یونٹ 7

یک درجی مساواتیں اور غیر مساواتیں

(LINEAR EQUATIONS AND INEQUALITIES)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

7.1 یک درجی مساواتیں (Linear Equations)

7.2 مطلق قیمت کی مساواتیں (Equations Involving Absolute Value)

7.3 یک درجی غیر مساواتیں (Linear Inequalities)

7.4 یک درجی غیر مساواتوں کو حل کرنا (Solving Linear Inequalities)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل / نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ ایک متغیر میں یک درجی مساوات کا اعادہ کر سکیں۔

☆ ایسی یک درجی مساوات کو حل کر سکیں جس میں متغیر کے عددی سر ناطق اعداد ہوں۔

☆ جذری مساواتوں کو یک درجی شکل میں تبدیل کر کے حل کر سکیں۔

☆ کسی حقیقی عدد x کی مطلق قیمت $|x|$ کی تعریف بیان کر سکیں۔

☆ ایک متغیر میں مطلق قیمت کی مساوات کو حل کر سکیں۔

☆ ایسی غیر مساواتوں کی تعریف کر سکیں جن میں علامات $(<, >)$ اور $(\leq, \geq)$ استعمال کی گئی ہوں۔

☆ غیر مساواتوں کی درج ذیل خصوصیات کو سمجھ اور ان کی شناخت کر سکیں:

ثلاثی خاصیت، خاصیت متعدیت، جمعی خاصیت، ضربی خاصیت

☆ ایسی یک درجی غیر مساواتوں کو حل کر سکیں جن میں متغیر کے عددی سر ناطق اعداد ہوں۔

تعارف (Introduction)

اس یونٹ میں ہم پچھلی جماعتوں میں حاصل کردہ علم میں مزید اضافہ کرنے کے لیے ایسی مساواتوں کو حل کریں گے جن میں کوئی متغیر ناطق عددی سروں کا یا جذری علامت کا یا مطلق قیمت کا ہو۔ پھر غیر مساواتوں کی تعریف بیان کرنے کے بعد ان کی ثلاثی، متعدیت، جمعی اور ضربی خصوصیات کا اعادہ کریں گے۔ آخر میں ان خصوصیات کی مدد سے غیر مساواتوں کو حل کریں گے۔

7.1 یک درجی مساواتیں

ایک متغیر x میں یک درجی مساوات کی معیاری شکل درج ذیل ہے:

$ax + b = 0$ ، جبکہ $a, b \in \mathrm{R}$ اور $a \neq 0$

یک درجی مساوات کا حل سیٹ متغیر x کی وہ حقیقی قیمت ہو گی جو x کی جگہ درج کرنے سے مساوات کو درست ثابت کر دے۔ دو ایسی مساواتیں جن کے حل سیٹ یکساں ہوں مترادف مساواتیں کہلاتی ہیں۔

7.1.2 ایک متغیر میں یک درجی مساوات کو حل کرنا

کسی مساوات کا حل معلوم کرنے کے لیے اس کو مترادف مساوات میں تحویل کرنے کا عمل اس میں موجود متغیر x کی قیمت معلوم ہو جانے تک جاری رہتا ہے۔

حل کرنے کا طریق کار

ایک متغیر میں یک درجی مساوات کو حل کرنے کے طریق کار کا خلاصہ درج ذیل ہے:

☆ اگر مساوات میں کسریں موجود ہوں تو مخرجوں کے ذواضعاف اقل سے ضرب دے کر کسور کے مخرجوں کو ختم کر دیتے ہیں۔

☆ قوسین کو ختم کرنے کے لیے ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع استعمال کرتے ہیں۔

☆ طرفین میں موجود ایک جیسی (یکساں درجے والی) رقوم کو اکٹھا کر لیتے ہیں۔

☆ برابری کی جمعی خاصیت (طرفین میں ایک ہی رقم جمع یا تفریق کرنے سے مساوات میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی) کی مدد سے متغیر کو مساوات کے بائیں طرف اور مستقل مقداروں کو دوسری طرف اکٹھا کر کے مختصر کر لیتے ہیں۔

☆ برابری کی ضربی خاصیت کی مدد سے متغیر کو علیحدہ کر لیا جاتا ہے۔

☆ جواب کے طور پر حاصل ہونے والی متغیر کی قیمت کو دی گئی مساوات میں متغیر کی جگہ درج کر کے پڑتال کر لیتے ہیں کہ جواب درست ہے یا نہیں۔

مثال 1 مندرجہ ذیل مساوات کو حل کریں

$$\frac{3x}{2}-\frac{x-2}{3}=\frac{25}{6}$$

حل کسور کے مخرجوں کو خارج کرنے کے لیے دی گئی مساوات کی دونوں اطراف کو 2، 3 اور 6 کے ذواضعاف اقل 6 سے ضرب دینے سے

$$\begin{aligned} 9x-2(x-2) &= 25\\ \Rightarrow\ 9x-2x+4 &= 25\\ \Rightarrow\ 7x &= 21\\ \Rightarrow\ x &= 3 \end{aligned}$$

پڑتال دی گئی مساوات میں $x=3$ درج کرنے سے

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(3)-\frac{3-2}{3} &= \frac{25}{6}\\ \frac{9}{2}-\frac{1}{3} &= \frac{25}{6}\\ \frac{25}{6} &= \frac{25}{6} \end{aligned}$$

جو کہ درست نتیجہ ہے

چونکہ $x=3$ رکھنے سے دی گئی مساوات درست فقرہ بنتی ہے، اس لیے حاصل کردہ اصل صحیح ہے۔

نوٹ کسری مساوات کے حل میں ایسی اصل (root) کے حاصل ہونے کا امکان بھی ہوتا ہے جو دی گئی مساوات کو درست ثابت نہ کرے۔ یعنی حل سیٹ خالی سیٹ ہو۔

مثال 2 درج ذیل مساوات کو حل کیجیے۔

$$\frac{3}{y-1}-2=\frac{3y}{y-1},\quad y\neq 1$$

حل

طرفین کو ذواضعاف اقل $y-1$ سے ضرب دینے سے

$$\begin{aligned} 3-2(y-1) &= 3y\\ \Rightarrow\ 3-2y+2 &= 3y\\ \Rightarrow\ -5y &= -5\\ \Rightarrow\ y &= 1 \end{aligned}$$

پڑتال دی گئی مساوات میں $y=1$ درج کرنے سے

$$\begin{aligned} \frac{3}{1-1}-2 &= \frac{3(1)}{1-1}\\ \frac{3}{0}-2 &= \frac{3}{0} \end{aligned}$$

لیکن $\frac{3}{0}$ مبہم صورت ہے، اس لیے $y = 1$ اصل نہیں ہو سکتی۔

لہٰذا دی گئی مساوات کی کوئی اصل موجود نہیں۔ یعنی حل سیٹ { } ہے۔

مثال 3 درج ذیل مساوات کو حل کیجیے۔

$$\frac{3x-1}{3} - \frac{2x}{x-1} = x, \quad x \neq 1$$

حل اس مفروضے کے تحت کہ $x - 1 \neq 0$ یعنی $x \neq 1$، طرفین کو $3(x - 1)$ سے ضرب دینے سے

$$(x-1)(3x-1) - 6x = 3x(x-1)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 - 6x = 3x^2 - 3x$$

$$\Rightarrow \quad -10x + 1 = -3x$$

$$\Rightarrow \quad -7x = -1$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{7}$$

پڑتال $x = \frac{1}{7}$ رکھنے سے دی گئی مساوات ایک درست فقرہ ثابت ہوتی ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ شرط $x \neq 1$ کا مساوات کے حل پر کوئی اثر نہیں ہے۔ کیونکہ $\frac{1}{7} \neq 1$

لہٰذا ہمارا حل $x = \frac{1}{7}$ درست ہے۔

7.1.3 جذری مساواتیں جن کو یک درجی مساواتوں میں تبدیل کیا جا سکے

تعریف

ایسی مساوات جس میں کوئی جذری علامت میں متغیر ہو، جذری مساوات کہلاتی ہے۔

کسی جذری مساوات کو حل کرنے کے لیے ہم طرفین کا وہ قوت نما لیتے ہیں جو جذری علامت کو خارج کر دے۔ مساوات کی دو میں سے ہر ایک طرف کی کوئی خاص قوت لینے سے ایسی غیر مترادف مساوات بھی حاصل ہو سکتی ہے جس کے اصل (roots) دی گئی مساوات سے زیادہ ہوں۔ ایسے اصل، اضافی اصل (extraneous roots) کہلاتے ہیں۔ جذری مساوات کو حل کرنے کے بعد یہ ضروری ہے کہ ہم جواب کی پڑتال کریں کہ حاصل کردہ اصل کہیں اضافی اصل تو نہیں۔

نوٹ

یہاں ایک اہم اور قابل غور نقطہ یہ ہے کہ دی گئی مساوات کی دو میں سے ہر ایک طرف کی طاق قوت نما لینے سے ہمیشہ ایک مترادف مساوات حاصل ہوگی۔ جبکہ جفت قوت نما لینے سے ایسا ہونا ضروری نہیں۔

مثال 1 درج ذیل مساواتوں کو حل کیجیے۔

(a) $\sqrt{2x-3}-7=0$ (b) $\sqrt[3]{3x+5}=\sqrt[3]{x-1}$

حل

(a) جذری علامت والے جملہ کو علیحدہ کرنے کے لیے مساوات کو دوبارہ لکھنے سے

$$\sqrt{2x-3} = 7$$

$$\Rightarrow \quad 2x-3 = 49 \quad \text{..........(طرفین کا مربع لینے سے)}$$

$$\Rightarrow \quad 2x = 52 \quad \Rightarrow \quad x = 26$$

پڑتال

دی گئی مساوات میں $x = 26$ درج کرنے سے

$$\sqrt{2(26)-3}-7=0$$

$$\sqrt{52-3}-7=0$$

$$\sqrt{49}-7=0$$

$$0=0$$

لہٰذا حل سیٹ $\{26\}$ ہے

(b)

$$\sqrt[3]{3x+5} = \sqrt[3]{x-1} \quad \text{............(معلوم)}$$

$$\Rightarrow \quad 3x+5 = x-1 \quad \text{...........(طرفین کا مکعب لینے سے)}$$

$$\Rightarrow \quad 2x = -6 \quad \Rightarrow \quad x = -3$$

پڑتال

دی گئی مساوات میں $x = -3$ درج کرنے سے

$$\sqrt[3]{3(-3)+5} = \sqrt[3]{-3-1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{-4}$$

پس دی گئی مساوات $x = -3$ رکھنے سے درست ثابت ہوتی ہے۔

یہاں $\sqrt[3]{-4}$ ایک حقیقی عدد ہے۔ کیونکہ ہم نے مساوات کی دو میں سے ہر ایک طرف کی طاق قوت نما لی۔

لہٰذا دی گئی مساوات کا حل سیٹ $\{-3\}$ ہے۔

مثال 2 مندرجہ ذیل مساوات کا حل سیٹ معلوم کریں اور پڑتال بھی کریں۔

$$\sqrt{5x-7}-\sqrt{x+10}=0$$

حل

جب کسی جذری مساوات کی دو رقوم کے مجذور میں متغیر موجود ہو تو ان دونوں رقوم کو طرفین میں علیحدہ علیحدہ (یعنی ایک رقم کو مساوات کی ایک طرف اور دوسری رقم کو دوسری طرف) لکھ لیتے ہیں۔ اس طرح مساوات کو حل کرنا آسان ہو جاتا ہے۔ اس لیے مساوات کو دوبارہ لکھنے سے

$$\sqrt{5x-7}=\sqrt{x+10}$$

$$5x-7=x+10, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$ (طرفین کا مربع لینے سے)

$$4x=17 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{17}{4}$$

پڑتال

دی گئی مساوات میں $x=\frac{17}{4}$ درج کرنے سے

$$\sqrt{5x-7}-\sqrt{x+10}=0$$

$$\sqrt{5\left(\frac{17}{4}\right)-7}-\sqrt{\frac{17}{4}+10}=0$$

$$\sqrt{\frac{57}{4}}-\sqrt{\frac{57}{4}}=0$$

$$0=0$$

یعنی $x=\frac{17}{4}$ درج کرنے سے دی گئی مساوات درست فقرہ ثابت ہوتی ہے۔

پس $\left\{\frac{17}{4}\right\}$ = حل سیٹ

مثال 3 مندرجہ ذیل مساوات کا حل سیٹ معلوم کریں اور پڑتال بھی کریں۔

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13}$$

حل

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13}$$

طرفین کا مربع لینے سے

$$x+7+x+2+2\sqrt{(x+7)(x+2)}=6x+13$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{x^2+9x+14}=4x+4$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+9x+14}=2x+2$$

طرفین کا دوبارہ مربع لینے سے

$$x^2 + 9x + 14 = 4x^2 + 8x + 4$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - 6x + 5x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x(x-2) + 5(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-2)(3x+5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 2, -\frac{5}{3}$$

پڑتال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $x = 2$ درج کرنے سے دی گئی مساوات درست ثابت ہوتی ہے۔ جبکہ $x = -\frac{5}{3}$ درج کرنے سے مساوات درست ثابت نہیں ہوتی۔

لہٰذا حل سیٹ $\{2\}$ ہے اور $x = -\frac{5}{3}$ اضافی اصل ہے۔

مشق 7.1

1۔ مندرجہ ذیل مساواتوں کا حل سیٹ معلوم کریں۔

(i) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x = x + \frac{1}{6}$

(ii) $\frac{x-3}{3} - \frac{x-2}{2} = -1$

(iii) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\right) + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 3x\right)$

(iv) $x + \frac{1}{3} = 2\left(x - \frac{2}{3}\right) - 6x$

(v) $\frac{5(x-3)}{6} - x = 1 - \frac{x}{9}$

(vi) $\frac{x}{3x-6} = 2 - \frac{2x}{x-2}, \ x \neq 2$

(vii) $\frac{2x}{2x+5} = \frac{2}{3} - \frac{5}{4x+10}, \ x \neq -\frac{5}{2}$

(viii) $\frac{2x}{x-1} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2}{x-1}, \ x \neq 1$

(ix) $\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}, \ x \neq \pm 1$

(x) $\frac{2}{3x+6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2x+4}, \ x \neq -2$

2۔ درج ذیل ہر مساوات کو حل کریں اور اضافی اصل کی پڑتال بھی کریں۔

(i) $\sqrt{3x+4} = 2$

(ii) $\sqrt[3]{2x-4} - 2 = 0$

(iii) $\sqrt{x-3} - 7 = 0$

(iv) $2\sqrt{t+4} = 5$

(v) $\sqrt[3]{2x+3} = \sqrt[3]{x-2}$ (vi) $\sqrt[3]{2-t} = \sqrt[3]{2t-28}$

(vii) $\sqrt{2t+6} - \sqrt{2t-5} = 0$ (viii) $\sqrt{\dfrac{x+1}{2x+5}} = 2, x \neq -\dfrac{5}{2}$

7.2 مطلق قیمت میں مساوات

یک درجی مساوات کی ایک اور قسم متغیر کی مطلق قیمت میں مساوات ہے۔ایسی مساواتوں کوحل کرنے سے پہلے مطلق قیمت کی تعریف درج ذیل ہے:

7.2.1 تعریف

کسی حقیقی عدد 'a' کی مطلق قیمت کو $|a|$ سے ظاہر کرتے ہیں اوراس کی تعریف درج ذیل ہے

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{اگر } a \geq 0 \\ -a, & \text{اگر } a < 0 \end{cases}$$

مثال کے طور پر

$|6| = 6$ ، $|0| = 0$ اور $|-6| = -(-6) = 6$

مطلق قیمت کی کچھ خصوصیات

اگر $a, b \in R$ تو

(i) $|a| \geq 0$ (ii) $|-a| = |a|$

(iii) $|ab| = |a| \cdot |b|$ (iv) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

7.2.2 مطلق قیمت میں یک درجی مساوات کا حل معلوم کرنا

مطلق قیمت کی تعریف کومدنظر رکھتے ہوئے ہم فوری طور پر کہہ سکتے ہیں کہ

$|x| = 3$ مترادف ہے $x = 3$ یا $x = -3$

کیونکہ $x = +3$ یا $x = -3$ رکھنے سے بیان $|x| = 3$ درست ثابت ہوتا ہے۔

ایسی مساوات جس میں مطلق قیمت کا کوئی متغیر ہو،کوحل کرنے کے لیے اسے مترادف مرکب فقرے کے طور پر لکھ لیتے ہیں۔جس کے دونوں حصوں کوعلیحدہ علیحدہ حل کرلیا جاتا ہے۔

مثال 1 $|2x + 3| = 11$ کا حل سیٹ معلوم کریں اور پڑتال بھی کریں۔

حل

اس بات پر انحصار کرتے ہوئے کہ $(2x + 3)$ مثبت ہے یا منفی، مطلق قیمت کی تعریف کی رو سے دی گئی مساوات درج ذیل کے مترادف ہوگی:

$+(2x+3) = 11$ یا $-(2x+3) = 11$

عام طور پر ان دونوں مساوات کو یوں لکھا جاتا ہے:

$$2x + 3 = -11 \quad \text{یا} \quad 2x + 3 = +11$$
$$2x = -14 \quad \text{یا} \quad 2x = 8$$
$$x = -7 \quad \text{یا} \quad x = 4$$

پڑتال

دی گئی مساوات میں $x = 4$ درج کرنے سے

$$|2(4) + 3| = 11$$

جو ہمیشہ درست ہے $\quad 11 = 11$

اب $x = -7$ درج کرنے سے

$$|2(-7) + 3| = 11$$
$$|-11| = 11$$

جو کہ درست نتیجہ ہے $\quad 11 = 11$

لہٰذا $x = 4, -7$ دی گئی مساوات کے اصل ہیں۔

پس حل سیٹ $\{-7, 4\}$ ہے۔

نوٹ

اگر مساوات $3|x-1| - 6 = 8$ طرز کی ہو تو مطلق قیمت والے جملے کو ایک طرف علیحدہ کر کے مترادف مساواتیں لکھی جاتی ہیں۔ زیر بحث مساوات کو حل کرنا ہو تو پہلے $|x-1| = \frac{14}{3}$ کی شکل میں لکھ لینا چاہیے۔

مثال 2 $|8x - 3| = |4x + 5|$ کا حل سیٹ معلوم کریں۔

حل

چونکہ یکساں مطلق قیمت کے دو اعداد برابر ہوتے ہیں یا ان کی علامت میں فرق (+ یا − کا) ہوتا ہے۔ اس لیے دی گئی مساوات درج ذیل مساواتوں کے مترادف ہوگی:

$$8x - 3 = -(4x + 5) \quad \text{یا} \quad 8x - 3 = 4x + 5$$
$$12x = -2 \quad \text{یا} \quad 4x = 8$$
$$x = -\frac{1}{6} \quad \text{یا} \quad x = 2$$

پڑتال کرنے سے ہمیں معلوم ہو جاتا ہے کہ $x = 2, x = -\frac{1}{6}$ دونوں قیمتیں دی گئی مساوات کو درست ثابت کرتی ہیں۔

لہٰذا $\{-\frac{1}{6}, 2\}$ = حل سیٹ

بعض اوقات یہ بھی ممکن ہے کہ حاصل کی گئی اصل دی گئی مساوات کو درست ثابت نہ کرے۔ اس صورت میں ایسے اضافی اصل کو رد کر دیا جاتا ہے۔ چنانچہ مناسب یہی ہوگا کہ حل سیٹ لکھنے سے پہلے پڑتال کر لی جائے۔

مثال 3 $|3x + 10| = 5x + 6$ کو حل کریں

حل دی گئی مساوات درج ذیل مساواتوں کے مترادف ہے:

$$\pm(3x + 10) = 5x + 6$$

$$\Rightarrow \quad 3x + 10 = 5x + 6 \quad \text{یا} \quad 3x + 10 = -(5x + 6)$$

$$-2x = -4 \quad \text{یا} \quad 8x = -16$$

$$x = 2 \quad \text{یا} \quad x = -2$$

دی گئی مساوات میں $x = -2$ رکھنے سے وہ درست ثابت نہیں ہوتی۔

لہٰذا صرف $x = 2$ ہی مطلوبہ اصل ہے۔

مشق 7.2

1۔ مندرجہ ذیل بیانات میں سے درست یا غلط کی شناخت کریں۔

(i) $|x| = 0$ کے حل سیٹ میں صرف ایک ہی رکن ہے۔ ....

(ii) مطلق قیمت کی تمام مساواتوں کے دو اصل ہوتے ہیں۔ ....

(iii) مساوات $|x| = 2$ مترادف ہے $x = -2$ یا $x = 2$ کے۔ ....

(iv) مساوات $|x - 4| = -4$ کا حل سیٹ خالی سیٹ ہے۔ ....

(v) مساوات $|2x - 3| = 5$ مترادف ہے $2x - 3 = 5$ یا $2x + 3 = 5$ کے۔ ....

2۔ مندرجہ ذیل مساواتوں کے حل سیٹ معلوم کریں۔

(i) $|3x - 5| = 4$ (ii) $\frac{1}{2}|3x + 2| - 4 = 11$

(iii) $|2x + 5| = 11$ (iv) $|3 + 2x| = |6x - 7|$

(v) $|x + 2| - 3 = 5 - |x + 2|$ (vi) $\frac{1}{2}|x + 3| + 21 = 9$

(vii) $\left|\frac{3 - 5x}{4}\right| - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (viii) $\left|\frac{x + 5}{2 - x}\right| = 6$

7.3 یک درجی غیر مساواتیں

یونٹ 2 میں ہم نے حقیقی اعداد کا موازنہ کرنے کی ایک اہم خاصیت پر روشنی ڈالی تھی۔ نابرابری کا تعلق $a \neq b$ ہمیں حقیقی اعداد a اور b کا موازنہ کرنے اور اس بات کا تعین کرنے میں مدد دیتا ہے کہ کوئی بھی عدد کسی دوسرے عدد سے یا تو چھوٹا یا بڑا ہے۔ اعداد کا یہ تقابل روزمرہ زندگی کے بہت سے معاملات میں بنیادی اہمیت اور حیثیت رکھتا ہے۔ اس کے ذریعے ہم قیمت، بلندی، وزن، درجہ حرارت، فاصلہ، مشینی پیداوار کی لاگت اور وقت وغیرہ کا موازنہ کر سکتے ہیں۔ غیر مساوات کی علامات $>$ اور $<$ کو سب سے پہلے ایک انگریز ریاضی دان تھامس ہیریئٹ (Thomas Harriot, 1560-1621) نے متعارف کروایا تھا۔

7.3.1 غیر مساوات کی تعریف

فرض کریں 'a' اور 'b' حقیقی اعداد ہیں۔ اگر ان کا فرق $a - b$ مثبت ہو تو 'a' عدد 'b' سے بڑا ہوگا۔ اس کو ہم غیر مساوات $a > b$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس غیر مساوات کو $a > b$ سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ جس کا مطلب ہے کہ 'b' عدد 'a' سے چھوٹا ہے۔

اسی طرح اگر $a - b$ منفی ہو تو a, b سے چھوٹا ہے اور اس کو $a < b$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ کبھی کبھار ایسی صورتحال بھی سامنے آتی ہے کہ ایک عدد دوسرے عدد سے چھوٹا یا اس کے برابر ہوتا ہے۔ لیکن ہمیں صحیح صورت حال کا اِدراک نہیں ہوتا۔ ایسی صورت میں ہم علامت $\leq$ کا استعمال کرتے ہیں۔ جس کو یوں پڑھا جائے گا ''چھوٹا ہے یا برابر ہے'' یعنہٖ $\geq$ کو پڑھا جائے گا ''بڑا ہے یا برابر ہے''۔ علامات $<, >, \leq$ اور $\geq$ کو غیر مساواتی نشان بھی کہا جاتا ہے۔ غیر مساواتوں $x > y$ اور $x < y$ کو مضبوط جبکہ $x \geq y$ اور $x \leq y$ کو کمزور غیر مساواتیں کہا جاتا ہے۔

اگر ہم غیر مساواتوں کے جوڑے $a < b$ اور $b < c$ کو اکٹھا کر کے ایک مربوط اور ٹھوس شکل '$a < b < c$' میں لکھیں تو اس کا مطلب یہ ہے کہ ''a, b اور c کے درمیان کہیں واقع ہے'' یعنہٖ ''$a \leq b \leq c$'' کو یوں پڑھا جائے گا۔ ''a, b اور c کے درمیان واقع ہے بشمول a اور c کے۔''

ایک متغیر x میں یک درجی غیر مساوات کی معیاری شکل مندرجہ ذیل ہے:

$$ax + b < 0, \quad a \neq 0; \quad a, b \in \mathrm{R}$$

ہم علامت '$<$'، کو $>$، $\leq$ یا $\geq$ سے بھی بدل سکتے ہیں۔

7.3.2 غیر مساواتوں کی خصوصیات

ایک متغیر میں یک درجی غیر مساواتوں کو حل کرنے کے لیے جن خصوصیات کو ہم استعمال کریں گے، وہ درج ذیل ہیں۔

1۔ ثلاثی خاصیت

اگر $a, b \in R$ تو درج ذیل بیانات میں سے ایک اور صرف ایک درست ہوتا ہے۔

$$a < b \quad \text{یا} \quad a = b \quad \text{یا} \quad a > b$$

اس خاصیت کا ایک خاص اہم نتیجہ $b = 0$ کے لیے ہے۔ یعنی کسی حقیقی عدد 'a' کے لیے

$$a < 0 \quad \text{یا} \quad a = 0 \quad \text{یا} \quad a > 0$$

2۔ خاصیت متعدیت

فرض کریں $a, b, c \in R$

(i) $a > b$ اور $b > c \Rightarrow a > c$

(ii) $a < b$ اور $b < c \Rightarrow a < c$

3۔ جمعی خاصیت

$a, b, c \in R$ کے لیے

(i) $a > 0$ اور $b > 0 \Rightarrow a + b > 0$ (خاصیت بندش بلحاظ جمع)

(ii) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

$a < b \Rightarrow a + c < b + c$

4۔ ضربی خاصیت

فرض کریں $a, b, c, d \in R$

(i) $a > 0$ اور $b > 0 \Rightarrow ab > 0$

جبکہ $a < 0$ اور $b < 0 \Rightarrow ab > 0$

(ii) $a > b$ اور $c > 0 \Rightarrow ac > bc$

یا $a < b$ اور $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

(iii) $a > b$ اور $c < 0 \Rightarrow ac < bc$

یا $a < b$ اور $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

مندرجہ بالا خاصیت (iii) یہ ظاہر کرتی ہے کہ منفی حقیقی عدد سے کسی غیر مساوات کی طرفین کو ضرب دینے سے غیر مساوات کا نشان برعکس ہو جاتا ہے (یعنی اس کا رخ مخالف سمت میں تبدیل ہو جاتا ہے):

(iv) $a > b$ اور $c > d \Rightarrow ac > bd$

7.4 ایک متغیر میں غیر مساواتوں کا حل معلوم کرنا

ایک متغیر میں الجبری غیر مساوات کو حل کرنے کے طریقہ کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے:

مثال 1

$9-7x>19-2x$، ($x \in R$ جبکہ) کا حل سیٹ معلوم کریں۔

حل

$9-7x>19-2x$

$9-5x>19$ (طرفین میں $2x$ جمع کرنے سے)

$-5x>10$

$x<-2$ (طرفین کو $-\frac{1}{5}$ سے ضرب دینے سے)

لہٰذا حل سیٹ $=\{x \mid x<-2\}$

مثال 2

($x \in R$ جبکہ) $\frac{1}{2}x-\frac{2}{3} \le x+\frac{1}{3}$ کو حل کریں۔

حل

$$\frac{1}{2}x-\frac{2}{3} \le x+\frac{1}{3}$$

طرفین کو 6 سے یعنی کسور کے مخرجوں 2 اور 3 کے ذو اضعاف اقل سے ضرب دینے سے

$$6\left[\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}\right] \le 6\left[x+\frac{1}{3}\right]$$

یا $3x-4 \le 6x+2$

یا $3x \le 6x+6$

یا $-3x \le 6$

یا $x \ge -2$

لہٰذا حل سیٹ $=\{x \mid x \ge -2\}$

مثال 3 درج ذیل مرکب غیر مساوات کو حل کریں۔

$-2 < \frac{1-2x}{3} < 1$ جبکہ $x \in R$

حل

دی گئی غیر مساوات دو ایسے حصوں پر مشتمل ہے جو لفظ 'اور' کی شرط سے مربوط ہیں۔ حل سیٹ ان دونوں کے حل سیٹوں کا تقاطع ہوگا۔

$-2 < \frac{1-2x}{3}$ اور $\frac{1-2x}{3} < 1$

(مگر ہم اس مثال میں غیر مساوات کو اس کی دی گئی شکل میں ہی حل کریں گے جو کہ نسبتاً آسان ہے)

دی گئی غیر مساوات $-2 < \frac{1-2x}{3} < 1$

یا $-6 < 1-2x < 3$

یا $-7 < -2x < 2$

یا $\frac{7}{2} > x > -1$

یا $-1 < x < 3.5$

پس حل سیٹ $\{x \mid -1 < x < 3.5\}$ ہے۔

مثال 4

$4x-1 \le 3 \le 7+2x$ (جبکہ $x \in R$) کو حل کریں۔

حل

دی گئی غیر مساوات برقرار رہے گی اگر اس کے دونوں حصے $3 \le 7+2x$ اور $4x-1 \le 3$ مربوط رہیں۔

اب ہم ان دونوں حصوں کو علیحدہ علیحدہ حل کرتے ہیں۔

پہلے حصے کی غیر مساوات سے $4x-1 \le 3$

$\Rightarrow 4x \le 4$ یعنی $x \le 1$ .... (i)

دوسرے حصے کی غیر مساوات سے $3 \le 7+2x \Rightarrow -4 \le 2x$

یا $-2 \le x \Rightarrow x \ge -2$ .... (ii)

نتائج (i) اور (ii) کا تقاطع سیٹ $-2 \le x \le 1$ ہے۔

پس حل سیٹ $= \{x \mid -2 \le x \le 1\}$

مشق 7.3

1۔ مندرجہ ذیل غیر مساواتوں کو حل کریں۔

(i) $3x + 1 < 5x - 4$

(ii) $4x - 10.3 \le 21x - 1.8$

(iii) $4 - \frac{1}{2}x \ge -7 + \frac{1}{4}x$

(iv) $x - 2(5 - 2x) \ge 6x - 3\frac{1}{2}$

(v) $\frac{3x + 2}{9} - \frac{2x + 1}{3} > -1$

(vi) $3(2x + 1) - 2(2x + 5) < 5\,(3x - 2)$

(vii) $3(x - 1) - (x - 2) > -2(x + 4)$

(viii) $2\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}(5x - 4) > -\frac{1}{3}(8x + 7)$

2۔ مندرجہ ذیل غیر مساواتوں کو حل کریں۔

(i) $-4 < 3x + 5 < 8$

(ii) $-5 \le \frac{4 - 3x}{2} < 1$

(iii) $-6 < \frac{x - 2}{4} < 6$

(iv) $3 \ge \frac{7 - x}{2} \ge 1$

(v) $3x - 10 \le 5 < x + 3$

(vi) $-3 \le \frac{x - 4}{-5} < 4$

(vii) $1 - 2x < 5 - x \le 25 - 6x$

(viii) $3x - 2 < 2x + 1 < 4x + 17$

اعادہ مشق 7

1۔ دیے ہوئے جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) درج ذیل میں سے کون سا عدد غیر مساوات $3 - 4x \le 11$ کا حل ہوگا؟ ....

(a) -8 (b) -2 (c) $-\frac{14}{4}$ (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

(ii) کوئی بیان جس میں $<, >, \le$ یا $\ge$ میں سے کوئی ایک علامت پائی جائے .... کہلاتی ہے۔

(a) مساوات (b) ایسی مساوات جو متغیر کی ہر قیمت کے لیے درست ہو

(c) غیر مساوات (d) یک درجی مساوات

(iii) .... = x غیر مساوات $-2 < x < \frac{3}{2}$ کے حل سیٹ کا ایک رکن ہے۔

(a) -5 (b) 3 (c) 0 (d) $\frac{3}{2}$

(iv) اگر x کی قیمت 10 سے بڑی نہ ہو تو ....

(a) $x \geq 8$ (b) $x \leq 10$ (c) $x < 10$ (d) $x > 10$

(v) ایک لفٹ کی بوجھ اٹھانے کی استعداد 'c' زیادہ سے زیادہ 1600 پاؤنڈ ہو تو ....

(a) $c < 1600$ (b) $c \geq 1600$ (c) $c \leq 1600$ (d) $c > 1600$

(vi) $x = 0$ غیر مساوات .... کے حل سیٹ کا رکن ہے۔

(a) $x > 0$ (b) $3x + 5 < 0$

(c) $x + 2 < 0$ (d) $x - 2 < 0$

2۔ درج ذیل بیانات کی شناخت کریں کہ درست ہیں یا غلط۔

(i) مساوات $3x - 5 = 7 - x$ یک درجی مساوات ہے............۔

(ii) مساوات $x - 0.3x = 0.7x$ متغیر کی ہر قیمت کے لیے درست ہے............۔

(iii) مساوات $-2x + 3 = 8$ مساوات $-2x = 11$ کے مترادف ہے............۔

(iv) مساوات میں کسور ہوں تو مخرج کو ختم کرنے کے لیے ہم مساوات کی دونوں اطراف کو مخرجوں کے ذواضعاف اقل سے ضرب دیتے ہیں............۔

(v) $4(x + 3) = x + 3$ مشروط مساوات ہے............۔

(vi) متغیر کی کوئی بھی قیمت، مساوات $2(3x + 5) = 6x + 12$ کو درست ثابت نہیں کرتی............۔

(vii) $\frac{2}{3}x = 12$ کو حل کرنے کے لیے طرفین کو $\frac{2}{3}$ سے ضرب دینی چاہیے............۔

(viii) برابر حل سیٹ والی مساواتوں کو مترادف مساواتیں کہتے ہیں............۔

(ix) ایسا حل جو دی گئی مساوات کو درست ثابت نہ کرے فالتو اصل کہلاتا ہے............۔

3۔ درج ذیل مختصر سوالات کے جواب تحریر کریں۔

(i) ایک متغیر میں یک درجی مساوات کی تعریف کریں۔

(ii) غیر مساوات کی ثلاثی خاصیت اور خاصیت متعدیت بیان کریں۔

(iii) حرارت کی پیمائش کرنے کے لیے F ڈگری فارن ہائیٹ اور C ڈگری سینٹی گریڈ کے درمیان تعلق کو ظاہر کرنے کے لیے کلیہ درج ذیل ہے۔

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

C کی کس قیمت کے لیے $F < 0$ ہوگا؟

(iv) کسی صحیح عدد اور 12 کے مجموعہ کا 7 گنا کم از کم 50 اور زیادہ سے زیادہ 60 ہے۔ اس تعلق کو ظاہر کرنے والی غیر مساوات لکھیں اور اسے حل کریں۔

4۔ مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے ہر ایک کو حل کریں اور پڑتال بھی کریں۔

(i) $\sqrt{2t+4} = \sqrt{t-1}$ (ii) $\sqrt{3x-1} - 2\sqrt{8-2x} = 0$

5۔ درج ذیل مساواتوں کے حل سیٹ معلوم کریں۔

(i) $|3x+14| - 2 = 5x$ (ii) $\frac{1}{3}|x-3| = \frac{1}{2}|x+2|$

6۔ مندرجہ ذیل غیر مساواتوں کو حل کریں۔

(i) $-\frac{1}{3}x + 5 \leq 1$ (ii) $-3 < \frac{1-2x}{5} < 1$

خلاصہ

☆ ایک متغیر x میں یک درجی مساوات $ax + b = 0$ ہے۔ جبکہ $a, b \in R$ اور $a \neq 0$

☆ یک درجی مساوات کا حل متغیر x کی وہ قیمت ہوتی ہے جو x کی جگہ درج کرنے سے مساوات کو درست ثابت کرے۔

☆ ایسی مساوات جس کا حل سیٹ ϕ ہو، نا قابلِ حل مساوات کہلاتی ہے۔

☆ برابری کی جمعی خاصیت: $\forall\ a, b, c \in R \quad a = b \Rightarrow a + c = b + c$

اور $a - c = b - c$

☆ برابری کی ضربی خاصیت: $a = b \Rightarrow ac = bc$

☆ تنسیخی خاصیت: $\forall\ a, b, c \in R \quad a + c = b + c \Rightarrow a = b$

$ac = bc, c \neq 0 \Rightarrow a = b,$

☆ مساوات کا حل معلوم کرنے کے لیے اس کو مترادف مساوات میں تحویل کرنے کا عمل اس میں موجود متغیر کی قیمت معلوم کرنے تک جاری رہتا ہے۔

☆ ایسی مساوات جس میں کوئی جذری علامت میں متغیر ہو، جذری مساوات کہلاتی ہے۔ اضافی اصل کے حوالے سے ایسی مساوات کی جانچ پڑتال ضروری ہوتی ہے۔

☆ کسی حقیقی عدد 'a' کی مطلق قیمت کی تعریف:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{جبکہ } a \geq 0 \\ -a, & \text{جبکہ } a < 0 \end{cases}$$

☆ مطلق قیمت کے خواص

اگر $a, b \in \mathrm{R}$ تو

(i) $|a| \geq 0$

(ii) $|-a| = |a|$

(iii) $|ab| = |a| \cdot |b|$

(iv) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

(v) $|x| = a$ مترادف ہے $x = a$ یا $x = -a$

☆ غیر مساوات کی علامات: $<, >, \leq, \geq$

☆ ایک متغیر x میں یک درجی غیر مساوات: $ax + b < 0, \quad a \neq 0$

☆ غیر مساوات کی خصوصیات:

(a) ثلاثی خاصیت

اگر $a, b \in \mathrm{R}$ تو $a > b$ یا $a = b$ یا $a < b$

(b) خاصیت متعدیت

$a > b$ اور $b > c \Rightarrow a > c$

(c) ضربی خاصیت

(i) $a > b, c > 0, \Rightarrow \quad ac > bc$ اور $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

(ii) $a > b, c < 0, \Rightarrow \quad ac < bc$ اور $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$