یونٹ 6

الجبری جملوں کا ذو اضعاف اقل، عادِ اعظم اور جذر المربع

(ALGEBRAIC MANIPULATION)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

6.1 بڑے سے بڑا مشترک جز وضربی اور چھوٹے سے چھوٹا مشترک حاصل ضربی

(Highest Common Factor and Least Common Multiple)

6.2 الجبری کسروں کے بنیادی عوامل (Basic Operations on Algebraic Fractions)

6.3 الجبری جملے کا جذر المربع (Square Root of Algebraic Expression)

یونٹ میں طلبا کے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل/نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت تک نامکمل سمجھا جائے گا جب تک ہر طالب علم درج ذیل تصورات کو ہو بہو بیان کرنے پر علمی دسترس حاصل نہ کر لے۔

☆ دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا بڑے سے بڑا مشترک جُزوضربی یعنی عادِ اعظم (H.C.F.) اور چھوٹے سے چھوٹا مشترک حاصل ضربی یعنی ذواضعاف اقل (L.C.M.) معلوم کرنا۔

☆ ذواضعاف اقل اور عادِ اعظم کو بذریعہ تجزّی یا بذریعہ تقسیم معلوم کرنا۔

☆ ذواضعاف اقل اور عادِ اعظم کے درمیان تعلق کو جاننا۔

☆ حقیقی عملی زندگی کے مسائل کو ذواضعاف اقل اور عادِ اعظم سے مناسبت قائم کرنا اور ان کو حل کرنا۔

☆ عادِ اعظم اور ذواضعاف اقل کی مدد سے کسری جملوں کے مجموعہ، فرق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم کے عوامل کی مدد سے مختصر کرنا۔

☆ دیے ہوئے الجبری جملوں کا بذریعہ تجزی اور بذریعہ تقسیم جذر المربع معلوم کرنا۔

تعارف (Introduction)

اس یونٹ میں ہم پہلے الجبری جملوں کے عادِ اعظم اور ذو اضعاف اقل بذریعہ تجزی اور بذریعہ تقسیم معلوم کریں گے۔ اس کے بعد عادِ اعظم اور ذو اضعاف اقل کی مدد سے کسری جملوں کا اختصار کرنا سیکھیں گے۔

یونٹ کے آخری حصہ میں ہم الجبری جملوں کے جذر المربع کو معلوم کرنے کو زیرِ بحث بھی لائیں گے۔

6.1 الجبری جملوں کا عادِ اعظم اور ذو اضعاف اقل
(H.C.F. and L.C.M. of Algebraic Expressions)

6.1.1 (a) عادِ اعظم (H.C.F.)

اگر دو یا دو سے زیادہ الجبری جملے دیے گئے ہوں تو ان کے مشترک اجزائے ضربی کی بڑی سے بڑی قوت کو دیے ہوئے جملوں کا عادِ اعظم کہا جاتا ہے۔

(b) ذو اضعاف اقل (L.C.M.)

ایک الجبری جملہ $p(x)$ اگر دیے ہوئے دو یا دو سے زیادہ جملوں سے پورا پورا تقسیم ہوتا ہو اور ان کے مشترک اور غیر مشترک اجزائے ضربی کا چھوٹے سے چھوٹا حاصل ضرب ہو تو $p(x)$ ان جملوں کا ذو اضعاف اقل کہلاتا ہے۔

6.1.2 (a) عادِ اعظم (H.C.F.) معلوم کرنا۔

دیے ہوئے جملوں کا عادِ اعظم مندرجہ ذیل دو طریقوں سے حاصل کر سکتے ہیں۔

(i) بذریعہ تجزی (ii) بذریعہ تقسیم

بعض دفعہ بذریعہ تجزی عادِ اعظم معلوم کرنا مشکل ہو جاتا ہے۔ ایسی صورت میں عادِ اعظم کو تقسیم کے طریقہ سے حاصل کر لیتے ہیں۔ ان دونوں طریقوں کی ہم مثالوں کی مدد سے وضاحت کرتے ہیں۔

(i) عادِ اعظم بذریعہ تجزی معلوم کرنا

مثال کثیر رقمی جملوں $x^2 - 4,\ x^2 + 4x + 4,\ 2x^2 + x - 6$ کا عادِ اعظم معلوم کریں۔

حل جملوں کی تجزی کرنے سے

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

$$2x^2 + x - 6 = 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x(x + 2) - 3(x + 2)$$
$$= (x + 2)(2x - 3)$$

پس بڑے سے بڑا مشترک جزو ضربی یعنی عادِ اعظم $x + 2$ ہے۔

(ii) عادِاعظم بذریعہ تقسیم معلوم کرنا

مثال کثیر رقمی $p(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ اور $q(x) = x^3 - 7x + 6$ کا بذریعہ تقسیم عادِاعظم معلوم کریں۔

حل

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ x^3 - 7x + 6 & x^3 - 7x^2 + 14x - 8 \\ & \pm x^3 \qquad \mp 7x \pm 6 \\ \hline & \quad -7x^2 + 21x - 14 \\ & = -7(x^2 - 3x + 2) \end{array}$$

باقی کثیر رقمی کا جُزو ضربی 7- چونکہ دونوں کثیر رقمیوں میں مشترک نہیں اس لیے ہم 7- کو تقسیم کے عمل سے نظر انداز کر دیتے ہیں۔ چونکہ

$$\begin{array}{r|l} & \quad x + 3 \\ x^2 - 3x + 2 & x^3 + 0x^2 - 7x + 6 \\ & \pm x^3 \mp 3x^2 \pm 2x \\ \hline & \qquad 3x^2 - 9x + 6 \\ & \qquad \pm 3x^2 \mp 9x \pm 6 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

پس $p(x)$ اور $q(x)$ کا عادِاعظم $x^2 - 3x + 2$ ہے۔

مشاہدہ کریں کہ

(i) بذریعہ تقسیم عادِاعظم معلوم کرنے کے دوران ضرورت پڑنے پر کسی بھی مناسب عدد سے ضرب دی جا سکتی ہے۔

(ii) اگر دی ہوئی کثیر رقمی کی تعداد تین ہو تو پہلے دو کا عادِاعظم معلوم کرنے کے بعد حاصل عادِاعظم اور تیسری کثیر رقمی کا عادِاعظم مطلوبہ عادِاعظم ہوگا۔

(b) بذریعہ تجزی ذواضعاف اقل معلوم کرنا

دیے ہوئے الجبری جملوں کا ذواضعاف اقل معلوم کرنے کا عملی قانون

(i) دیے ہوئے جملوں کی سادہ ترین حد تک مکمل تجزّی کیجیے۔

(ii) ذو اضعاف اقل چونکہ ہر جملہ کے اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔ اس میں اجزائے ضربی کی قوت نمائی کا خیال رکھا جاتا ہے۔

مثال $p(x) = 12(x^3 - y^3)$ اور $q(x) = 8(x^3 - xy^2)$ کا ذو اضعاف معلوم کیجیے۔

حل جملوں کی تجزی کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں:

$$p(x) = 12(x^3 - y^3) = 2^2 \times 3 \times (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

اور

$$q(x) = 8(x^3 - xy^2) = 8x(x^2 - y^2)$$

$$= 2^3 x(x + y)(x - y)$$

پس $p(x)$ اور $q(x)$ کا ذو اضعاف اقل

$$= 2^3 \times 3 \times x(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$= 24x(x + y)(x^3 - y^3)$$

6.1.3 عادِ اعظم اور ذو اضعاف اقل کے درمیان تعلق

مثال بذریعہ تجزّی $p(x) = 12(x^5 - x^4)$ اور $q(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$

(i) عادِ اعظم (ii) ذو اضعاف اقل

معلوم کریں۔

حل پہلے ہم $p(x)$ اور $q(x)$ کی تجزّی کرتے ہیں۔ جیسا کہ

$$p(x) = 12(x^5 - x^4) = 12x^4(x - 1) = 2^2 \times 3 \times x^4(x - 1)$$

$$q(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2) = 8x^2(x^2 - 3x + 2)$$

$$= 2^3 x^2(x - 1)(x - 2)$$

$$\text{عادِ اعظم} = 2^2 x^2(x - 1) = 4x^2(x - 1)$$

$$\text{ذو اضعاف اقل} = 2^3 \times 3 \times x^4(x - 1)(x - 2)$$

مشاہدہ کرتے ہیں کہ

$$p(x)\,q(x) = 12x^4(x - 1) \times 8x^2(x - 1)(x - 2)$$

$$= 96x^6(x - 1)^2(x - 2) \quad \text{.............(i)}$$

اور

$$(\text{ذو اضعاف اقل}) \times (\text{عادِ اعظم}) = [2^3 \times 3 \times x^4(x - 1)(x - 2)][4x^2(x - 1)]$$

$$= [24x^4(x - 1)(x - 2)][4x^2(x - 1)]$$

$$= 96x^6(x - 1)^2(x - 2) \quad \text{.............(ii)}$$

(i) اور (ii) سے واضح ہوتا ہے کہ

$$p(x) \times q(x) = (\text{ذواضعاف اقل}) \times (\text{عادِ اعظم})$$

یعنی

اگر $p(x)$ اور $q(x)$ دو الجبری جملے ہوں اور ان کا عادِ اعظم یا ذواضعاف اقل معلوم ہو تو فارمولا کی مدد سے ذواضعاف اقل یا عادِ اعظم بھی معلوم کر لیتے ہیں۔

جیسا کہ

I $$\text{ذواضعاف اقل} = \frac{p(x) \times q(x)}{\text{عادِ اعظم}}$$

II $$\text{عادِ اعظم} = \frac{p(x) \times q(x)}{\text{ذواضعاف اقل}}$$

III $$p(x) = \frac{\text{ذواضعاف اقل} \times \text{عادِ اعظم}}{q(x)}$$

IV $$q(x) = \frac{\text{ذواضعاف اقل} \times \text{عادِ اعظم}}{p(x)}$$

نوٹ

ذواضعاف اقل اور عادِ اعظم الگ الگ ہوتے ہیں ماسوائے جزو ضربی (1-) ہو۔

مثال 1 دو کثیر رقمی $p(x) = 20(2x^3 + 3x^2 - 2x)$ اور $q(x) = 9(5x^4 + 40x)$ کا عادِ اعظم معلوم کریں۔
فارمولا (I) کی مدد سے ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

حل $p(x)$ اور $q(x)$ کا تجزی کی مدد سے عادِ اعظم حاصل کرتے ہیں۔

$$p(x) = 20(2x^3 + 3x^2 - 2x) = 20x\,(2x^2 + 3x - 2)$$
$$= 20x(2x^2 + 4x - x - 2) = 20x[2x(x + 2) - (x + 2)]$$
$$= 20x\,(x + 2)\,(2x - 1) = 2^2 \times 5 \times x\,(x + 2)\,(2x - 1)$$
$$q(x) = 9(5x^4 + 40x) = 45x(x^3 + 8)$$
$$= 45x\,(x + 2)\,(x^2 - 2x + 4) = 5 \times 3^2 \times x\,(x + 2)\,(x^2 - 2x + 4)$$

پس $\text{عادِ اعظم} = 5x\,(x + 2)$

فارمولا I کی مدد سے

$$\text{ذواضعاف اقل} = \frac{[20x(x+2)(2x-1)]\ [45x(x+2)(x^2-2x+4)]}{5x(x+2)}$$

$$\text{ذواضعاف اقل} = 4 \times 5 \times 9 \times x(x+2)(2x-1)(x^2-2x+4)$$

$$= 180x(x+2)(2x-1)(x^2-2x+4)$$

مثال 2 $p(x) = 6x^3 - 7x^2 - 27x + 8$ اور $q(x) = 6x^3 + 17x^2 + 9x - 4$ کا ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔

حل بذریعہ تقسیم پہلے ہم $p(x)$ اور $q(x)$ کا عادِ اعظم معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ 6x^3 - 7x^2 - 27x + 8 & 6x^3 + 17x^2 + 9x - 4 \\ & \pm 6x^3 \mp 7x^2 \mp 27x \pm 8 \\ \hline & \quad 24x^2 + 36x - 12 \\ & = 12(2x^2 + 3x - 1) \end{array}$$

جزوِ ضربی 12 کو نظر انداز کرنے کے بعد کا عمل تقسیم

$$\begin{array}{r|l} & \quad 3x - 8 \\ 2x^2 + 3x - 1 & 6x^3 - 7x^2 - 27x + 8 \\ & \pm 6x^3 \pm 9x^2 \mp 3x \\ \hline & \quad -16x^2 - 24x + 8 \\ & \quad \mp 16x^2 \mp 24x \pm 8 \\ \hline & \quad\quad 0 \\ \hline \end{array}$$

پس $p(x)$ اور $q(x)$ کا عادِ اعظم $2x^2 + 3x - 1$ ہے۔

فارمولا (I) کی مدد سے

$$\text{ذواضعاف اقل} = \frac{p(x) \times q(x)}{\text{عادِ اعظم}}$$

ذو اضعاف اقل $= \dfrac{(6x^3 - 7x^2 - 27x + 8)\,(6x^3 + 17x^2 + 9x - 4)}{2x^2 + 3x - 1}$

$$= \frac{6x^3 - 7x^2 - 27x + 8}{2x^2 + 3x - 1} \times (6x^3 + 17x^2 + 9x - 4)$$

$$= (3x - 8)\,(6x^3 + 17x^2 + 9x - 4)$$

جو مطلوبہ ذو اضعاف اقل ہے۔

6.1.4 عادِ اعظم اور ذو اضعاف اقل کا استعمال

مثال دیے ہوئے دو اعداد کا مجموعہ 120 ہے اور ان کا عادِ اعظم 12 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

حل فرض کیجیے دو اعداد $12x$ اور $12y$ ہیں (کیونکہ x اور y کا عادِ اعظم 1 ہے)

مثال کی شرائط کے مطابق

$$12x + 12y = 120$$

$$\Rightarrow \qquad x + y = 10$$

ایسے قدرتی اعداد کے جوڑے جن کا مجموعہ 10 ہے:

$(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5)$ ہیں۔

$(1, 9)$ اور $(3, 7)$ مطلوبہ اعداد کے جوڑے ہیں جن کا عادِ اعظم 1 ہے اور مثال کی شرائط پوری کرتے ہیں۔

پس مطلوبہ اعداد $1 \times 12,\ 9 \times 12;\ 3 \times 12,\ 7 \times 12$ ہیں۔

یعنی $12, 108$ اور $36, 84$

مشق 6.1

1۔ مندرجہ ذیل جملوں کا عادِ اعظم معلوم کیجیے۔

(i) $39x^7y^3z \ ,\ 91x^5y^6z^7$ (ii) $102xy^2z \ ,\ 85x^2yz \ ,\ 187xyz^2$

2۔ مندرجہ ذیل جملوں کا عادِ اعظم بذریعہ تجزّی معلوم کریں۔

(i) $x^2 + 5x + 6, \quad x^2 - 4x - 12$

(ii) $x^3 - 27, \quad x^2 + 6x - 27, \quad 2x^2 - 18$

(iii) $x^3 - 2x^2 + x, \quad x^2 + 2x - 3, \quad x^2 + 3x - 4$

(iv) $18(x^3 - 9x^2 + 8x), \quad 24(x^2 - 3x + 2)$

(v) $36(3x^4 + 5x^3 - 2x^2), \quad 54(27x^4 - x)$

3۔ مندرجہ ذیل کا بذریعہ تقسیم عادِ اعظم معلوم کریں

(i) $x^3 + 3x^2 - 16x + 12 \quad , \quad x^3 + x^2 - 10x + 8$

(ii) $x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3 \quad , \quad 5x^3 + 3x^2 - 17x + 6$

(iii) $2x^5 - 4x^4 - 6x \quad , \quad x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2$

4۔ مندرجہ ذیل جملوں کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

(i) $39x^7y^3z \; , \; 91x^5y^6z^7$ (ii) $102xy^2z \; , 85x^2yz \; , \; 187xyz^2$

5۔ بذریعہ تجزی مندرجہ ذیل جملوں کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

(i) $x^2 - 25x + 100 \; , \; x^2 - x - 20$

(ii) $x^2 + 4x + 4, x^2 - 4, 2x^2 + x - 6$

(iii) $2(x^4 - y^4), 3(x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3)$

(iv) $4(x^4 - 1), 6(x^3 - x^2 - x + 1)$

6۔ k کی کس قیمت کے لیے $(x + 4)$ عادِ اعظم ہے جملوں $x^2+x-(2k+2)$ اور $2x^2 + kx - 12$ کا؟

7۔ اگر $p(x) = (x + 3)\,(2x^2 - 3x + k)$ اور $q(x) = (x - 2)\,(3x^2 + 7x - l)$ کا عادِ اعظم $(x - 2)$ $(x + 3)$ ہو تو k اور l کی قیمت معلوم کریں۔

8۔ اگر دو کثیر رقمی $p(x)$ اور $q(x)$ کا ذواضعاف اقل $2(x^4 - 1)$ اور عادِ اعظم $(x + 1)\,(x^2 + 1)$ ہو۔ اور $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ تو $q(x)$ معلوم کریں۔

9۔ اگر $p(x) = 10(x^2 - 9)\,(x^2 - 3x + 2)$ اور $q(x) = 10x(x + 3)\,(x - 1)^2$ اور ان کا عادِ اعظم $10(x + 3)\,(x - 1)$ ہو تو ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔

10۔ اگر دو کثیر رقمی کے عادِ اعظم اور ذواضعاف اقل کا حاصل ضرب $(x + 5)\,(x - 2)\,(x + 3)^2$ ہو اور ایک کثیر رقمی $(x + 3)\,(x - 2)$ اور دوسری $x^2 + kx + 15$ ہو تو k کی قیمت معلوم کریں۔

11۔ وقاص کی خواہش ہے کہ 128 کیلے اور 176 چند بچوں میں سیب برابر برابر تقسیم کرے۔ بتائیے وقاص زیادہ سے زیادہ کتنے بچوں میں تقسیم کر سکتا ہے ؟

6.2 الجبری کسور کے بنیادی عوامل (Basic Operations on Algebraic Fractions)

ہم اب الجبری کسور پر بنیادی عوامل جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کا عمل کریں گے۔ جو ہم مثالوں سے واضح کریں گے اور فرض کریں گے کہ تمام کسور با عمل ہیں۔

مثال 1 مندرجہ ذیل کا اختصار کیجیے۔

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2}+\frac{x+2}{x^2-4x+3}+\frac{x+1}{x^2-5x+6}$$

حل

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2}+\frac{x+2}{x^2-4x+3}+\frac{x+1}{x^2-5x+6}$$

$$=\frac{x+3}{x^2-2x-x+2}+\frac{x+2}{x^2-3x-x+3}+\frac{x+1}{x^2-3x-2x+6}$$

$$=\frac{x+3}{x(x-2)-1(x-2)}+\frac{x+2}{x(x-3)-1(x-3)}+\frac{x+1}{x(x-3)-2(x-3)}$$

$$=\frac{x+3}{(x-2)\,(x-1)}+\frac{x+2}{(x-3)\,(x-1)}+\frac{x+1}{(x-3)\,(x-2)}$$

$$=\frac{(x+3)(x-3)+(x+2)(x-2)+(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{x^2-9+x^2-4+x^2-1}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}$$

$$=\frac{3x^2-14}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}$$

مثال 2 $\frac{x^3-8}{x^2-4}\times\frac{x^2+6x+8}{x^2-2x+1}$ کو سادہ ترین الجبری جملہ میں مختصر کریں۔

حل مکمل تجزی سے ہم حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{x^3-8}{x^2-4}\times\frac{x^2+6x+8}{x^2-2x+1}=\frac{(x-2)\,(x^2+2x+4)\times(x+2)\,(x+4)}{(x-2)\,(x+2)\times(x-1)^2}$$

شمار کنندہ کے اجزائے ضربی $(x-2)$, (x^2+2x+4), $(x+2)$ اور $(x+4)$ ہیں اور مخرج کے اجزائے ضربی $(x-2)$, $(x+2)$ اور $(x-1)^2$ ہیں۔ ان کا عادِ اعظم $(x-2)$ $(x+2)$ ہے۔

$$= \frac{(x^2+2x+4)(x+4)}{(x-1)^2}$$ (عادِ اعظم پر تقسیم کرنے سے)

مثال 3

$\frac{x^2+x+1}{x^2-9}$ کو $\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$ پر تقسیم کریں اور سادہ ترین کسر میں ظاہر کریں۔

حل

$$\text{حاصل تقسیم} = \frac{x^2+x+1}{x^2-9} \div \frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$$

$$= \frac{(x^2+x+1)}{(x^2-9)} \times \frac{(x^2-4x+3)}{(x^3-1)}$$

$$= \frac{(x^2+x+1)(x^2-x-3x+3)}{(x^2-9)(x^3-1)}$$

$$= \frac{(x^2+x+1)(x-3)(x-1)}{(x+3)(x-3)(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+3}$$

مطلوبہ اختصار ہے۔

مشق 6.2

مندرجہ ذیل کو ناطق جملوں میں مختصر کریں۔

1. $\frac{x^2-x-6}{x^2-9} + \frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

2. $\left[\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} - \frac{4x}{x^2+1} + \frac{4x}{x^4-1}\right]$

3. $\frac{1}{x^2-8x+15} + \frac{1}{x^2-4x+3} - \frac{2}{x^2-6x+5}$

4. $\frac{(x+2)(x+3)}{x^2-9} + \frac{(x+2)(2x^2-32)}{(x-4)(x^2-x-6)}$

5. $\frac{x+3}{2x^2+9x+9} + \frac{1}{2(2x-3)} - \frac{4x}{4x^2-9}$

6. $A - \frac{1}{A}$, جب کہ $A = \frac{a+1}{a-1}$

7. $\left[\frac{x-1}{x-2} + \frac{2}{2-x}\right] - \left[\frac{x+1}{x+2} + \frac{4}{4-x^2}\right]$

8۔ کون سا ناطق جملہ $\frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}$ سے تفریق کرنے سے حاصل تفریق $\frac{x-1}{x-2}$ حاصل کرتے ہیں؟

ظاہر کیے گئے عوامل کے عمل کرنے سے سادہ ترین جملہ میں مختصر کیجیے۔

9. $\frac{x^2+x-6}{x^2-x-6} \times \frac{x^2-4}{x^2-9}$

10. $\frac{x^3-8}{x^2-4} \times \frac{x^2+6x+8}{x^2-2x+1}$

11. $\frac{x^4-8x}{2x^2+5x-3} \times \frac{2x-1}{x^2+2x+4} \times \frac{x+3}{x^2-2x}$

12. $\frac{2y^2+7y-4}{3y^2-13y+4} \div \frac{4y^2-1}{6y^2+y-1}$

13. $\left[\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right] \div \left[\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right]$

6.3 الجبری جملوں کا جذر المربع (Square Root of Algebraic Expressions)

6.3.1 تعریف

نمبرز کے جذر المربع کی طرح ہم دیے ہوئے الجبری جملے $p(x)$ کے جذر المربع کی بھی تعریف کرتے ہیں کہ $p(x)$ ایک دوسرے جملہ $q(x)$ کا جذر المربع ہوگا اگر $q(x) \times q(x) = p(x)$

جیسا کہ اگر $25 = 5 \times 5$ ہو تو 25 کا جذر المربع 5 ہوتا ہے۔

یعنی کسی بھی ایسے الجبری جملہ $p(x)$ کا جذر المربع معلوم کر سکتے ہیں جو ایک مکمل مربع ہو یا مربع میں ظاہر کیا جا سکے۔

یونٹ کے اس حصہ میں الجبری جملوں کے جذر المربع معلوم کرنا سیکھیں گے۔

(i) بذریعہ تجزّی

(ii) بذریعہ تقسیم

مثال 1 بذریعہ تجزی الجبری جملے $4x^2 - 12x + 9$ کا جذرالمربع معلوم کیجیے۔

حل بذریعہ تجزی

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 9 &= 4x^2 - 6x - 6x + 9 \\ &= 2x(2x-3) - 3(2x-3) \\ &= (2x-3)(2x-3) \\ &= (2x-3)^2 \end{aligned}$$

پس $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \pm(2x-3)$

مثال 2 بذریعہ تجزی الجبری جملے $x^2 + \frac{1}{x^2} + 12\left(x + \frac{1}{x}\right) + 38$ کا جذرالمربع معلوم کیجیے۔ جبکہ $x \neq 0$

حل

جملہ $x^2 + \frac{1}{x^2} + 12\left(x + \frac{1}{x}\right) + 38$

نمبر 2 کو جمع اور تفریق کرنے سے $= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 12\left(x + \frac{1}{x}\right) + 36$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right)(6) + (6)^2$$

$= \left[\pm\left(x + \frac{1}{x} + 6\right)\right]^2;$ چونکہ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

پس مطلوبہ جذرالمربع $\pm\left(x + \frac{1}{x} + 6\right)$ ہے۔

(ii) **بذریعہ تقسیم**

بعض حالات میں دیے ہوئے الجبری جملہ کو تجزی کی مدد سے مکمل مربع میں تبدیل کرنا زیادہ مشکل ہو جاتا ہے۔ ایسے حالات میں دیے ہوئے جملہ کا جذرالمربع عام تقسیم کے طریقہ سے معلوم کر لیتے ہیں۔ تقسیم کا طریقہ وہی ہے جو ہم نمبرز کی صورت میں استعمال کرتے ہیں۔

نوٹ

تقسیم کے عمل سے پہلے ہم دیے ہوئے جملہ کو متغیر x کی قوت نما کو نزولی ترتیب میں تبدیل کر لیتے ہیں۔

مثال 1 الجبری جملہ $4x^4 + 12x^3 + x^2 - 12x + 4$ کا جذر المربع بذریعہ تقسیم معلوم کیجیے۔

حل چونکہ دیا ہوا الجبری جملہ x کی مطلوبہ قوت نمائی ترتیب نزولی میں موجود ہے۔ اس لیے اس میں تبدیلی کی ضرورت نہیں۔
اب جملہ کی پہلی رقم کا جذر المربع حاصل کیا۔ یعنی $\sqrt{4x^4} = 2x^2$ سے تقسیم کا عمل شروع کیا تو پہلا حاصل قسمت بھی $2x^2$ ہی ہوگا۔ اگلے ہر قدم پر باقی تمام رقموں کو شامل کر کے اسی عمل کو دہراتے جانے سے مطلوبہ جذر المربع حاصل کرلیں گے:

یعنی

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 + 3x - 2 \\ \hline 2x^2 & 4x^4 + 12x^3 + x^2 - 12x + 4 \\ & \pm 4x^4 \\ \hline 4x^2 + 3x & 12x^3 + x^2 - 12x + 4 \\ & \pm 12x^3 \pm 9x^2 \\ \hline 4x^2 + 6x - 2 & -8x^2 - 12x + 4 \\ & \mp 8x^2 \mp 12x \pm 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

پس دیے ہوئے جملہ کا جذر المربع $\pm(2x^2 + 3x - 2)$ ہے۔

مثال 2 بذریعہ تقسیم الجبری جملہ $4\frac{x^2}{y^2} + 8\frac{x}{y} + 16 + 12\frac{y}{x} + 9\frac{y^2}{x^2}$ کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

حل چونکہ جملہ میں x کی قوت نمائی نزولی ترتیب میں ہے اور پہلی رقم کا جذر المربع $\sqrt{4\frac{x^2}{y^2}} = 2\frac{x}{y}$ ہے اس لیے عمومی تقسیمی طریقہ سے جذر المربع معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l} & 2\frac{x}{y} + 2 + 3\frac{y}{x} \\ \hline 2\frac{x}{y} & 4\frac{x^2}{y^2} + 8\frac{x}{y} + 16 + 12\frac{y}{x} + 9\frac{y^2}{x^2} \\ & \pm 4\frac{x^2}{y^2} \\ \hline 4\frac{x}{y} + 2 & 8\frac{x}{y} + 16 + 12\frac{y}{x} + 9\frac{y^2}{x^2} \\ & \pm 8\frac{x}{y} \pm 4 \\ \hline & 12 + 12\frac{y}{x} + 9\frac{y^2}{x^2} \end{array}$$

$$4\frac{x}{y}+4+3\frac{y}{x}\ \Big)\ 12+12\frac{y}{x}+9\frac{y^2}{x^2}$$

$$\pm 12\pm 12\frac{y}{x}\pm 9\frac{y^2}{x^2}$$

$$0$$

پس دیے ہوئے جملہ کا جذرالمربع $\pm\left(2\frac{x}{y}+2+3\frac{y}{x}\right)$ ہے۔

مثال 3 الجبری جملہ $x^4-10x^3+33x^2-42x+20$ کو مکمل مربع میں ظاہر کرنے کے لیے

(i) جملہ میں کیا جمع کیا جائے؟

(ii) جملہ میں سے کیا تفریق کیا جائے؟

(iii) x کی کس قیمت پر جملہ مکمل مربع ہوگا؟

حل بذریعہ تقسیم ہم معلوم کرتے ہیں کہ

$$x^2-5x+4$$

$$x^2\ \Big)\ x^4-10x^3+33x^2-42x+20$$

$$\pm x^4$$

$$2x^2-5x\ \Big)\ -10x^3+33x^2$$

$$\mp 10x^3\pm 25x^2$$

$$2x^2-10x+4\ \Big)\ 8x^2-42x+20$$

$$-\ 8x^2\mp 40x\pm 16$$

$$-2x+4$$

دیے ہوئے جملہ کو مکمل مربع بنانے کے لیے بقایا $(-2x+4)$ صفر کے برابر ہونا چاہیے۔ اس لیے

(i) ہمیں جملہ میں $(2x-4)$ جمع کرنا چاہیے۔

(ii) ہمیں جملہ میں سے $(-2x+4)$ تفریق کرنا چاہیے۔

(iii) چونکہ دیے ہوئے جملہ کو مکمل مربع بنانے کے لیے $(-2x+4)$ کو صفر کے برابر ہونا چاہیے۔ اس لیے

$$-2x+4=0$$

$$\Rightarrow\quad x=2$$

مشق 6.3

1۔ بذریعہ تجزی مندرجہ ذیل جملوں کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

(i) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

(ii) $x^2 - 1 + \frac{1}{4x^2}, \quad (x \neq 0)$

(iii) $\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{12}xy + \frac{1}{36}y^2$

(iv) $4(a+b)^2 - 12(a^2 - b^2) + 9(a-b)^2$

(v) $\frac{4x^6 - 12x^3y^3 + 9y^6}{9x^4 + 24x^2y^2 + 16y^4}, \quad (x, y \neq 0)$

(vi) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x - \frac{1}{x}\right), \quad (x \neq 0)$

(vii) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 12, \quad (x \neq 0)$

(viii) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 5x + 6)$

(ix) $(x^2 + 8x + 7)(2x^2 - x - 3)(2x^2 + 11x - 21)$

2۔ بذریعہ تقسیم مندرجہ ذیل جملوں کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

(i) $4x^2 + 12xy + 9y^2 + 16x + 24y + 16$

(ii) $x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$

(iii) $9x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x + 1$

(iv) $4 + 25x^2 - 12x - 24x^3 + 16x^4$

(v) $\frac{x^2}{y^2} - 10\frac{x}{y} + 27 - 10\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}, \quad (x \neq 0, y \neq 0)$

3۔ k کی قیمت معلوم کریں جس سے مندرجہ ذیل جملوں کو مکمل مربع بنایا جا سکے۔

(i) $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 - 42x + k$

(ii) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - kx + 9$

4۔ ℓ اور m مقداروں کی قیمت معلوم کیجیے جن سے مندرجہ ذیل جملے مکمل مربع بن سکیں۔

(i) $x^4 + 4x^3 + 16x^2 + \ell x + m$

(ii) $49x^4 - 70x^3 + 109x^2 + \ell x - m$

5۔ جملہ $9x^4 - 12x^3 + 22x^2 - 13x + 12$ کو مکمل مربع بنانے کے لیے

(i) جملہ میں کیا جمع کرنا چاہیے؟

(ii) جملہ میں کیا تفریق کرنا چاہیے؟

(iii) x کی کیا قیمت ہوگی؟

اعادہ مشق 6

1۔ دیے ہوئے جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) جملوں $p^3q - pq^3$ اور $p^5q^2 - p^2q^5$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(a) $pq(p^2 - q^2)$ (b) $pq(p - q)$

(c) $p^2q^2(p - q)$ (d) $pq(p^3 - q^3)$

(ii) جملوں $5x^2y^2$ اور $20x^3y^3$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(a) $5x^2y^2$ (b) $20x^3y^3$

(c) $100x^5y^5$ (d) $5xy$

(iii) جملوں $x - 2$ اور $x^2 + x - 6$ کا عادِ اعظم .. .. ہے۔

(a) $x^2 + x - 6$ (b) $x + 3$

(c) $x - 2$ (d) $x + 2$

(iv) $a^3 + b^3$ اور $a^2 - ab + b^2$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(a) $a + b$ (b) $a^2 - ab + b^2$

(c) $(a - b)^2$ (d) $a^2 + b^2$

(v) $x^2 - 5x + 6$ اور $x^2 - x - 6$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(a) $x - 3$ (b) $x + 2$

(c) $x^2 - 4$ (d) $x - 2$

(vi) $a^2 - b^2$ اور $a^3 - b^3$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(a) $a - b$ (b) $a + b$

(c) $a^2 + ab + b^2$ (d) $a^2 - ab + b^2$

(vii) $x^2 + 3x + 2, x^2 + 4x + 3$ اور $x^2 + 5x + 4$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(a) $x + 1$ (b) $(x + 1)(x + 2)$

(c) $x + 3$ (d) $(x + 4)(x + 1)$

(viii) $45xy, 15x^2$ اور $30xyz$ کا ذواضعاف اقل .... ہے۔

(a) $90xyz$ (b) $90x^2yz$

(c) $15xyz$ (d) $15x^2yz$

(ix) $a^2 + b^2$ اور $a^4 - b^4$ کا ذواضعاف اقل .... ہے۔

(a) $a^2 + b^2$ (b) $a^2 - b^2$

(c) $a^4 - b^4$ (d) $a - b$

(x) دو جملوں کا حاصل ضرب، عادِ اعظم اور ذواضعاف اقل کے............... کے برابر ہے۔

(a) حاصل جمع (b) حاصل تفریق

(c) حاصل تقسیم (d) حاصل ضرب

(xi) جملہ $\dfrac{a}{9a^2 - b^2} + \dfrac{1}{3a - b}$ کا اختصار............... ہے۔

(a) $\dfrac{4a}{9a^2 - b^2}$ (b) $\dfrac{4a - b}{9a^2 - b^2}$

(c) $\dfrac{4a + b}{9a^2 - b^2}$ (d) $\dfrac{b}{9a^2 - b^2}$

(xii) $\dfrac{a^2 + 5a - 14}{a^2 - 3a - 18} \times \dfrac{a + 3}{a - 2}$ کا اختصار .... ہے۔

(a) $\dfrac{a + 7}{a - 6}$ (b) $\dfrac{a + 7}{a - 2}$

(c) $\dfrac{a + 3}{a - 6}$ (d) $\dfrac{a - 2}{a + 3}$

(xiii) $\frac{a^3 - b^3}{a^4 - b^4} \div \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + b^2}$ کا اختصار .... ہے۔

(a) $\frac{1}{a+b}$ (b) $\frac{1}{a-b}$ (c) $\frac{a-b}{a^2+b^2}$ (d) $\frac{a+b}{a^2+b^2}$

(xiv) $\left(\frac{2x+y}{x+y} - 1\right) \div \left(1 - \frac{x}{x+y}\right)$ کا اختصار .... ہے۔

(a) $\frac{x}{x+y}$ (b) $\frac{y}{x+y}$ (c) $\frac{y}{x}$ (d) $\frac{x}{y}$

(xv) $a^2 - 2a + 1$ کا جذرالمربع .... ہے۔

(a) $\pm(a+1)$ (b) $\pm(a-1)$ (c) $a-1$ (d) $a+1$

(xvi) جملہ $x^4 + 64$ میں کیا جمع کیا جائے کہ مکمل مربع بن جائے ....؟

(a) $8x^2$ (b) $-8x^2$ (c) $16x^2$ (d) $4x^2$

(xvii) $x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$ کا جذرالمربع .... ہے۔

(a) $\pm\left(x + \frac{1}{x}\right)$ (b) $\pm\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ (c) $\pm\left(x - \frac{1}{x}\right)$ (d) $\pm\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$

2۔ بذریعہ تجزی $8x^4 - 128$ اور $12x^3 - 96$ کا عادِ اعظم معلوم کریں۔

3۔ بذریعہ تقسیم $y^3 + 3y^2 - 3y - 9$ اور $y^3 + 3y^2 - 8y - 24$ کا عادِ اعظم معلوم کریں۔

4۔ بذریعہ تجزی $12x^2 - 75,\ 6x^2 - 13x - 5$ اور $4x^2 - 20x + 25$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

5۔ اگر $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$ اور $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$ کا عادِ اعظم $x^2 + 5x + 7$ ہو تو جملوں کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

6۔ مندرجہ ذیل کو مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{3}{x^3 + x^2 + x + 1} - \frac{3}{x^3 - x^2 + x - 1}$

(ii) $\frac{a+b}{a^2 - b^2} \div \frac{a^2 - ab}{a^2 - 2ab + b^2}$

7- بذریعہ تجزّی $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+10\left(x+\frac{1}{x}\right)+27$ کا جذرالمربع معلوم کریں، جبکہ $(x \neq 0)$

8- بذریعہ تقسیم $\frac{4x^2}{y^2}+\frac{20x}{y}+13-\frac{30y}{x}+\frac{9y^2}{x^2}$ کا جذرالمربع معلوم کریں، جبکہ $(x, y \neq 0)$

خلاصہ

☆ ہم نے دیے ہوئے دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عادِاعظم اور ذو اضعاف اقل معلوم کرنا بذریعہ تجزّی اور تقسیمی عمل سیکھ لیا ہے۔

☆ ہم نے دیے ہوئے دو الجبری کثیر رقمی $p(x)$ اور $q(x)$ کے عادِاعظم اور ذو اضعاف اقل کے درمیان تعلق کا فارمولا۔

$$p(x) \times q(x) = \text{ذو اضعاف اقل} \times \text{عادِاعظم}$$

قائم کیا اور اس کے استعمال سے ذو اضعاف اقل یا عادِاعظم وغیرہ حاصل کر لیتے ہیں۔

☆ فارمولا میں کوئی تین اجزا معلوم ہوں تو نا معلوم کو نیچے دی گئی مساوات کی مدد سے حاصل کرنا سیکھا ہے۔

$$p(x) \times q(x) = \text{ذو اضعاف اقل} \times \text{عادِاعظم}$$

☆ عادِاعظم اور ذو اضعاف کے استعمال سے کسری جملوں کا مختصر کرنا سیکھا ہے۔

جن میں بنیادی عوامل $+$، $-$، $\times$ اور $\div$ مستعمل ہوں۔

☆ دیے ہوئے الجبری جملوں کے جذرالمربع بذریعہ تجزّی اور تقسیمی طریقے سے معلوم کرنا سیکھا ہے۔