یونٹ 5

تجزّی
(FACTORIZATION)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

5.1 تجزّی (Factorization)

5.2 مسئلہ باقی اور مسئلہ تجزّی (Remainder Theorem and Factor Theorem)

5.3 تین درجی کثیر رقمی کی تجزّی (Factorization of a Cubic Polynomial)

یونٹ میں طلبا کے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل / نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفسِ مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ ان کو یاد آ جائے کہ وہ درج ذیل ٹائپ کے الجبری جملوں کی تجزّی کر چکے ہیں۔

- $ka + kb + kc$
- $ac + ad + bc + bd$
- $a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2$
- $a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2$

☆ درج ذیل ٹائپ (قسم / طرز) کے جملوں کے اجزائے ضربی بنا سکیں۔

ٹائپ I $\quad a^4 + a^2b^2 + b^4 \quad , \quad a^4 + 4b^4$

ٹائپ II $\quad x^2 + px + q$

ٹائپ III $\quad ax^2 + bx + c$

ٹائپ IV
$$\begin{cases} (ax^2 + bx + c)\,(ax^2 + bx + d) + k \\ (x + a)\,(x + b)\,(x + c)\,(x + d) + k \\ (x + a)\,(x + b)\,(x + c)\,(x + d) + kx^2 \end{cases}$$

ٹائپ V	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
ٹائپ VI	$a^3 \pm b^3$

☆ مسئلہ باقی کو بیان اور ثابت کرنے کے علاوہ مثالوں سے اس کی وضاحت کر سکیں۔

☆ کسی کثیر رقمی جملے کو ایک درجے والی کثیر رقمی پر تقسیم کرنے سے (تقسیم کا عمل کیے بغیر) باقی کی قیمت معلوم کر سکیں۔

☆ کسی کثیر رقمی جملے میں موجود متغیر کی وہ قیمت معلوم کر سکیں جو جملے کی قیمت '0' کے برابر کر دے۔

☆ مسئلہ تجزی کو بیان اور ثابت کر سکیں۔

☆ مسئلہ تجزی کی مدد سے تین درجی کثیر رقمی کے اجزائے ضربی بنا سکیں۔

تعارف

تجزی کا ریاضی میں ایک اہم کردار ہے۔ اس سے پیچیدہ جملوں کا مطالعہ نسبتاً آسان اور سادہ جملوں کے مطالعہ میں بدل جاتا ہے۔ اس یونٹ میں ہم مختلف قسم کے کثیر رقمی جملوں کی تجزی کرنے کے طریقے سیکھیں گے۔

5.1 تجزی

اگر ہم کثیر رقمی جملے $p(x)$ کا اظہار کثیر رقمیوں $g(x)$ اور $h(x)$ کے حاصل ضرب یعنی $p(x) = g(x)h(x)$ کی شکل میں کر سکیں تو کثیر رقمیوں $g(x)$ اور $h(x)$ میں سے ہر ایک کثیر رقمی $p(x)$ کا جزو ضربی کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع: $ab + ac = a(b + c)$ میں

a اور $(b+c)$ جملہ $ab+ac$ کے اجزائے ضربی ہیں۔

جب کوئی کثیر رقمی جملہ ایسے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھا گیا ہو کہ ہر جزو ضربی مُفرد جملہ ہو تو دیے گئے کثیر رقمی جملے کی تجزّی کا عمل مکمل ہو جاتا ہے۔ ایسی تجزی کو مکمل تجزی یا مُفرد تجزی کہتے ہیں۔

(a) $ka + kb + kc$ کی قسم کے جملے کی تجزی کرنا

مثال 1 $5a - 5b + 5c$ کی تجزی کیجیے۔

حل (5 ہر رقم میں مشترک ہے) دیا گیا جملہ $= 5a - 5b + 5c = 5(a - b + c)$

مثال 2 $5a - 5b - 15c$ کی تجزی کیجیے۔

حل دیا گیا جملہ $= 5a - 5b - 15c = 5(a - b - 3c)$

(b) $ac + ad + bc + bd$ کی قسم کے جملے کی تجزی کرنا

$ac + ad + bc + bd$

$(ac + ad) + (bc + db)$ (مناسب گروپ بنانے سے)

$= a(c + d) + b(c + d)$ (a پہلے گروپ میں اور b دوسرے گروپ میں مشترک)

$= (a + b)(c + d)$ ($c+d$) مشترک لینے سے

وضاحت کے لیے مندرجہ ذیل مثالوں میں کیے گئے عمل پر غور کریں۔

مثال 1 $3x - 3a + xy - ay$ کی تجزّی کیجیے۔

حل دیے گئے کثیر رقمی جملے کو دوبارہ مناسب ترتیب دینے سے

$3x + xy - 3a - ay = x(3 + y) - a(3 + y)$ (یک رقمی اجزائے ضربی)

$= (3 + y)(x - a)$ ($3+y$) مشترک جزو ضربی ہے

مثال 2 $pqr + qr^2 - pr^2 - r^3$ کی تجزّی کیجیے۔

حل دیا گیا جملہ $= r(pq + qr - pr - r^2)$ (r یک رقمی جُزو ضربی ہے)

$= r[(pq + qr) - pr - r^2]$ (رقموں کو ترتیب دینے سے)

$= r[q(p + r) - r(p + r)]$ (یک رقمی اجزائے ضربی)

$= r(p + r)(q - r)$ ($p+r$ مشترک لینے سے)

(c) $a^2 \pm 2ab + b^2$ کی قسم کے جملوں کی تجزّی کرنا

ہم جانتے ہیں کہ

(i) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

(ii) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

وضاحت کے لیے مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 1 $25x^2 + 16 + 40x$ کی تجزّی کیجیے۔

حل دیا گیا جملہ $= 25x^2 + 40x + 16 = (5x)^2 + 2(5x)(4) + (4)^2$

$= (5x + 4)^2$

$= (5x + 4)(5x + 4)$

مثال 2 $12x^2 - 36x + 27$ کی تجزی کریں۔

حل دیا گیا جملہ $= 12x^2 - 36x + 27 = 3(4x^2 - 12x + 9)$

$$= 3(2x-3)^2$$

$$= 3(2x-3)(2x-3)$$

(d) $a^2 - b^2$ **کی قسم کے جملے کی تجزی کرنا**

وضاحت کے لیے درج ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال درج ذیل جملوں کی تجزی کیجیے۔

(i) $4x^2 - (2y-z)^2$ (ii) $6x^4 - 96$

حل

(i) $4x^2 - (2y-z)^2 = (2x)^2 - (2y-z)^2$

$$= [2x - (2y-z)]\,[2x + (2y-z)]$$

$$= (2x - 2y + z)\,(2x + 2y - z)$$

(ii) $6x^4 - 96 = 6(x^4 - 16)$

$$= 6[(x^2)^2 - (4)^2]$$

$$= 6(x^2-4)\,(x^2+4)$$

$$= 6[(x)^2 - (2)^2]\,(x^2+4)$$

$$= 6(x-2)\,(x+2)\,(x^2+4)$$

(e) $a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2$ **کی قسم کے جملوں کی تجزی کرنا**

ہم جانتے ہیں کہ

$$a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2 = (a \pm b)^2 - (c)^2 = (a \pm b - c)(a \pm b + c)$$

وضاحت کے لیے درج ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال تجزی کیجیے۔

(i) $x^2 + 6x + 9 - 4y^2$

(ii) $1 + 2ab - a^2 - b^2$

حل

(i) $x^2 + 6x + 9 - 4y^2 = (x+3)^2 - (2y)^2$

$$= (x + 3 + 2y)\,(x + 3 - 2y)$$

(ii) $1 + 2ab - a^2 - b^2 = 1 - (a^2 - 2ab + b^2)$

$$= (1)^2 - (a-b)^2$$

$$= [1 - (a-b)]\,[1 + (a-b)]$$

$$= (1 - a + b)(1 + a - b)$$

مشق 5.1

درج ذیل جملوں کی تجزی کیجیے۔

1. (i) $2abc - 4abx + 2abd$ (ii) $9xy - 12x^2y + 18y^2$
   (iii) $-3x^2y - 3x + 9xy^2$ (iv) $5ab^2c^3 - 10a^2b^3c - 20a^3bc^2$
   (v) $3x^3y(x-3y) - 7x^2y^2(x-3y)$ (vi) $2xy^3(x^2+5) + 8xy^2(x^2+5)$
2. (i) $5ax - 3ay - 5bx + 3by$ (ii) $3xy + 2y - 12x - 8$
   (iii) $x^3 + 3xy^2 - 2x^2y - 6y^3$ (iv) $(x^2 - y^2)z + (y^2 - z^2)x$
3. (i) $144a^2 + 24a + 1$ (ii) $\dfrac{a^2}{b^2} - 2 + \dfrac{b^2}{a^2}$
   (iii) $(x+y)^2 - 14z(x+y) + 49z^2$ (iv) $12x^2 - 36x + 27$
4. (i) $3x^2 - 75y^2$ (ii) $x(x-1) - y(y-1)$
   (iii) $128am^2 - 242an^2$ (iv) $3x - 243x^3$
5. (i) $x^2 - y^2 - 6y - 9$ (ii) $x^2 - a^2 + 2a - 1$
   (iii) $4x^2 - y^2 - 2y - 1$ (iv) $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3$
   (v) $25x^2 - 10x + 1 - 36z^2$ (vi) $x^2 - y^2 - 4xz + 4z^2$

ٹائپ I $a^4 + a^2b^2 + b^4$ or $a^4 + 4b^4$ کی قسم کے جملوں کی تجزی کرنا

اس قسم کے جملوں کی تجزی کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1 $81x^4 + 36x^2y^2 + 16y^4$ کی تجزی کیجیے۔

حل

$$81x^4 + 36x^2y^2 + 16y^4$$

$$= (9x^2)^2 + 72x^2y^2 + (4y^2)^2 - 36x^2y^2$$

$$= (9x^2 + 4y^2)^2 - (6xy)^2$$

$$= (9x^2 + 4y^2 + 6xy)(9x^2 + 4y^2 - 6xy)$$

$$= (9x^2 + 6xy + 4y^2)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$$

مثال 2 $9x^4 + 36y^4$ کی تجزی کیجیے۔

حل

$$9x^4 + 36y^4 = 9x^4 + 36y^4 + 36x^2y^2 - 36x^2y^2$$
$$= (3x^2)^2 + 2(3x^2)(6y^2) + (6y^2)^2 - (6xy)^2$$
$$= (3x^2 + 6y^2)^2 - (6xy)^2$$
$$= (3x^2 + 6y^2 + 6xy)(3x^2 + 6y^2 - 6xy)$$
$$= (3x^2 + 6xy + 6y^2)(3x^2 - 6xy + 6y^2)$$

ٹائپ II $x^2 + px + q$ کی قسم کے جملے کی تجزّی کرنا

وضاحت کے لیے درج ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال درج ذیل جملوں کی تجزّی کریں۔

(i) $x^2 - 7x + 12$ (ii) $x^2 + 5x - 36$

حل

(i) $x^2 - 7x + 12$

12 کے ممکنہ اجزائے ضربی میں سے مناسب اور کارآمد دو اعداد (جمع اور منفی کی علامت کا خیال رکھتے ہوئے) 3- اور 4- ہیں۔ کیونکہ

$(-3) + (-4) = -7$ اور $(-3)(-4) = 12$

$$\therefore\ x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12$$
$$= x(x-3) - 4(x-3)$$
$$= (x-3)(x-4)$$

(ii) $x^2 + 5x - 36$

36 کے ممکنہ اجزائے ضربی میں سے دو مناسب اور کارآمد اعداد 9 اور 4- ہیں۔ کیونکہ

$9 + (-4) = 5$ اور $9 \times (-4) = -36$

$$\therefore\ x^2 + 5x - 36 = x^2 + 9x - 4x - 36$$
$$= x(x+9) - 4(x+9)$$
$$= (x+9)(x-4)$$

ٹائپ III $ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$ کی قسم کے جملے کی تجزی کرنا

ہم تجزی کرنے کے طریقہ کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کرتے ہیں۔

مثال تجزی کیجیے۔

(i) $9x^2 + 21x - 8$ (ii) $2x^2 - 8x - 42$ (iii) $10x^2 - 41xy + 21y^2$

حل (i) $9x^2 + 21x - 8$

دیے گئے جملے کا موازنہ $ax^2 + bx + c$ کے ساتھ کرنے سے ac کی قیمت درج ذیل ہے۔

$$ac = (9)(-8) = -72$$

72 کے ممکنہ اجزائے ضربی میں سے اعداد کا مناسب جوڑا 24 اور 3- ہے۔ جن کا

مجموعہ $= 24 + (-3) = 21$ (x کا عددی سر)

حاصل ضرب $= (24)(-3) = -72 = ac$

$$\therefore \quad 9x^2 + 21x - 8$$
$$= 9x^2 + 24x - 3x - 8$$
$$= 3x(3x + 8) - (3x + 8)$$
$$= (3x + 8)(3x - 1)$$

(ii) $2x^2 - 8x - 42 = 2(x^2 - 4x - 21)$

$x^2 - 4x - 21$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c$ کے ساتھ کرنے سے ac کی حاصل کردہ قیمت:

$$ac = (+1)(-21) = -21$$

21 کے ممکنہ اجزائے ضربی میں سے کارآمد جوڑا 7- اور 3+ ہے۔ جس کا

مجموعہ $= -7 + 3 = -4$ ، حاصل ضرب $= (-7)(3) = -21$

$$\therefore \quad x^2 - 4x - 21$$
$$= x^2 + 3x - 7x - 21$$
$$= x(x + 3) - 7(x + 3)$$
$$= (x + 3)(x - 7)$$

$$\therefore \quad 2x^2 - 8x - 42 = 2(x^2 - 4x - 21) = 2(x + 3)(x - 7)$$

(iii) $10x^2 - 41xy + 21y^2$

اس قسم کے جملوں کی تجزی بھی مذکورہ بالا طریقہ سے کی جا سکتی ہے۔

اس صورت میں ac کی قیمت درج ذیل ہے۔ $ac = (10)(21) = 210$

210 کے ممکنہ اجزائے ضربی میں سے ہمارے لیے کارآمد جوڑا 35- اور 6- پر مشتمل ہے۔ جس کا

حاصل جمع $= -35 - 6 = -41$ ، حاصل ضرب $= (-35)(-6) = 210$

$\therefore \quad 10x^2 - 41xy + 21y^2$

$= 10x^2 - 35xy - 6xy + 21y^2$

$= 5x(2x - 7y) - 3y(2x - 7y)$

$= (2x - 7y)(5x - 3y)$

ٹائپ IV درج ذیل اقسام کے جملوں کے تجزی کرنا

$(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d) + k$

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + k$

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + kx^2$

ان اقسام کے جملوں کی تجزی کرنے کا طریقہ مندرجہ ذیل مثالوں سے واضح کیا جائے گا۔

مثال 1 تجزی کیجیے۔

$(x^2 - 4x - 5)(x^2 - 4x - 12) - 144$

حل فرض کریں $x^2 - 4x = y$

دیا گیا جملہ $= (y - 5)(y - 12) - 144 \quad = y^2 - 17y - 84$

$= y^2 - 21y + 4y - 84$

$= y(y - 21) + 4(y - 21)$

$= (y - 21)(y + 4)$

$= (x^2 - 4x - 21)(x^2 - 4x + 4) \quad (\because \; y = x^2 - 4x)$

$= (x^2 - 7x + 3x - 21)(x - 2)^2$

$= [x(x - 7) + 3(x - 7)](x - 2)^2$

$= (x - 7)(x + 3)(x - 2)(x - 2)$

مثال 2 تجزی کیجیے۔

$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 120$

حل ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $1 + 4 = 2 + 3$

اس سے ہماری توجہ دیے گئے جملے کے درج ذیل گروپ بنانے کی طرف جاتی ہے۔

$[(x + 1)(x + 4)][(x + 2)(x + 3)] - 120$

$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 120$

فرض کریں کہ $x^2 + 5x = y$، تب

$(y + 4)(y + 6) - 120$

$= y^2 + 10y + 24 - 120$

$= y^2 + 10y - 96$

$= y^2 + 16y - 6y - 96$

$= y(y + 16) - 6(y + 16)$

$= (y + 16)(y - 6)$

$= (x^2 + 5x + 16)(x^2 + 5x - 6)$ ...... $(\because y = x^2 + 5x)$

$= (x^2 + 5x + 16)(x + 6)(x - 1)$

مثال 3 تجزی کریں۔

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6) - 2x^2$$

حل

$(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6) - 2x^2$

$= [x^2 - 3x - 2x + 6][x^2 + 3x + 2x + 6] - 2x^2$

$= [x(x - 3) - 2(x - 3)][x(x + 3) + 2(x + 3)] - 2x^2$

$= [(x - 3)(x - 2)][(x + 3)(x + 2)] - 2x^2$

$= [(x - 2)(x + 2)][(x - 3)(x + 3)] - 2x^2$

$= (x^2 - 4)(x^2 - 9) - 2x^2$

$= x^4 - 13x^2 + 36 - 2x^2$

$= x^4 - 15x^2 + 36$

$= x^4 - 12x^2 - 3x^2 + 36$

$= x^2(x^2 - 12) - 3(x^2 - 12)$

$= (x^2 - 12)(x^2 - 3)$

$= [(x)^2 - (2\sqrt{3})^2][(x)^2 - (\sqrt{3})^2]$

$= (x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

ٹائپ V درج ذیل قسم کے جملوں کی تجزی کرنا

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال تجزی کیجیے۔

$$x^3 - 8y^3 - 6x^2y + 12xy^2$$

حل

$x^3 - 8y^3 - 6x^2y + 12xy^2$

$= (x)^3 - (2y)^3 - 3(x)^2(2y) + 3(x)(2y)^2$

$= (x)^3 - 3(x)^2 (2y) + 3(x) (2y)^2 - (2y)^3$
$= (x - 2y)^3$
$= (x - 2y) (x - 2y) (x - 2y)$

ٹائپ VI $a^3 \pm b^3$ کی قسم کے جملوں کی تجزی کرنا

درج ذیل کلیات کو ذہن میں لائیں۔

$$a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

وضاحت کے لیے درج ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 1 $27x^3 + 64y^3$ کی تجزی کریں۔

حل

$$27x^3 + 64y^3 = (3x)^3 + (4y)^3$$
$$= (3x + 4y) [(3x)^2 - (3x) (4y) + (4y)^2]$$
$$= (3x + 4y) (9x^2 - 12xy + 16y^2)$$

مثال 2 $(1 - 125x^3)$ کی تجزی کریں۔

حل

$$1 - 125x^3 = (1)^3 - (5x)^3$$
$$= (1 - 5x) [(1)^2 + (1) (5x) + (5x)^2]$$
$$= (1 - 5x) (1 + 5x + 25x^2)$$

مشق 5.2

درج ذیل جملوں کی تجزی کریں۔

1. (i) $x^4 + \frac{1}{x^4} - 3$ (ii) $3x^4 + 12y^4$ (iii) $a^4 + 3a^2b^2 + 4b^4$
   (iv) $4x^4 + 81$ (v) $x^4 + x^2 + 25$ (vi) $x^4 + 4x^2 + 16$
2. (i) $x^2 + 14x + 48$ (ii) $x^2 - 21x + 108$
   (iii) $x^2 - 11x - 42$ (iv) $x^2 + x - 132$
3. (i) $4x^2 + 12x + 5$ (ii) $30x^2 + 7x - 15$
   (iii) $24x^2 - 65x + 21$ (iv) $5x^2 - 16x - 21$
   (v) $4x^2 - 17xy + 4y^2$ (vi) $3x^2 - 38xy - 13y^2$
   (vii) $5x^2 + 33xy - 14y^2$ (viii) $\left(5x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(5x - \frac{1}{x}\right) + 4, x \neq 0$

4. (i) $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 3$

(ii) $(x^2 - 4x)(x^2 - 4x - 1) - 20$

(iii) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 15$

(iv) $(x + 4)(x - 5)(x + 6)(x - 7) - 504$

(v) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) - 3x^2$

5. (i) $x^3 + 48x - 12x^2 - 64$ (ii) $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$

(iii) $x^3 - 18x^2 + 108x - 216$ (iv) $8x^3 - 125y^3 - 60x^2y + 150xy^2$

6. (i) $27 + 8x^3$ (ii) $125x^3 - 216y^3$

(iii) $64x^3 + 27y^3$ (iv) $8x^3 + 125y^3$

5.2 مسئلہ باقی اور مسئلہ تجزی

5.2.1 مسئلہ باقی (Remainder Theorem)

"اگر کسی کثیر رقمی جملے $p(x)$ کو یک درجی جملہ $(x - a)$ پر تقسیم کیا جائے تو $p(a)$ بطور باقی حاصل ہوتا ہے۔"

ثبوت

فرض کریں $p(x)$ کو $(x - a)$ پر تقسیم کرنے سے $q(x)$ بطور حاصل قسمت حاصل ہوتا ہے۔ لیکن تقسیم کنندہ $(x - a)$ کا درجہ ایک ہے اس لیے 'باقی' کا درجہ صفر ہوگا۔ یعنی باقی ایک غیر صفر مستقل مقدار، فرض کریں R ہو گی۔ لہٰذا علامتی طور پر ہم یہ لکھ سکتے ہیں کہ

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + \mathrm{R}$$

یہ مساوات متغیر x کی ہر قیمت کے لیے درست ہے۔ اس لیے بالخصوص $x = a$ کے لیے بھی درست ہوگی۔ نتیجتاً

$$p(a) = (a - a)\, q(a) + \mathrm{R}$$

$$= 0 + \mathrm{R} = \mathrm{R}$$

یا $p(a) = \mathrm{R} =$ (باقی)

نوٹ

اگر تقسیم کنندہ $(ax - b)$ ہو تو

$$p(x) = (ax - b)\, q(x) + \mathrm{R}$$

اس مساوات میں $x = \dfrac{b}{a}$ درج کرنے سے، تا کہ $ax - b = 0$ ہو

$$p\left(\frac{b}{a}\right) = 0 \cdot q\left(\frac{b}{a}\right) + \mathrm{R} = 0 + \mathrm{R} = \mathrm{R}$$

پس اگر تقسیم کنندہ جملے کا درجہ ایک ہو تو تقسیم کا لمبا عمل کیے بغیر مندرجہ بالا مسئلہ 'باقی' حاصل کرنے کا ایک مؤثر طریقہ فراہم کرتا ہے۔

5.2.2 جب کسی کثیر رقمی جملے کو ایک درجہ والے جملہ پر تقسیم کرنا ہو تو (تقسیم کا عمل کیے بغیر) باقی معلوم کرنا

مثال 1 مسئلہ باقی کی مدد سے باقی معلوم کریں جب $9x^2 - 6x + 2$ کو درج ذیل جملوں پر تقسیم کیا جائے۔

(i) $x - 3$ (ii) $x + 3$ (iii) $3x + 1$ (iv) x

حل فرض کریں کہ $p(x) = 9x^2 - 6x + 2$

(i) مسئلہ باقی کی مدد سے $p(x)$ کو $x - 3$ پر تقسیم کرنے سے،

باقی $R = p(3) = 9(3)^2 - 6(3) + 2 = 65$

(ii) $p(x)$ کو $x + 3 = x - (-3)$ پر تقسیم کرنے سے،

باقی $R = p(-3) = 9(-3)^2 - 6(-3) + 2 = 101$

(iii) $p(x)$ کو $3x + 1$ پر تقسیم کرنے سے،

باقی $R = p\left(-\frac{1}{3}\right) = 9\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 6\left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = 5$

(iv) $p(x)$ کو x پر تقسیم کرنے سے،

باقی $R = p(0) = 9(0)^2 - 6(0) + 2 = 2$

مثال 2 اگر جملہ $x^3 + kx^2 + 3x - 4$ کو $x + 2$ پر تقسیم کرنے سے، باقی -2 بچے تو k کی قیمت معلوم کریں۔

حل فرض کریں کہ $p(x) = x^3 + kx^3 + 3x - 4$

$p(x)$ کو $x + 2 = x - (-2)$ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہونے والا باقی، مسئلہ باقی کی رو سے درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^3 + k(-2)^2 + 3(-2) - 4 \\ &= -8 + 4k - 6 - 4 \\ &= 4k - 18 \end{aligned}$$

دی گئی شرط کے مطابق

$$p(-2) = -2 \quad \Rightarrow \quad 4k - 18 = -2 \quad \Rightarrow \quad k = 4$$

5.2.3 کثیر رقمی جملے کا زیرو (Zero of a Polynomial)

تعریف

اگر کسی کثیر رقمی جملے $p(x)$ میں متغیر x کی جگہ ایک مخصوص نمبر 'a' درج کرنے سے $p(a) = 0$ حاصل ہو تو $x = a$ کو کثیر رقمی $p(x)$ کا زیرو (zero) کہتے ہیں۔

مسئلہ باقی کے ایک بہت کارآمد نتیجہ کو مسئلہ تجزی کہتے ہیں۔

5.2.4 مسئلہ تجزّی (Factor Theorem)

(i) ''اگر کسی کثیر رقمی $p(x)$ کے لیے $p(a) = 0$ ہو جائے تو $(x - a)$ کثیر رقمی کا ایک جُزوِ ضربی ہوتا ہے۔''

(ii) ''اس کے برعکس اگر $(x - a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جزوِ ضربی ہو تو $p(a) = 0$ ہوتا ہے۔''

ثبوت

فرض کریں کسی کثیر رقمی $p(x)$ کو $(x - a)$ پر تقسیم کرنے سے حاصل قسمت $q(x)$ اور باقی R حاصل ہوتا ہے۔

پس $\quad p(x) = (x - a)\, q(x) + R$

لیکن مسئلہ باقی کی رو سے $\quad R = p(a)$

اس لیے $\quad p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$

(i) اب اگر $p(a) = 0$ ہو تو

$$p(x) = (x - a)\, q(x)$$

یعنی $(x - a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا ایک جُزوِ ضربی ہے۔

(ii) اس کے برعکس، اگر $(x - a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جُزوِ ضربی ہو تو $p(x)$ کو $(x - a)$ پر تقسیم کرنے سے باقی صفر کے برابر ہونا چاہیے۔ یعنی $p(a) = 0$

اس طرح مسئلہ تجزّی کا ثبوت مکمل ہو جاتا ہے۔

نوٹ

مسئلہ تجزّی کو درج ذیل الفاظ میں بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔

''$(x - a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جُزوِ ضربی ہو گا صرف اور صرف اگر $x = a$ مساوات $p(x) = 0$ کے حل سیٹ کا رکن ہو۔''

مسئلہ تجزّی دیے گئے کثیر رقمی جملوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے میں ہماری مدد کرتا ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ مسئلہ تجزّی اس بات کا تعین کرتا ہے کہ $(x - a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جُزوِ ضربی ہو گا یا نہیں۔ اس مقصد کے لیے ہم نے صرف یہ معلوم (check) کرنا ہوتا ہے کہ $p(a) = 0$ ہے یا نہیں ہے۔

مثال 1 تعین کریں کہ $(x - 2)$ کثیر رقمی $x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ کا جزوِ ضربی ہے یا نہیں۔

حل آسانی کی خاطر فرض کریں کہ

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$$

$(x - 2)$ کے لیے حاصل ہونے والا باقی

$$p(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 3(2) + 2$$
$$= 8 - 16 + 6 + 2 = 0$$

لہٰذا مسئلہ تجزّی کی رو سے $(x - 2)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جُزوِ ضربی ہے۔

مثال 2 تین درجی کثیر رقمی $p(x)$ معلوم کریں جس کے زیرو $(p(x) = 0)$ کے حل سیٹ کے ارکان 2، 1- اور 3 ہیں۔

حل چونکہ $x = 2, -1, 3$ مساوات $p(x) = 0$ کے حل سیٹ کے ارکان ہیں۔

اس لیے مسئلہ تجزّی کی رو سے

$(x-2)$, $(x+1)$ اور $(x-3)$ کثیر رقمی $p(x)$ کے اجزائے ضربی ہیں۔

پس $p(x) = a(x-2)(x+1)(x-3)$

جبکہ a کے لیے کوئی بھی غیر صفر قیمت لگائی جا سکتی ہے۔ اگر $a = 1$ لیں تو

$$p(x) = (x-2)(x+1)(x-3)$$

$$= x^3 - 4x^2 + x + 6$$

جو مطلوبہ کثیر رقمی جملہ ہے۔

مشق 5.3

1۔ مسئلہ باقی کی مدد سے باقی معلوم کیجیے جب

(i) $3x^3 - 10x^2 + 13x - 6$ کو $(x-2)$ پر تقسیم کیا جائے۔

(ii) $4x^3 - 4x + 3$ کو $(2x-1)$ پر تقسیم کیا جائے۔

(iii) $6x^4 + 2x^3 - x + 2$ کو $(x+2)$ پر تقسیم کیا جائے۔

(iv) $(2x-1)^3 + 6(3+4x)^2 - 10$ کو $(2x+1)$ پر تقسیم کیا جائے۔

(v) $x^3 - 3x^2 + 4x - 14$ کو $(x+2)$ پر تقسیم کیا جائے۔

2۔ (i) اگر $(x+2)$ کثیر رقمی $3x^2 - 4kx - 4k^2$ کا جُزوِ ضربی ہو تو k کی قیمتیں معلوم کریں۔

(ii) اگر $(x-1)$ کثیر رقمی $x^3 - kx^2 + 11x - 6$ کا جُزوِ ضربی ہو تو k کی قیمت معلوم کریں۔

3۔ تقسیم کا عمل کیے بغیر تعین کریں کہ

(i) $(x-2)$ اور $(x-3)$ کثیر رقمی $p(x) = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$ کے اجزائے ضربی ہیں یا نہیں؟

(ii) $(x-2)$, $(x+3)$ اور $(x-4)$ کثیر رقمی $q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ کے اجزائے ضربی ہیں یا نہیں؟

4۔ معلوم کیجیے کہ m کی کس قیمت کے لیے $x + 2$ کثیر رقمی $p(x) = 4x^3 - 7x^2 + 6x - 3m$ کو پورا پورا تقسیم کرے گا؟

5۔ k کی کس قیمت کے لیے کثیر رقمیوں $p(x) = kx^3 + 4x^2 + 3x - 4$ اور $q(x) = x^3 - 4x + k$ کو $(x-3)$ پر تقسیم کرنے سے یکساں باقی بچے گا۔

6۔ کثیر رقمی $p(x) = x^3 + ax^2 + 7$ کو $(x + 1)$ پر تقسیم کرنے سے $2b$ باقی بچتا ہے۔ اگر اس کثیر رقمی کو $(x - 2)$ پر تقسیم کرنے سے $(b+5)$ باقی بچے تو a اور b کی قیمت معلوم کریں۔

7۔ $(x + 4)$ کثیر رقمی $x^3 + lx^2 + mx + 24$ کا جُزو ضربی ہے۔ اگر اس کثیر رقمی کو $(x-2)$ پر تقسیم کیا جائے تو باقی 36 بچتا ہے۔ l اور m کی قیمتیں معلوم کریں۔

8۔ کثیر رقمی $lx^3 + mx^2 - 4$ کو $(x-1)$ اور $(x+2)$ پر تقسیم کرنے سے بالترتیب 3– اور 12 بطور باقی بچیں تو l اور m کی قیمتیں معلوم کریں۔

9۔ کثیر رقمی $ax^3 - 9x^2 + bx + 3a$ جملہ $x^2 - 5x + 6$ پر پورا پورا تقسیم ہوتا ہے۔ a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔

5.3 تین درجی کثیر رقمی جملہ کی تجزّی

ہم مسئلہ تجزّی کی مدد سے کسی دی گئی تین درجی کثیر رقمی جملہ کی تجزی کرنے کے عمل کی وضاحت درج ذیل طریقہ سے کرتے ہیں۔ یہ طریقہ خاص طور پر تین درجی کثیر رقمی جملہ کی تجزّی کے لیے بہت موزوں ہے۔ ہم ایک نہایت کارآمد مسئلہ (بغیر ثابت کیے) بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ (دی ہوئی مساوات کا ناطق حل معلوم کرنا)

فرض کریں کہ

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

ایک متغیر x میں کثیر رقمی مساوات ہے جس کا درجہ n ہے اور تمام عددی سر صحیح اعداد ہیں۔ اس مساوات کے حل سیٹ کے ارکان میں کوئی ایک رکن ناطق عدد $\frac{p}{q}$ ہو گا اگر p مستقل مقدار a_n کا عاد اور q پہلے عددی سر a_0 (x^n کا عددی سر) کا عاد ہو۔

مثال مسئلہ تجزّی کی مدد سے کثیر رقمی $x^3 - 4x^2 + x + 6$ کی تجزّی معلوم کریں۔

حل فرض کریں دیا گیا کثیر رقمی جملہ: $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

$P(x)$ میں مستقل مقدار 6 ہے اور پہلا عددی سر '1' ہے۔

$$6 \text{ کے تمام ممکن عاد } = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$$

$$1 \text{ کے تمام ممکن عاد } = \pm1$$

لہٰذا مساوات $P(x) = 0$ کے حل سیٹ کے ممکن ارکان درج ذیل میں سے ہوں گے۔

$$\frac{p}{q} = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$$

مسئلہ تجزی کی رو سے اگر $P(x)$ میں $x = a$ درج کرنے سے $P(a) = 0$ ہو تو $(x - a)$ کثیر رقتی $P(x)$ کا جُز وضربی ہوگا۔

اب ہم $\frac{p}{q}$ کے ہر عاد کو باری باری چیک کریں گے کہ x کی جگہ درج کرنے سے $P(a) = 0$ ہوگا یا نہیں۔

سعی اور خطا طریقہ سے $x = 1$ کے لیے کوشش کرنے سے

$$P(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 1 + 6$$
$$= 1 - 4 + 1 + 6 = 4 \neq 0$$

لہٰذا $x - 1$ کثیر رقتی $P(x)$ کا جُز وضربی نہیں ہے۔

اب $x = -1$ کے لیے کوشش کرنے سے

$$P(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 1 + 6$$
$$= -1 - 4 - 1 + 6 = 0$$

لہٰذا $x - (-1) = (x + 1)$ کثیر رقتی $P(x)$ کا جُز وضربی ہے۔

علاوہ ازیں $x = 2$ کے لیے کوشش کرنے سے

$$P(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 2 + 6$$
$$= 8 - 16 + 2 + 6 = 0$$

لہٰذا $(x - 2)$ کثیر رقتی $P(x)$ کا دوسرا جُز وضربی ہے۔

اسی طرح

$$P(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + 3 + 6$$
$$= 27 - 36 + 3 + 6 = 0$$

لہٰذا $(x - 3)$ کثیر رقتی $P(x)$ کا تیسرا جُز وضربی ہے۔

پس تجزی کی شکل میں

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$
$$= (x + 1)\,(x - 2)\,(x - 3)$$

مشق 5.4

مسئلہ تجزّی کی مدد سے درج ذیل تین درجی کثیر رقتی جملوں کی تجزّی کیجیے۔

1. $x^3 - 2x^2 - x + 2$
2. $x^3 - x^2 - 22x + 40$
3. $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$
4. $x^3 + x^2 - 10x + 8$
5. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
6. $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$
7. $3x^3 - x^2 - 12x + 4$
8. $2x^3 + x^2 - 2x - 1$

اعادہ مشق 5

1۔ دیے ہوئے جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) $x^2 - 5x + 6$ کے اجزائے ضربی .... ہیں۔

(a) $x + 1, x - 6$ (b) $x - 2, x - 3$

(c) $x + 6, x - 1$ (d) $x + 2, x + 3.$

(ii) $8x^3 + 27y^3$ کے اجزائے ضربی .... ہیں۔

(a) $(2x + 3y),(4x^2 + 9y^2)$ (b) $(2x - 3y),(4x^2 - 9y^2)$

(c) $(2x + 3y),(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ (d) $(2x - 3y),(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

(iii) $3x^2 - x - 2$ کے اجزائے ضربی .... ہیں۔

(a) $(x + 1),(3x - 2)$ (b) $(x + 1),(3x + 2)$

(c) $(x - 1),(3x - 2)$ (d) $(x - 1),(3x + 2)$

(iv) $a^4 - 4b^4$ کے اجزائے ضربی .... ہیں۔

(a) $(a - b),(a + b),(a^2 + 4b^2)$ (b) $(a^2 - 2b^2),(a^2 + 2b^2)$

(c) $(a - b),(a + b),(a^2 - 4b^2)$ (d) $(a - 2b),(a^2 + 2b^2)$

(v) $9a^2 - 12ab$ کو کامل مربع بنانے کے لیے اس میں کیا جمع کریں گے؟ ....

(a) $-16b^2$ (b) $16b^2$ (c) $4b^2$ (d) $-4b^2$

(vi) m کی کس قیمت کے لیے $x^2 + 4x + m$ کامل مربع بن جائے گا؟ ....

(a) 8 (b) -8 (c) 4 (d) 16

(vii) $5x^2 - 17xy - 12y^2$ کے اجزائے ضربی .... ہیں۔

(a) $(x + 4y),(5x + 3y)$ (b) $(x - 4y),(5x - 3y)$

(c) $(x - 4y),(5x + 3y)$ (d) $(5x - 4y),(x + 3y)$

(viii) $27x^3 - \frac{1}{x^3}$ کے اجزائے ضربی .... ہیں۔

(a) $\left(3x - \frac{1}{x}\right),\left(9x^2 + 3 + \frac{1}{x^2}\right)$ (b) $\left(3x + \frac{1}{x}\right),\left(9x^2 + 3 + \frac{1}{x^2}\right)$

(c) $\left(3x - \frac{1}{x}\right),\left(9x^2 - 3 + \frac{1}{x^2}\right)$ (d) $\left(3x + \frac{1}{x}\right),\left(9x^2 - 3 + \frac{1}{x^2}\right)$

2۔ تکمیلی سوالات۔ خالی جگہ اس طرح پُر کیجیے کہ بیان درست ہو۔

(i) $x^2 + 5x + 6 =$ ....

(ii) $4a^2 - 16 =$ ....

(iii) $4a^2 + 4ab +$ .... ایک کامل مربع ہے

(iv) $\dfrac{x^2}{y^2} - 2 + \dfrac{y^2}{x^2} =$ ....

(v) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) =$ ....

(vi) $x^4 - 16$ کی تجزی $=$ ....

(vii) اگر $(x - 2)$ کثیر رقمی $p(x) = x^2 + 2kx + 8$ کا جُزوضربی ہو تو $k =$ ....

3۔ مندرجہ ذیل جملوں کی تجزّی کیجیے۔

(i) $x^2 + 8x + 16 - 4y^2$

(ii) $4x^2 - 16y^2$

(iii) $9x^2 + 27x + 8$

(iv) $1 - 64z^3$

(v) $8x^3 - \dfrac{1}{27y^3}$

(vi) $2y^2 + 5y - 3$

(vii) $x^3 + x^2 - 4x - 4$

(viii) $25m^2n^2 + 10mn + 1$

(ix) $1 - 12pq + 36p^2q^2$

خلاصہ

☆ اگر کسی کثیر رقمی جملے کو کچھ دوسرے کثیر رقمی جملوں کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جائے تو ان جملوں میں سے ہر ایک کو دیے گئے جملے کا جُزوضربی کہتے ہیں۔

☆ کسی الجبری جملے کو اس کے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھنے کے عمل کو تجزّی کہتے ہیں۔
ہم نے مندرجہ ذیل قسم کے جملوں کی تجزّی کرنا سیکھا۔

- $ka + kb + kc$
- $ac + ad + bc + bd$
- $a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2$
- $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2$

- $a^4 + a^2b^2 + b^4$ یا $a^4 + 4b^4$
- $x^2 + px + q$
- $ax^2 + bx + c$
- $(ax^2 + bx + c)\ (ax^2 + bx + d) + k$
- $(x + a)\ (x + b)\ (x + c)\ (x + d) + k$
- $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + kx^2$
- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 \pm b^3$

☆ اگر کثیر رقمی جملے $p(x)$ کو $(x - a)$ پر تقسیم کیا جائے تو $p(a)$ بطور باقی حاصل ہوتا ہے۔

☆ اگر کسی کثیر رقمی $p(x)$ میں متغیر x کی جگہ کوئی خاص نمبر $x = a$ درج کرنے سے $p(a) = 0$ ہو جائے تو $x = a$ کو کثیر رقمی $p(x)$ کا زیرو کہتے ہیں۔

☆ اگر $p(a) = 0$ ہو تو $(x - a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جُزوِ ضربی ہوتا ہے۔ برعکس اس کے اگر $(x - a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جزوِ ضربی ہو تو $p(a) = 0$ ہوگا۔

مسئلہ تجزی کی مدد سے تین درجی کثیر رقمی جملوں کی تجزی کی ہے۔
