

مسئلہ فیثاغورث

(PYTHAGORAS' THEOREM)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

15.1 مسئلہ فیثاغورث (Pythagoras' Theorem)

یونٹ میں طلباء کے لیے سیکھنے کے ہم وسیع تر حاصل / نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اُس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلباء درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہوں گے کہ:

☆ ثابت کر سکیں کہ قائمہ الزاویہ مثلث کے وتر کی لمبائی کا مربع دوسرے دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوگا۔ (مسئلہ فیثاغورث)

☆ ثابت کر سکیں کہ اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کی لمبائی کا مربع دوسرے دو اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہو تو وہ مثلث قائمہ الزاویہ مثلث ہوگی۔ (عکس مسئلہ فیثاغورث)

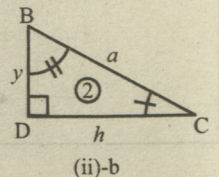
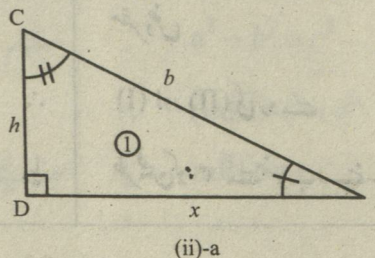
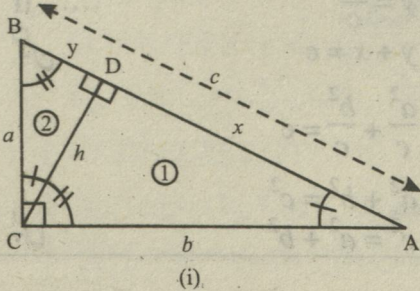
تعارف

فیثاغورث ایک یونانی فلسفی اور ریاضی دان تھا۔ اس نے قائمہ الزاویہ مثلث کے اضلاع کے درمیان ایک آسان لیکن اہم تعلق دریافت کیا۔ اُس نے اضلاع کے اس تعلق کو ایک فارمولے کی شکل میں وضع کیا جسے اس کے نام کی وجہ سے مسئلہ فیثاغورث کہا جاتا ہے۔ اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے متعدد طریقے ہیں۔ ہم اسے تشابہ مثلثوں کے استعمال سے ثابت کریں گے۔ ہم اس کا عکس مسئلہ بھی بیان اور ثابت کریں گے اور پھر انہیں مختلف مسائل اور سوالات حل کرنے میں لاگو کریں گے۔

15.1.1 مسئلہ فیثاغورث

ایک قائمہ الزاویہ مثلث کے وتر کی لمبائی کا مربع دوسرے دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے

برابر ہوتا ہے۔



معلوم

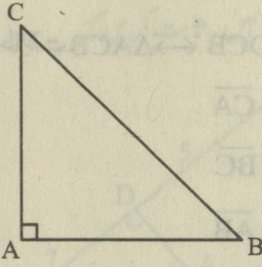
اور $m\overline{AC} = b$ ، $m\overline{BC} = a$ اور $m\angle C = 90^\circ$ میں ΔACB ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے جس میں $m\overline{AB} = c$

مطلوب $c^2 = a^2 + b^2$

عمل نقطہ C سے ضلع \overline{AB} پر عمود گرائیں۔ فرض کریں $m\overline{CD} = h$ ، $m\overline{AD} = x$ اور $m\overline{BD} = y$ قطعہ خط CD مثلث ABC کو دو مثلثان ADC اور BDC میں تقسیم کرتا ہے۔ جیسا کہ اشکال (ii) a اور (ii) b میں بالترتیب دکھایا گیا ہے۔

ثبوت (متشابہ مثلثوں کے استعمال سے)

بیانات	دلائل
<p>$\Delta ADC \leftrightarrow \Delta ACB$ میں</p> <p>$\angle A \cong \angle A$</p> <p>$\angle ADC \cong \angle ACB$</p> <p>$\angle C \cong \angle B$</p> <p>$\therefore \Delta ADC \sim \Delta ACB$</p> <p>$\therefore \frac{x}{b} = \frac{h}{c}$</p> <p>یا $x = \frac{b^2}{c}$ I</p>	<p>بحوالہ اشکال (i) اور (ii) a</p> <p>مشترک یا ذاتی تماثل</p> <p>عمل۔ معلوم، ہر ایک قائمہ زاویہ ہے</p> <p>$\angle C$ اور $\angle B$ زاویہ $\angle A$ کے کمپلیمنٹ</p> <p>تینوں زاویے متماثل ہیں</p> <p>دو متشابہ مثلثان کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوتے ہیں</p>
<p>اب $\Delta BDC \leftrightarrow \Delta BCA$ میں</p> <p>$\angle B \cong \angle B$</p> <p>$\angle BDC \cong \angle BCA$</p> <p>$\angle C \cong \angle A$</p> <p>$\therefore \Delta BDC \sim \Delta BCA$</p> <p>$\therefore \frac{y}{a} = \frac{h}{c}$</p> <p>یا $y = \frac{a^2}{c}$ II</p> <p>لیکن $y + x = c$</p> <p>$\therefore \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} = c$</p> <p>یا $a^2 + b^2 = c^2$</p> <p>$c^2 = a^2 + b^2$</p>	<p>بحوالہ اشکال (i) اور (ii) b</p> <p>مشترک یا ذاتی تماثل</p> <p>عمل۔ معلوم، ہر زاویہ قائمہ ہے</p> <p>$\angle C$ اور $\angle A$ زاویہ B کے کمپلیمنٹ</p> <p>تینوں زاویے متماثل ہیں</p> <p>دو متشابہ مثلثان کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوتے ہیں</p> <p>مفروض</p> <p>(I) اور (II) کی رو سے</p> <p>طرفین کو c سے ضرب دینے سے</p>
<p>پس</p>	



صريح نتائج: قائمہ الزاویہ مثلث ABC میں جس کا زاویہ A قائمہ ہے

$$(AB)^2 = (BC)^2 - (CA)^2 \quad (i)$$

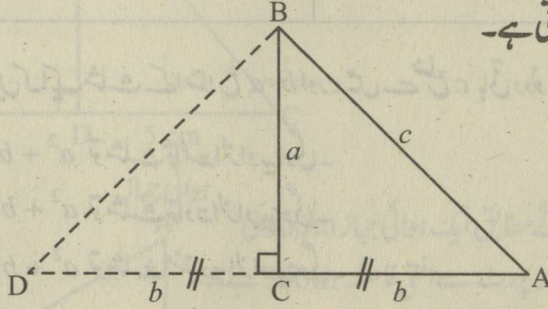
$$(AC)^2 = (BC)^2 - (AB)^2 \quad (ii)$$

اضافی نقطہ: ویسے تو مسئلہ فیثاغورث کے متعدد ثبوت ہیں لیکن ہم نے جس طریقہ سے مسئلہ کو ثابت کیا ہے وہ تشابہ مثلثان کے اضلاع کے متناسب ہونے پر مبنی ہے۔ ہم نے آسانی سے سمجھ میں آنے کے لیے مثلثان ADC اور CDB کو علیحدہ دکھایا ہے ورنہ عام طور پر صرف شکل (i) سے ہی مسئلہ فیثاغورث ثابت کیا جاتا ہے۔

مسئلہ 15.1.2 (عکس مسئلہ فیثاغورث 15.1.1)

اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کی لمبائی کا مربع دوسرے دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہو

تو وہ مثلث قائمہ الزاویہ مثلث ہوتی ہے۔



معلوم مثلث ABC میں: $m\overline{AC} = b$ اور $m\overline{BC} = a$ ، $m\overline{AB} = c$ اس طرح کہ $a^2 + b^2 = c^2$ مطلوب $m\angle ACB = 90^\circ$ ، یعنی ΔACB ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

عمل \overline{BC} پر \overline{CD} عمود اس طرح گرائیں کہ $\overline{CD} \cong \overline{CA}$ نقطہ B کو نقطہ D سے ملائیں۔

بیانات	دلائل
مثلث DCB ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔	عمل
$\therefore (m\overline{BD})^2 = a^2 + b^2$	مسئلہ فیثاغورث
$a^2 + b^2 = c^2$	معلوم
$\therefore (m\overline{BD})^2 = c^2$	
یا $m\overline{BD} = c$	جزر لینے سے

اب مطابقت $\triangle DCB \leftrightarrow \triangle ACB$ میں

$$\overline{CD} \cong \overline{CA}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{BC}$$

$$\overline{BD} \cong \overline{AB}$$

$$\therefore \triangle DCB \cong \triangle ACB$$

$$\therefore \angle DCB \cong \angle ACB$$

$$m\angle DCB = 90^\circ$$

لیکن

$$\therefore m\angle ACB = 90^\circ$$

پس $\triangle ACB$ ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

عمل

مشترک

دونوں c کے برابر ہیں

ض-ض-ض \cong ض-ض-ض

متماثل مثلثان کے زاویے متماثل ہوتے ہیں

عمل

صریح نتائج: فرض کریں کہ ایک مثلث کے اضلاع a ، b اور c میں سے ضلع c باقی دونوں اضلاع سے لمبائی میں زیادہ ہے۔

☆ اگر $a^2 + b^2 = c^2$ تو مثلث قائمہ الزاویہ ہوگی۔

☆ اگر $a^2 + b^2 > c^2$ تو مثلث حاد الزاویہ ہوگی۔

☆ اگر $a^2 + b^2 < c^2$ تو مثلث منفرجہ الزاویہ ہوگی۔

مشق 15.1

1- مثلثان کے اضلاع کی لمبائیاں مندرجہ ذیل ہیں۔ تصدیق کریں کہ یہ مثلثان قائمہ الزاویہ ہیں۔

(i) $a = 5 \text{ cm}$ ، $b = 12 \text{ cm}$ ، $c = 13 \text{ cm}$

(ii) $a = 1.5 \text{ cm}$ ، $b = 2 \text{ cm}$ ، $c = 2.5 \text{ cm}$

(iii) $a = 9 \text{ cm}$ ، $b = 12 \text{ cm}$ ، $c = 15 \text{ cm}$

(iv) $a = 16 \text{ cm}$ ، $b = 30 \text{ cm}$ ، $c = 34 \text{ cm}$

2- تصدیق کریں کہ $a^2 + b^2$ ، $a^2 - b^2$ اور $2ab$ ایک قائمہ الزاویہ مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہوں گی۔

جبکہ a اور b ($a > b$) کوئی سے دو حقیقی اعداد ہوں۔

3- ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں بالترتیب 8 ، x اور 17 ہیں۔ x کی کس قیمت کے لیے یہ ضلع قائمہ الزاویہ

مثلث کا قاعدہ بن جائے گا؟

4- ایک مساوی الساقین مثلث میں قاعدہ $m\overline{BC} = 28 \text{ cm}$ اور $m\overline{AB} = m\overline{AC} = 50 \text{ cm}$ ہیں۔ اگر

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ہو تو (i) \overline{AD} کی لمبائی (ii) $\triangle ABC$ کا رقبہ معلوم کریں۔

5- ایک چوکور ABCD کے وتر \overline{AC} اور \overline{BD} ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ ثابت کریں کہ

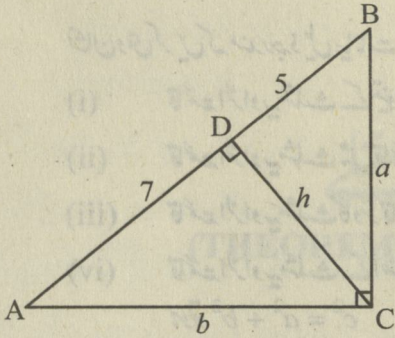
$$(AB)^2 + (CD)^2 = (AD)^2 + (BC)^2$$

6- (i) سامنے دی گئی شکل میں ABC ایک قائمہ الزاویہ

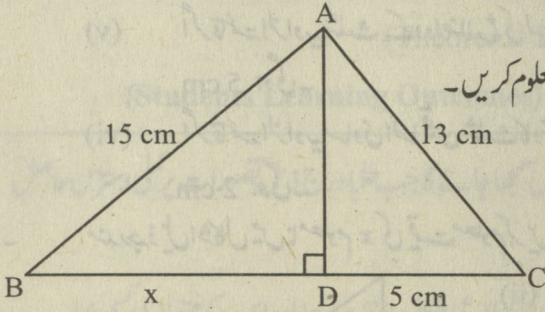
مثلث ہے جس میں $m\angle ACB = 90^\circ$

اور \overline{CD} عمود ہے \overline{AB} پر۔ اگر $m\overline{BD} = 5$

اور $m\overline{AD} = 7$ ہو تو a, h اور b کی لمبائیاں معلوم کریں۔



(ii) سامنے دی گئی شکل سے x کی لمبائی معلوم کریں۔

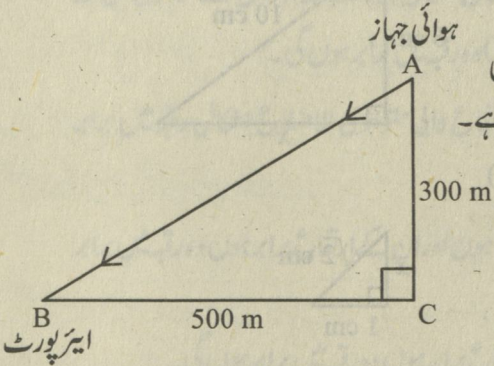


7- سامنے دی گئی شکل کے مطابق ایک ہوائی جہاز 300m کی

بلندی پر ہے اس کا ایئر پورٹ سے افقی فاصلہ 500m ہے۔

اس کو ایئر پورٹ پر اترنے کے لیے (تیر کے نشان سے

دکھایا گیا ہے) کتنا فاصلہ طے کرنا پڑے گا؟



8- 17 m لمبائی والی سیڑھی ایک عمودی دیوار کے سہارے کھڑی ہے اس کا نچلا پایہ دیوار کی بنیاد سے 8 m کے فاصلے

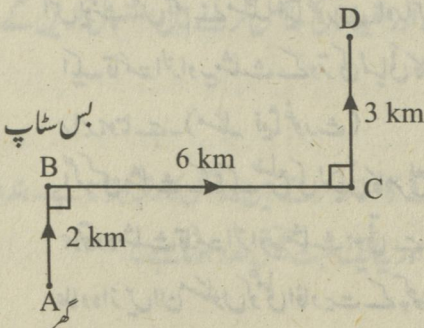
پر ہے۔ سیڑھی دیوار کی بنیاد سے کتنی اونچائی پر دیوار کے سہارے کھڑی ہوگی؟

سکول

9- ایک طالب علم اپنے گھر سے سکول تک کا فاصلہ شکل میں

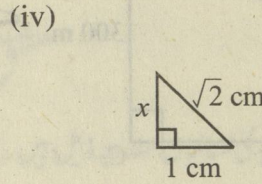
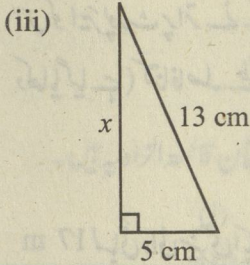
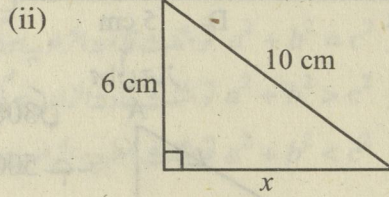
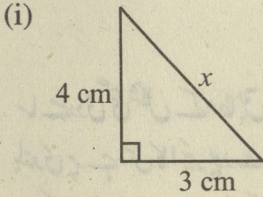
دکھائے گئے روٹ کے مطابق طے کرتا ہے۔ اس کے گھر

سے سکول تک کا براہ راست فاصلہ $m\overline{AD}$ معلوم کریں۔



اعادہ مشق 15

- 1- نشان دہی کریں کہ مندرجہ ذیل بیانات میں سے کون سے صحیح اور کون سے غلط ہیں؟
- (i) قائمہ الزاویہ مثلث کے تینوں زاویوں میں سے بڑا زاویہ 90° ہوتا ہے۔
.....
- (ii) قائمہ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ 60° کے برابر ہوتا ہے۔
.....
- (iii) قائمہ الزاویہ مثلث کا وتر قائمہ زاویے کے سامنے والا ضلع ہوتا ہے۔
.....
- (iv) قائمہ الزاویہ مثلث کے اضلاع a ، b اور c میں سے اگر ضلع c باقی دونوں اضلاع کی نسبت زیادہ لمبا ہو تو $c^2 = a^2 + b^2$ ہوگا۔
.....
- (v) اگر قائمہ الزاویہ مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں 3 cm اور 4 cm ہوں تو وتر کی لمبائی 5 cm ہوگی۔
.....
- (vi) اگر قائمہ الزاویہ مساوی الساقین مثلث کا وتر $\sqrt{2}$ cm ہو تو باقی دونوں اضلاع میں سے ہر ایک کی لمبائی 2 cm ہوگی۔
.....
- 2- مندرجہ ذیل اشکال میں نامعلوم x کی قیمت معلوم کریں۔



خلاصہ

- اس یونٹ میں ہم نے مسئلہ فیثاغورث اور اس کا عکس بمعہ صریح نتائج بیان کرنا اور ثابت کرنا سیکھے۔
- ☆ ایک قائمہ الزاویہ مثلث کے وتر کی لمبائی کا مربع دوسرے دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔ (مسئلہ فیثاغورث)
- ☆ اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کی لمبائی کا مربع دوسرے دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہو تو وہ مثلث قائمہ الزاویہ مثلث ہوتی ہے۔ (عکس مسئلہ فیثاغورث)
- علاوہ ازیں ان مسئلوں کو عملی افادیت کے کچھ سوالات حل کرنے میں استعمال کیا گیا۔