

مثلث کے اضلاع اور زاویے (SIDES AND ANGLES OF A TRIANGLE)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

(i) 13.1 مثلث کے اضلاع (Sides of a Triangle)

(ii) مثلث کے زاویے (Angles of a Triangle)

یونٹ میں طلباء کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل / نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلباء درج ذیل تصویرات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ ثابت کر سکیں کہ اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں برابرنہ ہوں تو زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار (چھوٹے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار سے) زیادہ ہو گی۔

☆ ثابت کر سکیں کہ اگر کسی مثلث کے دو زاویے مقدار میں برابرنہ ہوں تو مقدار میں بڑے زاویے کے سامنے والا ضلع چھوٹے زاویے کے سامنے والے ضلع سے زیادہ لمبا ہو گا۔

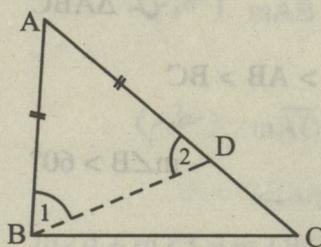
☆ ثابت کر سکیں کہ کسی بھی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔

☆ ثابت کر سکیں کہ کسی بھی خط کے بیرونی نقطے سے خط تک کا عمودی فاصلہ، نقطہ اور خط کے درمیان تمام فاصلوں سے چھوٹا ہو گا۔

تعارف

آپ کو یاد ہو گا کہ اگر کسی مثلث کے دو ضلعے متماثل ہوں تو ان کے بالمقابل زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں۔ اس کے برعکس اگر کسی مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو ان کے بالمقابل ضلعے بھی متماثل ہوتے ہیں۔ لیکن اس یونٹ میں کسی مثلث کے اضلاع اور زاویوں کے درمیان نابرابری سے متعلق کچھ دلچسپ مسئلے بیان اور ثابت کر کے اضافی معلومات کا مطالعہ کریں گے۔

اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں برابر نہ ہوں تو زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار (چھوٹے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار سے) زیادہ ہو گی۔

معلوم ΔABC

$$m\overline{AC} > m\overline{AB}$$

$$m\angle ABC > m\angle ACB$$

مطلوب

عمل

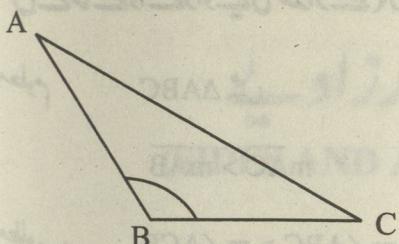
\overline{AC} پر نقطہ D پر اس طرح لیا کہ $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ اور نقطہ B کو D سے ملایا۔

اس طرح ΔADB مساوی الساقین مثلث حاصل ہوئی۔ شکل کے مطابق زاویوں کے نام 1 \angle اور 2 \angle رکھے۔

ثبت

دلال	بيانات
متاثل اضلاع کے سامنے والے زاویے (عمل)	$m\angle 1 = m\angle 2$ (i) میں ΔABD
مثلث کا بیرونی زاویہ سامنے والے غیر متصل اندر وی زاویے سے بڑا ہوتا ہے۔	$m\angle 2 > m\angle ACB$ (ii) میں ΔBCD
(i) اور (ii) کی رو سے زاویوں کی جمع کا موضوع	$\therefore m\angle 1 > m\angle ACB$ (iii) $m\angle ABC = m\angle 1 + m\angle DBC$ لیکن
(iii) اور (iv) کی رو سے اعداد کی نابر ابری کی خاصیت متعدد	$\therefore m\angle ABC > m\angle 1$ (iv) $\therefore m\angle ABC > m\angle 1 > m\angle ACB$ لہذا

مثال 1 ثابت کریں کہ کسی مختلف الاضلاع مثلث میں سب سے بڑی لمبائی والے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار 60° سے زیادہ ہو گی۔ (یعنی قائمہ زاویہ کے دو تہائی سے زیادہ ہو گی)



$$AC > AB > BC$$

معلوم ΔABC میں

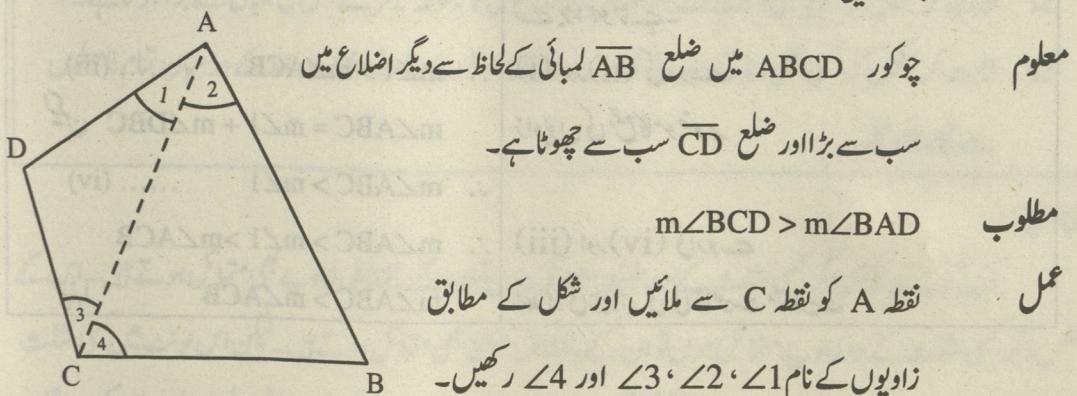
$$m\angle B > 60^\circ \quad \text{مطلوب}$$

ثبت

دلائل	بيانات
	$m\angle B > m\angle C$ میں ΔABC
$m\overline{AC} > m\overline{AB}$ (معلوم)	$m\angle B > m\angle A$
$m\overline{AC} > m\overline{BC}$ (معلوم)	$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ لیکن
$\angle A, \angle B, \angle C$ اور $\angle C > \angle B > \angle A$ میں مثلث ABC کے اندر وونی زاویے ہیں $m\angle B > m\angle C$ اور $m\angle B > m\angle A$ (ثابت شدہ)	$\therefore m\angle B + m\angle B + m\angle B > 180^\circ$
$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$	$m\angle B > 60^\circ$ لہذا

مثال 2 ایک چوکور $ABCD$ میں \overline{AB} لمبائی میں سب سے بڑا اور \overline{CD} سب سے چھوٹا ضلع ہے۔

ثابت کریں کہ $m\angle BCD > m\angle BAD$



چوکور $ABCD$ میں ضلع \overline{AB} لمبائی کے لحاظ سے دیگر اضلاع میں معلوم

سب سے بڑا اور ضلع \overline{CD} سب سے چھوٹا ہے۔

$$m\angle BCD > m\angle BAD \quad \text{مطلوب}$$

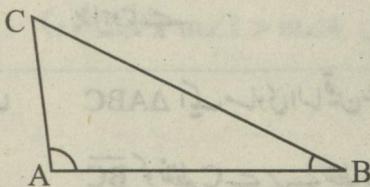
نقاط A کو نقطہ C سے ملائیں اور شکل کے مطابق عمل

زاویوں کے نام $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ اور $\angle 4$ رکھیں۔

دلالت	بیانات
$m\overline{AB} > m\overline{BC}$ (معلوم)	$m\angle 4 > m\angle 2$ I میں ΔABC
$m\overline{AD} > m\overline{CD}$ (معلوم)	$m\angle 3 > m\angle 1$ II میں ΔACD
I اور II کی رو سے	$\therefore m\angle 4 + m\angle 3 > m\angle 2 + m\angle 1$
$m\angle 4 + m\angle 3 = m\angle BCD$ $m\angle 2 + m\angle 1 = m\angle BAD$	$m\angle BCD > m\angle BAD$ لہذا

مسئلہ 13.1.2 (عکس مسئلہ 13.1.1)

اگر کسی مثلث کے دو زاویے مقدار میں برابرنہ ہوں، تو مقدار میں بڑے زاویے کے سامنے والے اضلاع چھوٹے زاویے کے سامنے والے اضلاع سے زیادہ لمبا ہو گا۔



معلوم $m\angle A > m\angle B$ میں ΔABC

مطلوب $m\overline{BC} > m\overline{AC}$

ثبت

دلالت	بیانات
حقیقی اعداد کی ثالثی خاصیت	اگر $m\overline{BC} \neq m\overline{AC}$ ہو تو
	$m\overline{BC} = m\overline{AC}$ (i)
	$m\overline{BC} < m\overline{AC}$ یا (ii)
متاثل اضلاع کے سامنے والے زاویے متاثل ہوتے ہیں معلوم کے خلاف	کی صورت میں اگر $m\overline{BC} = m\overline{AC}$ ہو تو (i) $m\angle A = m\angle B$ جو کہ ممکن نہیں۔

بڑے ضلع کے سامنے والا زاویہ مقدار میں چھوٹے ضلع کے
سامنے والے زاویہ کی مقدار سے بڑا ہوتا ہے
معلوم کے خلاف

(ii) کی صورت میں اگر $m\overline{BC} < m\overline{AC}$ ہو تو

$$m\angle A < m\angle B$$

یہ صورت بھی ممکن نہیں ہے۔

$$\therefore m\overline{BC} \neq m\overline{AC}$$

$$m\overline{BC} < m\overline{AC}$$

اور

$$m\overline{BC} > m\overline{AC}$$

پس

حقیقی اعداد کی خاصیت ثالثی

متانج صریح

(i) کسی قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی باقی ہر دو اضلاع کی لمبائیوں سے بڑی ہوتی ہے۔

(ii) کسی منفرجه الزاویہ مثلث میں منفرجه زاویے کے سامنے والا ضلع لمبائی میں ہر دیگر دو اضلاع سے لمبائی میں
بڑا ہوتا ہے۔

مثال ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔ اس کے قاعدہ

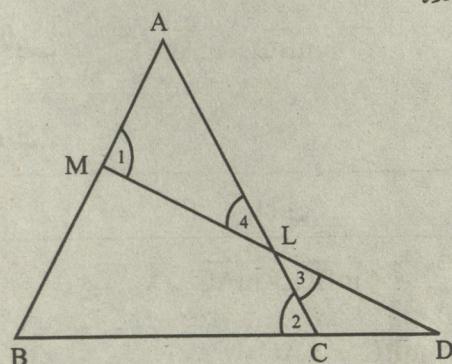
\overline{BC} کو نقطہ C سے پرے نقطہ D تک بڑھایا گیا ہے۔

D میں سے گزرتا ہوا ایک قطعہ خط اضلاع \overline{AC} اور \overline{AB} کو بالترتیب نقطہ L اور M پر قطع کرتا ہے۔

ثبت کریں کہ $m\overline{AL} > m\overline{AM}$

$$\overline{AB} \cong \overline{AC} \text{ میں } \Delta ABC$$

معلوم



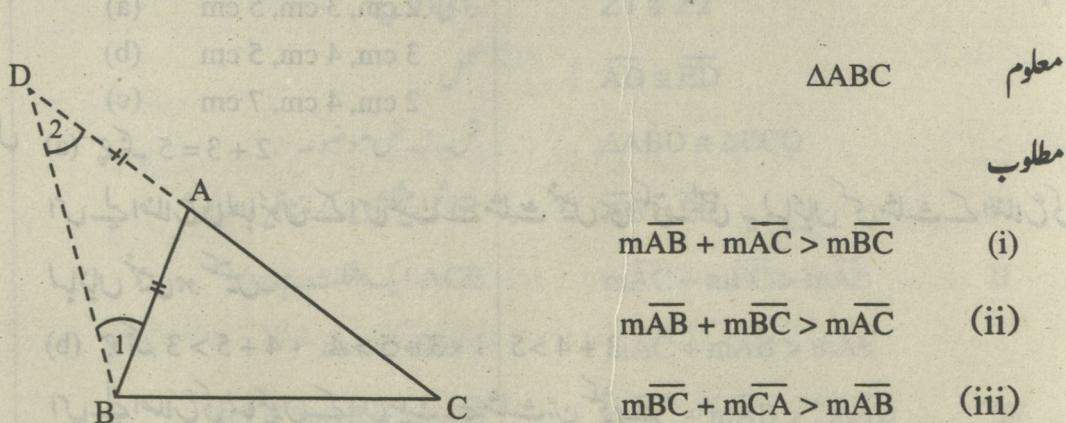
C پرے ایک نقطہ D ہے۔ D میں سے گزرتا ہوا ایک قطعہ خط \overline{AC} کو L پر اور \overline{AB} کو M پر قطع کرتا ہے۔

مطلوب $m\overline{AL} > m\overline{AM}$

دلائل	بيانات
(i) ... $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (معلوم)	$\angle B \cong \angle 2$ I میں ΔABC
(ii) ... $\angle 1$ بیرونی اور $\angle B$ غیر متصل اندر ورنی زاویہ ہے۔ I اور II کی رو سے	$m\angle 1 > m\angle B$ II $\therefore m\angle 1 > m\angle 2$ III میں ΔMBD
بیرونی زاویہ غیر متصل اندر ورنی زاویے سے بڑا ہوتا ہے۔ نتیج III اور IV کی رو سے راسی زاویے	$m\angle 2 > m\angle 3$ IV $\therefore m\angle 1 > m\angle 3$ V لیکن $\angle 3 \cong \angle 4$ VI
نتیج V اور VI کی رو سے	$\therefore m\angle 1 > m\angle 4$
$m\angle 1 > m\angle 4$ میں ΔALM (ثابت شدہ)	$m\overline{AL} > m\overline{AM}$ لہذا

مسئلہ 13.1.3

کسی بھی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔



عمل \vec{CA} پر ایک نقطہ D اس طرح لیں کہ $m\overline{AD} \cong m\overline{AB}$
نقطہ B کو نقطہ D سے ملا گیں اور شکل کے مطابق زاویوں کے نام $\angle 1$ ، $\angle 2$ رکھیں۔

دلاںی	پیمائات
	میں ΔABD
(عمل) $m\overline{AD} \cong m\overline{AB}$	$m\angle 1 \cong m\angle 2 \dots \dots \text{(i)}$
$m\angle DBC = m\angle 1 + m\angle ABC$	$m\angle DBC > m\angle 1 \dots \dots \text{(ii)}$
نتائج (i) اور (ii) کی رو سے	$m\angle DBC > m\angle 2 \dots \dots \text{(iii)}$
	میں ΔDBC
کی رو سے (iii)	$m\overline{CD} > m\overline{BC}$
$m\overline{CD} = m\overline{AD} + m\overline{AC}$	$m\overline{AD} + m\overline{AC} > m\overline{BC}$
(عمل) $m\overline{AD} = m\overline{AB}$	$m\overline{AB} + m\overline{AC} > m\overline{BC}$ لہذا
	اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ
	$m\overline{AB} + m\overline{BC} > m\overline{AC}$
	$m\overline{BC} + m\overline{CA} > m\overline{AB}$ اور

مثال 1 مندرجہ ذیل مثلث کے اضلاع کی لمبائیوں کے سیٹ ہیں۔ ان میں کس سیٹ سے مثلث بنائی جا سکتی ہے؟

2 cm, 3 cm, 5 cm (a)

3 cm, 4 cm, 5 cm (b)

2 cm, 4 cm, 7 cm (c)

حل (a) چونکہ $2 + 3 = 5$

اس لیے اضلاع کی لمبائیوں کے اس سیٹ سے مثلث نہیں بن سکتی۔ یعنی یہ لمبائیاں کسی مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں نہیں ہو سکتیں۔

(b) چونکہ $3 + 4 > 3$ ، $3 + 5 > 4$ ، $4 + 5 > 3$

اس لیے اضلاع کی لمبائیوں کے اس سیٹ سے مثلث بن سکتی ہے

(c) چونکہ $2 + 4 < 7$

اس لیے اضلاع کی لمبائیوں کے اس سیٹ سے مثلث نہیں بن سکتی۔

ثابت کریں کہ مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرا ضلع کی تنصیف کرنے والے وسطانیے کی لمبائی کے دو گناہ سے بڑا ہوتا ہے۔

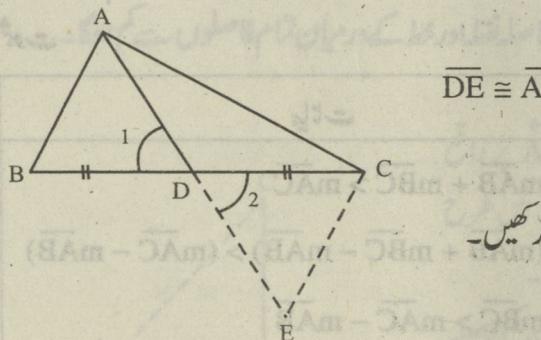
(i) ΔABC میں وسطانیہ \overline{AD} ضلع \overline{BC} کی نقطہ D پر تنصیف کرتا ہے۔

معلوم

$$m\overline{AB} + m\overline{AC} > 2(m\overline{AD}) \quad \text{مطلوب}$$

(ii) $\overline{DE} \cong \overline{AD}$

(iii) $m\overline{AC} - m\overline{BC} > m\overline{DE} - m\overline{AD}$



$\overline{DE} \cong \overline{AD}$ لیں کہ \overline{AD} پر ایک نقطہ E اس طرح لیں کہ نقطہ C کو نقطہ E سے ملاں۔

عمل

شکل کے مطابق زاویوں کے نام 1، 2 رکھیں۔

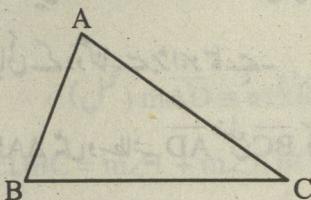
ثبت

دلائل	بيانات
معلوم	$\Delta ABD \leftrightarrow \Delta ECD$
راہی زاویے	$\angle 1 \cong \angle 2$
عمل	$\overline{AD} \cong \overline{ED}$
ض-ض-ض موضوع	$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ECD$
متباہل مثلثوں کے تناظرہ اضلاع	$\therefore \overline{AB} \cong \overline{EC} \dots\dots \text{I}$
ایک مثلث ہے ACE	$m\overline{AC} + m\overline{EC} > m\overline{AE} \dots\dots \text{II}$
I اور II کی رو سے	$m\overline{AC} + m\overline{AB} > m\overline{AE}$
$m\overline{AE} = 2m\overline{AD}$ (عمل)	$m\overline{AC} + m\overline{AB} > 2m\overline{AD}$ لہذا
	$m\overline{AB} + m\overline{AC} > 2m\overline{AD}$ یا

مثال 3
معلوم
مطلوب

ثابت کریں کہ مثلث کے کوئی سے دو اضلاع کی لمبائیوں کا فرق تیرے ضلع کی لمبائی سے چھوٹا ہوتا ہے۔

ΔABC



$$m\overline{AC} - m\overline{AB} < m\overline{BC} \quad (i)$$

$$m\overline{BC} - m\overline{AB} < m\overline{AC} \quad (ii)$$

$$m\overline{BC} - m\overline{AC} < m\overline{AB} \quad (iii)$$

ثبوت

دلائل	پیشانات
<p>ABC ایک مثلث ہے دونوں اطراف میں سے $m\overline{AB}$ تفریق کرنے سے</p> $a > b \Rightarrow b < a$	$m\overline{AB} + m\overline{BC} > m\overline{AC}$ $(m\overline{AB} + m\overline{BC} - m\overline{AB}) > (m\overline{AC} - m\overline{AB})$ $\therefore m\overline{BC} > m\overline{AC} - m\overline{AB}$ $\therefore m\overline{AC} - m\overline{AB} < m\overline{BC} \quad \dots\dots (i)$
<p>میں دیے گئے دلائل کی طرح (i)</p>	$\left\{ \begin{array}{l} m\overline{BC} - m\overline{AB} < m\overline{AC} \\ m\overline{BC} - m\overline{AC} < m\overline{AB} \end{array} \right.$

مشق 13.1

-1 مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں 10cm اور 15cm ہیں۔ مندرجہ ذیل میں سے کون سی لمبائی تیرے ضلع کی ممکن ہو گی؟

- (a) 5 cm (b) 20 cm (c) 25 cm (d) 30 cm

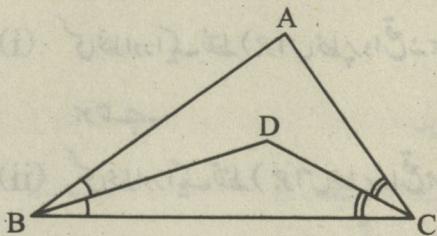
-2 نقطہ O مثلث ABC کا ایک اندر ونی نقطہ ہے۔ ثابت کریں کہ

$$m\overline{OA} + m\overline{OB} + m\overline{OC} > \frac{1}{2} (m\overline{AB} + m\overline{BC} + m\overline{CA})$$

-3 مثلث ΔABC میں اگر $m\angle C = 45^\circ$ ہو اور $m\angle B = 70^\circ$ تو کون سا ضلع لمبائی میں سب سے بڑا ہو گا؟

-4

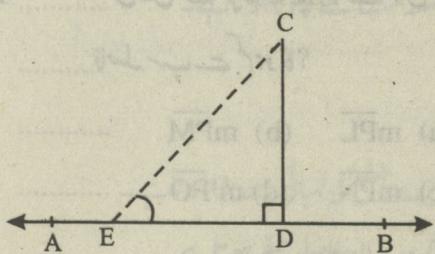
-5



ثابت کریں کہ کسی قائمہ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی باقی ہر دو اضلاع کی لمبائیوں سے بڑی ہوتی ہے۔
سامنے دی گئی تکونی شکل میں $AB > AC$ اور $\angle C > \angle B$ اور $m\angle CDB > m\angle CBD$
کے ناصف ہیں۔ ثابت کریں کہ $BD > DC$

مسئلہ 13.1.4

کسی بھی خط کے پر ونی نقطے سے خط تک کا عمودی فاصلہ نقطہ اور خط کے درمیان تمام فاصلوں سے کم ہوگا۔



علوم
ایک خط AB ، ایک نقطہ C (C پر واقع
نہیں ہے) اور ایک نقطہ D جو کہ AB پر اس طرح
واقع ہے کہ $m\angle CDB > m\angle CBD$
مطلوب
نقطہ C سے AB تک سب سے کم فاصلہ
ہے۔

عمل
 \leftrightarrow
پر ایک نقطہ E لیا۔ اور E کو ملانے سے ایک $\triangle CDE$ بن گئی۔

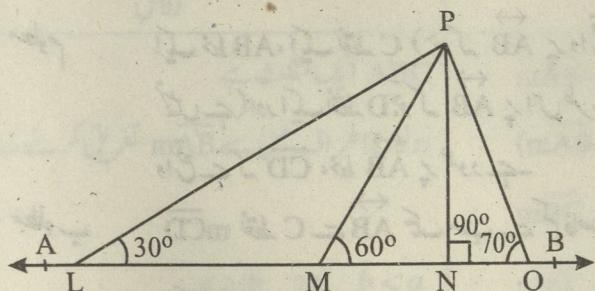
ثبت

دلائل	بیانات
<p>مثلث کا بیرونی زاویہ ہر غیر متعلہ اندر ونی زاویہ سے بڑا ہوتا ہے۔</p> <p>قائمہ زاویہ کا سلیمنٹ</p> <p>نابر ابری کی عکسی خاصیت بڑے زاویہ کے سامنے بڑا ضلع ہوتا ہے۔</p>	<p>ΔCDE میں $m\angle CDB > m\angle CED$</p> <p>لیکن $m\angle CDB = m\angle CDE$</p> <p>$\therefore m\angle CDE > m\angle CED$</p> <p>یا $m\angle CED < m\angle CDE$</p> <p>$\therefore m\overline{CD} < m\overline{CE}$</p> <p>لیکن E خط AB کا کوئی نقطہ ہے پس $m\overline{CD} < m\overline{AB}$ تک سب سے کم فاصلہ ہے۔</p>

(i) کسی خط اور ایک نقطہ (جو اس خط پر واقع نہ ہو) کے درمیان فاصلہ، نقطہ سے خط تک عمودی قطعہ خط کی لمبائی کے برابر ہوتا ہے۔

(ii) کسی خط اور ایک نقطہ (جو اس خط پر واقع ہو) کے درمیان فاصلہ صفر ہوتا ہے۔

مشق 13.2



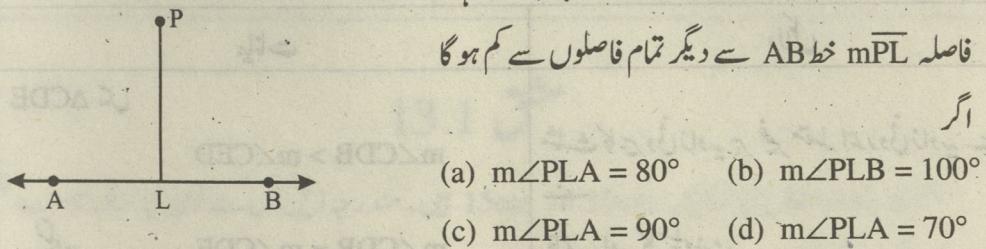
شکل میں نقطہ P کا خط AB سے کون سا فاصلہ سب سے کم ہو گا؟

- (a) $m\overline{PL}$
- (b) $m\overline{PM}$
- (c) $m\overline{PN}$
- (d) $m\overline{PO}$

-1

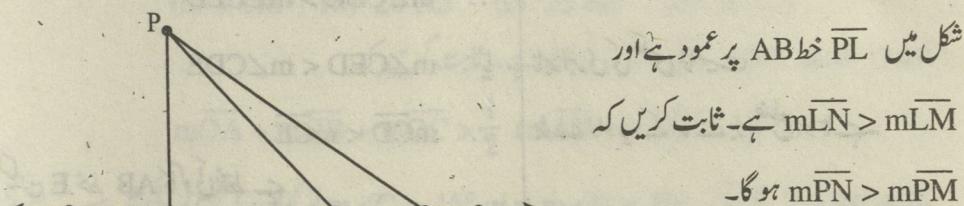
شکل میں P کوئی ایک نقطہ خط AB سے باہر واقع ہے۔
فاصلہ $m\overline{PL}$ خط AB سے دیگر تمام فاصلوں سے کم ہو گا

اگر



- (a) $m\angle PLA = 80^\circ$
- (b) $m\angle PLB = 100^\circ$
- (c) $m\angle PLA = 90^\circ$
- (d) $m\angle PLB = 70^\circ$

-2



شکل میں خط \overline{PL} پر عمود ہے اور
m \overline{LN} ہے۔ ثابت کریں کہ
m $\overline{LN} > m\overline{LM}$

m $\overline{PN} > m\overline{PM}$ ہو گا۔

-3

اعادہ مشق 13

-1

مندرجہ ذیل بیانات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔

- (i) کسی مثلث میں زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والا زاویہ بڑا ہوتا ہے۔
- (ii) قائمۃ الزاویہ مثلث میں بڑے زاویے کی مقدار 60° ہوتی ہے۔
- (iii) قائمۃ الزاویہ مساوی الساقین مثلث میں قائمہ زاویہ کے علاوہ ہر ایک دیگر زاویہ 45° ہوتا ہے۔
- (iv) دو متماثل اضلاع والی مثلث کو مساوی الاضلاع مثلث کہتے ہیں۔
- (v) ایک نقطہ سے کسی خط تک فاصلوں میں عمودی فاصلہ سب سے چھوٹا ہوتا ہے۔
- (vi) کسی خط پر عمود 90° کا زاویہ بناتا ہے۔
- (vii) خط کا کوئی بیرونی نقطہ اس خط کا ہم خط نقطہ ہوتا ہے۔
- (viii) کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔
- (ix) ایک خط اور ایک ایسا نقطہ جو اس خط پر واقع ہو، کے درمیان فاصلہ صفر ہوتا ہے۔
- (x) 5cm، 3cm، 2cm اور 3cm لمبائی والے قطعات خط سے مثلث بن سکتی ہے۔

-2

کسی خط کے بیرونی نقطہ سے کھینچ گئے قطعات خط میں سے فاصلے میں سب سے چھوٹا قطعہ خط، اس خط کے ساتھ کتنی مقدار کا زاویہ بنائے گا؟

-3

اگر ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں 13cm، 12cm اور 5cm ہوں تو تصدیق کریں کہ مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا فرق تیرے ضلع کی لمبائی سے کم ہوتا ہے۔

-4

اگر ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں 10cm، 8cm اور 6cm ہوں تو تصدیق کریں کہ مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔

-5

اگر 7cm، 4cm، 3cm اور 3cm کسی مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں نہیں ہیں۔ دلیل سے وضاحت کریں۔

-6

اگر کسی قائمۃ الزاویہ مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں 4cm اور 3cm ہوں تو مثلث کے تیرے ضلع کی لمبائی کیا ہو گی؟ (اشارہ: وتر معلوم کریں)

خلاصہ

اس یونٹ میں ہم نے مندرجہ ذیل مسئلے بیان اور ثابت کیے۔

☆ اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں برابر نہ ہوں تو زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار (چھوٹے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار سے) زیادہ ہو گی۔

☆ اگر کسی مثلث کے دو زاویے مقدار میں برابر نہ ہوں تو مقدار میں بڑے زاویے کے سامنے والا ضلع چھوٹے زاویے کے سامنے والے ضلع سے زیادہ لمبا ہو گا۔

☆ کسی بھی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔

☆ کسی بھی خط کے پر ونی نقطے سے خط تک کا عمودی فاصلہ، نقطہ اور خط کے درمیان تمام فاصلوں سے چھوٹا ہو گا۔

(iv).

(v).

(vi).

(vii).

(viii).

(ix).

(x).

(xi).

(xii).

(xiii).

(xiv).

(xv).

(xvi).