یونٹ 16

رقبہ سے متعلق مسئلے

(THEOREMS RELATED WITH AREA)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

16.1 رقبہ سے متعلق مسئلے (Theorems Related with Area)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل/نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

- ☆ ثابت کر سکیں کہ ایک ہی قاعدہ پر واقع متوازی الاضلاع اشکال جو قاعدہ خط اور اس کے متوازی کسی خط کے درمیان واقع ہوں (یا ان کے ارتفاع برابر ہوں) وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔
- ☆ ثابت کر سکیں کہ برابر قاعدوں پر واقع اور برابر ارتفاع والی متوازی الاضلاع اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔
- ☆ ثابت کر سکیں کہ ایسی مثلثیں جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور ان کے ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔
- ☆ ثابت کر سکیں کہ ایسی مثلثیں جن کے قاعدے اور ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

تعارف

اس یونٹ میں ہم کچھ اہم مسئلے اور ان کے نتائج صریح بیان اور ثابت کریں گے جن کا تعلق متوازی الاضلاع اشکال اور مثلثوں کے رقبے سے ہے۔ پھر ان کو کچھ مناسب سوالات حل کرنے اور مفید نتائج حاصل کرنے میں استعمال کریں گے۔

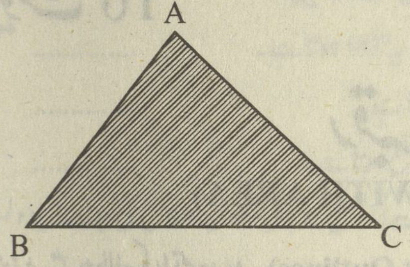
کچھ بنیادی تصورات

کسی شکل کا رقبہ

کسی بند شکل کی حد بندی کرنے والے قطعات خط جس علاقے کا احاطہ کرتے ہیں وہ شکل کا رقبہ کہلاتا ہے۔ بند علاقے کے رقبے کو مربع اکائیوں (جیسے m^2 یا مربع میٹر) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اور یہ ایک مثبت حقیقی عدد ہوتا ہے۔

مثلثی علاقہ

مستوی کے ایسے تمام نقاط کا سیٹ جو کسی مثلث کے اندر ہوں مثلث کا اندرونہ کہلاتا ہے۔



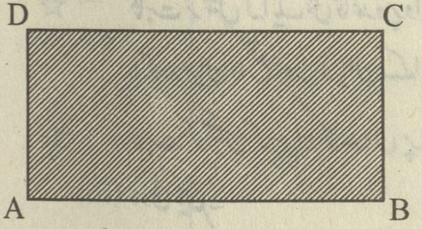
کسی مثلث اور اس کے اندرونہ کے یونین (union) کو مثلثی علاقہ کہتے ہیں۔ (یعنی مثلث بنانے والے تینوں قطعات خط اور مثلث کے اندرونہ کا یونین)۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ مثلثی علاقہ ہی مثلث کا رقبہ کہلائے گا۔

متماثل رقبوں کا اصول متعارفہ (Congruent Area Axion)

اگر $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

تو مثلثی علاقہ PQR کا رقبہ = مثلثی علاقہ ABC کا رقبہ

مستطیلی علاقہ

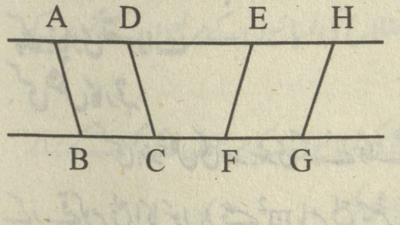


مستوی کے ایسے تمام نقاط کا سیٹ جو کسی مستطیل کے اندر واقع ہوں مستطیل کا اندرونہ کہلاتا ہے۔

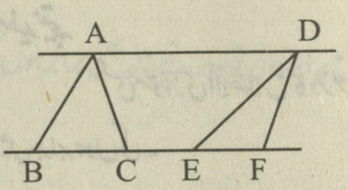
کسی مستطیل اور اس کے اندرونہ کے یونین کو مستطیلی علاقہ کہتے ہیں۔ مستطیلی علاقہ کو کئی طریقوں سے دو یا دو سے زیادہ مثلثی علاقوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

آپ کے ذہن میں ہوگا کہ اگر کسی مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب a اکائیاں اور b اکائیاں ہوں تو مستطیل کا رقبہ $a \times b$ مربع اکائیاں ہوتا ہے۔ علاوہ ازیں اگر کسی مربع کے ایک ضلع کی لمبائی 'a' ہو تو اس کا رقبہ 'a^2' مربع اکائیوں کے برابر ہوتا ہے۔

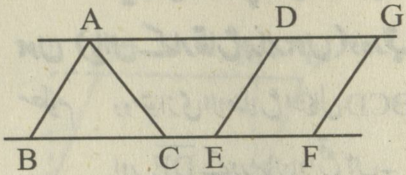
اشکال کا دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہونا



دو متوازی الاضلاع اشکال ABCD اور EFGH اس وقت متوازی خطوط کے درمیان واقع سمجھی جاتی ہیں جب ان کے قاعدے $\overline{BC}$ اور $\overline{FG}$ ایک ہی خط BCFG کے ساتھ ہم خط ہوں اور ان قاعدوں کے متقابہ اضلاع $\overline{AD}$ اور $\overline{EH}$ بھی متوازی خط ADEH کے ہم خط ہوں۔



سامنے دی گئی شکل میں دکھائی گئی دو مثلثیں ABC اور DEF دو متوازی خطوط کے درمیان واقع سمجھی جائیں گی جب ان کے قاعدے ہم خط ہوں اور ان کے راسوں کو ملانے والا خط قاعدوں کے متوازی ہو۔



سامنے دی گئی شکل میں دکھائی گئی ΔABC متوازی الاضلاع DEFG دو متوازی خطوط کے درمیان واقع سمجھی جائیں گی جب ان کے قاعدے ہم خط ہوں اور متوازی الاضلاع کے قاعدے کا بالمقابل ضلع ،ضرورت پڑنے پر بڑھانے سے، مثلث کے راس میں سے گزرے۔

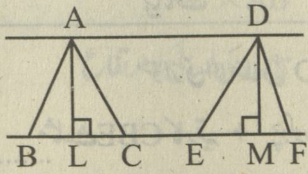
تعریف

اگر کسی متوازی الاضلاع کے ایک ضلع کو قاعدہ مان لیا جائے تو قاعدہ اور اس کے متوازی ضلع کے درمیان عمودی فاصلہ کو متوازی الاضلاع کا ارتفاع کہتے ہیں۔

تعریف

اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کو قاعدہ مان لیا جائے تو مخالف راس سے اس قاعدہ تک عمودی فاصلہ مثلث کا ارتفاع کہلاتا ہے۔

مفید نتیجہ



"برابر ارتفاع والی مثلثوں اور متوازی الاضلاع اشکال کو دو متوازی خطوط کے درمیان رکھا جا سکتا ہے۔ اور اس کا عکس نتیجہ بھی درست ہے۔"

مثلثان ABC اور DEF کو اس طرح لیں کہ ان کے قاعدے $\overline{BC}$ اور $\overline{EF}$ ہم خط ہوں اور ان کے راس A اور D اس خط کے ایک ہی طرف واقع ہوں۔ فرض کریں کہ ان کے ارتفاع $\overline{AL}$ اور $\overline{DM}$ لمبائی میں برابر ہیں۔ ہم نے ثابت کرنا ہے کہ $\overline{AD}$ خط BCEF کے متوازی ہے۔

ثبوت چونکہ $\overline{DM} \perp \overline{BF}$ اور $\overline{AL} \perp \overline{BF}$

اس لیے $\overline{AL} \parallel \overline{DM}$ (دونوں ایک ہی قطعہ خط BF پر عمود ہیں)۔

علاوہ ازیں $m\overline{AL} = m\overline{DM}$ (معلوم)

لہٰذا $\overline{AD} \parallel \overline{LM}$ ، یعنی $\overline{AD}$ خط BCEF کے متوازی ہے

اسی طرح متوازی الاضلاع اشکال کے لیے بھی یہ نتیجہ ثابت کر سکتے ہیں۔

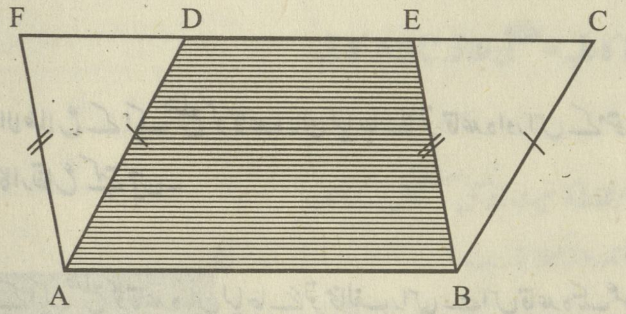
مفید نتیجہ

کسی متوازی الاضلاع کا وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے (ض۔ض۔ض) لہذا وہ دونوں مثلثیں رقبہ میں برابر ہوں گی۔

مسئلہ 16.1.1

ایک ہی قاعدہ پر واقع متوازی الاضلاع اشکال جو قاعدہ خط اور اس کے متوازی کسی خط کے درمیان واقع ہوں (یا ان کے ارتفاع برابر ہوں) وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

معلوم دو متوازی الاضلاع اشکال ABCD اور ABEF کا مشترک قاعدہ $\overline{AB}$ ہے اور وہ دو متوازی قطعات خط $\overline{AB}$ اور $\overline{DE}$ کے درمیان واقع ہیں۔



مطلوب متوازی الاضلاع ABEF کا رقبہ = متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ

بیانات	دلائل
متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ = چوکور ABED کا رقبہ + مثلث CBE کا رقبہ .... (1)	رقبہ کا جمعی اصول متعارفہ
متوازی الاضلاع ABEF کا رقبہ = چوکور ABED کا رقبہ + مثلث DAF کا رقبہ .... (2)	رقبوں کا جمعی اصول متعارفہ
$\Delta CBE \longleftrightarrow \Delta DAF$ میں	
$m\overline{CB} = m\overline{DA}$	متوازی الاضلاع کے بالمقابل اضلاع
$m\overline{BE} = m\overline{AF}$	متوازی الاضلاع کے بالمقابل اضلاع
$\angle CBE = \angle DAF$	$\overline{BE} \parallel \overline{AF}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
$\therefore \quad \Delta CBE \cong \Delta DAF$	ض۔ز۔ض موضوعہ
$\therefore \quad \Delta CBE = \Delta DAF$ .... (3)	متماثل رقبوں کا اصول متعارفہ
لہذا متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ = متوازی الاضلاع ABEF کا رقبہ	(1)، (2) اور (3) کی رو سے

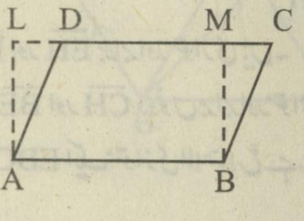
نتائج صریح

(i) اگر کسی متوازی الاضلاع اور مستطیل کے قاعدے مشترک اور ارتفاع برابر ہوں تو وہ رقبے میں بھی برابر ہوں گی۔

(ii) لہٰذا

متوازی الاضلاع کا رقبہ = قاعدہ کی لمبائی × ارتفاع

ثبوت



فرض کریں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جس کے قاعدہ $\overline{AB}$ کی مطابقت میں $\overline{AL}$ اس کا ارتفاع ہے۔

(i) چونکہ متوازی الاضلاع ABCD اور مستطیل ALMB ایک ہی قاعدہ $\overline{AB}$ پر اور دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔

اس لیے

متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ = مستطیل ALMB کا رقبہ

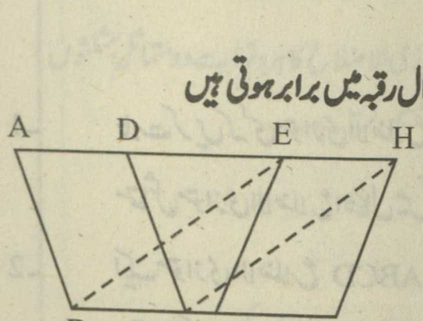
(ii) لیکن مستطیل ALMB کا رقبہ = $\overline{AL} \times \overline{AB}$

لہٰذا متوازی الاضلاع کا رقبہ = $\overline{AL} \times \overline{AB}$

= قاعدہ کی لمبائی × ارتفاع

مسئلہ 16.1.2

برابر قاعدوں پر واقع اور برابر ارتفاع والی متوازی الاضلاع اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں



معلوم متوازی الاضلاع اشکال ABCD, EFGH بالترتیب برابر قاعدوں $\overline{BC}$ اور $\overline{FG}$ پر واقع ہیں اور ان کے ارتفاع بھی برابر ہیں۔

مطلوب متوازی الاضلاع EFGH کا رقبہ = متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ

عمل معلوم متوازی الاضلاع اشکال ABCD اور EFGH کو اس طرح سیٹ کریں (رکھیں) کہ ان کے برابر قاعدے $\overline{BC}$, $\overline{FG}$ خط BCFG کے ہم خط ہو جائیں۔ B کو E اور C کو H سے ملائیں۔

ثبوت

دلائل	بیانات
ان کے ارتفاع برابر ہیں (معلوم)	دی گئی متوازی الاضلاع اشکال دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔ لہٰذا ADEH ایک خط مستقیم ہے اور $\overline{BC}$ کے متوازی ہے۔
معلوم EFGH ایک متوازی الاضلاع ہے۔	$\therefore \quad m\overline{BC} = m\overline{FG}$ $= m\overline{EH}$ اب $\overline{BC}$ اور $\overline{EH}$ برابر اور متوازی ہیں۔ اس لیے $\overline{BE}$ اور $\overline{CH}$ دونوں برابر اور متوازی ہیں۔
کسی چوکور کے دو ضلعے متوازی اور برابر ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہوتی ہے۔	لہٰذا EBCH ایک متوازی الاضلاع ہے۔ اب
ایک ہی قاعدہ $\overline{BC}$ پر دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔	(i) ... متوازی الاضلاع ABCD = متوازی الاضلاع EBCH لیکن
ایک ہی قاعدہ $\overline{EH}$ پر دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔	(ii) ... متوازی الاضلاع EBCH = متوازی الاضلاع EFGH لہٰذا
(i) اور (ii) کی رو سے	متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ = متوازی الاضلاع EFGH کا رقبہ

مشق 16.1

1۔ ثابت کریں کہ کسی متوازی الاضلاع کے آمنے سامنے کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط اسے دو متماثل متوازی الاضلاع اشکال میں تقسیم کرتا ہے۔

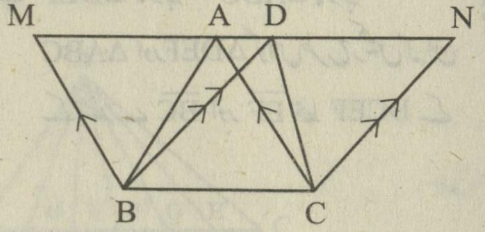
2۔ ایک متوازی الاضلاع ABCD میں $m\overline{AB}=10$ cm ہے۔ اضلاع $\overline{AB}$ اور $\overline{AD}$ کی مطابقت میں ارتفاع کی لمبائیاں بالترتیب 7cm اور 8cm ہیں۔ $\overline{AD}$ کی مقدار معلوم کریں۔

3۔ اگر برابر رقبے والی دو متوازی الاضلاع اشکال کے قاعدے برابر ہوں تو ثابت کریں کہ ان کے ارتفاع برابر ہوں گے۔

مسئلہ 16.1.3

ایسی مثلثیں جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور ان کے ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

معلوم مثلثان ABC اور DBC ایک ہی قاعدہ $\overline{BC}$ پر واقع ہیں اور ان کے ارتفاع برابر ہیں۔



مطلوب ΔABC کا رقبہ $=$ ΔDBC کا رقبہ

عمل $\overline{CA} \parallel \overline{BM}$ اور $\overline{BD} \parallel \overline{CN}$ کھینچیں جو $\overline{AD}$ (دونوں طرف بڑھانے سے) کو نقاط M اور N پر ملتے ہیں۔

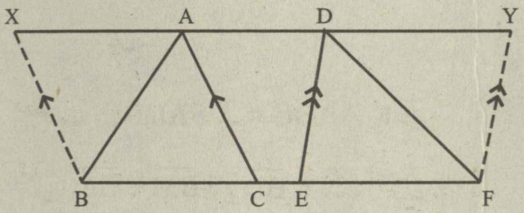
ثبوت

دلائل	بیانات
ان کے ارتفاع برابر ہیں۔	ΔABC اور ΔDBC دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں لہٰذا $\overline{MADN} \parallel \overline{BC}$
یہ متوازی الاضلاع اشکال ایک ہی قاعدہ $\overline{BC}$ پر اور دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔	$\therefore$ متوازی الاضلاع BCAM کا رقبہ = متوازی الاضلاع BCND کا رقبہ (i) ....
متوازی الاضلاع کا ہر وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔	لیکن $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ (متوازی الاضلاع BCAM کا رقبہ) کا رقبہ (ii) .... اور $\Delta DBC = \frac{1}{2}$ (متوازی الاضلاع BCND کا رقبہ) کا رقبہ (iii) ....
(i), (ii) اور (iii) کی رو سے	لہٰذا ΔABC کا رقبہ $=$ ΔDBC کا رقبہ

مسئلہ 16.1.4

ایسی مثلثیں جن کے قاعدے اور ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی

معلوم ΔABC اور ΔDEF برابر قاعدوں $\overline{BC}$ اور $\overline{EF}$ پر واقع ہیں اور ان کے ارتفاع بھی برابر ہیں۔



مطلوب ΔDEF کا رقبہ $= \Delta ABC$ کا رقبہ

عمل ΔABC اور ΔDEF کو اس طرح رکھیں کہ ان کے قاعدے $\overline{BC}$ اور $\overline{EF}$ خط BCEF کے ہم خط ہوں اور ان کے راس اس خط کے ایک ہی طرف واقع ہوں۔ $\overline{BX} \parallel \overline{CA}$ اور $\overline{FY} \parallel \overline{ED}$ کھینچیں جو AD کو دونوں طرف بڑھانے سے بالترتیب نقاط X اور Y پر ملیں۔

ثبوت

بیانات	دلائل
ΔABC اور ΔDEF دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں	ان کے ارتفاع برابر ہیں (معلوم)
$\therefore$ XADY $\parallel$ BCEF	
$\therefore$ متوازی الاضلاع EFYD کا رقبہ = متوازی الاضلاع BCAX کا رقبہ .... (i)	یہ متوازی الاضلاع اشکال برابر قاعدوں پر اور دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔
لیکن	
ΔABC کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ (متوازی الاضلاع BCAX کا رقبہ) .... (ii)	
اور	
ΔDEF کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ (متوازی الاضلاع EFYD کا رقبہ) ....(iii)	
$\therefore$ ΔDEF کا رقبہ $= \Delta ABC$ کا رقبہ	نتائج (i), (ii) اور (iii) کی رو سے

نتائج صریح:

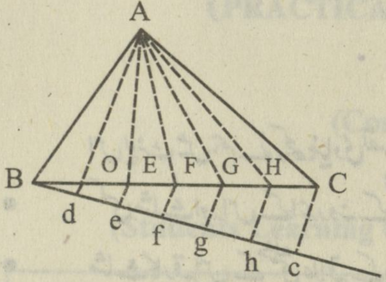
(i) ایسی مثلثیں جن کے قاعدے برابر ہوں اور دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں وہ رقبے میں برابر ہوتی ہیں۔

(ii) مشترک راس والی ایسی مثلثیں جن کے قاعدے برابر اور ہم خط ہوں وہ رقبے میں برابر ہوتی ہیں۔

مشق 16.2

1۔ ثابت کریں کہ مثلث کا ہر ایک وسطانیہ اسے برابر رقبے والی دو مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔

2۔ ثابت کریں کہ متوازی الاضلاع کے وتر اسے ایسی چار مثلثوں میں تقسیم کرتے ہیں جو رقبے میں برابر ہوتی ہیں۔



3۔ ایک دی گئی مثلث کو چھ برابر مثلثی حصوں میں تقسیم کریں۔

اعادہ مشق 16

1۔ مندرجہ ذیل بیانات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔

(i) کسی بند شکل کی حد بندی کرنے والے قطعات خط جس علاقے کا احاطہ کرتے ہیں وہ شکل کا رقبہ کہلاتا ہے۔ …………

(ii) متشابہ اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔ …………

(iii) متماثل اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔ …………

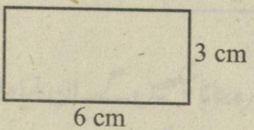
(iv) کسی متوازی الاضلاع کا وتر اسے دو غیر متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔ …………

(v) کسی مثلث کا ارتفاع، اس کے راس سے متقابلہ ضلع (قاعدہ) تک عمودی فاصلہ ہوتا ہے۔ …………

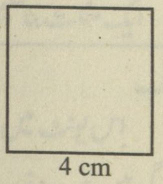
(vi) کسی متوازی الاضلاع کا رقبہ اس کے قاعدہ اور ارتفاع کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔ …………

2۔ مندرجہ ذیل اشکال کا رقبہ معلوم کریں۔

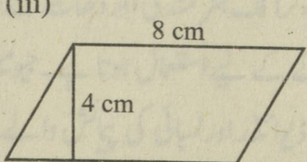
(i)



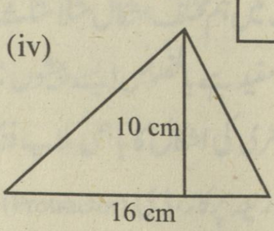
(ii)



(iii)



(iv)



3۔ مندرجہ ذیل اصطلاحات کی تعریف کریں۔

(i) دی گئی شکل کا رقبہ (ii) مثلثی رقبہ

(iii) مستطیلی رقبہ (iv) مثلث کا ارتفاع

خلاصہ

اس یونٹ میں ہم نے کچھ بنیادی تصورات کا تذکرہ کیا۔اور درج ذیل مسئلے بمع نتائج صریح بیان اور ثابت کیے۔

- کسی مثلث اور اس کے اندرونہ کے یونین (Union) کو مثلثی علاقہ کہتے ہیں۔
- مثلث کا رقبہ اس کے مثلثی علاقہ کے رقبہ کو ہی کہتے ہیں۔
- کسی مثلث کا ارتفاع، اس کے راس کے بالمقابل ضلع تک عمودی فاصلہ ہوتا ہے۔

☆ ایک ہی قاعدہ پر واقع متوازی الاضلاع اشکال جو قاعدہ خط اور اس کے متوازی کسی خط کے درمیان واقع ہوں (یا ان کے ارتفاع برابر ہوں) وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

☆ برابر قاعدوں پر واقع اور برابر ارتفاع والی متوازی الاضلاع اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔

☆ ایسی مثلثیں جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور ان کے ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

☆ ایسی مثلثیں جن کے قاعدے اور ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

☆ کسی بند شکل کی حد بندی کرنے والے قطعات خط جس علاقے کا احاطہ کرتے ہیں وہ شکل کا رقبہ کہلاتا ہے۔