یونٹ 4

الجبری جملے اور الجبری کلیے

(ALGEBRAIC EXPRESSIONS AND ALGEBRAIC FORMULAS)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

4.1 الجبری جملے (Algebraic Expressions)

4.2 الجبری کلیے (Algebraic Formulae)

4.3 مقادیرِ اصم اور ان کا استعمال (Surds and their Application)

4.4 ناطق بنانے کا عمل (Rationalization)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل/نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفسِ مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ ان کو معلوم ہو کہ کوئی ناطق جملہ خصوصیات اور طرزِ عمل کے لحاظ سے ناطق عدد کی طرح ہوتا ہے۔

☆ تعریف کر سکیں کہ ایسا الجبری جملہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہو جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ متغیر x میں دو کثیر رقمیاں ہوں اور $q(x) \neq 0$، ناطق جملہ کہلاتا ہے۔

☆ بغور مشاہدہ (پڑتال) کر سکیں کہ کوئی دیا گیا الجبری جملہ

- کثیر رقمی ہے یا نہیں
- ناطق جملہ ہے یا نہیں

☆ ناطق جملہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ کو مختصر ترین شکل میں تحویل کر سکیں جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ کے تمام ارکان کے عددی سر صحیح اعداد ہوں اور ان میں کوئی جزو ضربی مشترک نہ ہو۔

☆ پڑتال کر سکیں کہ کوئی دیا گیا ناطق الجبری جملہ مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں۔

☆ دیے گئے ناطق جملہ کو اس کی مختصر ترین شکل میں تحویل کر سکیں۔

☆ ناطق جملوں کا مجموعہ، فرق اور حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔

☆ ایک ناطق جملہ کو دوسرے ناطق جملے سے تقسیم کر کے جواب کو مختصر ترین شکل میں لکھ سکیں۔

☆ کسی الجبری جملے میں متغیر کی جگہ کوئی خاص حقیقی عدد درج کر کے الجبری جملے کی قیمت (جو کہ ایک حقیقی عدد ہو گا) حاصل کر سکیں۔

☆ درج ذیل کلیات سے واقف ہوں۔

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

- a^2+b^2 اور ab کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a+b$ اور $a-b$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔

☆ کلیہ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ کی پہچان ہو اور

- $a^2+b^2+c^2$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a+b+c$ اور $ab+bc+ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- $a+b+c$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a^2+b^2+c^2$ اور $ab+bc+ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- $ab+bc+ca$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a^2+b^2+c^2$ اور $a+b+c$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔

☆ کلیات :

$$(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3ab(a-b)-b^3$$

کا علم ہو اور

- $a^3\pm b^3$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a\pm b$ اور ab کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- $x^3\pm\frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $x\pm\frac{1}{x}$ کی قیمت دی گئی ہو۔

☆ کلیات : $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\pm ab+b^2)$ کو جانتے ہوں اور

- $(x+\frac{1}{x})$ اور $(x^2+\frac{1}{x^2}-1)$ کا حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔

- $(x - \frac{1}{x})$ اور $(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1)$ کا حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
- $(x + y)\ (x - y)\ (x^2 + xy + y^2)\ (x^2 - xy + y^2)$ کا متواتر (مسلسل) حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔

☆ مقادیر اصم کو پہچان سکیں اور ان کو عملی طور پر استعمال کر سکیں۔

☆ دوسرے درجے کی مقادیر اصم کی وضاحت کر سکیں اور ان پر بنیادی عوامل کا استعمال کر کے مخرج (نسب نما) کو ناطق بنا کر ہم قیمت کسر میں تحویل کر سکیں۔

☆ حقیقی اعداد $\frac{1}{a + b\sqrt{x}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ اور ان کے اتصال سے حاصل کردہ عدد، جبکہ x ، y قدرتی اعداد اور a ، b صحیح اعداد ہوں، کو ناطق بنانے کے عمل کی (بالکل ٹھیک مطلب کے ساتھ) وضاحت کر سکیں۔

4.1 الجبری جملے (Algebraic Expressions)

حسابیات کے تعمیمی اطلاق کو الجبرا کہتے ہیں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ الجبری رقوم کو جمع اور تفریق کے عوامل کے ذریعے ملانے سے ہم الجبری جملہ حاصل کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر $5x^2 - 3x + \frac{2}{\sqrt{x}}$ اور $3xy + \frac{3}{x}\ (x \neq 0)$ الجبری جملے ہیں۔

کثیر رقمی جملہ یا کثیر رقمی (Polynomial)

ایک متغیر x میں کثیر رقمی جملہ درج ذیل کی قسم کا الجبری جملہ ہوتا ہے۔

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \qquad \ldots\ldots (i)$$

جس میں n ایک غیر منفی صحیح عدد (صفر یا مثبت صحیح عدد) ہے اور متغیر x کا سب سے بڑا قوت نما ہے اور کثیر رقمی (i) کا درجہ (ڈگری) کہلاتا ہے۔ یعنی (i) ایک متغیر x میں nth درجے کی کثیر رقمی ہے۔ علاوہ ازیں ہر عددی سر a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , ... a_1, a_0 حقیقی عدد ہے۔ x^n کے عددی سر a_n کو کثیر رقمی کا سب سے پہلا (اوّل) عددی سر کہتے ہیں۔ $(2x^4y^3 + x^2y^2 + 8x)$ دو متغیرات میں کثیر رقمی جملہ ہے۔ اس کی رقم $2x^4y^3$ کا درجہ 7 (متغیرات کے قوت نماؤں کا مجموعہ) باقی رقموں کی نسبت سب سے بڑا ہے۔ اس لیے کثیر رقمی کا درجہ بھی 7 شمار ہو گا۔

جمع اور ضرب کے عوامل کے لحاظ سے صحیح اعداد اور کثیر رقمی جملوں میں ایک جیسی خصوصیات کے مطالعہ سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ کثیر رقمی جملوں کا طرز عمل صحیح اعداد جیسا ہے۔

اپنی معلومات کو خود جانچیں

مندرجہ ذیل کے لیے جواز پیش کریں کہ کثیر رقمی ہے یا نہیں۔

(i) $3x^2 + 8x + 5$ (ii) $x^3 + \sqrt{2}x^2 + 5x - 3$

(iii) $x^2 + \sqrt{x} - 4$ (iv) $\dfrac{3x^2 + 2x + 8}{3x + 4}$

4.1.1 ناطق جملے خصوصیات کے لحاظ سے ناطق اعداد جیسے ہوتے ہیں

اگر a اور b دو صحیح اعداد ہوں تو ضروری نہیں کہ $\dfrac{a}{b}$ بھی ایک صحیح عدد ہو۔ اس لیے نمبر سسٹم کو آگے بڑھانے کے لیے $\dfrac{a}{b}$ کو بطور ناطق عدد متعارف کرایا گیا جبکہ a اور b صحیح اعداد ہیں اور $b \neq 0$ اسی طرح اگر $p(x)$ اور $q(x)$ دو کثیر رقمی جملے ہوں تو ضروری نہیں کہ $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ (جبکہ $q(x) \neq 0$) بھی ایک کثیر رقمی جملہ ہو۔ اس لیے ناطق اعداد کی طرح ناطق جملوں کے تصور کو اُجاگر کیا جاتا ہے۔

4.1.2 ناطق جملہ

ایسا جملہ جو $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں لکھا جا سکے جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ متغیر x میں کثیر رقمیاں ہوں اور $q(x) \neq 0$ ، ناطق جملہ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر $\dfrac{2x + 1}{3x + 8}$ ، جبکہ $3x + 8 \neq 0$، ایک متغیر x میں ناطق جملہ ہے۔

ناطق جملہ $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ میں $p(x)$ کو شمار کنندہ اور $q(x)$ کو مخرج (نَسب نُما) کہتے ہیں۔ ناطق جملہ $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ کا کثیر رقمی ہونا ضروری نہیں ہے۔

نوٹ

ہر کثیر رقمی جملہ $p(x)$ ناطق جملہ ہوتا ہے کیونکہ ہم $p(x)$ کو $\dfrac{p(x)}{1}$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں ۔ پس ہر کثیر رقمی جملہ ناطق ہوتا ہے مگر ہر ناطق جملے کا کثیر رقمی ہونا ضروری نہیں ہے۔

اپنی معلومات کو خود جانچیں

درج ذیل کی شناخت کریں کہ ناطق جملہ ہے یا نہیں۔

(i) $\dfrac{2x + 6}{3x - 4}$ (ii) $\dfrac{3x + 8}{x^2 + x + 2}$ (iii) $\dfrac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 3\sqrt{x} + 4}$ (iv) $\dfrac{\sqrt{x}}{3x^2 + 1}$

4.1.3 ناطق جملوں کی خصوصیات

ناطق جملوں پر بنیادی عوامل کا طریق کار ناطق اعداد پر عوامل جیسا ہی ہے۔

فرض کریں $p(x)$، $q(x)$، $r(x)$، $s(x)$ ایسے کثیر رقمی جملے ہیں۔ متغیر x کی وہ تمام قیمتیں خارج کر دی گئی ہیں جن کے حلقہ اثر میں کثیر رقمیوں سے بننے والے کسی ناطق جملے کی تعریف مبہم ہو جاتی ہو۔

اس مفروضہ کے تحت کہ ناطق جملوں کی تعریف مبہم نہیں، ان کی درج ذیل خصوصیات مؤثر اور صحیح ہیں۔

ناطق جملوں کی برابری (i) $\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{r(x)}{s(x)} \Leftrightarrow p(x)\,s(x)=q(x)\,r(x)$

تنسیخی خاصیت (k ایک غیر صفر مستقل مقدار ہے) (ii) $\dfrac{p(x)k}{q(x)k}=\dfrac{p(x)}{q(x)}$

ناطق جملوں کی جمع (iii) $\dfrac{p(x)}{q(x)}+\dfrac{r(x)}{s(x)}=\dfrac{p(x)\,s(x)+q(x)\,r(x)}{q(x)\,s(x)}$

ناطق جملوں کی تفریق (iv) $\dfrac{p(x)}{q(x)}-\dfrac{r(x)}{s(x)}=\dfrac{p(x)\,s(x)-q(x)\,r(x)}{q(x)\,s(x)}$

ناطق جملوں کی ضرب (v) $\dfrac{p(x)}{q(x)}\cdot\dfrac{r(x)}{s(x)}=\dfrac{p(x)\,r(x)}{q(x)\,s(x)}$

ناطق جملوں کی تقسیم ($\dfrac{r(x)}{s(x)}$ غیر صفر ہے) (vi) $\dfrac{p(x)}{q(x)}\div\dfrac{r(x)}{s(x)}=\dfrac{p(x)}{q(x)}\cdot\dfrac{s(x)}{r(x)}=\dfrac{p(x)\,s(x)}{q(x)\,r(x)}$

ناطق جملوں کا جمعی معکوس (vii) $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ کا جمعی معکوس $-\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ہوتا ہے۔

ناطق جملوں کا ضربی معکوس (viii) غیر صفر $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ کا ضربی معکوس $\dfrac{q(x)}{p(x)}$ ہوتا ہے۔

4.1.4 ناطق جملے کی مختصر ترین شکل

ناطق جملہ $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ہو گا۔ اگر

(i) $p(x)$ اور $q(x)$ کے تمام عددی سر صحیح اعداد ہوں۔

(ii) $p(x)$ اور $q(x)$ میں کوئی جزو ضربی مشترک نہ ہو۔

مثال کے طور پر $\dfrac{x+1}{x^2+3}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے۔

4.1.5 کسی ناطق جملے کا بغور مشاہدہ کر کے بتانا کہ مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں

ناطق جملے $\frac{p(x)}{q(x)}$ کا مشاہدہ کر کے یہ بتانا مقصود ہو کہ جملہ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں، تو $p(x)$ اور $q(x)$ کا عاد اعظم معلوم کریں۔ اگر ان کثیر رقمیوں کا عاد اعظم '1' ہو تو ناطق جملہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ہو گا۔

مثلاً ناطق جملہ $\frac{x-1}{x^2+1}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے۔ کیونکہ $(x-1)$ اور (x^2+1) کا عاد اعظم '1' ہے۔

4.1.6 کسی ناطق جملے کو اس کی مختصر ترین شکل میں لانے کا طریق کار

فرض کریں دیا گیا ناطق جملہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ ہے۔

I دونوں کثیر رقمی جملوں $p(x)$ اور $q(x)$ ہر ایک کی تجزی کریں۔

II $p(x)$ اور $q(x)$ کا عاد اعظم معلوم کریں۔

III $\frac{p(x)}{q(x)}$ میں $p(x)$ اور $q(x)$ دونوں کو عاد اعظم پر تقسیم کریں اس طرح حاصل کردہ ناطق جملہ مختصر ترین شکل میں ہو گا۔

دوسرے الفاظ میں ناطق الجبری جملے $\frac{p(x)}{q(x)}$ کو اس کی مختصر ترین شکل میں تبدیل کرنے کے لیے سب سے پہلے $p(x)$ اور $q(x)$ دونوں کی تجزی کریں۔ پھر ان کے مشترک اجزائے ضربی کی تنسیخ کر دیں۔

مثال

درج ذیل الجبری ناطق جملوں کو ان کی مختصر ترین شکل میں لکھیں۔

(i) $\frac{lx+mx-ly-my}{3x^2-3y^2}$ (ii) $\frac{3x^2+18x+27}{5x^2-45}$

حل

(i) $$\frac{lx+mx-ly-my}{3x^2-3y^2}=\frac{x(l+m)-y(l+m)}{3(x^2-y^2)}$$

$$= \frac{(l+m)(x-y)}{3(x+y)(x-y)}$$ ...... (تجزی کرنے سے)

$$= \frac{l+m}{3(x+y)}$$ ...... (مشترک اجزائے ضربی کی تنسیخ سے)

جو اب مختصر ترین شکل میں ہے۔

(ii) $$\frac{3x^2+18x+27}{5x^2-45} = \frac{3(x^2+6x+9)}{5(x^2-9)}$$ ...... (یک رقمی اجزائے ضربی)

$$= \frac{3(x+3)(x+3)}{5(x+3)(x-3)}$$ ...... (تجزی کرنے سے)

$$= \frac{3(x+3)}{5(x-3)}$$ ...... (مشترک اجزائے ضربی کی تنسیخ سے)

جو مختصر ترین شکل میں ہے۔

4.1.7 ناطق جملوں کا مجموعہ، فرق اور حاصل ضرب

الجبری ناطق جملوں کا مجموعہ اور فرق معلوم کرنے کے لیے ہم نسب نماؤں کا ذو اضعاف اقل لے کر 4.1.3 میں بیان کردہ خصوصیات استعمال کرتے ہیں۔ مختصر کرنے کے طریق کار کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1 مختصر کریں۔

(i) $\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} + \frac{2x}{x^2-y^2}$ (ii) $\frac{2x^2}{x^4-16} - \frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2}$

حل

(i) $$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} + \frac{2x}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} + \frac{2x}{(x+y)(x-y)}$$ (تجزی کرنے سے)

$$= \frac{x+y-(x-y)+2x}{(x+y)(x-y)}$$ (خصوصیات (iii)-4.1.3)

$$= \frac{x + y - x + y + 2x}{(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{2x + 2y}{(x + y)(x - y)}$$ ...... (مختصر کرنے سے)

$$= \frac{2(x + y)}{(x + y)(x - y)} = \frac{2}{x - y}$$ ...... (مشترک اجزائے ضربی کی تنسیخ سے)

(ii) $$\frac{2x^2}{x^4 - 16} - \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x + 2}$$

$$= \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(x^2 - 4)} - \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x + 2}$$ ...... (دو مربعوں کے فرق کا کلیہ)

$$= \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)} - \frac{x}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{1}{x + 2}$$

$$= \frac{2x^2 - x(x^2 + 4) + (x^2 + 4)(x - 2)}{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)} = \frac{2x^2 - x^3 - 4x + x^3 + 4x - 2x^2 - 8}{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}$$

$$= \frac{-8}{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}$$ ...... (مختصر کرنے سے)

$$= \frac{-8}{(x^2 + 4)(x^2 - 4)} = \frac{-8}{x^4 - 16}$$

مثال 2

$\frac{x + 2}{2x - 3y} \cdot \frac{4x^2 - 9y^2}{xy + 2y}$ کو مختصر ترین شکل میں لکھیں۔

حل

$$\frac{x + 2}{2x - 3y} \cdot \frac{4x^2 - 9y^2}{xy + 2y} = \frac{(x + 2)[(2x)^2 - (3y)^2]}{(2x - 3y)(x + 2)y}$$ ...... (یک جملہ اجزائے ضربی)

$$= \frac{(x + 2)(2x + 3y)(2x - 3y)}{y(x + 2)(2x - 3y)}$$ ...... (تجزی کرنے سے)

$$= \frac{2x + 3y}{y}$$ ...... (مختصر ترین شکل میں لکھنے سے)

4.1.8 ایک ناطق جملے کو کسی دوسرے ناطق جملہ پر تقسیم کرنا

ایک ناطق جملے کو کسی دوسرے غیر صفر ناطق جملے پر تقسیم کرنے کے لیے سب سے پہلے ہم تقسیم کنندہ یعنی تقسیم کرنے والے ناطق جملہ کا معکوس لے کر تقسیم کو ضرب کے عمل میں بدلتے ہیں اور پھر اس طرح حاصل ہونے والے حاصل ضرب کو اختصار کے عمل سے مختصر ترین شکل میں لکھتے ہیں۔

مثال مختصر کیجیے۔

$$\frac{7xy}{x^2-4x+4} \div \frac{14y}{x^2-4}$$

حل

$$\frac{7xy}{x^2-4x+4} \div \frac{14y}{x^2-4}$$

$$= \frac{7xy}{x^2-4x+4} \cdot \frac{x^2-4}{14y} \quad \text{......}$$ ('÷' کو '×' میں بدلنے سے)

$$= \frac{7xy}{(x-2)(x-2)} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{14y} \quad \text{......}$$ (تجزی کرنے سے)

$$= \frac{x(x+2)}{2(x-2)} \quad \text{......}$$ (مختصر ترین شکل)

4.1.9 الجبری جملے کی قیمت (کسی مخصوص حقیقی عدد کے لیے) معلوم کرنا

تعریف

ایک یا ایک سے زیادہ متغیرات پر مشتمل الجبری جملہ میں متغیرات کی جگہ ان کی مخصوص قیمتیں (حقیقی اعداد) درج کی جائیں تو حاصل ہونے والا عدد الجبری جملہ کی قیمت کہلاتا ہے۔

مثال

$\frac{3x^2\sqrt{y}+6}{5(x+y)}$ کی قیمت معلوم کریں۔ جبکہ $x = -4$ اور $y = 9$ ہو۔

حل

دی گئی قیمتیں $x = -4$ اور $y = 9$ درج کرنے سے

$$\frac{3x^2\sqrt{y}+6}{5(x+y)} = \frac{3(-4)^2\sqrt{9}+6}{5(-4+9)} = \frac{3(16)(3)+6}{5(5)} = \frac{150}{25} = 6$$

مشق 4.1

-1 شناخت کیجیے کہ درج ذیل الجبری جملے کثیر رقتی ہیں یا نہیں (ہاں یا نہیں)۔

(i) $3x^2 + \frac{1}{x} - 5$ (ii) $3x^3 - 4x^2 - x\sqrt{x} + 3$

(iii) $x^2 - 3x + \sqrt{2}$ (iv) $\frac{3x}{2x - 1} + 8$

-2 بیان کریں کہ درج ذیل جملے ناطق جملے ہیں یا نہیں۔

(i) $\frac{3\sqrt{x}}{3\sqrt{x} + 5}$ (ii) $\frac{x^3 - 2x^2 + \sqrt{3}}{2 + 3x - x^2}$

(iii) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$ (iv) $\frac{2\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x} - 3}$

-3 درج ذیل ناطق جملوں کو مختصر ترین شکل میں تبدیل کریں۔

(i) $\frac{120\, x^2y^3z^5}{30x^3yz^2}$ (ii) $\frac{8a(x + 1)}{2(x^2 - 1)}$

(iii) $\frac{(x + y)^2 - 4xy}{(x - y)^2}$ (iv) $\frac{(x^3 - y^3)\,(x^2 - 2xy + y^2)}{(x - y)\,(x^2 + xy + y^2)}$

(v) $\frac{(x + 2)\,(x^2 - 1)}{(x + 1)\,(x^2 - 4)}$ (vi) $\frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 8}$

(vii) $\frac{64x^5 - 64x}{(8x^2 + 8)\,(2x + 2)}$ (viii) $\frac{9x^2 - (x^2 - 4)^2}{4 + 3x - x^2}$

-4 قیمت معلوم کریں۔

(a) $\frac{x^3y - 2z}{xz}$

جبکہ (i) $x = 3, y = -1, z = -2$ (ii) $x = -1, y = -9, z = 4$

(b) $\frac{x^2y^3 - 5z^4}{xyz}$ جبکہ $x = 4, y = -2, z = -1$

5- دیے گئے عمل کی تکمیل کرتے ہوئے مختصر کریں۔

(i) $\frac{15}{2x-3y}-\frac{4}{3y-2x}$ (ii) $\frac{1+2x}{1-2x}-\frac{1-2x}{1+2x}$

(iii) $\frac{x^2-25}{x^2-36}-\frac{x+5}{x+6}$ (iv) $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}-\frac{2xy}{x^2-y^2}$

(v) $\frac{x-2}{x^2+6x+9}-\frac{x+2}{2x^2-18}$ (vi) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{4}{x^4-1}$

6- دیے گئے عمل (عوامل) سے مختصر کریں۔

(i) $(x^2-49)\cdot\frac{5x+2}{x+7}$ (ii) $\frac{4x-12}{x^2-9}\div\frac{18-2x^2}{x^2+6x+9}$

(iii) $\frac{x^6-y^6}{x^2-y^2}\div(x^4+x^2y^2+y^4)$ (iv) $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\cdot\frac{x+5}{1-x}$

(v) $\frac{x^2+xy}{y(x+y)}\cdot\frac{x^2+xy}{y(x+y)}\div\frac{x^2-x}{xy-2y}$

4.2 الجبری کلیات (Algebraic Formulae)

4.2.1 درج ذیل کلیات کا استعمال

(i) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ اور $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

(a^2+b^2) اور ab کی قیمتیں معلوم کرنے کے طریقہ کی وضاحت درج ذیل مثال سے کی جاتی ہے۔

مثال

اگر $a+b=7$ اور $a-b=3$ ہو تو (a^2+b^2) اور ab کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل

دی گئی قیمتیں ہیں $a+b=7$ اور $a-b=3$

$a^2 + b^2$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے کلیہ

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

$a + b = 7$ اور $a - b = 3$ درج کرنے سے

$$(7)^2 + (3)^2 = 2(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow \quad 49 + 9 = 2(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow \quad 58 = 2(a^2+b^2) \quad \ldots\ldots \quad \text{(مختصر کرنے سے)}$$

$$\Rightarrow \quad 29 = a^2 + b^2 \quad \ldots\ldots \quad \text{(2 پر تقسیم کرنے سے)}$$

ab کی قیمت معلوم کرنے کے لیے کلیہ

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$\Rightarrow \quad (7)^2 - (3)^2 = 4ab \quad \ldots\ldots \quad \text{(دی گئی قیمتیں درج کرنے سے)}$$

$$\Rightarrow \quad 49 - 9 = 4ab$$

$$40 = 4ab \quad \ldots\ldots \quad \text{(مختصر کرنے سے)}$$

$$\Rightarrow \quad 10 = ab \quad \text{لہٰذا (4 پر تقسیم کرنے سے)}$$

(ii) $\mathbf{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}$

یہ فارمولا سہ رقمی جملہ کے مربع کے لیے ہے اور تین جملوں $(a + b + c)$ ، $(a^2 + b^2 + c^2)$ اور $2(ab + bc + ca)$ پر مشتمل ہے۔ ان تین جملوں میں سے اگر دو جملوں کی قیمت دی گئی ہو تو تیسرے جملے کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔ طریق کار کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1

اگر $a^2 + b^2 + c^2 = 43$ اور $ab + bc + ca = 3$ ہو تو $a + b + c$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل

ہم جانتے ہیں کہ

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

دی گئی قیمتیں $ab + bc + ca = 3$ اور $a^2 + b^2 + c^2 = 43$ درج کرنے سے

$$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2 = 43 + 2 \times 3$$

$$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2 = 49$$

$$\Rightarrow \quad a+b+c = \pm\sqrt{49}$$

$$\therefore \quad a+b+c = \pm 7$$

مثال 2

اگر $a + b + c = 6$ اور $a^2 + b^2 + c^2 = 24$ ہو تو $ab + bc + ca$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل

ہم جانتے ہیں کہ

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\therefore \quad (6)^2 = 24 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow \quad 36 = 24 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow \quad 12 = 2(ab + bc + ca)$$

$$\therefore \quad ab + bc + ca = 6$$

مثال 3

اگر $a + b + c = 7$ اور $ab + bc + ca = 9$ ہو تو $a^2 + b^2 + c^2$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل

ہم جانتے ہیں کہ

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow \quad (7)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(9)$$

$$\Rightarrow \quad 49 = a^2 + b^2 + c^2 + 18$$

$$\Rightarrow \quad 31 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\therefore \quad a^2 + b^2 + c^2 = 31$$

(iii) $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$

مثال 1

اگر $2x - 3y = 10$ اور $xy = 2$ ہو تو $8x^3 - 27y^3$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل

دی گئی قیمت کے مطابق

$$2x - 3y = 10$$

$$\Rightarrow \quad (2x-3y)^3 = (10)^3$$

$$\Rightarrow \quad 8x^3 - 27y^3 - 3 \times 2x \times 3y(2x-3y) = 1000$$

$$\Rightarrow \quad 8x^3 - 27y^3 - 18xy(2x-3y) = 1000$$

$$\Rightarrow \quad 8x^3 - 27y^3 - 18 \times 2 \times 10 = 1000$$

$$\Rightarrow \quad 8x^3 - 27y^3 - 360 = 1000$$

$$\therefore \quad 8x^3 - 27y^3 = 1360$$

مثال 2

اگر $x + \frac{1}{x} = 8$ ہو تو $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل

دی گئی قیمت کے مطابق

$$x + \frac{1}{x} = 8$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = (8)^3$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3\times x\times\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right) = 512$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3\times\left(x+\frac{1}{x}\right) = 512$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3\times 8 = 512$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+24 = 512$$

$$\therefore x^3+\frac{1}{x^3} = 488$$

مثال 3

اگر $x-\frac{1}{x}=4$ ہوتو $x^3-\frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل دی گئی قیمت کے مطابق

$$x-\frac{1}{x} = 4$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^3 = 64$$

$$\Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3}-3x\times\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right) = 64$$

$$\Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3}-3(4) = 64$$

$$\Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3}-12 = 64$$

$$\Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3} = 64+12$$

$$\Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3} = 76$$

(iv) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2)$

$\left(x \pm \frac{1}{x}\right)$ اور $\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \pm 1\right)$ کے حاصل ضرب معلوم کرنے کے طریقہ کار کی وضاحت بھی

مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1

$64x^3 + 343y^3$ کی تجزّی کریں۔

حل

$$
\begin{aligned}
64x^3 + 343y^3 &= (4x)^3 + (7y)^3 \\
&= (4x + 7y)\left[(4x)^2 - (4x)(7y) + (7y)^2\right] \\
&= (4x + 7y)(16x^2 - 28xy + 49y^2)
\end{aligned}
$$

مثال 2

$125x^3 - 1331y^3$ کی تجزّی کریں۔

حل

$$
\begin{aligned}
125x^3 - 1331y^3 &= (5x)^3 - (11y)^3 \\
&= (5x - 11y)\left[(5x)^2 + (5x)(11y) + (11y)^2\right] \\
&= (5x - 11y)(25x^2 + 55xy + 121y^2)
\end{aligned}
$$

مثال 3

حاصل ضرب معلوم کریں: $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2x}\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - 1 + \frac{9}{4x^2}\right)$

حل

$$\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2x}\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - 1 + \frac{9}{4x^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2x}\right)\left[\left(\frac{2}{3}x\right)^2 - \left(\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{3}{2x}\right) + \left(\frac{3}{2x}\right)^2\right] \\
&= \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + \left(\frac{3}{2x}\right)^3 \\
&= \frac{8}{27}x^3 + \frac{27}{8x^3}
\end{aligned}
$$

مثال 4

حاصل ضرب معلوم کریں: $\left(\frac{4}{5}x-\frac{5}{4x}\right)\left(\frac{16}{25}x^2+\frac{25}{16x^2}+1\right)$

حل

$$\left(\frac{4}{5}x-\frac{5}{4x}\right)\left(\frac{16}{25}x^2+\frac{25}{16x^2}+1\right)$$

کلیے کے مطابق ترتیب دینے سے $=\left(\frac{4}{5}x-\frac{5}{4x}\right)\left(\frac{16x^2}{25}+1+\frac{25}{16x^2}\right)$

$$=\left(\frac{4}{5}x-\frac{5}{4x}\right)\left[\left(\frac{4}{5}x\right)^2+\left(\frac{4}{5}x\right)\left(\frac{5}{4x}\right)+\left(\frac{5}{4x}\right)^2\right]$$

$$=\left(\frac{4}{5}x\right)^3-\left(\frac{5}{4x}\right)^3=\frac{64}{125}x^3-\frac{125}{64x^3}$$

مثال 5

کلیے کی مدد سے مسلسل حاصل ضرب معلوم کریں۔

$$(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

حل

$$(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)=(x^3)^2-(y^3)^2=x^6-y^6$$

مشق 4.2

-1 (i) اگر $a+b=10$ اور $a-b=6$ ہو تو (a^2+b^2) کی قیمت معلوم کریں۔

(ii) اگر $a+b=5$ اور $a-b=\sqrt{17}$ ہو تو ab کی قیمت معلوم کریں۔

-2 اگر $a^2+b^2+c^2=45$ اور $a+b+c=-1$ ہو تو $ab+bc+ca$ کی قیمت معلوم کریں۔

-3 اگر $m + n + p = 10$ اور $mn + np + mp = 27$ ہو تو $m^2 + n^2 + p^2$ کی قیمت معلوم کریں۔

-4 اگر $x^2 + y^2 + z^2 = 78$ اور $xy + yz + zx = 59$ ہو تو $x + y + z$ کی قیمت معلوم کریں۔

-5 اگر $x + y + z = 12$ اور $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ ہو تو $xy + yz + zx$ کی قیمت معلوم کریں۔

-6 اگر $x + y = 7$ اور $xy = 12$ ہو تو $x^3 + y^3$ کی قیمت معلوم کریں۔

-7 اگر $3x + 4y = 11$ اور $xy = 12$ ہو تو $27x^3 + 64y^3$ کی قیمت معلوم کریں۔

-8 اگر $x - y = 4$ اور $xy = 21$ ہو تو $x^3 - y^3$ کی قیمت معلوم کریں۔

-9 اگر $5x - 6y = 13$ اور $xy = 6$ ہو تو $125x^3 - 216y^3$ کی قیمت معلوم کریں۔

-10 اگر $x + \frac{1}{x} = 3$ ہو تو $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں۔

-11 اگر $x - \frac{1}{x} = 7$ ہو تو $x^3 - \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں۔

-12 اگر $\left(3x + \frac{1}{3x}\right) = 5$ ہو تو $\left(27x^3 + \frac{1}{27x^3}\right)$ کی قیمت معلوم کریں۔

-13 اگر $\left(5x - \frac{1}{5x}\right) = 6$ ہو تو $\left(125x^3 - \frac{1}{125x^3}\right)$ کی قیمت معلوم کریں۔

-14 تجزی کریں۔

(i) $x^3 - y^3 - x + y$ (ii) $8x^3 - \frac{1}{27y^3}$

-15 کلیات کی مدد سے حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$ (ii) $(x^3 - y^3)(x^6 + x^3y^3 + y^6)$

(iii) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

(iv) $(2x^2 - 1)(2x^2 + 1)(4x^4 + 2x^2 + 1)(4x^4 - 2x^2 + 1)$

4.3 مقادیرِ اصم اور ان کا استعمال

4.3.1 تعریف

ایسی غیر ناطق مقدار (یا جملہ) جس میں جذری علامت $\sqrt{\ }$ کے نیچے ناطق مقدار درج ہو، اسے مقدارِ اصم کہتے ہیں۔

یعنی $\sqrt[n]{a}$ کو مقدارِ اصم کہیں گے اگر

(i) a ناطق ہو، (ii) $\sqrt[n]{a}$ غیر ناطق ہو

مثلاً $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{\frac{2}{5}}$ ، $\sqrt[3]{7}$ ، $\sqrt[4]{10}$ مقادیرِ اصم ہیں۔

لیکن $\sqrt{\pi}$ اور $\sqrt{2+\sqrt{17}}$ مقادیرِ اصم نہیں ہیں کیونکہ π اور $2+\sqrt{17}$ ناطق اعداد نہیں ہیں۔

نوٹ کریں کہ مقدارِ اصم $\sqrt[n]{a}$ میں n کو مقدارِ اصم کا درجہ (order) کہتے ہیں اور ناطق عدد 'a' کو مجذور (radicand) کہتے ہیں۔ $\sqrt[3]{7}$ تیسرے درجے کی مقدارِ اصم ہے۔

ہر مقدارِ اصم ایک غیر ناطق عدد ہوتی ہے۔ لیکن ہر غیر ناطق عدد مقدارِ اصم نہیں ہوتا۔ مثلاً مقدارِ اصم $\sqrt[3]{5}$ ایک غیر ناطق عدد لیکن غیر ناطق عدد $\sqrt{\pi}$ مقدارِ اصم نہیں ہے۔

4.3.2 مقادیرِ اصم پر بنیادی عوامل کا اطلاق

(a) مقادیرِ اصم کی جمع و تفریق

متشابہ مقادیرِ اصم (مقادیرِ اصم جن کے غیر ناطق اجزائے ضربی باہم برابر ہوں) کو جمع یا تفریق کر کے یک رقمی مقدارِ اصم کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ اس کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال متشابہ مقادیرِ اصم والے ارکان کو اکٹھا کر کے (الجبری مجموعہ لیکر) مختصر کریں۔

(i) $4\sqrt{3} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{75}$ (ii) $\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{432}$

حل

(i) $4\sqrt{3} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{75}$

$$= 4\sqrt{3} - 3\sqrt{9 \times 3} + 2\sqrt{25 \times 3} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{9}\,\sqrt{3} + 2\sqrt{25} \times \sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 10\sqrt{3}$$

$$= (4 - 9 + 10)\,\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

(ii) $\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{432}$

$$= \sqrt[3]{64 \times 2} - \sqrt[3]{125 \times 2} + \sqrt[3]{216 \times 2}$$

$$= \sqrt[3]{(4)^3 \times 2} - \sqrt[3]{(5)^3 \times 2} + \sqrt[3]{(6)^3 \times 2}$$

$$= \sqrt[3]{(4)^3}\,\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{(5)^3}\,\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{(6)^3}\,\sqrt[3]{2}$$

$$= 4\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2}$$

$$= (4 - 5 + 6)\,\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$$

(b) مقادیرِ اصم کی ضرب اور تقسیم

ایک ہی درجے کے مقادیرِ اصم کو ضرب دینے یا تقسیم کرنے کے لیے مقادیرِ اصم کے درج ذیل قوانین کو استعمال کرتے ہیں۔

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{اور} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

جواب کے طور پر حاصل کردہ مقدارِ اصم کا درجہ بھی وہی ہوتا ہے جو دی گئی مقادیرِ اصم کا درجہ ہو۔

اگر دی گئی مقادیرِ اصم جن کو ضرب دینا یا تقسیم کرنا مقصود ہو، ایک ہی درجے کی نہ ہوں تو ضروری ہے کہ پہلے انہیں یکساں درجے کی مقادیرِ اصم میں تحویل کریں۔

مثال مختصر کریں اور جواب کو سادہ ترین شکل میں لکھیں۔

$$\text{(i)}\ \sqrt{14}\sqrt{35} \qquad \text{(ii)}\ \frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2}}$$

حل

$$\text{(i)}\quad \sqrt{14}\sqrt{35} = \sqrt{14\times 35} = \sqrt{7\times 2\times 7\times 5} = \sqrt{(7)^2\times 2\times 5}$$

$$= \sqrt{(7)^2\times 10} = \sqrt{(7)^2}\times\sqrt{10} = 7\sqrt{10}$$

(ii) دی گئی مقدارِ اصم $\frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2}}$

$\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2}$ میں درجے 2 اور 3 برابر نہیں ہیں۔ ان کا ذواضعاف اقل 6 ہے۔ اس لیے درجہ 6 کی مقادیرِ اصم میں تحویل کرتے ہوئے:

$$\sqrt{3} = (3)^{1/2} = (3)^{3/6} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

$$\sqrt[3]{2} = (2)^{1/3} = (2)^{2/6} = \sqrt[6]{(2)^2} = \sqrt[6]{4}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt[6]{27}\,\sqrt[6]{4}} = \frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt[6]{108}} = \sqrt[6]{\frac{12}{108}} = \sqrt[6]{\frac{1}{9}}$$

مختصر ترین شکل میں

$$\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2/6} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

مشق 4.3

-1 درج ذیل ہر ایک مقدارِ اصم کو مختصر ترین شکل میں لکھیں۔

(i) $\sqrt{180}$ (ii) $3\sqrt{162}$

(iii) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{128}$ (iv) $\sqrt[5]{96x^6y^7z^8}$

-2 مختصر کریں۔

(i) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{21}\sqrt{9}}{\sqrt{63}}$

(iii) $\sqrt[5]{243\,x^5\,y^{10}\,z^{15}}$ (iv) $\frac{4}{5}\sqrt[3]{125}$

(v) $\sqrt{21}\times\sqrt{7}\times\sqrt{3}$

-3 متشابہ مقادیر اصم میں تحویل کر کے مختصر کریں۔

(i) $\sqrt{45}-3\sqrt{20}+4\sqrt{5}$ (ii) $4\sqrt{12}+5\sqrt{27}-3\sqrt{75}+\sqrt{300}$

(iii) $\sqrt{3}\,(2\sqrt{3}+3\sqrt{3})$ (iv) $2(6\sqrt{5}-3\sqrt{5})$

-4 مختصر کریں۔

(i) $(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$ (ii) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$

(iii) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ (iv) $\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(v) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2)$

4.4 مقادیرِ اصم کو ناطق بنانے کا طریقہ

(a) تعریفیں

(i) ایسی مقدارِ اصم جس میں ایک ہی رقم موجود ہو یک رقمی مقدارِ اصم کہلاتی ہے۔ مثلاً $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ وغیرہ۔

(ii) دو رقوم کے مجموعہ یا فرق پر مشتمل جملہ جس کے دونوں ارکان یک رقمی مقدارِ اصم ہوں یا یہ جملہ یک رقمی مقدارِ اصم اور ایک ناطق عدد کا مجموعہ ہو، دو رقمی مقدارِ اصم (binomial surd) کہلاتا ہے۔

مثلاً $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ یا $5+\sqrt{2}$ یا $8-\sqrt{11}$ وغیرہ، دو رقمی مقادیرِ اصم ہیں۔

ہم اس تعریف کو تین رقوم کے مجموعہ پر مشتمل سہ رقمی مقدارِ اصم (trinomial surd) تک بڑھا سکتے ہیں۔

(iii) جب کسی دو مقادیرِ اصم کا حاصلِ ضرب ایک ناطق عدد ہو تو ہر ایک مقدارِ اصم کو دوسرے کا ناطق جزوِ ضربی کہا جاتا ہے۔

(iv) کسی دی گئی مقدارِ اصم کو اس کے ناطق جزوِ ضربی سے ضرب دے کر ایک ناطق عدد حاصلِ ضرب کے طور پر حاصل کرنے کے عمل کو ناطق بنانے کا طریقہ کہتے ہیں۔

(v) درجہ دوم کے دو رقمی مقادیرِ اصم جو ایک ہی مقداروں پر مشتمل ہوں اور جن کے درمیان علامات مختلف ہوں (دونوں رقموں میں سے کم از کم ایک رقم مقدارِ اصم ہو) زوج مقادیرِ اصم (conjugate surds) کہلاتی ہیں۔ مثلاً $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ اور $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ ایک دوسرے کے زوج مقادیرِ اصم ہیں۔ اسی طرح مقادیرِ اصم $x+\sqrt{y}$ کا زوج جملہ $x-\sqrt{y}$ ہے۔ زوج مقادیرِ اصم کا مثلاً $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ اور $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ کا حاصلِ ضرب $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$ لازماً ناطق مقدار ہوتی ہے۔ (جذری علامت سے آزاد)۔

اسی طرح $a+b\sqrt{m}$ اور اس کے زوج $a-b\sqrt{m}$ کا حاصل ضرب بھی جذری علامت کے بغیر ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر درج ذیل حاصل ضرب

$$(3+\sqrt{5})\,(3-\sqrt{5})=(3)^2-(\sqrt{5})^2=9-5=4$$

ایک ناطق عدد ہے۔

(b) مقادیرِ اصم پر مشتمل کسور کے مخرج کو ناطق بنانا

مندرجہ بالا بحث کو مدِ نظر رکھتے ہوئے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ مقادیرِ اصم پر مشتمل کسی کسر کے مخرج (نسب نما) جو $a+b\sqrt{x}$ (یا $a-b\sqrt{x}$) کی شکل میں ہو، کو ناطق بنالینا چاہیے۔ اس مقصد کے لیے ضروری ہے کہ کسر کے مخرج کو جس زوج جزوِ ضربی $a-b\sqrt{x}$ (یا $a+b\sqrt{x}$) سے ضرب دی جائے اسی سے شمار کنندہ کو بھی ضرب دیں۔ اس طرح جذری علامت خارج ہو جاتی ہے اور ہم ناطق مخرج حاصل کر لیتے ہیں۔

(c) $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ کی اقسام کے حقیقی اعداد کو ناطق بنانا

دیے گئے جملوں $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ اور ان پر بنیادی عوامل کے اطلاق سے حاصل کردہ جملوں (جبکہ x ، y قدرتی اور a ، b صحیح اعداد ہیں) کو ناطق بنانے کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1

$\frac{58}{7-2\sqrt{5}}$ میں مخرج کو ناطق بنایئے۔

حل

مخرج کو ناطق بنانے کے لیے ہم شمار کنندہ اور مخرج دونوں کو $(7-2\sqrt{5})$ کے زوج $(7+2\sqrt{5})$ سے ضرب دیتے ہیں۔ یعنی

$$\frac{58}{7-2\sqrt{5}} = \frac{58}{7-2\sqrt{5}} \times \frac{7+2\sqrt{5}}{7+2\sqrt{5}} = \frac{58(7+2\sqrt{5})}{(7)^2-(2\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{58(7+2\sqrt{5})}{49-20}$$ (مخرج سے جذری علامت خارج ہو گئی ہے)

$$= \frac{58(7+2\sqrt{5})}{29} = 2(7+2\sqrt{5})$$

مثال 2

$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ میں مخرج کو ناطق بنائیں۔

حل

شمار کنندہ اور مخرج دونوں کو $(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ کے زوج $(\sqrt{5}-\sqrt{2})$ سے ضرب دینے سے

$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$$

مثال 3 مختصر کریں۔

$$\frac{6}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

حل

پہلے ہر ایک مخرج کو علیحدہ علیحدہ ناطق بنا کر اور پھر مختصر کرنے سے

$$\frac{6}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{6}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}\times\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{6(2\sqrt{3}+\sqrt{6})}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2}+\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}-\frac{4\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{6(2\sqrt{3}+\sqrt{6})}{12-6}+\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}-\frac{4\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2}$$

$$=\frac{12\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}\sqrt{3}-\sqrt{6}\sqrt{2}}{1}-\frac{4\sqrt{3}\sqrt{6}+4\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}$$

$$=2\sqrt{3}+\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\sqrt{6}=0$$

مثال 4

ناطق اعداد x اور y کی قیمتیں معلوم کریں جبکہ $\frac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}=x+y\sqrt{5}$

حل

دی گئی مقادیرِ اصم کی کسر

$$\frac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}=\frac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}\times\frac{4+3\sqrt{5}}{4+3\sqrt{5}}=\frac{(4+3\sqrt{5})^2}{(4)^2-(3\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{16+24\sqrt{5}+45}{16-45}=\frac{61+24\sqrt{5}}{-29}$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{61}{29}-\frac{24}{29}\sqrt{5}=x+y\sqrt{5}$$ (معلوم)

لہٰذا طرفین کا موازنہ کرنے سے

$$x=-\frac{61}{29}\ ,\ y=-\frac{24}{29}$$

مثال 5

اگر $x = 3 + \sqrt{8}$ ہو تو مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $x + \frac{1}{x}$ اور (ii) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

حل

$\because \quad x = 3 + \sqrt{8}$

$\therefore \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{3+\sqrt{8}} = \frac{1}{3+\sqrt{8}} \times \frac{3-\sqrt{8}}{3-\sqrt{8}} = \frac{3-\sqrt{8}}{(3)^2 - (\sqrt{8})^2}$

$= \frac{3-\sqrt{8}}{9-8} = 3 - \sqrt{8}$

(i) $x + \frac{1}{x} = 3 + \sqrt{8} + 3 - \sqrt{8} = 6$

(ii) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 36$

یا $\quad x^2 + 2x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 36$

یا $\quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$

مشق 4.4

-1 مندرجہ ذیل کے مخرجوں کو ناطق بنائیے۔

(i) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{14}{\sqrt{98}}$ (iii) $\frac{6}{\sqrt{8}\sqrt{27}}$ (iv) $\frac{1}{3+2\sqrt{5}}$

(v) $\frac{15}{\sqrt{31}-4}$ (vi) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (vii) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ (viii) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

-2 $x+\sqrt{y}$ قسم کے درج ذیل مقادیرِ اصم کے زوج معلوم کیجیے۔

(i) $3+\sqrt{7}$ (ii) $4-\sqrt{5}$ (iii) $2+\sqrt{3}$ (iv) $2+\sqrt{5}$

(v) $5+\sqrt{7}$ (vi) $4-\sqrt{15}$ (vii) $7-\sqrt{6}$ (viii) $9+\sqrt{2}$

-3 (i) اگر $x=2-\sqrt{3}$ ہو تو $\frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(ii) اگر $x=4-\sqrt{17}$ ہو تو $\frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(iii) اگر $x=\sqrt{3}+2$ ہو تو $x+\frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

-4 مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$

(iii) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

-5 (i) اگر $x=2+\sqrt{3}$ ہو تو $x-\frac{1}{x}$ اور $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ کی قیمتیں معلوم کریں۔

(ii) اگر $x=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ ہو تو $x+\frac{1}{x}$ ، $x^2+\frac{1}{x^2}$ اور $x^3+\frac{1}{x^3}$ کی قیمتیں معلوم کریں۔

[اشارہ: $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ اور $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$]

-6 اگر $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=a+b\sqrt{3}$ ہو تو ناطق اعداد a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔

اعادہ مشق 4

-1 دیے ہوئے جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) $(4x+3y-2)$ ایک الجبری............ ہے۔

(a) جملہ (b) فقرہ (c) مساوات (d) غیر مساوات

(ii) کثیر رقمی $4x^4+2x^2y$ کا درجہ............ ہے۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(iii) $a^3 + b^3$ برابر ہے............

(a) $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (b) $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$

(c) $(a-b)(a^2 - ab + b^2)$ (d) $(a-b)(a^2 + ab - b^2)$

(iv) $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$ برابر ہے............

(a) 7 (b) −7 (c) −1 (d) 1

(v) مقدارِ اصم $a + \sqrt{b}$ کا زوج جملہ .... ہے۔

(a) $-a + \sqrt{b}$ (b) $a - \sqrt{b}$ (c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (d) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

(vi) $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}$ برابر ہے............

(a) $\frac{2a}{a^2 - b^2}$ (b) $\frac{2b}{a^2 - b^2}$ (c) $\frac{-2a}{a^2 - b^2}$ (d) $\frac{-2b}{a^2 - b^2}$

(vii) $\frac{a^2 - b^2}{a + b}$ برابر ہے............

(a) $(a-b)^2$ (b) $(a+b)^2$ (c) $a + b$ (d) $a - b$

(viii) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ برابر ہے............

(a) $a^2 + b^2$ (b) $a^2 - b^2$ (c) $a - b$ (d) $a + b$

2- خالی جگہ پُر کریں۔

(i) کثیر رقمی $x^2y^2 + 3xy + y^3$ کا درجہ .... ہے۔

(ii) $x^2 - 4$ برابر ہے............

(iii) $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)(............)$

(iv) $2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (............)^2$

(v) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = ...$

(vi) مقدارِ اصم $\sqrt[3]{x}$ کا درجہ .... ہے۔

(vii) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = ...$

-3 اگر $x + \frac{1}{x} = 3$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (ii) $x^4 + \frac{1}{x^4}$

-4 اگر $x - \frac{1}{x} = 2$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (ii) $x^4 + \frac{1}{x^4}$

-5 اگر $x + y = 5$ اور $x - y = 3$ ہو تو $x^3 + y^3$ اور xy کی قیمت معلوم کریں۔

-6 اگر $p = 2 + \sqrt{3}$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $p + \frac{1}{p}$ (ii) $p - \frac{1}{p}$

(iii) $p^2 + \frac{1}{p^2}$ (iv) $p^2 - \frac{1}{p^2}$

-7 اگر $q = \sqrt{5} + 2$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $q + \frac{1}{q}$ (ii) $q - \frac{1}{q}$

(iii) $q^2 + \frac{1}{q^2}$ (iv) $q^2 - \frac{1}{q^2}$

-8 مختصر کریں۔

(i) $\frac{\sqrt{a^2+2} + \sqrt{a^2-2}}{\sqrt{a^2+2} - \sqrt{a^2-2}}$

(ii) $\frac{1}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}$

خلاصہ

☆ مستقل مقداروں یا متغیرات یا دونوں کو بنیادی عوامل کے ذریعے ملانے سے الجبری جملہ بنتا ہے۔

☆ کثیر رقمی سے مراد ایک ایسا جملہ ہے جو کئی رقموں پر مشتمل ہو۔

☆ ایک متغیر x میں کثیر رقمی جملے کا درجہ x کا سب سے بڑا قوت نما ہوتا ہے۔

☆ $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل کا جملہ (جبکہ $q(x) \neq 0$) ناطق جملہ کہلاتا ہے۔ اگر $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں۔

☆ ایک غیر ناطق مقدار جس میں جذری علامت $\sqrt{\ }$ کے نیچے ناطق مقدار درج ہو اسے مقدارِ اصم کہتے ہیں۔

☆ $\sqrt[n]{x}$ میں، n کو مقدارِ اصم کا درجہ (order) اور ناطق عدد x کو مجذور (radicand) کہتے ہیں۔

☆ ایسی مقدارِ اصم جس میں ایک ہی رقم موجود ہو یک رقمی مقدارِ اصم کہلاتی ہے۔

☆ دو رقوم کے مجموعہ یا فرق پر مشتمل جملہ جس کے دونوں ارکان یک رقمی مقادیرِ اصم ہوں یا یہ جملہ یک رقمی مقدارِ اصم اور ایک ناطق عدد کا مجموعہ ہو اسے دو رقمی مقدارِ اصم (binomial surd) کہتے ہیں۔

☆ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ کی زوج مقدارِ اصم $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ہوتی ہے۔