یونٹ 9

کوآرڈینیٹ جیومیٹری کا تعارف

(INTRODUCTION TO COORDINATE GEOMETRY)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

9.1 تعارف (Introduction)

9.2 قطعہ خط کی لمبائی کا فارمولا (The Distance Formula)

9.3 ہم خط نقاط (Collinear Points)

9.4 درمیانی نقطہ فارمولا (Mid-Point Formula)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل / نتائج (Students Learning Outcomes)

یونٹ کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب ہر طالب علم درج ذیل تصورات کو ہو بہو بیان کرنے پر علمی دسترس حاصل کر لے:

☆ کوآرڈینیٹ (coordinate) جیومیٹری کی تعریف کر سکے۔

☆ لمبائی کے فارمولا کا ثبوت دے سکے اور اس کی مدد سے کارتیسی مستوی کے دو نقاط کے درمیان فاصلہ کی لمبائی معلوم کر سکے۔

☆ لمبائی کے فارمولا کی مدد سے دو نقاط کے درمیان لمبائی کو ماپ سکے۔

☆ ہم خط نقاط کی تعریف کر سکے اور ہم خط اور غیر ہم خط نقاط میں فرق / پہچان کر سکے۔

☆ لمبائی کے فارمولا سے دیے ہوئے تین یا تین سے زیادہ نقاط کو ہم خط ظاہر کر سکے۔

☆ فارمولا کی مدد سے ثابت کر سکے کہ تین غیر ہم خط نقاط مستوی میں ایک مثلث بناتے ہیں جن کے

- تینوں اضلاع کی لمبائیاں یکساں ہوں یعنی مثلث متساوی الاضلاع (An Equilateral Triangle)
- دو اضلاع کی لمبائیاں یکساں ہوں یعنی مثلث متساوی الساقین (An Isosceles Triangle)
- ایک زاویہ 90° کا ہو یعنی قائمہ زاویہ مثلث (A Right Angled Triangle)
- تینوں اضلاع کی لمبائیاں مختلف ہوں یعنی مختلف الاضلاع مثلث (A Scalene Triangle)

☆ فارمولا کی مدد سے ثابت کر سکے کہ چار غیر ہم خط نقاط سے چار اضلاع کی اشکال

- ایک مربع (A Square)
- ایک مستطیل (A Rectangle)
- ایک متوازی الاضلاع (A Parallelogram)

بنائی جاسکتی ہیں۔

☆ فارمولا کی پہچان کریں جو دو مختلف نقاط کے درمیانی نقطہ کو ظاہر کر سکے۔

☆ فارمولاز کی مدد سے جیومیٹری کے نتائج کو حاصل کرنا یا تصدیق کرنا سمجھ سکے۔

9.1 فاصلہ کا فارمولا (Distance Formula)

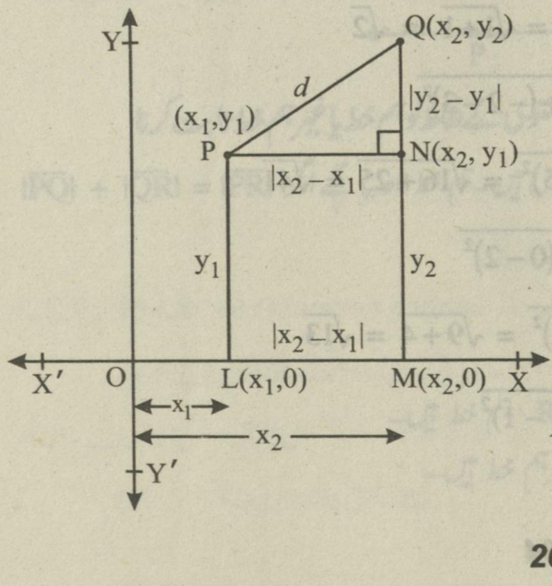
9.1.1 کوآرڈینیٹ جیومیٹری (Coordinate Geometry)

ایک مستوی میں جیومیٹری کی اشکال کے مطالعہ کو مستوی یا پلین جیومیٹری کہتے ہیں۔اسی طرح کوآرڈی نیٹ جیومیٹری، جیومیٹری کی اشکال کے کارتیسی مستوی میں مطالعہ کرنے کا نام ہے۔

ہم نے یونٹ (8) میں سیکھا ہے کہ دو باہم عمودی خطوط جو مبدا پر ملتے ہیں، مستوی کو چار ربعوں (quadrants) میں تقسیم کرتے ہیں۔ہم نے یہ بھی جانا ہے کہ سیٹ R×R کے مترتب جوڑوں اور مستوی کے تمام نقاط کے درمیان (1-1) کی مطابقت ہے۔

9.1.2 مستوی کے دو نقاط کے درمیان فاصلہ کے فارمولا کا حصول

(Finding Distance Between two Points)



اگر $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کوآرڈینیٹ (coordinate) مستوی یا پلین میں دو نقاط ہوں اور حقیقی نمبر d کو قطعہ خط PQ کی لمبائی مان لیا جائے یعنی، $|\overline{PQ}| = d$ تو قطعہ خط LM خط x- ایکسز اور LP خط y- ایکسز کے متوازی ہوں اور دونوں نقاط M اور L خط x- ایکسز پر ہوں تو نقاط $L(x_1, 0)$ اور $M(x_2, 0)$ بمعہ محددات ہوں گے۔سامنے شکل کے حوالہ سے قطعہ خط PN خط x- ایکسز کے متوازی ہوگا۔

قائمہ زاویہ مثلث PNQ میں

$$|\overline{NQ}| = |y_2 - y_1|$$

اور

$$|\overline{PN}| = |x_2 - x_1|$$

فیثاغورث قانون کی مدد سے چونکہ $\angle PNQ = 90^o$ اس لیے

$$(\overline{PQ})^2 = (\overline{PN})^2 + (\overline{QN})^2$$

$$\Rightarrow \quad d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$\Rightarrow \quad d = \pm\sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

پس نیچے درج مساوات فاصلہ فارمولا کہلاتا ہے۔

فارمولا:

$$\boxed{d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \text{ (ہمیشہ) } d > 0 \text{ جبکہ}}$$

9.1.3 فاصلہ فارمولا کا استعمال (Use of Distance Formula)

فاصلہ فارمولا کے استعمال کو مندرجہ ذیل مثالوں سے واضح کیا جاتا ہے۔

مثال 1 فاصلہ فارمولا کی مدد سے درج ذیل نقاط کے جوڑوں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں

(i) $P(1, 2)$ ، $Q(0, 3)$ (ii) $S(-1, 3)$ ، $R(3, -2)$

(iii) $U(0, 2)$ ، $V(-3, 0)$ (iv) $P'(1, 1)$ ، $Q'(2, 2)$

حل

(i) $$|\overline{PQ}| = \sqrt{(0-1)^2 + (3-2)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

(ii) $$|\overline{SR}| = \sqrt{(3-(-1))^2 + (-2-3)^2}$$

$$= \sqrt{(3+1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$$

(iii) $$|\overline{UV}| = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-2)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

(iv) $$|\overline{PQ}| = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2}$$

$$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

مشق 9.1

1۔ درج ذیل نقاط کے جوڑوں کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔

(a) $A(9, 2), B(7, 2)$	(b) $A(2, -6), B(3, -6)$
(c) $A(-8, 1), B(6, 1)$	(d) $A(-4, \sqrt{2}), B(-4, -3)$
(e) $A(3, -11), B(3, -4)$	(f) $A(0, 0), B(0, -5)$

2۔ اگر P ایک ایسا نقطہ ہے جو خط x-ایکسز پر واقع ہے اور اس کا x-محدد a ہے۔ Q ایک نقطہ ہے جو y-ایکسز پر واقع ہے اور اس کا y-محدد b ہے۔ جیسے نیچے درج ہے۔ نقاط P اور Q کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

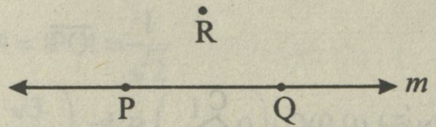
(i) $a = 9, b = 7$	(ii) $a = 2, b = 3$	(iii) $a = -8, b = 6$
(iv) $a = -2, b = -3$	(v) $a = \sqrt{2}, b = 1$	(vi) $a = -9, b = -4$

9.2 ہم خط یا ہم لائن نقاط (Collinear Points)

9.2.1 مستوی میں ہم خط یا غیر ہم خط نقاط (Collinear or Non-collinear Points in the Plane)

دو یا دو سے زیادہ نقاط جو ایک ہی خط پر واقع ہوں ہم خط (collinear) کہلاتے ہیں۔ (بحوالہ اس خط کے) جو نقاط ہم خط نہ ہوں یا ایک سے زیادہ خطوط پر واقع ہوں غیر ہم خط (non-collinear) کہلاتے ہیں۔

اگر PQ ایک خط ہو تو تمام نقاط جو خط m پر واقع ہوں ہم خط ہیں۔ نیچے دی ہوئی شکل میں نقاط P اور Q ہم خط ہیں بحوالہ خط m اور نقاط P اور R ہم خط نہیں (بحوالہ خط m)۔



9.2.2 فاصلہ فارمولا کی مدد سے تین یا تین سے زیادہ مستوی کے نقاط کو ہم خط یا غیر ہم خط ثابت کرنا

تین دیے ہوئے نقاط P، Q اور R جو مستوی میں ہیں۔ ہم خط ہوں گے اگر $|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| = |\overline{PR}|$ ہو ورنہ غیر ہم خط ہوں گے۔

مثال: فاصلہ فارمولا سے ظاہر کیجیے کہ نقاط

(i) $P(-2, -1)$، $Q(0, 3)$ اور $R(1, 5)$ ہم خط ہیں۔

(ii) نقاط P، Q، R اور $S(1, -1)$ غیر ہم خط ہیں۔

حل:

(i) فاصلہ فارمولا کے استعمال سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(0+2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

اور

$$|\overline{QR}| = \sqrt{(1-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|\overline{PR}| = \sqrt{(1+2)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

چونکہ

$$|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} = |\overline{PR}|$$

اس لیے

نقاط P، Q اور R ہم خط ہیں۔

(ii)

$$|\overline{PS}| = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0} = 3$$

$$|\overline{QS}| = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

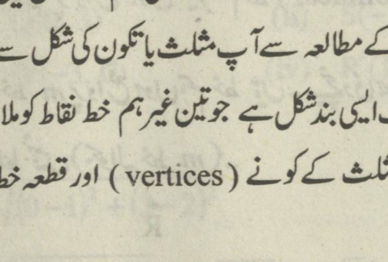
چونکہ

$$|\overline{PQ}| + |\overline{QS}| \neq |\overline{PS}|$$

اس لیے نقاط P، Q اور S ہم خط نہیں ہیں۔

پس نقاط P، Q، R اور S بھی ہم خط نہیں ہیں۔

یاد رہے کہ یونٹ (8) کے مطالعہ سے آپ مثلث یا تکون کی شکل سے واقف ہیں کہ مستوی میں مثلث ایک ایسی بند شکل ہے جو تین غیر ہم خط نقاط کو ملانے سے بنتی ہے۔ مثلث ABC کے تینوں غیر ہم خط نقاط A، B اور C مثلث کے کونے (vertices) اور قطعہ خط AB، BC اور CA مثلث ABC کے اضلاع کہلائیں گے۔



9.2.3 فاصلہ فارمولا (Distance Formula) کے استعمال سے مثلث کی مختلف اقسام کی تشکیل

جیومیٹری میں مثلث کے تصور کی توسیع کی خاطر ہم نیچے مثلث کے اضلاع کی لمبائی کے اعتبار سے اس کی مختلف اقسام سے روشناس کراتے ہیں:

(i) متساوی الاضلاع مثلث (ii) متساوی الساقین مثلث

(iii) قائمہ زاویہ مثلث (iv) مختلف الاضلاع مثلث

ہم اوپر مذکورہ مثلثان (i) تا (iv) کے بارے میں بالترتیب بحث کرتے ہیں۔

(i) متساوی الاضلاع مثلث (Equilateral Triangle)

اگر دی ہوئی مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائی برابر ہو تو مثلث متساوی الاضلاع مثلث کہلاتی ہے۔

مثال: مثلث OPQ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے کیونکہ اس کے تینوں کونوں کے نقاط $O(0,0)$، $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ اور $Q\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$ ہم خط نہیں۔ جبکہ

$$|\overline{OP}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\overline{QO}| = \sqrt{\left(0-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{4}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

اور

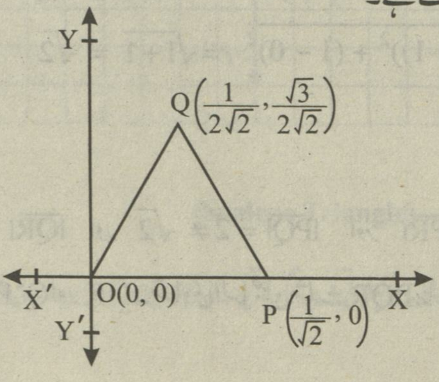
$$|\overline{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1-2}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{4}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

پس

$$|\overline{OP}| = |\overline{QO}| = |\overline{PQ}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

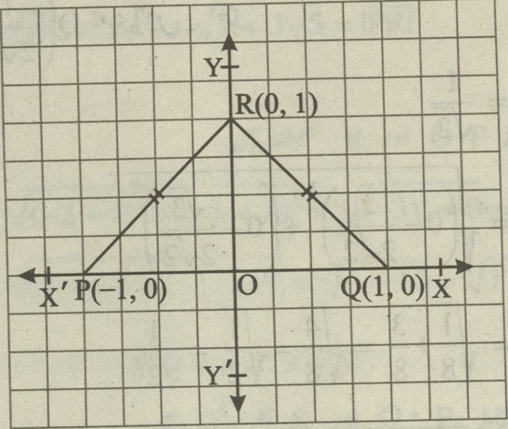
جو ایک حقیقی نمبر ہے اور نقاط $O(0,0)$، $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ اور $Q\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$ ہم خط نہیں اس لیے مثلث OPQ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔



(ii) متساوی الساقین مثلث (Isosceles Triangle)

ایک متساوی الساقین مثلث ایسی مثلث ہے جس کے دو اضلاع کی لمبائی برابر ہے۔ جبکہ تیسرے ضلع کی لمبائی مختلف ہے۔

مثال مثلث PQR ایک متساوی الساقین ہے جس کے کونوں کے نقاط P(−1, 0) ، Q(1, 0) اور R (0, 1) ہم خط نہیں۔ جیسا کہ نیچے شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔



فاصلہ فارمولا کی مدد سے

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(1-(-1))^2 + (0-0)^2}$$

$$= \sqrt{(1+1)^2 + 0} = \sqrt{4} = 2$$

$$|\overline{QR}| = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$|\overline{PR}| = \sqrt{(0-(-1))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

چونکہ

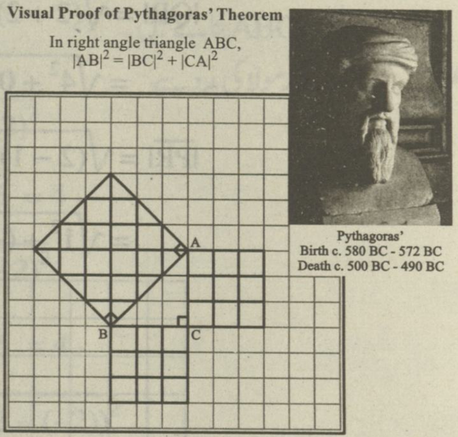
$|\overline{QR}| = |\overline{PR}| = \sqrt{2}$ اور $|\overline{PQ}| = 2 \neq \sqrt{2}$ اور $|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| > |\overline{PR}|$

اس لیے غیر ہم خط نقاط P ، Q اور R ایک متساوی الساقین مثلث PQR بناتے ہیں۔

(iii) قائمہ زاویہ مثلث (Right Angled Triangle)

ایک مثلث جس کے اندرونی زاویوں میں سے ایک زاویہ 90° کا ہو قائمہ زاویہ مثلث کہلاتی ہے۔

مثال اگر O(0, 0) ، P(−3, 0) اور Q(0 ,2) تین نقاط غیر ہم خط ہوں تو ثابت کیجیے کہ مثلث OPQ ایک قائمہ زاویہ مثلث ہے۔



چونکہ

$$|\overline{OQ}| = \sqrt{(0-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$|\overline{OP}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

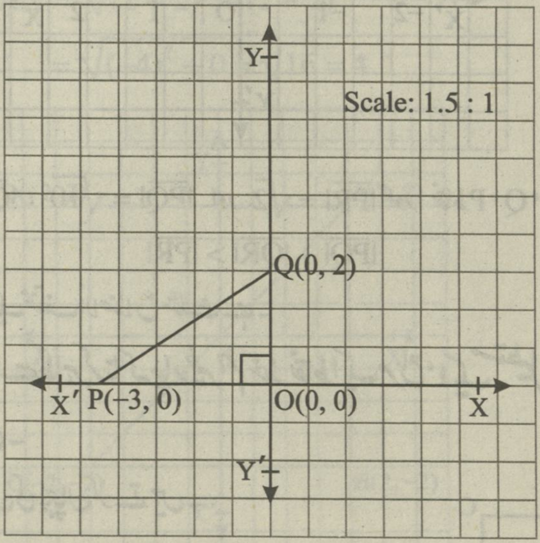
$$|\overline{OQ}|^2 + |\overline{OP}|^2 = (2)^2 + (3)^2$$

$$= 13 = |\overline{PQ}|^2$$

اور $|\overline{OQ}|^2 + |\overline{OP}|^2 = |\overline{PQ}|^2$

اس لیے $90° = \angle POQ$

پس نقاط O(0, 0)، P(−3, 0) اور Q(0 , 2) مثلث OPQ بناتے ہیں جو قائمہ زاویہ مثلث ہے۔



(iv) مختلف الاضلاع مثلث (Scalene Triangle)

ایک مثلث مختلف الاضلاع مثلث کہلاتی ہے اگر اس کے تینوں اضلاع کی لمبائی ایک دوسرے سے مختلف ہو۔

مثال تصدیق کیجیے کہ نقاط $P(1, 2)$ ، $Q(-2, 1)$ اور $R(2, 1)$ مستوی میں مختلف اضلاع مثلث بناتے ہیں۔

حل چونکہ

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \; ,$$

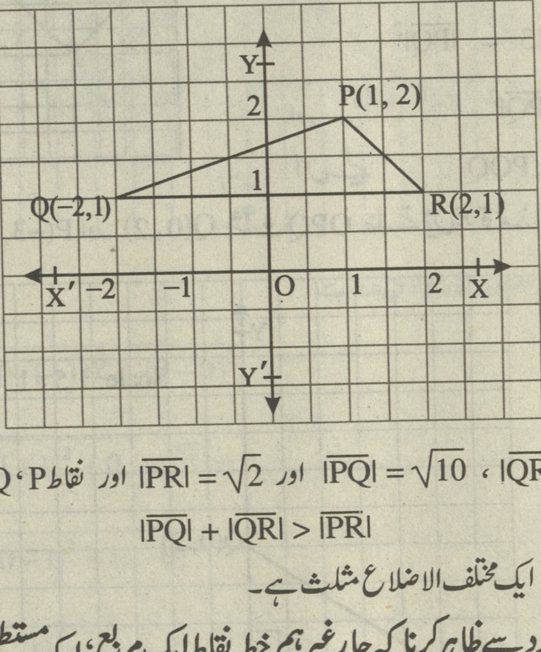
$$|\overline{QR}| = \sqrt{(2+2)^2 + (1-1)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{4^2} = 4 \; ,$$

اور

$$|\overline{PR}| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



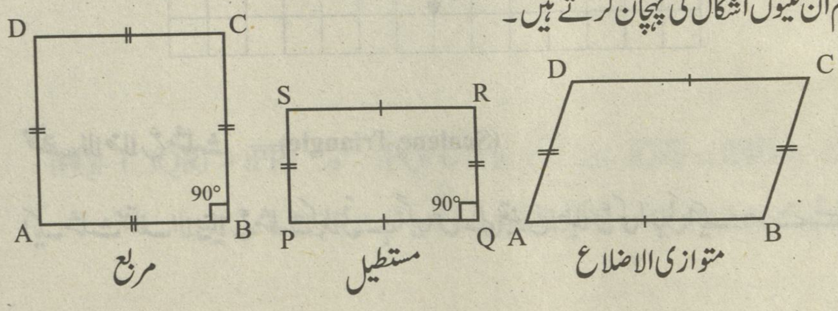
اس لیے $|\overline{QR}| = 4$ ، $|\overline{PQ}| = \sqrt{10}$ اور $|\overline{PR}| = \sqrt{2}$ اور نقاط P، Q، R غیر ہم خط ہیں۔ کیونکہ

$$|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| > |\overline{PR}|$$

پس مثلث PQR ایک مختلف الاضلاع مثلث ہے۔

9.2.4 فاصلہ فارمولا کی مدد سے ظاہر کرنا کہ چار غیر ہم خط نقاط ایک مربع، ایک مستطیل اور ایک متوازی الاضلاع کی تشکیل کرتے ہیں۔

پہلے ہم ان تینوں اشکال کی پہچان کرتے ہیں۔



(a) **فاصلہ فارمولا کی مدد سے دیے ہوئے چار غیر ہم خط نقاط سے ایک مربع کی تشکیل**

مستوی میں مربع ایک ایسی بند شکل ہے جو چار غیر ہم خط نقاط سے بنتی ہے اس کے چاروں اضلاع کی لمبائی برابر اور ہر زاویہ $90°$ کا ہوتا ہے۔

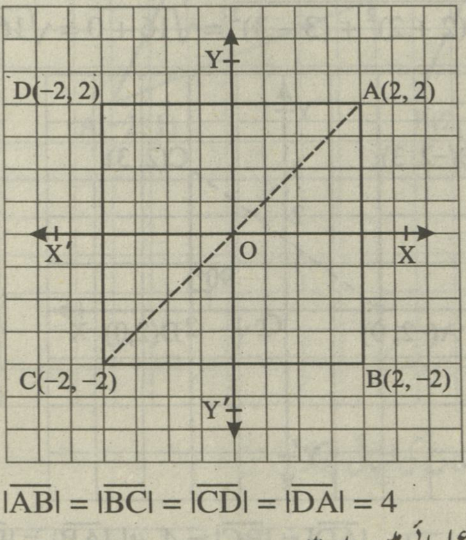
مثال اگر $A(2, 2)$، $B(2, -2)$، $C(-2, -2)$ اور $D(-2, 2)$ چار نقاط غیر ہم خط ہوں تو تصدیق کیجیے کہ یہ نقاط مربع ABCD بناتے ہیں۔

حل فاصلہ فارمولا کی مدد سے

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(2-2)^2 + (-2-2)^2}$$
$$= \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4,$$
$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-2-2)^2 + (-2+2)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4,$$
$$|\overline{CD}| = \sqrt{(-2-(-2))^2 + (2-(-2))^2}$$
$$= \sqrt{(-2+2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{0+16} = \sqrt{16} = 4,$$

اور

$$|\overline{DA}| = \sqrt{(2+2)^2 + (2-2)^2}$$
$$= \sqrt{(+4)^2 + 0} = \sqrt{16} = 4$$



پس

$$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{DA}| = 4$$

یعنی شکل کے چاروں اضلاع لمبائی میں برابر ہیں۔

مزید

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

اور $|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = (4)^2 + (4)^2 = 32,$

$|\overline{AC}|^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$

چونکہ $|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = |\overline{AC}|^2,$

اس لیے $\angle ABC = 90^\circ$

اسی طرح $\angle ADC = \angle DCB = \angle DAB = 90^\circ$

پس دیے ہوئے چار نقاط A، B، C اور D غیر ہم خط ہیں جو مربع شکل ABCD کی تشکیل کرتے ہیں۔

(b) فاصلہ فارمولا کی مدد سے ثابت کیجیے کہ چار غیر ہم خط نقاط مستطیل بناتے ہیں

مستوی میں ایک ایسی بند شکل جو چار غیر ہم خط نقاط سے بنتی ہے مستطیل کہلاتی ہے اگر اس کے

(i) آمنے سامنے کے اضلاع لمبائی میں برابر ہوں۔

(ii) ہر کونے پر زاویہ 90° کا ہو۔

مثال ظاہر کیجیے کہ نقاط $A(-2, 0)$ ، $B(-2, 3)$ ، $C(2, 3)$ اور $D(2, 0)$ ایک مستطیل بناتے ہیں۔

حل دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کرنے کا فارمولا استعمال کرنے سے

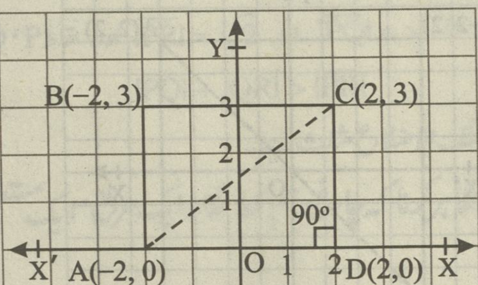
$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-2+2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{0+9} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\overline{DC}| = \sqrt{(2-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{0+9} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\overline{AD}| = \sqrt{(2+2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+0} = 4$$

اور

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(2+2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{16+0} = \sqrt{16} = 4$$



چونکہ $|\overline{AD}| = |\overline{BC}| = 4$ اور $|\overline{AB}| = |\overline{DC}| = 3$

اس طرح مستطیل کے بالمقابل اضلاع برابر ہوئے اور مزید

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(2+2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

اس لیے $|\overline{AC}|^2 = (5)^2 = 25$ اور $|\overline{AD}|^2 + |\overline{DC}|^2 = (4)^2 + (3)^2 = 25$

چونکہ $|\overline{AD}|^2 + |\overline{DC}|^2 = |\overline{AC}|^2$ اس لیے $\angle ADC = 90°$

اسی طرح $\angle ABC = \angle BCD = \angle DAB = 90°$

نتیجتاً، نقاط A، B، C اور D ایک مستطیل بناتے ہیں۔

(c) دو نقاط کے درمیان فاصلہ فارمولا کی مدد سے دیے ہوئے غیر ہم خط چار نقاط سے متوازی الاضلاع کی شکل بنانا

تعریف: مستوی میں چار غیر ہم خط نقاط سے بنائی ہوئی بند شکل متوازی الاضلاع کہلاتی ہے اگر

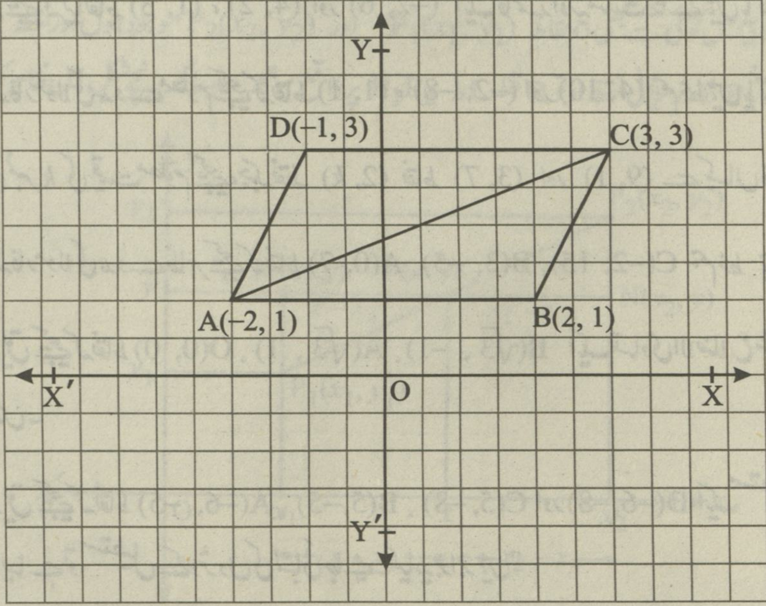
(i) شکل کے بالمقابل اضلاع کی لمبائی برابر ہو۔

(ii) شکل کے بالمقابل اضلاع باہم متوازی ہوں۔

مثال

ظاہر کیجیے کہ نقاط $A(-2, 1)$، $B(2, 1)$، $C(3, 3)$ اور $D(-1, 3)$ ایک متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

حل



چونکہ فاصلہ فارمولا کی مدد سے اضلاع کی لمبائی

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(2+2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4^2 + 0} = \sqrt{16} = 4$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{(3+1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{4^2 + 0} = \sqrt{16} = 4$$

$$|\overline{AD}| = \sqrt{(-1+2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

اور $$|\overline{BC}| = \sqrt{(3-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

چونکہ $|\overline{AD}| = |\overline{BC}| = \sqrt{5}$ اور $|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = 4$

مشق 9.2

1۔ تحقیق کیجیے کہ کیا نقاط $(5, -2)$ ، $(5, 4)$ اور $(-4, 1)$ ایک متساوی الاضلاع مثلث کے کونے ہیں یا متساوی الساقین مثلث کے؟

2۔ بتائیے کیا نقاط $(-1, 1)$ ، $(5, 4)$ ، $(2, -2)$ اور $(-4, 1)$ ایک مربع شکل بناتے ہیں یا نہیں؟

3۔ فیصلہ کیجیے کہ کیا نقاط $(3, 1)$ ، $(4, 2)$ اور $(-2, 6)$ ایک قائمہ زاویہ مثلث بناتے ہیں یا نہیں؟

4۔ فاصلہ فارمولا کی مدد سے معلوم کیجیے کہ نقاط $(1, 1)$ ، $(-2, -8)$ اور $(4, 10)$ ہم خط ہیں یا نہیں۔

5۔ حقیقی نمبر k کی قیمت معلوم کیجیے، جبکہ نقطہ $(2, k)$ نقاط $(3, 7)$ اور $(9, 1)$ سے یکساں فاصلہ پر ہے۔

6۔ فاصلہ فارمولا کی مدد سے ظاہر کیجیے کہ نقاط $A(0, 7)$ ، $B(3, -5)$ ، $C(-2, 15)$ ہم خط ہیں۔

7۔ تصدیق کیجیے کہ نقاط $O(0, 0)$ ، $A(\sqrt{3}, 1)$ ، $B(\sqrt{3}, -1)$ ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں یا نہیں۔

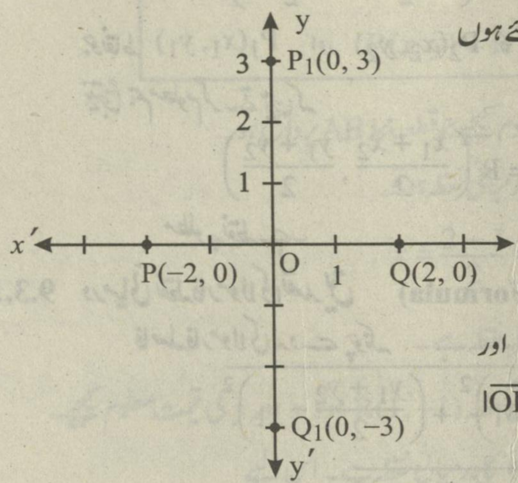
8۔ تصدیق کیجیے کہ نقاط $A(-6, -5)$ ، $B(5, -5)$ ، $C(5, -8)$ اور $D(-6, -8)$ ایک مستطیل بناتے ہیں۔ اگر ایسا ہے تو مستطیل کے وتروں کی لمبائی جانیے۔ کیا یہ برابر ہیں؟

9۔ تصدیق کیجیے کہ نقاط $M(-1, 4)$ ، $N(-5, 3)$ ، $P(1 - 3)$ اور $Q(5, -2)$ ایک متوازی الاضلاع کے کونے ہیں۔

10۔ ایک دائرہ کے قطر کی لمبائی بتائیے جس کا مرکزی نقطہ $C(-3, 6)$ ہے اور نقطہ $P(1, 3)$ دائرہ پر واقع ہے۔

9.3 درمیانی نقطہ فارمولا (Mid-Point Formula)

9.3.1 درمیانی نقطہ کے تصور کی پہچان (Recognition of the Mid-Point)

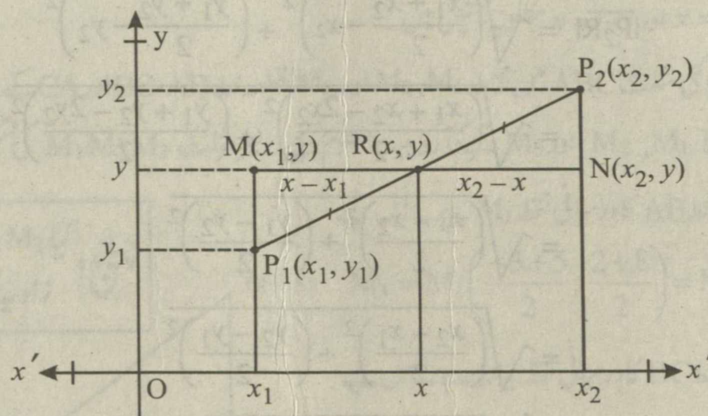


اگر دونقاط $P(-2, 0)$ اور $Q(2, 0)$ دیے گئے ہوں جو x-محور (x-axis) پر واقع ہیں تو مبدا $O(0, 0)$ ان کا درمیانی نقطہ ہے۔ چونکہ سامنے دی ہوئی شکل میں $|\overline{OP}| = 2 = |\overline{OQ}|$ اور نقاط P، Oاور Q ہم خط ہیں۔

اسی طرح مبدا $O(0, 0)$ نقاط $P_1(0, 3)$ اور $Q_1(0, -3)$ کا درمیانی نقطہ ہے چونکہ $|\overline{OP_1}| = 3 = |\overline{OQ_1}|$ اور نقاط P_1 ، O اور Q_1 ایک خط y-ایکسز پر واقع ہیں۔

9.3.2 مستوی میں کسی بھی دونقاط کے درمیانی نقطہ کی پہچان

اگر مستوی میں کوئی سے بھی دونقاط $P_1(x_1, y_1)$ اور $P_2(x_2, y_2)$ موجود ہوں اور نقطہ $R(x, y)$ دیے ہوئے نقاط P_1 اور P_2 کا درمیانی نقطہ ہو تو R قطعہ خط P_1P_2 پر واقع ہوگا۔ جیسا کہ نیچے شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔



اگر قطعہ خط MN جو خط x-ایکسز کے متوازی ہے اور نقطہ $R(x, y)$ قطعہ خط MN پر M اور N کا درمیانی نقطہ ہے:

تو

$$x_2 - x = x - x_1$$

$$\Rightarrow \quad 2x = x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

اسی طرح

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

پس R نقاط M اور N کا درمیانی نقطہ ہے۔ اس لیے

$$R(x, y) = R\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

جو نقاط $P_1(x_1, y_1)$ اور $P_2(x_2, y_2)$ کا بھی درمیانی نقطہ ہے۔

نتیجتاً ہم معلوم کرتے ہیں کہ

$$R(x, y) = R\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

مطلوبہ نقطہ ہے۔

9.3.3 درمیانی نقطہ فارمولا کی تصدیق (Verification of Mid-Point Formula)

فاصلہ فارمولا کی مدد سے چونکہ

$$|\overline{P_1R}| = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{1}{2}|\overline{P_1P_2}|$$

اور

$$|\overline{P_2R}| = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_2\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2 - 2y_2}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{1}{2}|\overline{P_1P_2}|$$

پس

$$\Rightarrow \quad |\overline{P_2R}| = |\overline{P_1R}| = \frac{1}{2}|\overline{P_1P_2}|$$

مطلوبہ تصدیق ہو جاتی ہے کہ نقطہ $R\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ قطعہ خط P_1RP_2 کا درمیانی نقطہ ہے۔

چونکہ $|\overline{P_1R}| + |\overline{P_2R}| = |\overline{P_1P_2}|$ اس لیے نقاط P_1، P_2 اور R قطعہ خط P_1P_2 پر واقع ہیں۔

اگر مستوی میں کوئی سے بھی دو نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ ہوں تو ان کا درمیانی نقطہ $R(x, y)$ قطعہ خط PQ پر واقع ہوگا۔ اور

$$R(x, y) = R\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

مثال 1 دو نقاط $A(2, 5)$ اور $B(-1, 1)$ کا درمیانی نقطہ معلوم کیجیے جو قطعہ خط AB پر واقع ہو۔

حل اگر $R(x, y)$ دیے ہوئے نقاط A اور B کا مطلوبہ درمیانی نقطہ ہو تو

$$x = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \quad ، \quad y = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

پس $R = R(x, y) = R\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ مطلوبہ نقطہ ہے۔

مثال 2 مستوی میں دو نقاط $P(2, 3)$ اور $Q(x, y)$ کا درمیانی نقطہ $R(1, -1)$ ہو تو x اور y کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل چونکہ $R(1, -1)$ نقاط $P(2, 3)$ اور $Q(x, y)$ کا درمیانی نقطہ ہے۔ اس لیے

$$1 = \frac{x+2}{2} \quad ، \quad -1 = \frac{y+3}{2}$$

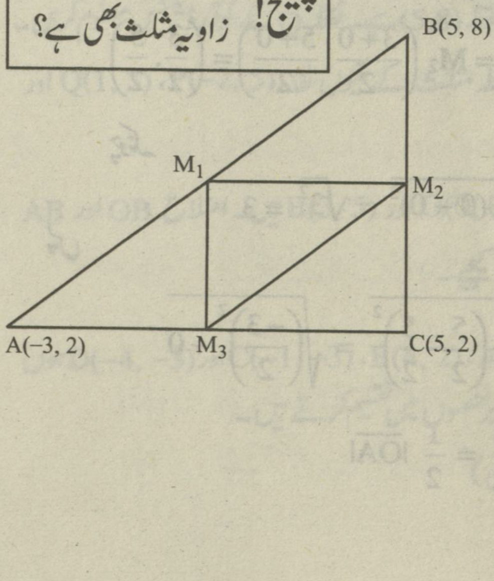
$$\Rightarrow \quad 2 = x + 2 \qquad \Rightarrow \quad -2 = y + 3$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \qquad \Rightarrow \quad y = -5$$

پس $x = 0$ اور $y = -5$ مطلوبہ قیمتیں ہیں۔

مثال 3 نیچے دکھائی گئی مثلث ABC میں نقاط M_1, M_2 اور M_3 قطعہ خط AB، BC اور CA کے بالترتیب درمیانی نقاط ہوں تو نقاط M_1, M_2 اور M_3 کے کوآرڈینیٹ معلوم کیجیے۔ نیز مثلث $M_1M_2M_3$ کی قسم بھی واضح کیجیے۔

چیلنج! کیا $\triangle M_1M_2M_3$ قائمہ زاویہ مثلث بھی ہے؟



حل چونکہ قطعہ خط AB کا درمیانی نقطہ M_1 ہے۔ اس لیے

$$M_1 = M_1\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = M_1(1, 5)$$

چونکہ قطعہ خط BC کا درمیانی نقطہ M_2 ہے۔ اس لیے

$$M_2 = M_2\left(\frac{5+5}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = M_2(5, 5)$$

چونکہ قطعہ خط AC کا درمیانی نقطہ M_3 ہے۔ اس لیے

$$M_3 = M_3\left(\frac{5-3}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = M_3(1, 2)$$

مثلث $M_1M_2M_3$ کے اضلاع کی لمبائیاں:

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(5-1)^2+(5-5)^2} = \sqrt{4^2+0} = 4 \qquad \ldots\ldots \text{(i)}$$

$$|\overline{M_2M_3}| = \sqrt{(1-5)^2+(2-5)^2} = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2}$$

$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \qquad \ldots\ldots \text{(ii)}$$

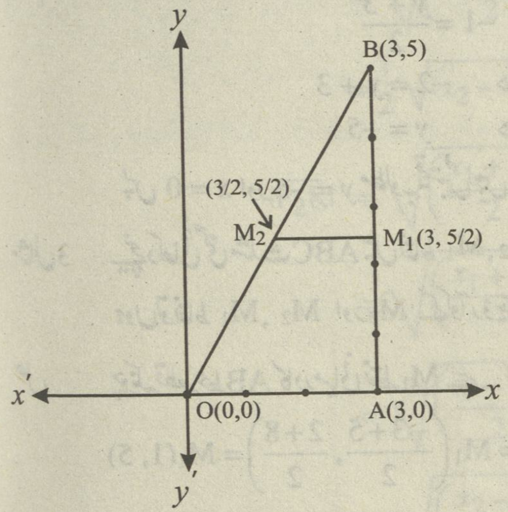
$$|\overline{M_1M_3}| = \sqrt{(1-1)^2+(2-5)^2} = \sqrt{0^2+(-3)^2} = 3 \qquad \ldots\ldots \text{(iii)}$$

چونکہ مثلث $M_1M_2M_3$ کے اضلاع کی لمبائیاں 4, 5 اور 3 ایک دوسرے سے مختلف ہیں اس لیے مثلث $M_1M_2M_3$ ایک مختلف الاضلاع مثلث ہے۔

مثال 4 اگر مستوی میں دیے ہوئے تین نقاط $O(0, 0)$, $A(3, 0)$ اور $B(3, 5)$ کی مناسبت سے M_1 قطعہ خط AB کا درمیانی نقطہ اور M_2 قطعہ خط OB کا درمیانی نقطہ ہو تو

ثابت کیجیے کہ

$$|\overline{M_1M_2}| = \frac{1}{2}\,|\overline{OA}|$$



حل قطعہ خط AB کا درمیانی نقطہ M_1 ہے۔

اس لیے درمیانی نقطہ فارمولا کی مدد سے

$$M_1 = M_1\left(\frac{3+3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

چونکہ قطعہ خط OB کا درمیانی نقطہ M_2 ہے اس لیے

$$M_2 = M_2\left(\frac{3+0}{2}, \frac{5+0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

چونکہ

$$|\overline{OA}| = \sqrt{(3-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{3^2} = 3$$

پس

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-3\right)^2+\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2+0}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4}+0} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\,|\overline{OA}|$$

اہم نوٹ

اگر دو نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کا درمیانی نقطہ $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ہو تو

(i) M دونوں نقاط P اور Q سے یکساں فاصلے پر ہے۔ یعنی $|\overline{PM}| = |\overline{MQ}|$

(ii) M دونوں نقاط کے ملانے والے قطعہ خط PQ پر واقع ہے۔

(iii) ہر نقطہ R جو مستوی میں نقاط P اور Q سے یکساں فاصلے پر ہو ضروری نہیں کہ وہ ان کا درمیانی نقطہ بھی ہو۔

جیسا کہ نقطہ $R(0,1)$ نقاط $P(-3, 0)$ اور $Q(3, 0)$ سے یکساں فاصلہ پر ہے۔ لیکن $R(0, 1)$ نقاط P اور Q کا درمیانی نقطہ نہیں۔ مثلاً

$$|\overline{RQ}| = \sqrt{(0-3)^2+(1-0)^2} = \sqrt{(-3)^2+(1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$|\overline{RP}| = \sqrt{(0+3)^2+(1-0)^2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$$

اور نقاط P اور Q کا درمیانی نقطہ $R(0, 1)$ نہیں بلکہ $R(0, 0)$ درمیانی نقطہ ہے اور $(0, 1) \neq (0, 0)$

(iv) یاد رہے کہ دو نقاط کا درمیانی نقطہ صرف ایک ہی نقطہ ہو سکتا ہے۔

مشق 9.3

1۔ مندرجہ ذیل نقاط کے جوڑوں کو ملانے سے قطعہ خط کا درمیانی نقطہ معلوم کیجیے۔

(a) $A(9, 2), B(7, 2)$ (b) $A(2, -6), B(3, -6)$

(c) $A(-8, 1), B(6, 1)$ (d) $A(-4, 9), B(-4, -3)$

(e) $A(3, -11), B(3, -4)$ (f) $A(0, 0), B(0, -5)$

2۔ قطعہ خط PQ کا کونا نقطہ $P(-3,6)$ پر ہے اور اس کا درمیانی نقطہ $(5,8)$ ہے۔ نقطہ Q کے کوآرڈینیٹس معلوم کریں۔

3۔ ثابت کیجیے کہ ایک قائمہ زاویہ مثلث کے وتر کا درمیانی نقطہ مثلث کے تینوں نقاط $P(-2, 5)$، $Q(1, 3)$ اور $R(-1, 0)$ سے یکساں فاصلہ پر ہے۔

4۔ مستوی میں مثلث کے تینوں کونوں کے نقاط $O(0, 0), A(3, 0)$ اور $B(3, 5)$ ہیں۔ اضلاع OB اور AB کے درمیانی نقاط M_1 اور M_2 ہیں۔ $|\overline{M_1M_2}|$ معلوم کیجیے۔

5۔ ایک متوازی الاضلاع ABCD جس میں نقاط $A(1, 2)$، $B(4, 2)$، $C(-1, -3)$ اور $D(-4, -3)$ ہوں تو ثابت کیجیے کہ ABCD کے وتر ایک دوسرے کو باہم دو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

(اشارہ: متوازی الاضلاع کے وتر ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں)

6۔ ایک مثلث PQR کے نقاط P(4, 6)، Q(−2, −4) اور R(−8, 2) ہوں تو ثابت کیجیے کہ اضلاع PR اور QR کے درمیانی نقاط کو ملانے والے قطعہ خط کی لمبائی $\frac{1}{2}|\overline{PQ}|$ کی لمبائی کے برابر ہے۔

اعادہ مشق 9

1۔ دیے ہوئے جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) نقاط (0, 0) اور (1, 1) کے درمیان فاصلہ.......... ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $\sqrt{2}$

(ii) نقاط (1, 0) اور (0, 1) کا درمیانی فاصلہ.......... ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) $\sqrt{2}$ (d) 2

(iii) نقاط (0, 0) اور (2, 2) کا درمیانی نقطہ.......... ہے۔

(a) (1, 1) (b) (1, 0) (c) (0, 1) (d) (−1, −1)

(iv) نقاط (2, −2) اور (−2, 2) کا درمیانی نقطہ.......... ہے۔

(a) (2, 2) (b) (−2, −2) (c) (0, 0) (d) (1, 1)

(v) ایک مثلث جس کے تینوں اضلاع کی لمبائی برابر ہو وہ .... کہلاتی ہے۔

(a) متساوی الساقین (b) مختلف الاضلاع

(c) مساوی الاضلاع (d) ان میں سے نہیں

(vi) ایک ایسی مثلث جس کے تمام اضلاع کی لمبائی برابر ہو وہ .... کہلاتی ہے۔

(a) متساوی الساقین (b) مختلف الاضلاع

(c) مساوی الاضلاع (d) ان میں سے نہیں

2۔ مندرجہ ذیل جملوں میں سے کون سے درست اور کون سے غلط ہیں؟

(i) ایک خط کے دو سرے ہوتے ہیں۔ ....

(ii) ایک قطعہ خط کا ایک سرا ہوتا ہے۔ ....

(iii) ایک مثلث تین ہم خط نقاط سے بنتی ہے۔ ....

(iv) ایک مثلث کے ہر ضلع پر دو ہم خط راسی نقاط ہوتے ہیں۔ ....

(v) ایک مستطیل کے ہر ضلع کے دو کونے ہم خط ہوتے ہیں۔ ....

(vi) تمام نقاط جو x۔محور پر ہوتے ہیں ہم خط ہوتے ہیں۔

(vii) مبدا ہی ایک ایسا نقطہ ہے جو x۔محور اور y۔محور دونوں کا ہم خط نقطہ ہے۔

3۔ مندرجہ ذیل نقاط کے جوڑوں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

(i) (6, 3), (3, −3) (ii) (7, 5), (1, −1)

(iii) (0, 0), (−4, −3)

4۔ مندرجہ ذیل نقاط کے جوڑوں کا درمیانی نقطہ بتائیے۔

(i) (6, 6), (4, −2) (ii) (−5, −7), (−7, −5)

(iii) (8, 0), (0, −12)

5۔ مندرجہ ذیل کی تعریف کیجیے۔

(i) کوآرڈینیٹ جیومیٹری (ii) ہم لائن نقاط (iii) غیر ہم لائن نقاط

(iv) متساوی الاضلاع مثلث (v) مختلف الاضلاع مثلث (vi) متساوی الساقین مثلث

(vii) قائمہ زاویہ مثلث (viii) مربع

خلاصہ

☆ اگر $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ دو نقاط ہوں اور حقیقی نمبر d اِن کے درمیان فاصلہ کو ظاہر کرتا ہو

تو $$d = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$

☆ غیر ہم خط نقاط کا تصور تین اور چار ضلعی اشکال کو جیومیٹری میں زیر بحث لانے کی وجہ بنتا ہے۔

☆ مستوی میں تین نقاط P ، Q اور R ہم خط ہوں گے اگر $|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| = |\overline{PR}|$

☆ تین نقاط P، Q اور R مثلث کی تشکیل کرتے ہیں اگر وہ غیر ہم خط ہوں۔

یا $|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| > |\overline{PR}|$

☆ اگر $|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| < |\overline{PR}|$ تو نقاط P، Q اور R سے یکتا مثلث نہیں بنائی جاسکتی۔

☆ مثلثوں کی مختلف اقسام، متساوی الاضلاع، متساوی الساقین، قائمہ زاویہ اور مختلف الاضلاع مثلثان اس یونٹ میں زیرِ بحث لائی گئی ہیں۔

☆ اسی طرح چار ضلعی اشکال مربع ، مستطیل اور متوازی الاضلاع کو زیرِ بحث لایا گیاہے۔