یونٹ 12

خط اور زاویہ کے ناصف

(LINE BISECTORS AND ANGLE BISECTORS)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

12.1(i) قطعہ خط کا ناصف (Bisector of a Line Segment)

(ii) زاویہ کا ناصف (Bisector of an Angle)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل/نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ ثابت کر سکیں کہ اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو تو وہ نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوگا۔

☆ ثابت کر سکیں کہ اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہوگا۔

☆ ثابت کر سکیں کہ کسی مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

☆ ثابت کر سکیں کہ کسی زاویے کے ناصف پر ہر ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔

☆ ثابت کر سکیں کہ اگر کسی زاویے کے اندرونے میں ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ نقطہ اس زاویے کے ناصف پر واقع ہوتا ہے۔

☆ ثابت کر سکیں کہ کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

تعارف

اس یونٹ میں ہم کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف اور کسی زاویہ کے ناصف کے بارے میں مسئلے اور ان کے عکس ثابت کریں گے۔ لیکن بہتر ہوگا کہ ایسا کرنے سے پیشتر مندرجہ ذیل اصطلاحات کی تعریف کو دہرا لیں۔

قطعہ خط کا عمودی ناصف

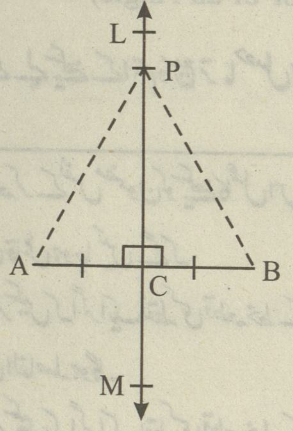
ایک خط l کسی قطعہ خط کا عمودی ناصف کہلاتا ہے اگر l قطعہ خط پر عمود بھی ہو اور قطعہ خط کے وسطی نقطہ میں سے بھی گزرے۔

زاویہ کا ناصف

اگر $\angle ABC$ کے اندر کوئی نقطہ P اس طرح واقع ہو کہ $m\angle ABP = m\angle PBC$ تو $\overrightarrow{BP}$ کو $\angle ABC$ کا ناصف کہتے ہیں۔ (یعنی $\overrightarrow{BP}$ زاویہ ABC کی تنصیف کرتی ہے)

مسئلہ 12.1.1

اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو تو وہ نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوگا۔



معلوم ایک خط LM قطعہ خط AB کو نقطہ C پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ

$\overleftrightarrow{LM} \perp \overline{AB}$ اور $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

مطلوب $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

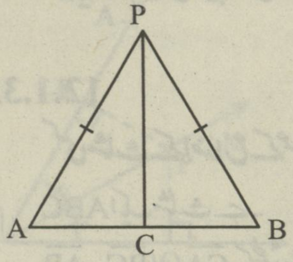
عمل $\overleftrightarrow{LM}$ پر ایک نقطہ P لیں۔ P کو نقاط A اور B سے ملائیں۔

ثبوت

دلائل	بیانات
	$\Delta ACP \longleftrightarrow \Delta BCP$ میں
معلوم	$\overline{AC} \cong \overline{BC}$
$\overline{PC} \perp \overline{AB}$ (معلوم) یعنی C پر ہر ایک زاویہ $= 90°$	$\angle ACP \cong \angle BCP$
مشترک	$\overline{PC} \cong \overline{PC}$
ض۔ز۔ض کا موضوعہ	$\therefore \quad \Delta ACP \cong \Delta BCP$
متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع	پس $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

مسئلہ 12.1.2 (مسئلہ 12.1.1 کا عکس)

اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہوگا۔



معلوم $\overline{AB}$ ایک قطعہ خط ہے۔ایک نقطہ P ایسا ہے کہ $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

مطلوب نقطہ P، $\overline{AB}$ کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔

عمل نقطہ P کو AB کے وسطی نقطہ C سے ملائیں۔

ثبوت

بیانات	دلائل
$\Delta ACP \longleftrightarrow \Delta BCP$ میں	
$\overline{PA} \cong \overline{PB}$	معلوم
$\overline{PC} \cong \overline{PC}$	مشترک
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$	عمل
$\therefore \quad \Delta ACP \cong \Delta BCP$	ض۔ض۔ض ≅ ض۔ض۔ض
$\therefore \quad \angle ACP \cong \angle BCP$ ...... (i)	متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے
لیکن $m\angle ACP + m\angle BCP = 180^\circ$ ..... (ii)	سپلیمنٹری زاویے
اس لیے $m\angle ACP = m\angle BCP = 90^\circ$	نتائج (i) اور (ii) کی رو سے
$\therefore \quad \overline{PC} \perp \overline{AB}$ ...... (iii)	$m\angle ACP = 90^\circ$ (ثابت شدہ)
$\overline{CA} \cong \overline{CB}$ ...... (iv)	عمل
پس $\overline{PC}$ عمودی ناصف ہے $\overline{AB}$ کا یعنی نقطہ P، $\overline{AB}$ کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔	نتائج (iii) اور (iv) کی رو سے

مشق 12.1

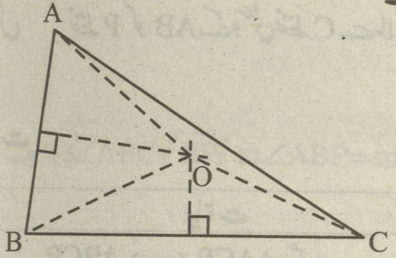
1۔ ثابت کیجیے کہ کسی دائرہ کا مرکز اس کے ہر ایک قطر کے عمودی ناصف پر ہوتا ہے۔

2۔ تین غیر ہم خط نقاط میں سے گزرنے والے دائرہ کا مرکز کہاں ہوگا اور کیوں؟

3- تین دیہات P، Q اور R ایک سیدھ میں نہیں ہیں۔ ان کے باشندوں نے ایک ایسے مقام پر چلڈرن پارک بنانے کا پروگرام بنایا جس کا فاصلہ ان تینوں دیہاتوں سے یکساں ہو۔ چلڈرن پارک کے مقام کو متعین کر کے ثابت کریں کہ یہ مقام تینوں دیہاتوں سے مساوی الفاصلہ ہے۔

مسئلہ 12.1.3

کسی مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔



معلوم ABC ایک مثلث ہے۔

مطلوب $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہیں۔

عمل $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کے عمودی ناصف کھینچیں جو ایک دوسرے کو نقطہ O پر ملتے ہیں۔ نقطہ O کو A، B اور C سے ملائیں۔

ثبوت

بیانات	دلائل
$\overline{OA} \cong \overline{OB}$ ...... (i)	ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو تو وہ نقطہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔
$\therefore \ \overline{OB} \cong \overline{OC}$ ...... (ii)	نتیجہ (i) کی رو سے
$\therefore \ \overline{OA} \cong \overline{OC}$ ...... (iii)	نتائج (i) اور (ii) کی رو سے
(iv)... نقطہ O ، $\overline{CA}$ کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔	نتیجہ (iii) سے نقطہ O نقاط A اور C سے مساوی الفاصلہ ہے۔
(v) لیکن نقطہ O، $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کے عمودی ناصفوں پر واقع ہے لہذا ΔABC کے تینوں اضلاع $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ کے عمودی ناصف نقطہ O میں سے گزرتے ہیں۔	عمل نتائج (iv) اور (v) کی رو سے

مشاہدہ کریں کہ

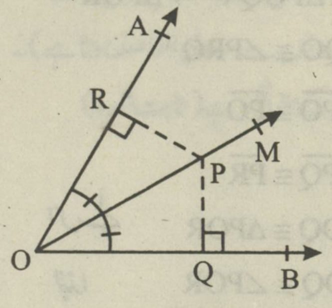
(a) حادہ زاویہ مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ایک دوسرے کو مثلث کے اندر قطع کرتے ہیں۔

(b) قائمہ زاویہ مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ایک دوسرے کو وتر پر قطع کرتے ہیں۔

(c) منفرجہ زاویہ مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ایک دوسرے کو مثلث کے باہر قطع کرتے ہیں۔

مسئلہ 12.1.4

کسی زاویے کے ناصف پر ہر ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔



معلوم $\angle AOB$ کی ناصف $\overrightarrow{OM}$ پر کوئی نقطہ P واقع ہے۔

مطلوب $m\overline{PQ} = m\overline{PR}$ یعنی نقطہ P، $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ سے ہم فاصلہ ہے۔

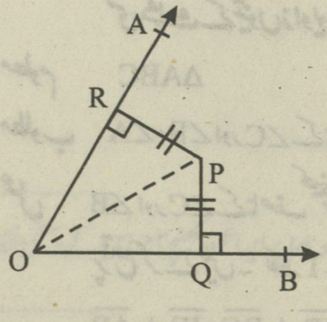
عمل P سے $\overline{PR} \perp \overrightarrow{OA}$ اور $\overline{PQ} \perp \overrightarrow{OB}$ کھینچیں۔

ثبوت

بیانات	دلائل
$\Delta POQ \longleftrightarrow \Delta POR$ میں	
$\overline{OP} \cong \overline{OP}$	مشترک
$\angle PQO \cong \angle PRO$	عمل
$\angle POQ \cong \angle POR$	معلوم
$\therefore \quad \Delta POQ \cong \Delta POR$	ض۔ز۔ز $\cong$ ض۔ز۔ز
پس $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع

مسئلہ 12.1.5 (عکس مسئلہ 12.1.4)

اگر کسی زاویے کے اندرونے میں کوئی ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ نقطہ اس زاویے کے ناصف پر واقع ہوتا ہے۔



معلوم $\angle AOB$ کے اندرونے میں ایک نقطہ P اس طرح لیں کہ
$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ جبکہ $\overline{PQ} \perp \overrightarrow{OB}$ اور $\overline{PR} \perp \overrightarrow{OA}$ ہے۔

مطلوب نقطہ P، $\angle AOB$ کے ناصف پر واقع ہے۔

عمل نقطہ P کو نقطہ O سے ملائیں۔

ثبوت

دلائل	بیانات
	$\Delta POQ \longleftrightarrow \Delta POR$ میں
معلوم (قائمہ زاویے)	$\angle PQO \cong \angle PRO$
مشترک	$\overline{PO} \cong \overline{PO}$
معلوم	$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$
وتر۔ ضلع ≅ وتر۔ ضلع	اس لیے $\therefore$ $\Delta POQ \cong \Delta POR$
متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے	لہٰذا $\angle POQ \cong \angle POR$
	پس نقطہ P، $\angle AOB$ کے ناصف پر واقع ہے۔

مشق 12.2

1۔ ایک چوکور ABCD میں $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ اور $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ کے عمودی ناصف ایک دوسرے کو نقطہ N پر ملتے ہیں۔ ثابت کریں کہ $\overline{BN}$ ناصف ہے $\angle ABC$ کا۔

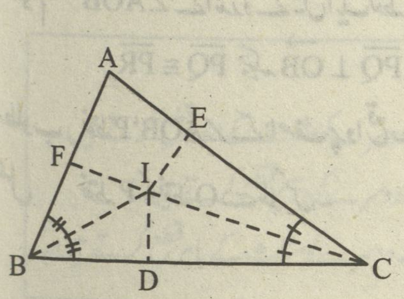
2۔ چوکور ABCP کے $\angle A$, $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف نقطہ O پر ملتے ہیں۔ ثابت کریں کہ $\angle P$ کا ناصف بھی نقطہ O میں سے گزرے گا۔

3۔ ثابت کریں کہ مساوی الساقین مثلث کے متماثل اضلاع کے عمودی ناصف اس کے ارتفاع کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔

4۔ ثابت کریں کہ مثلث کے تینوں ارتفاع ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

مسئلہ 12.1.6

کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔



معلوم ΔABC

مطلوب $\angle A$، $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف ہم نقطہ ہوں گے۔

عمل $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف کھینچیں جو ایک دوسرے کو نقطہ I پر قطع کرتے ہیں۔ نقطہ I سے $\overline{IF} \perp \overline{AB}$، $\overline{ID} \perp \overline{BC}$ اور $\overline{IE} \perp \overline{CA}$ کھینچیں۔

ثبوت

دلائل	بیانات
عمل (کسی زاویے کے ناصف پر ہر ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے)۔	$\overline{ID} \cong \overline{IF}$
	اسی طرح $\overline{ID} \cong \overline{IE}$
ہر ایک $\overline{ID}$ کے متماثل ہے (ثابت شدہ)	$\therefore$ $\overline{IE} \cong \overline{IF}$
	لہٰذا نقطہ I واقع ہے $\angle A$ کے ناصف پر …… (i)
عمل	لیکن نقطہ I ، $\angle ABC$ اور $\angle BCA$ کے ناصفوں پر بھی واقع ہے۔ …… (ii)
نتائج (i) اور (ii) کی رو سے	پس $\angle A$، $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف I پر ہم نقطہ ہیں۔

> **نوٹ** عملی جیومیٹری میں بھی کسی دی گئی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف کھینچ کر ہم تصدیق کریں گے کہ یہ ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

مشق 12.3

1۔ ثابت کریں کہ مساوی الساقین مثلث کے قاعدہ پر زاویوں کے ناصف اس مثلث کے ارتفاع پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

2۔ ثابت کریں کہ مثلث کے دو بیرونہ اور تیسرے اندرونہ زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

اعادہ مشق 12

1۔ مندرجہ ذیل بیانات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔

(i) لفظ تنصیف سے مراد دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا ہوتا ہے۔ ....

(ii) کسی قطعہ خط کی عمودی تنصیف سے مراد یہ ہے کہ اس قطعہ خط پر ایسا عمود کھینچنا جو اس کے وسطی نقطہ میں سے گزرے۔ ....

(iii) کوئی نقطہ جو ایک قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو وہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ نہیں ہوتا۔ …………

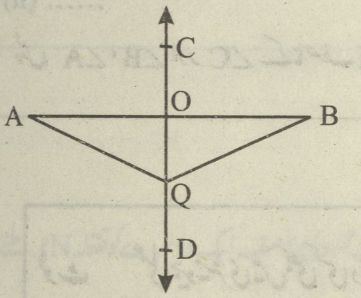
(iv) کوئی نقطہ ایک قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہوتا ہے۔ …………

(v) کسی مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ نہیں ہوتے۔ …………

(vi) کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔ …………

(vii) ایک زاویہ کے اندرونے میں کوئی نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ نقطہ اس زاویے کے ناصف پر واقع ہوتا ہے۔ …………

2۔ اگر $\overleftrightarrow{CD}$ قطعہ خط AB کا عمودی ناصف ہو تو



(i) $m\overline{OA} = \cdots\cdots$

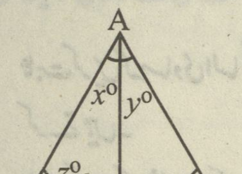
(ii) $m\overline{AQ} = \cdots\cdots$

3۔ مندرجہ ذیل اصطلاحات کی تعریف کریں۔

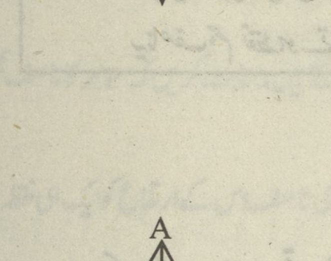
(i) قطعہ خط کا ناصف

(ii) زاویہ کا ناصف

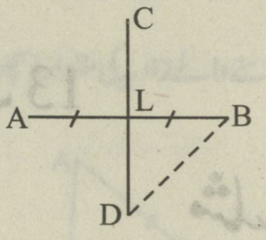
4۔ دی گئی مساوی الاضلاع مثلث ABC میں $\overline{AD}$ زاویہ A کا ناصف ہے۔ نامعلوم x^o، y^o اور z^o کی قیمت معلوم کریں۔



5۔ دی گئی متماثل مثلثان LMO اور LNO میں نامعلوم x اور m کی مقدار معلوم کریں۔



6۔ سامنے کی شکل میں $\overline{CD}$ قطعہ خط AB کا عمودی ناصف ہے۔



(i) اگر $m\overline{AB} = 6\,cm$ ہو تو $m\overline{AL}$ اور $m\overline{LB}$ معلوم کریں۔

(ii) اگر $m\overline{BD} = 4\,cm$ ہو تو $m\overline{AD}$ معلوم کریں۔

خلاصہ

اس یونٹ میں ہم نے درج ذیل مسئلے بیان اور ثابت کرنا سیکھے۔

☆ اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو تو وہ نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوگا۔

☆ اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہوگا۔

☆ کسی مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

☆ کسی زاویہ کے ناصف پر ہر ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔

☆ اگر کسی زاویے کے اندرونے میں ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ نقطہ اس زاویے کے ناصف پر واقع ہوتا ہے۔

☆ کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

- کسی قطعہ خط کی عمودی تنصیف سے مراد یہ ہے کہ اس قطعہ خط پر ایسا عمود کھینچنا جو اس کے وسطی نقطہ میں سے گزرے۔
- کسی زاویہ کی تنصیف سے مراد یہ ہے کہ ایک ایسی شعاع کھینچیں جو دیے گئے زاویہ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرے۔