شائع کیں۔ روائتی طور پر $\log_e x$ کو ہم $\ln x$ لکھتے ہیں۔

سائنس اور انجینئرنگ کی نظریاتی تحقیقات میں اکثر اوقات اساس e کا استعمال موزوں ہوتا ہے۔ e ایک غیر ناطق عدد ہے جس کی قیمت ...2.7182818 یعنی قریباً 2.718 ہے۔

3.4 لوگارتھم کے قوانین (Laws of Logarithm)

یونٹ کے اس حصہ میں ہم لوگارتھم کے قوانین ثابت کریں گے اور پھر انہیں اعداد کی ضرب، تقسیم، قوت نما اور جذر لینے جیسے عوامل کی وضاحت کے لیے استعمال کریں گے۔

(i)	$\log_a(mn)$	$= \log_a m + \log_a n$
(ii)	$\log_a\left(\dfrac{m}{n}\right)$	$= \log_a m - \log_a n$
(iii)	$\log_a m^n$	$= n \log_a m$
(iv)	$\log_a n$	$= \log_b n \times \log_a b$

قانون (i) $\quad \log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

ثبوت

فرض کیجیے $\quad \log_a m = x$ اور $\log_a n = y$

قوت نمائی شکل میں لکھنے سے $\quad a^x = m$ اور $a^y = n$

طرفین کو ضرب دینے سے $\quad \therefore \quad a^x \times a^y = mn$

قوت نماؤں کے حاصل ضرب کا قانون $\quad$ یا $\quad a^{x+y} = mn$

لوگارتھم کی تعریف کی رو سے $\quad$ یا $\quad \log_a(mn) = x + y$

x اور y کی قیمتیں درج کرنے سے $\quad$ یا $\quad \log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

نوٹ

(i) $\quad \log_a(mn) \neq \log_a m \times \log_a n$

(ii) $\quad \log_a m + \log_a n \neq \log_a(m + n)$

(iii) $\quad \log_a(mnp \ldots) = \log_a m + \log_a n + \log_a p + \ldots$

لوگارتھم کے مندرجہ بالا قوانین کا استعمال دو یا دو سے زیادہ اعداد کا حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے مفید ہے۔ ہم اس کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کرتے ہیں۔

مثال 1

لوگارتھم کی مدد سے 291.3×42.36 کی قیمت معلوم کریں۔

حل

فرض کریں کہ $x = 291.3 \times 42.36$

دونوں طرف لوگارتھم لینے سے $\log x = \log (291.3 \times 42.36)$

$$= \log 291.3 + \log 42.36 , \quad (\log_a mn = \log_a m + \log_a n)$$

$$= 2.4643 + 1.6269 = 4.0912$$

$$\Rightarrow \quad x = \text{antilog } 4.0912 = 12340$$

یاد رکھیے
$\log_a a = 1$

مثال 2

لوگارتھم کی مدد سے 0.2913×0.004236 کی قیمت معلوم کریں۔

حل فرض کریں کہ $y = 0.2913 \times 0.004236$

طرفین کا log لینے سے $\log y = \log 0.2913 + \log 0.004236$

$$= \bar{1}.4643 + \bar{3}.6269$$

$$= \bar{3}.0912$$

$$\Rightarrow y = \text{antilog } \bar{3}.0912 = 0.001234$$

قانون (ii) $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

ثبوت

فرض کریں کہ $\log_a m = x$ اور $\log_a n = y$

$$\Rightarrow \quad a^x = m \text{ اور } a^y = n$$

$$\therefore \quad \frac{a^x}{a^y} = \frac{m}{n} \Rightarrow a^{x-y} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore \quad \log_a\left(\frac{m}{n}\right) = x - y$$

$$\therefore \quad \log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

نوٹ

(i) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) \neq \frac{\log_a m}{\log_a n}$

(ii) $\log_a m - \log_a n \neq \log_a(m-n)$

(iii) $\log_a\left(\frac{1}{n}\right) = \log_a 1 - \log_a n = -\log_a n, \ldots\ldots \ (\because \log_a 1 = 0)$

مثال 1

لوگارتھم کی مدد سے $\frac{291.3}{42.36}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل فرض کریں کہ

$$x = \frac{291.3}{42.36} \Rightarrow \log x = \log\left(\frac{291.3}{42.36}\right)$$

یا $\log x = \log 291.3 - \log 42.36, \ \ldots\ldots \left(\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n\right)$

$$= 2.4643 - 1.6269 = 0.8374$$

$$\therefore \quad x = \text{antilog } 0.8374 = 6.877$$

مثال 2

لوگارتھم کی مدد سے $\frac{0.002913}{0.04236}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل فرض کریں کہ

$$y = \frac{0.002913}{0.04236} \Rightarrow \log y = \log\left(\frac{0.002913}{0.04236}\right)$$

یا $\log y = \log 0.002913 - \log 0.04236$

$$= \bar{3}.4643 - \bar{2}.6269$$

$$= \bar{3} + (0.4643 - 0.6269) - \bar{2}$$

$$= \bar{3} - 0.1626 - \bar{2}$$

$= \bar{3} + (1 - 0.1626) - 1 - \bar{2}$, ('1' جمع اور تفریق کرنے سے)

$= \bar{2}.8374$ $[\because\ \bar{3} - 1 - \bar{2} = -3 - 1 - (-2) = -2 = \bar{2}]$

$\Rightarrow\quad y = \text{antilog}\ \ \bar{2}.8374 = 0.06877$

قانون (iii) $\log_a(m^n) = n \log_a m$

ثبوت فرض کریں کہ $\log_a m^n = x, \Rightarrow a^x = m^n$

اور $\log_a m = y, \Rightarrow a^y = m$

$\therefore\quad a^x = m^n = (a^y)^n$

یا $a^x = (a^y)^n = a^{yn} \Rightarrow x = ny$

x اور y کی قیمت درج کرنے سے $\therefore\quad \log_a m^n = n \log_a m$

مثال 1

لوگارتھم کی مدد سے $\sqrt[4]{(0.0163)^3}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل

فرض کریں کہ $y = \sqrt[4]{(0.0163)^3} = (0.0163)^{3/4}$

$$\Rightarrow\quad \log y = \frac{3}{4}(\log 0.0163) = \frac{3}{4} \times \bar{2}.2122 = \frac{\bar{6}.6366}{4} = \frac{\bar{8} + 2.6366}{4}$$

$= \bar{2} + 0.6592 = \bar{2}.6592$

$\Rightarrow\quad y = \text{antilog}\ \ \bar{2}.6592$

$= 0.04562$

قانون (iv)

(اساس کی تبدیلی کا فارمولا)

$$\log_a n = \log_b n \times \log_a b \quad \text{یا} \quad \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

ثبوت فرض کریں کہ

$$\log_b n = x \Rightarrow n = b^x$$

'a' کی اساس پر طرفین کا log لینے سے

$$\log_a n = \log_a b^x = x \log_a b$$

x ...... (i) کی قیمت درج کرنے سے

$$\therefore \quad \log_a n = \log_b n \log_a b$$

نتیجہ (i) میں $n = a$ درج کرنے سے

$$\log_b a \times \log_a b = \log_a a = 1$$

یا

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

(i) میں $\log_a b$ کی قیمت درج کرنے سے

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a} \quad ...... (ii)$$

مندرجہ بالا قانون کی مدد سے قدرتی لوگارتھم کو عام لوگارتھم میں اور عام لوگارتھم کو قدرتی لوگارتھم میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

$$\log_e n = \log_{10} n \times \log_e 10 \quad \text{یا} \quad \frac{\log_{10} n}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} n = \log_e n \times \log_{10} e \quad \text{یا} \quad \frac{\log_e n}{\log_e 10}$$

لوگارتھم جدول میں $\log_{10} e$ اور $\log_e 10$ کی قیمت دستیاب ہے۔

$$\log_e 10 = \frac{1}{0.4343} = 2.3026 \quad \text{اور} \quad \log_{10} e = \log 2.718 = 0.4343$$

مثال مندرجہ بالا قانون کی مدد سے $\log_2 3 \times \log_3 8$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل ہم جانتے ہیں کہ

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

$$\therefore \quad \log_2 3 \times \log_3 8 = \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 8}{\log 3}$$

$$\log_2 3 \times \log_3 8 = \frac{\log 8}{\log 2}$$

$$= \frac{\log 2^3}{\log 2}$$

$$= \frac{3 \log 2}{\log 2} = 3$$

نوٹ

(i) اساس کی تبدیلی کا قانون حاصل ضرب شکل (form) میں اکثر اوقات موزوں رہتا ہے۔

(ii) 1، e اور 10 کے علاوہ کسی بھی مثبت اساس پر لوگارتھم کو متعارف کرانا ایسی مساوات کو حل کرنے کے لیے کارآمد ہے جس میں نامعلوم کسی اور عدد کی قوت نما کے طور پر ظاہر ہو۔

مشق 3.3

1 مندرجہ ذیل کو لوگارتھم کے مجموعے یا فرق کی شکل میں لکھیں۔

(i) $\log(A \times B)$ (ii) $\log \frac{15.2}{30.5}$ (iii) $\log \frac{25 \times 5}{8}$

(iv) $\log \sqrt[3]{\frac{7}{15}}$ (v) $\log \frac{(22)^{1/3}}{5^3}$ (vi) $\log \frac{25 \times 47}{29}$

2 واحد لوگارتھم کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

$$\log x - 2 \log x + 3 \log (x + 1) - \log (x^2 - 1)$$

3 مندرجہ ذیل کو واحد لوگارتھم کی شکل میں لکھیں۔

(i) $\log 21 + \log 5$ (ii) $\log 25 - 2 \log 3$

(iii) $2 \log x - 3 \log y$ (iv) $\log 5 + \log 6 - \log 2$

4 مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\log_3 2 \times \log_2 81$ (ii) $\log_5 3 \times \log_3 25$

5 اگر $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, $\log 5 = 0.6990$ مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $\log 32$ (ii) $\log 24$ (iii) $\log \sqrt{3\frac{1}{3}}$

(iv) $\log \frac{8}{3}$ (v) $\log 30$

3.5 لوگارتھم کے قوانین کا عددی وضاحت میں استعمال

اب تک ہم نے لوگارتھم کے قوانین کو آسان قسم کی عددی ضرب، تقسیم، قوت نما اور جذر لینے کے عوامل کے لیے استعمال کیا ہے۔ زیادہ مشکل مثالوں میں ان کے استعمال کے مؤثر ہونے کی تصدیق اور وضاحت درج ذیل ہے۔

مثال 1 ثابت کریں کہ

$$7\log\frac{16}{15}+5\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2$$

حل

بائیں طرف $= 7\log\frac{16}{15}+5\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}$

$$=7[\log 16-\log 15]+5[\log 25-\log 24]+3[\log 81-\log 80]$$

$$=7[\log 2^4-\log(3\times 5)]+5[\log 5^2-\log(2^3\times 3)]$$
$$+3[\log 3^4-\log(2^4\times 5)]$$

$$=7[4\log 2-\log 3-\log 5]+5[2\log 5-3\log 2-\log 3]$$
$$+3[4\log 3-4\log 2-\log 5]$$

$$=(28-15-12)\log 2+(-7-5+12)\log 3+(-7+10-3)\log 5$$

$= \log 2+0+0=\log 2 =$ دائیں طرف

مثال 2

$\sqrt[3]{\dfrac{0.07921\times(18.99)^2}{(5.79)^4\times 0.9474}}$ لوگارتھم کی مدد سے قیمت معلوم کریں۔

حل فرض کریں کہ

$$y=\sqrt[3]{\frac{0.07921\times(18.99)^2}{(5.79)^4\times 0.9474}}=\left(\frac{0.07921\times(18.99)^2}{(5.79)^4\times 0.9474}\right)^{1/3}$$

$$\therefore\quad \log y=\frac{1}{3}\log\left(\frac{0.07921\times(18.99)^2}{(5.79)^4\times 0.9474}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\log\{0.07921\times(18.99)^2\}-\log\{(5.79)^4\times 0.9474\}\right]$$

$$\log y = \frac{1}{3}[\log 0.07921 + 2\log 18.99 - 4\log 5.79 - \log 0.9474]$$

$$= \frac{1}{3}[\bar{2}.8988 + 2(1.2786) - 4(0.7627) - \bar{1}.9765]$$

$$= \frac{1}{3}[\bar{2}.8988 + 2.5572 - 3.0508 - \bar{1}.9765]$$

$$= \frac{1}{3}[1.4560 - 3.0273] = \frac{1}{3}(\bar{2}.4287)$$

$$= \frac{1}{3}(\bar{3} + 1.4287)$$

$$= \bar{1} + 0.4762 = \bar{1}.4762$$

$$\Rightarrow y = \text{antilog } \bar{1}.4762 = 0.2993$$

مثال 3

دیے گئے کلیہ $A = A_o e^{-kd}$ میں اگر $k = 2$ ہو تو d کی کس قیمت کے لیے $A = \frac{A_o}{2}$ ہوگا۔

حل دیا گیا کلیہ

$$A = A_o e^{-kd} \Rightarrow \frac{A}{A_o} = e^{-kd}$$

$\therefore$ $k = 2$, اور $A = \frac{A_o}{2}$, $\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-2d}$

طرفین کا عام لوگارتھم لینے سے

$$\log_{10} 1 - \log_{10} 2 = -2d \log_{10} e \qquad (e \approx 2.718)$$

$$0 - 0.3010 = -2d\,(0.4343)$$

$$d = \frac{0.3010}{2 \times 0.4343} = 0.3465$$

مشق 3.4

-1 لوگارتھم جدول کی مدد سے مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) 0.8176×13.64 (ii) $(789.5)^{1/8}$ (iii) $\frac{0.678 \times 9.01}{0.0234}$

(iv) $\sqrt[5]{2.709} \times \sqrt[7]{1.239}$ (v) $\frac{(1.23)\,(0.6975)}{(0.0075)\,(1278)}$ (vi) $\sqrt[3]{\frac{0.7214 \times 20.37}{60.8}}$

(vii) $\frac{83 \times \sqrt[3]{92}}{127 \times \sqrt[5]{246}}$ (viii) $\frac{(438)^3\sqrt{0.056}}{(388)^4}$

-2 ایک گیس کا پھیلاؤ مندرجہ ذیل قانون کے مطابق ہوتا ہے۔

$$pv^n = C$$

C کی قیمت معلوم کریں۔ جبکہ $p = 80$ ، $v = 3.1$ اور $n = \frac{5}{4}$ ہو۔

-3 کسی پروڈکٹ (product) کی طلب کا فارمولا درج ذیل ہے۔

$$p = 90\,(5)^{-q/10}$$

جس میں q مصنوعہ (بنائے گئے) یونٹوں کی تعداد اور p ایک یونٹ کی قیمت ہے۔ بتائیں کہ 18.00 روپے میں کتنے یونٹ طلب کیے جا سکیں گے؟

-4 اگر $A = \pi r^2$ ہو تو A کی قیمت معلوم کریں۔ جبکہ $r = 15$ اور $\pi = \frac{22}{7}$

-5 اگر $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ہو تو V کی قیمت معلوم کریں۔ جبکہ $r = 2.5$ ، $\pi = \frac{22}{7}$ اور $h = 4.2$

اعادہ مشق 3

-1 دیے ہوئے جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) اگر $a^x = n$ ہو تو ....

(a) $a = \log_x n$ (b) $x = \log_n a$ (c) $x = \log_a n$ (d) $a = \log_n x$

(ii) اگر $y = \log_z x$ ہو تو...............

(a) $x^y = z$ (b) $z^y = x$ (c) $x^z = y$ (d) $y^z = x$

(iii) کسی اساس پر '1' کا لوگارتھم .... کے برابر ہوتا ہے۔

(a) 1 (b) 10 (c) e (d) 0

(iv) اگر کسی عدد کے لوگارتھم کی اساس وہی عدد ہو تو جواب .... ہوتا ہے۔

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) 10

(v) $\log e$ = ...۔($e \approx 2.718$)

(a) 0 (b) 0.4343 (c) ∞ (d) 1

(vi) $\log\left(\frac{p}{q}\right)$ کی قیمت = ...

(a) $\log p - \log q$ (b) $\frac{\log p}{\log q}$

(c) $\log p + \log q$ (d) $\log q - \log p$

(vii) .... $= \log p - \log q$

(a) $\log\left(\frac{p}{q}\right)$ (b) $\log(p-q)$ (c) $\frac{\log p}{\log q}$ (d) $\log\left(\frac{p}{q}\right)$

(viii) $\log m^n$ کو .... بھی لکھا جاسکتا ہے۔

(a) $(\log m)^n$ (b) $m \log n$ (c) $n \log m$ (d) $\log (mn)$

(ix) $\log_b a \times \log_c b$ کو .... بھی لکھا جاسکتا ہے۔

(a) $\log_a c$ (b) $\log_c a$ (c) $\log_a b$ (d) $\log_b c$

(x) $\log_y x$ برابر ہوگا .... کے۔

(a) $\dfrac{\log_z x}{\log_y z}$ (b) $\dfrac{\log_x z}{\log_y z}$ (c) $\dfrac{\log_z x}{\log_z y}$ (d) $\dfrac{\log_z y}{\log_z x}$

-2 خالی جگہ پُر کر کے مندرجہ ذیل بیانات کو مکمل کریں۔

(i) عام لوگارتھم کی اساس............... ہوتی ہے۔

(ii) کسی عدد کے عام لوگارتھم کے صحیح عددی حصہ کو............... کہتے ہیں۔

(iii) کسی عدد کے عام لوگارتھم کے کسری حصہ کو............... کہتے ہیں۔

(iv) اگر $x = \log y$ ہو تو y کو x کا............... کہتے ہیں۔

(v) اگر کسی عدد کے لوگارتھم کا خاصہ '$\overline{2}$' ہو تو اس نمبر میں نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد صفروں کی تعداد............... ہوگی۔

(vi) اگر کسی عدد کے لوگارتھم کا خاصہ '1' ہو تو اس کے صحیح عددی حصّے میں ہندسوں کی تعداد............... ہوگی۔

-3 مندرجہ ذیل میں x کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $\log_3 x = 5$ (ii) $\log_4 256 = x$

(iii) $\log_{625} 5 = \dfrac{1}{4} x$ (iv) $\log_{64} x = \dfrac{-2}{3}$

-4 مندرجہ ذیل میں x کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $\log x = 2.4543$ (ii) $\log x = 0.1821$

(iii) $\log x = 0.0044$ (iv) $\log x = \overline{1}.6238$

-5 مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔ اگر $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ اور $\log 5 = 0.6990$ ہو

(i) $\log 45$ (ii) $\log \dfrac{16}{15}$ (iii) $\log 0.048$

-6 لوگارتھم جدول کی مدد سے مندرجہ ذیل کو مختصر کریں۔

(i) $\sqrt[3]{25.47}$ (ii) $\sqrt[5]{342.2}$ (iii) $\dfrac{(8.97)^3 \times (3.95)^2}{\sqrt[3]{15.37}}$

خلاصہ

☆ اگر $a^x = y$ جبکہ $a,x,y \in R$ اور $y > 0$ ، $a > 0$ ، $a \neq 1$ ہوتو x کو اساس 'a' پر y کا لوگارتھم کہتے ہیں اور اسے $x = \log_a y$ لکھتے ہیں۔

☆ اگر $a^x = y$ ہوتو $x = \log_a y$

☆ اگر لوگارتھم کی اساس 10 لی جائے تو اسے عام یا برگز (Briggs) لوگارتھم کہتے ہیں۔ اساس e (≈ 2.718) کے لوگارتھم کو قدرتی یا نیپیرین (Naperian) لوگارتھم کہتے ہیں۔

☆ کسی عدد کے عام لوگارتھم کے صحیح عددی حصہ کو لوگارتھم کا خاصہ (characteristic) اور اسکے کسری حصہ کو مینٹیسا (mantissa) کہتے ہیں۔

☆ (i) '1' سے بڑے عدد کے لوگارتھم کا خاصہ ہمیشہ عدد کے صحیح عددی حصہ کے ہندسوں کی تعداد سے '1' کم ہوتا ہے۔

(ii) '1' سے چھوٹے عدد کے لوگارتھم کا خاصہ ہمیشہ منفی ہوتا ہے اور عدد کے نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد موجود صفروں کی تعداد سے '1' زیادہ۔

☆ جب کوئی عدد '1' سے چھوٹا ہوتو خاصہ کو 1-,2-,3- کی بجائے $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ لکھا جاتا ہے تاکہ مینٹیسا کو منفی نہ سمجھ لیا جائے۔ (یادرہے کہ مینٹیسا ہمیشہ مثبت ہوتا ہے)

☆ ایک ہی تسلسل والے اہم ہندسوں پر مشتمل اعداد کے لوگارتھم کا مینٹیسا ایک ہی (یکساں) ہوتا ہے۔

☆ وہ عدد جس کے لوگارتھم کی قیمت معلوم ہو ضد لوگارتھم کہلاتا ہے۔

☆ $\log_{10} e = 0.4343$ اور $\log_e 10 = 2.3026$

☆ لوگارتھم کے قوانین

(i) $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$

(ii) $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(iii) $\log_a (m^n) = n \log_a m$

(iv) $\log_a n = \log_b n \times \log_a b$