مفت ورهاست لاءِ

يونٽ 1

حقيقي ۽ منجهيل عدد

Real and Complex Numbers

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

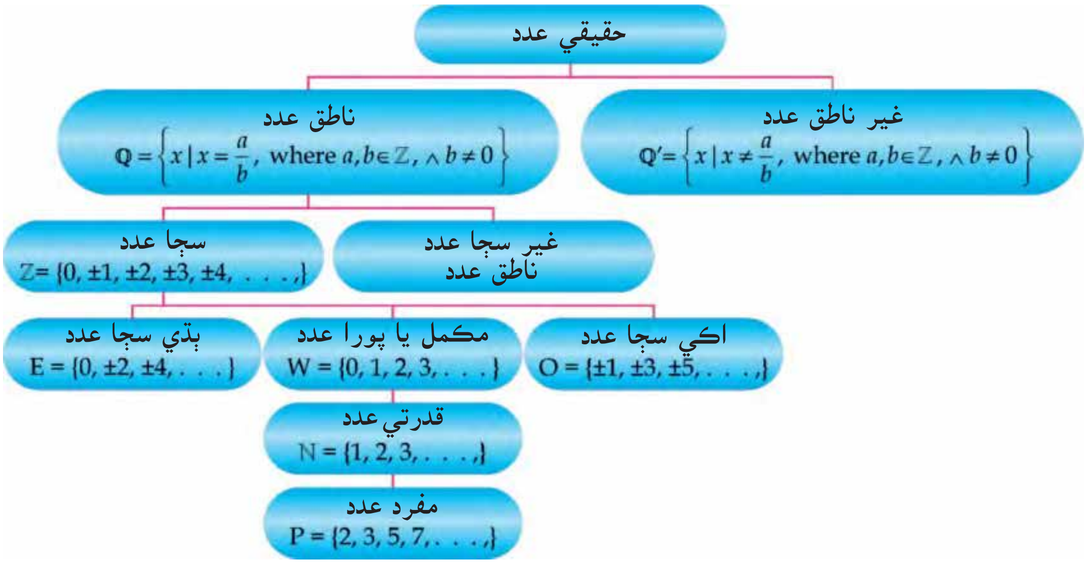
- ناطق ۽ غير ناطق عددن جي ميلاپ واري سيٽ کي حقيقي عددن جي سيٽ طور ياد ڪندا.
- حقيقي عددن کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪندا.
- ختم ٿيندڙ، نہ ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي عددن کي عددي ليڪ تي ڏيکاريندا.
- ناطق ۽ غير ناطق عددن جي ڏهائي واري سڃاڻپ ۾ فرق ڪندا.
- حقيقي عددن جي خاصيتن جي ڄاڻ حاصل ڪندا.
- مول ۽ مولن جي پايي جي سڃاڻپ ڪري سگهندا.
- مول ۽ سگهہ نما، صورت جي اظهار ۾ فرق ڪري سگهندا.
- مولي صورت واري اظهار کي سگهہ نما اظهار ۾ بدلائي سگهندا ۽ ان جي برعڪس پڻ.
- بنياد، سگهہ ۽ سگهہ جي ملهہ کي پڻ وري دهرائيندا.
- سگهن جا قاعدا استعمال ڪري حقيقي سگهہ نما اظهارن کي سادي صورت ۾ آڻي سگهندا.
- وضاحت سان منجهيل عددن (Complex numbers) z جي اظهار جي صورت ۾ وصف بيان ڪندا جيئن (a, b) يا $z = a + ib$ ، جڏهن تہ a حقيقي ۽ b تصوراتي حصوآهي ۽ هتي $i = \sqrt{-1}$ آهي.
- $z = (a, b)$ يا $z = a + ib$ ۾ a کي حقيقي ۽ b کي تصوراتي حصي طور سڃاڻپ ڪندا.
- منجهيل عدد (Complex number) جي گردان (Conjugate) جي تعريف ڪري سگهندا.

$$\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib = (a, -b)$$

- منجهيل عددن (Complex Numbers) جي برابري واري صورت بابت ڄاڻ
- منجهيل عددن (Complex numbers) جي بنيادي نشانيون (جوڙ، ڪٽ، ضرب ۽ ونڊ) جو استعمال ڪري سگهندا.

تعارف:

گذريل ڪلاسن ۾ اسان عددن جا ڪيترائي قسم سکي آيا آهيون، جهڙوڪ قدرتي عدد(عددن جي ڳروپ) سجا عدد، مڪمل يا پورا عدد، ناطق عدد وغيره. هي سيئي عَدَدَ، حقيقي عددن جي سيٽ ۾ شامل آهن. ان ڪري حقيقي عددن جي درجا بندي هيٺ ڏجي ٿي.



1.1 حقيقي عدد

1.1.1 ناطق ۽ غير ناطق عددن جي ميلاپ واري سيٽ کي حقيقي عددن جي سيٽ طور ياد ڪندا.

حقيقي عددن جو سيٽ ناطق ۽ غير ناطق عددن جو ميلاپ آهي يعني $\mathbb{R} = Q \cup Q'$ اسان اڳيئي ناطق ۽ غيرناطق عددن بابت سکي چڪا آهيون. حقيقي عددن جون ڪيترين ئي خاصيتون آهن جيئين توهان ناطق عددن جون خاصيتون سکيون آهن.

1.1.2 حقيقي عددن کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪرڻ

گذريل ڪلاسن ۾ اسان پورن عددن، سجن عددن ۽ انهن کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪرڻ جو مطالعو ڪري آيا آهيون.ساڳي طرح اسين حقيقي عددن کي به عددي ليڪ تي ظاهر ڪري سگهون ٿا.

اچو ته هينيان مثال ڏسون:

مثال 01 $\frac{1}{2}$ ۽ $-\frac{1}{2}$ کي عددي ليڪ l تي ظاهر ڪريو.

حل:

اهڙي طرح مٿئين شڪل ۾ ڏيکاريل P_1 ۽ P_2 بالترتيب $-\frac{1}{2}$ ۽ $\frac{1}{2}$ کي ظاهر ڪن ٿا.

مثال 02 -1.5 ۽ $1\frac{1}{5}$ کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو.

حل:

ساڳي طرح سان مٿئين شڪل ۾ نقطو P_1 ظاهر ڪري ٿو -1.5 کي ۽ P_2 ظاهر ڪري ٿو $1\frac{1}{5}$ کي.

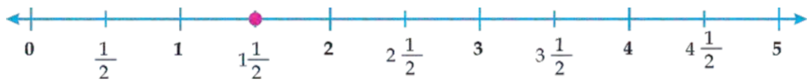
1.1.3 ختم ٿيندڙ ۽ نه ختم ٿيندڙ، ورجندڙ ڏهائي واري عدد کي عددي ليڪ تي ڏيکارڻ.

ڪنهن به ختم ٿيندڙ، نه ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي واري عدد کي، عددي ليڪ تي ظاهر ڪرڻ لاءِ، جيئن ته سيئي نقطا ناطق عدد $\frac{a}{b}$ سان لاڳاپيل آهن. جنهن ۾ a, b واڌو سچا عدد آهن، اسان هر هڪ ايڪي ڊيگهه کي b هڪجيترن حصن ۾ ورهائيندا سين پوءِ a^{th} نقطو ورهاست جو اصل (Origin) جي ساڄي طرف $\frac{a}{b}$ کي ظاهر ڪندو ۽ کابي طرف $-\frac{a}{b}$ کي ظاهر ڪندو.

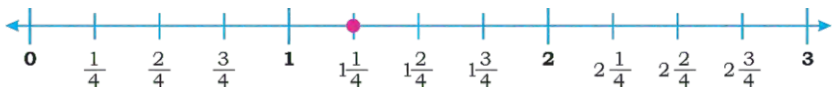
مثال 01 هيٺيان ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو.

i. $\frac{3}{2}$ ii. $\frac{5}{4}$

i. $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$



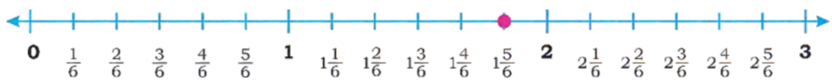
ii. $\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$



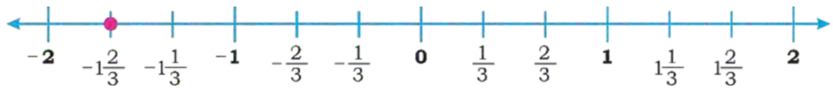
مثال 02 هيٺيان نہ ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي اٽپور عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو.

i. $\frac{11}{6}$ ii. $-\frac{5}{3}$

i. $\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}$



iii. $-\frac{5}{3}=-1\frac{2}{3}$



1.1.4 ناطق ۽ غير ناطق عددن جي ڏهائي واري سڃاڻپ ۾ فرق ڪندا

جڏهن اسين ناطق عدد کي ڏهائي جي صورت ۾ ظاهر ڪندا آهيون ته ٻن قسمن جا ڏهائي اٽپور ممڪن آهن جن ۾ ختم ٿيندڙ ۽ نہ ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي اٽپور آهن جڏهن ته غيرناطق عدد، نہ ختم ٿيندڙ نہ ورجندڙ ڏهائي اٽپور جي صورت ۾ ظاهر ڪيا آهن. اسان انهن کي هيٺ جدول ۾ ظاهر ڪريون ٿا.

نمبرشمار	عدد	بيان ڪرڻ
1.	$\frac{1}{2} = 0.5$	ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور
2.	$\frac{1}{4} = 0.25$	ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور
3.	$\frac{1}{3} = 0.333...$	نہ ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي اٽپور
4.	$\frac{9}{11} = 0.818181...$	نہ ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي اٽپور
5.	$\sqrt{2} = 1.414213...$	نہ ختم ٿيندڙ نہ ورجندڙ ڏهائي اٽپور
6.	$\sqrt{3} = 1.73205...$	نہ ختم ٿيندڙ نہ ورجندڙ ڏهائي اٽپور

مشق 1.1

.1 هيٺين عددن مان ناطق ۽ غيرناطق عددن جي سڃاڻپ ڪريو ۽ هرهڪ کي الڳ ڪالم ۾ لکو.

(i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (iii) $\frac{5}{\sqrt{6}}$ (iv) $\frac{2}{8}$ (v) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (vi) $\sqrt{8}$

(vii) 0 (viii) π (ix) $\sqrt{5}$ (x) $\frac{22}{3}$ (xi) $\frac{1}{\pi}$ (xii) $\frac{11}{12}$

.2 هيٺين کي ڏهائي اٽپور ۾ تبديل ڪريو. انهن جي ختم ٿيندڙ ۽ نہ ختم ٿيندڙ جي پڻ نشاندهي ڪريو.

(i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{4}{18}$ (iii) $\frac{1}{15}$ (iv) $\frac{49}{8}$ (v) $\frac{207}{15}$ (vi) $\frac{50}{76}$

3. هينيان ناطق عدد، عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو.

(i) $\frac{8}{10}$ (ii) $-\frac{8}{10}$ (iii) $1\frac{1}{4}$ (iv) $-1\frac{1}{4}$ (v) $\frac{2}{3}$ (vi) $-\frac{2}{3}$

4. ڇا توهان 1 ۽ 2 جي وچ ۾ سڀني حقيقي عددن جي فهرست ناهي سگهوٿا؟

5. سبب ٻڌايو تہ ڇو (π) هڪ غيرناطق آهي.

6. صحيح بيان تي (✓) ٽڪ جو نشان لڳايو.

(i) $\frac{5}{7}$ غيرناطق عدد جو مثال آهي.

(ii) π هڪ غيرناطق عدد آهي.

(iii) ...0.31591 نہ ختم ٿيندڙ ۽ نہ ورجندڙ ڏهائي اٽڪل آهي.

(iv) $0.12\bar{3}$ هڪ ورجندڙ ڏهائي اٽڪل آهي.

(v) $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ 0 ۽ 1 جي وچ ۾ هوندا آهن.

(vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ناطق عدد جو هڪ مثال آهي.

1.2 حقيقي عددن جون خاصيتون

حقيقي عددن ۾ جوڙ ۽ ضرب جي لحاظ کان خاصيتون موجود آهن. حقيقي عددن لاءِ a,b جي جوڙ اپت $a+b$ ۽ ضرب اپت $a.b$ يا $a\times b$ يا صرف ab آهي.

1.2.1 حقيقي عددن جي خاصيتن جي ڇاڻ ڪرڻ

(a) جوڙ جي لحاظ کان حقيقي عددن جون خاصيتون

(i) بندش واري خاصيت (Closure property)

ٻن حقيقي عددن جي جوڙ اپت، وري هڪ حقيقي عدد ٿيندو.

$\forall a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow a+b\in\mathbb{R}$ جوڙ جي لحاظ کان بندش جي خاصيت آهي.

مثال:

(i) $5,7\in\mathbb{R}\Rightarrow 5+7=12\in\mathbb{R}$

(ii) $\frac{4}{5},\frac{3}{4}\in\mathbb{R}\Rightarrow\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=\frac{16+15}{20}=\frac{31}{4}\in\mathbb{R}$

(ii) مَٽا سَٽاواري خاصيت (Commutative property)

ڪن ٻہ ٻن حقيقي عددن a ۽ b لاءِ

$$a+b=b+a$$

کي جوڙ جي لحاظ کان مٽا واري خاصيت چئبو آهي.

مثال: $\sqrt{5}+\sqrt{6}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$ (ii) $3+7=7+3$ (i)

(iii) سنگت واري خاصيت (Associative property)

ڪن ٻہ ٽن حقيقي عددن a,b ۽ c لاءِ

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

کي جوڙ جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت چئبو آهي.

مثال: $(4+5)+6=4+(5+6)$

(iv) جوڙ لاءِ ذاتي عنصر (Additive inverse)

هڪ عدد ٻڙي 0 جنهنجو تعلق حقيقي عدد سان آهي $0\in\mathbb{R}$ اهڙي طرح $a+0=a=0+a,\ \forall a\in\mathbb{R}$

"0" کي جوڙ لاءِ ذاتي عنصر چئبو آهي.

مثال: $\frac{7}{8}+0=\frac{7}{8}=0+\frac{7}{8}$, $3+0=3=0+3,$ وغيره

(v) جمعي ابتڙ (Additive inverse)

هرهڪ حقيقي عدد a لاءِ $-a$ حقيقي عدد موجود آهي اهڙي طرح جو $a+(-a)=0=(-a)+a$

تنهن کري $-a$ ۽ a هڪ ٻئي جا جمعي ابتڙ آهن.

مثال: $6+(-6)=0=(-6)+6=0$

هتي 6 ۽ -6 هڪ ٻئي جا جمعي ابتڙ آهن.

(b) ضرب جي لحاظ کان حقيقي عددن جون خاصيتون

(i) بندش واري خاصيت (Closure property)

ڪن ٻہ ٻن حقيقي عددن a ۽ b جي ضرب اپت وري ٻہ هڪ حقيقي عدد آهي.

$a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow ab\in\mathbb{R}$ ضرب جي لحاظ کان بندش واري خاصيت سڏبو آهي.

مثال: $\frac{3}{5},\frac{6}{7}\in\mathbb{R}\Rightarrow\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)=\frac{18}{35}\in\mathbb{R}$ (ii) $5,7\in\mathbb{R}\Rightarrow(5)(7)=35\in\mathbb{R}$ (i)

(ii) مَٽا سَٽاواري خاصيت (Commutative property)

ڪن بہ ٻن حقيقي عددن a ۽ b لاءِ

$ab = ba$ کي جوڙ جي لحاظ کان مٽاواري خاصيت چئبو آهي.

مثال: (i) $\sqrt{3},\ \sqrt{5}\in\mathbb{R}\Rightarrow(\sqrt{3})(\sqrt{5})=(\sqrt{5})(\sqrt{3})$

(ii) $3,\ 4\in\mathbb{R}\Rightarrow 3\times4=4\times3$ etc.

(iii) سنگت واري خاصيت (Associative property)

ڪن بہ ٽن حقيقي عدد b,a ۽ c لاءِ

$(ab)\ c = a\ (bc)$ کي ضرب جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت چئبو آهي.

مثال: (i) $4,5,6\in\mathbb{R}$, تہ پوءِ $(4\times5)\times6=4\times(5\times6)$,

(ii) $\frac{2}{5},4,\sqrt{3}\in\mathbb{R}$, تہ پوءِ $(\frac{2}{5}\times4)\times\sqrt{3}=\frac{2}{5}\times(4\times\sqrt{3})$, وغيره

(iv) ضرب لاءِ ذاتي عنصر (Multiplicative identity)

هر هڪ حقيقي عدد a لاءِ هڪ رڪن 1 موجود آهي جيڪو حقيقي عدد جي سيٽ سان تعلق رکي ٿو $1\in\mathbb{R}$.

$1, a\times1=1\times a=a$ کي ضرب لاءِ ذاتي عنصر چئبو آهي.

مثال: $1\times3=3\times1=3,\ \frac{3}{5}\times1=1\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$ وغيره.

(v) ضربي ابتڙ (Multiplicative inverse)

هر هڪ حقيقي عدد a لاءِ (a غير ٻڙي عدد آهي)، هڪ رڪن $\frac{1}{a}$ يا $a^{-1}\in\mathbb{R}$ موجود آهي جنهن جو تعلق حقيقي عدد سان آهي.

$a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1$ تنهنڪري $\frac{1}{a}$ ۽ a هڪٻئي جا ضربي ابتڙ آهن.

مثال: $3\times\frac{1}{3}=1=\frac{1}{3}\times3$

هتي 3 ۽ $\frac{1}{3}$ هڪٻئي جا ضربي ابتڙ آهن.

(c) ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت
(Distributive property of Multiplication over Addition)

ڪن به ٽن حقيقي عدد a, b, c لاءِ $a(b+c) = ab + ac$ (i)

ان کي ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت چئبو آهي (کاٻي کان ورهاست واري خاصيت)

$(a+b)c = ac + bc$ (ii)

ان کي ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت چئبو آهي (ساڄي کان ورهاست واري خاصيت)

مثال: $3(5+7) = 3\times5 + 3\times7$ (کاٻي کان ورهاست واري خاصيت)

$(3+7)2 = 3\times2 + 7\times2$ (ساڄي کان ورهاست واري خاصيت)

نوٽ: $a(b-c) = ab - ac$ ضرب جي ڪٽ تي ورهائجڻ واري خاصيت آهي.

(d) حقيقي عددن جي برابري وارين خاصيتون

هيٺيون حقيقي عددن تي برابر وارين خاصيتون آهن.

(i) عڪسي خاصيت (Reflexive property)

جيڪڏهن $a \in \mathbb{R}$ ته پوءِ $a = a$

(ii) هم شڪلي خاصيت (Symmetric property)

جيڪڏهن a,b حقيقي عدد آهن ته پوءِ $a = b \Leftrightarrow b = a$

(iii) متعدي خاصيت (Transitive property)

جيڪڏهن a,b,c حقيقي عدد آهن ته پوءِ $a = b$ ۽ $b = c \Leftrightarrow a = c$

(iv) جوڙ واري خاصيت (Additive property)

جيڪڏهن a,b,c حقيقي عدد آهن $a = b$ ته پوءِ $a + c = b + c$

(v) ضربي خاصيت (Multiplicative property)

جيڪڏهن a,b,c حقيقي عدد آهن اهڙي طرح جيئن $a = b$ ته پوءِ $ac = bc$

(vi) ڪاٽ واري خاصيت جوڙ جي لاءِ (Cancellation property for Addition)

جيڪڏهن a,b,c حقيقي عدد آهن ۽ جيڪڏهن $a + c = b + c$ ته پوءِ $a = b$

(vii) ڪاٽ واري خاصيت ضرب جي لاءِ (Cancellation property for Multiplication)

جيڪڏهن a,b,c حقيقي عدد آهن ۽ $c \neq 0$ جيڪڏهن $ac = bc$ ته پوءِ $a = b$

(e) حقيقي عددن ۾ اڻ برابري واري تعلق جون خاصيتون
(Properties of Inequalities of Real Numbers)

هيٺيون حقيقي عددن ۾ اڻ برابري واري تعلق جون خاصيتون آهن.

(i) ٽه رخي خاصيت (Trichotomy property)

جيڪڏهن $a,b \in \mathbb{R}$ ته پوءِ $a=b$ يا $a<b$ يا $a>b$

(ii) متعدي خاصيت (Transitive property)

جيڪڏهن $a,b,c \in \mathbb{R}$ ته پوءِ

(a) $a<b$ ۽ $b<c \Rightarrow a<c$ (b) $a>b$ ۽ $b>c \Rightarrow a>c$

(iii) جوڙ واري خاصيت (Additive property)

جيڪڏهن $a,b,c \in \mathbb{R}$ ته پوءِ

(a) $a<b \Rightarrow a+c<b+c$ (b) $a>b \Rightarrow a+c>b+c$

(iv) ضربي خاصيت (Multiplicative property)

جيڪڏهن $a,b,c \in \mathbb{R}$ ۽ $c>0$ ته پوءِ

(a) $a>b \Rightarrow ac>bc$ (b) $a<b \Rightarrow ac<bc$

ساڳي طرح جيڪڏهن $c<0$ ته پوءِ

(a) $a>b \Rightarrow ac<bc$ (b) $a<b \Rightarrow ac>bc$

(v) ابتڙ خاصيت (Reciprocative property)

جيڪڏهن $a,b \in \mathbb{R}$ ۽ b,a جون ساڳيون نشانيون هجن تو پوءِ

(a) $a<b \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ ۽ $\frac{1}{a}<\frac{1}{b} \Rightarrow a>b$ (b) $a>b \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ ۽ $\frac{1}{a}>\frac{1}{b} \Rightarrow a<b$

(vi) ڪاٽ واري خاصيت (Cancellation property)

جيڪڏهن $a,b,c \in \mathbb{R}$ ته پوءِ

(a) $a+c>b+c \Rightarrow a>b$

(b) $a+c<b+c \Rightarrow a<b$

(c) $c>0$ ۽ $ac>bc \Rightarrow a>b$ ساڳي طرح

(d) $c>0$ ۽ $ac<bc \Rightarrow a<b$

مشق 1.2

.1 هيٺين ۾ حقيقي عددن جي خاصيتن جي سڃاڻپ ڪريو.

(i) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

(ii) $\frac{4}{3}+\left(1\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}+1\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}$

(iii) $9\times\left(\frac{10}{9}+\frac{20}{9}\right)=\left(9\times\frac{10}{9}\right)+\left(9\times\frac{20}{9}\right)$

(iv) $\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{7}\right)\times\frac{7}{8}=\left(\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{5}{7}\times\frac{7}{8}\right)$

(v) $\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{5}\right)\times\frac{10}{15}=\left(\frac{7}{5}\times\frac{10}{15}\right)-\left(\frac{3}{5}\times\frac{10}{15}\right)$

(vi) $\frac{d}{c}\times\frac{e}{f}=\frac{e}{f}\times\frac{d}{c}$

(vii) $11\times(15\times21)=(11\times15)\times21$

(viii) $\frac{2}{11}\times\frac{11}{2}=\frac{11}{2}\times\frac{2}{11}=1$

(ix) $\left(\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)=0$

(x) $\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{b}{a}\right)=\left(\frac{b}{a}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)=1$

(xi) $\frac{15}{10}\times\left(\frac{8}{5}-\frac{4}{10}\right)=\left(\frac{15}{10}\times\frac{8}{5}\right)-\left(\frac{15}{10}\times\frac{4}{10}\right)$

(xii) $\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=1$

.2 هيٺين حقيقي عددن کي مڪمل درست ڪرڻ لاءِ درست حقيقي عددن سان خال ڀريو.

(i) $\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\square}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2}}{5}$

(ii) $\frac{7}{10}+\left(\frac{70}{\square}+\frac{16}{33}\right)=\left(\frac{7}{\square}+\frac{\square}{10}\right)+\frac{16}{\square}$

(iii) $\frac{99}{50}\times\frac{50}{99}=\square$

(iv) $\left(\frac{59}{95}\right)\times\left(\frac{95}{59}\right)=\square$

(v) $(-21)+(\square)=0$

(vi) $\frac{5}{8}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{\square}{\square}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{5}{8}\times\frac{\square}{\square}\right)$

.3 هيٺين خاصيتن کي درست/صحيح ڪرڻ لاءِ خال ڀريو.

(i) $5<8$ ۽ $8<10\Rightarrow$ ____ $<$ ____

(ii) $10>8$ ۽ $8>5\Rightarrow$ ____ $<$ ____

(iii) $3<6\Rightarrow 3+9<$ ___ $+$ ___

(iv) $4<6\Rightarrow 4+8<$ ___ $+$ ___

(v) $8>6\Rightarrow 6+8>$ ___ $+$ ___

.4 هيٺيان خال پريو جيڪي خاصيتن کي صحيح/درست ڪن.

(i) $5 < 7 \Rightarrow 5 \times 12 <$ ___ $\times$ ___

(ii) $7 > 5 \Rightarrow 7 \times 12 >$ ___ $\times$ ___

(iii) $6 > 4 \Rightarrow 6 \times (-7)$ ____ $4 \times (-7)$

(iv) $2 < 8 \Rightarrow 2 \times (-4)$ ____ $8 \times (-4)$

.5 هيٺين حقيقي عددن جا جمعي ۽ ضربي ابتڙ معلوم ڪريو.

(i) 3 **(ii)** -7 **(iii)** 0.3 **(iv)** $\frac{-\sqrt{5}}{5}$ **(v)** $\frac{9}{\sqrt{12}}$ **(vi)** 0

1.3 مول ۽ مول جو پايو

1.3.1 مول ۽ مول جي پايي جي سڃاڻپ ڪرايو

سمجهو ته $n \in Z^+$ (واڌو سڄن عددن جو سيٽ) ۽ $n > 1$

۽ فرض ڪريو ته $a \in \mathbb{R}$، پوءِ ڪنهن به واڌو حقيقي عدد x لاءِ

a جو ٻيو مول) $x^2 = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{a}$ جيئن

a جو ٽيون مول) $x^3 = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{a}$ ساڳي طرح

a جو چوٿون مول) $x^4 = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x = \sqrt[4]{a}$

a جو n وون مول) $x^n = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$ عام طرح

$\sqrt[n]{a}$ ۾ a کي مول جو پايو ۽ $'n'$ کي مول جي ڏسڻي چئبو آهي.

> $\sqrt{\ }$ کي مول جي نشاني سڏبو آهي.

1.3.2 مول ۽ سگهه نما صورت جي اظهار ۾ فرق ڪريو.

جيئن ته اسان پڙهي آيا آهيون ته $x = \sqrt[n]{a}$ هڪ مول واري صورت آهي.

ساڳي طرح $a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{m}{n}}$ ڪجهه سگهه نما صورت جا مثال آهن.

ياد ڪريو ته

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$$

هتي $\sqrt[n]{a}$ هڪ مولي صورت آهي $a^{\frac{1}{n}}$ سگهه واري صورت آهي.

هتي پيو مول جون ڪجھ خاصيتون ڏجن ٿيون.

$\forall a,b\in \mathbb{R}^{+} \wedge m,n\in Z$ ته پوءِ

(i) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(ii) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(iii) $\dfrac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}$

(iv) $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a$

(v) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=1$

(vi) $m\sqrt{a}\pm n\sqrt{a}=(m\pm n)\sqrt{a}$

(vii) $\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}}=\sqrt{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}}, a,b\neq 0$

ساڳي طرح

(i) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(ii) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(iii) $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

(iv) $\sqrt[mn]{a^n}=a^{\frac{n}{nm}}=a^{\frac{1}{m}}$

(v) $\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=a^{\frac{1}{mn}}$

(vi) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n^2]{a}=a^{\frac{1}{n^2}}$

(vii) $\sqrt[n]{a^n}=a$

(viii) $\dfrac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{a^n}}=1$

1.3.3 مولي صورت ۾ ڏنل اظهار کي سگهه واري صورت ۾ بدلائڻ ۽ ان جي برعڪس

جڏهن اسان مول ۽ سگهن تي مشتمل اظهارن کي سادي صورت ۾ آڻيندا آهيون ته ان لاءِ مول ۽ سگهه واريون خاصيتون تمام ڪارگر آهن.

مثال 01 هيٺين مولي اظهارن کي سگهه نما اظهارن ۾ بدلايو.

(i) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (ii) $\sqrt[3]{18}$ (iii) $\sqrt[5]{\dfrac{5}{7}}$ (iv) $\sqrt[9]{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}$ (v) $\sqrt[4]{(ab)^3}$

حل:

(i) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $\sqrt[3]{18}=(18)^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\sqrt[5]{\dfrac{5}{7}}=\left(\dfrac{5}{7}\right)^{\frac{1}{5}}$

(iv) $\sqrt[9]{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{2}{9}}$ (v) $\sqrt[4]{(ab)^3}=(ab)^{\frac{3}{4}}$

مثال 02 هيٺين سگهه نما اظهارن کي مولي اظهارن ۾ بدلايو.

(i) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{\frac{1}{3}}$ (ii) $(12)^{\frac{n}{2}}$ (iii) $(-7)^{\frac{3}{4}}$ (iv) $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-\frac{2}{5}}$ (v) $\left(-\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{m}{n}}$

حل:

(i) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{5}{7}}$ (ii) $(12)^{\frac{n}{2}}=\sqrt{(12)^n}$ (iii) $(-7)^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{(-7)^3}$

(iv) $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-2}}=\sqrt[5]{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}$ (v) $\left(-\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{\left(-\dfrac{x}{y}\right)^m}$

مشق 1.3

.1 هيٺين ۾ مول جو پايو ۽ مول جي ڏسٽي جي سڃاڻپ ڪريو.

(i) $\sqrt[3]{5}$ (ii) $\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}}$ (iii) $\sqrt[5]{x^2yz}$

2. هيٺين کي سگهه واري نموني ۾ تبديل ڪريو.

(i) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)}$ (ii) $\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^5}$ (iii) $\sqrt[3]{\left(\frac{y}{x}\right)^{-5}}$ (iv) $\sqrt[3]{(yz)^7}$ (v) $\sqrt[9]{27}$

(vi) $\sqrt[3]{(-64)^2}$ (vii) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^m}$ (viii) $\sqrt[5]{(xy)^3}$ (ix) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{4}{3}}}$

3. هيٺين کي مول واري نموني ۾ تبديل ڪريو.

(i) $\left(5^3\right)^{\frac{1}{7}}$ (ii) $\left(ab^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\left[\left(\frac{5}{7}\right)^3\right]^{\frac{5}{7}}$ (iv) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{m}{2}}$ (v) $\left[\left(\frac{11}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)\right]^{\frac{1}{5}}$

1.4 سگهن جا قاعدا

سگهن يا سگهه نما جا قاعدا رياضي جي ڪيترن ئي حصن ۾ اهم آهن.

1.4.1 بنياد، سگهه ۽ سگهه جي ملهه ڪي دهرايو.

سمجهو تہ a^n سگهن واري صورت ۾ آهي. جنهن ۾ 'a' بنياد ۽ 'n' سگهه يا سگهه نما آهي جنهن کي a جي n وين سگهه پڙهبو.

a^n جو نتيجو، جڏهن $a \in \mathbb{R}$ آهي تہ ان جو ملهه ڇئبو آهي.

1.4.2 سگهن جا قاعدا استعمال ڪري حقيقي سگهه نما اظهارن کي سادي صورت ۾ بيان ڪرڻ.

هيٺيان سگهن جا قاعدا اظهارن کي سادي صورت ۾ آڻڻ لاءِ ڪارگر آهن.

(i) سگهن جي ضرب اپت جو قاعدو (Law of Product of Power)

(a) جيڪڏهن $x, y \in Z^+$ ۽ $a, b \in \mathbb{R}$ تہ پوءِ $a^x \times a^y = a^{x+y}$

هيٺ ڪجهه مثال هن قاعدي مطابق ڏنل آهن.

(a) $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$ (b) $3 \times 3^5 = 3^{1+5} = 3^6 = 729$

(ii) سگهه جي سگهه جو قاعدو (Law of Power of Power)

جيڪڏهن $a \in \mathbb{R}$ ۽ $x, y \in Z^+$ تہ پوءِ $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

هيٺ ڪجهه مثال هن قاعدي مطابق ڏنل آهن.

(a) $(5^2)^4 = 5^{2\times 4} = 5^8$

(b) $\left\{\left(\frac{6}{11}\right)^4\right\}^3 = \left(\frac{6}{11}\right)^{4\times 3} = \left(\frac{6}{11}\right)^{12}$ (c) $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^3\right\}^3 = \left(-\frac{3}{4}\right)^{3\times 3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^9 = -\left(\frac{3}{4}\right)^9$

(iii) ضرب اپت جي سگهه جو قاعدو (Law of Power of a Product)

$\forall a, b, \in \mathbb{R}$ ۽ $n \in Z^+,$

تہ پوءِ $(a\times b)^n = a^n \times b^n$

هيٺيان مثال هن قاعدي مطابق ڏنل آهن.

(a) $(xy)^3 = x^3y^3$ (b) $\left\{\left[\frac{8}{9}\right]\left[\frac{7}{11}\right]\right\}^3 = \left(\frac{8}{9}\right)^3\left(\frac{7}{11}\right)^3$

(iv) اٽيپور جي سگهه جو قاعدو (Law of Power of a Quotient)

$\forall a, b, \in \mathbb{R}$ ۽ $n \in Z^+,$ تہ پوءِ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ جڏهن $b \neq 0$

مثال هن قاعدي مطابق ڏنل آهن.

(a) $\left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{5^3}{8^3}$ (b) $\left(\frac{f}{g}\right)^4 = \frac{f^4}{g^4}, g\neq 0$

(v) سگهن جي وند اپت جو قاعدو (Law of quotient of Power)

جيڪڏهن $m, n \in Z^+$ ۽ $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ تہ پوءِ

$m > n$ جيڪڏهن $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$n > m$ جيڪڏهن $= \frac{1}{a^{n-m}}$

جيڪڏهن $m = n$ تہ پوءِ

$a^{m-n} = a^{m-m} = a^0 = 1$

ساڳي طرح $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = \frac{a^n}{a^n} = 1$

ياد رکو تہ:

جيڪڏهن $(-a)^n = a^n$ n هڪ ٻڌي سگهه آهي.

جيڪڏهن $(-a)^n = -a^n$ n هڪ اکي سگهه آهي.

هيٺيان مثال هن قاعدي مطابق ڏنل آهن.

(a) $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$

(b) $\frac{7^3}{7^5} = \frac{1}{7^{5-3}} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

ياد رکو تہ:

جيڪڏهن ڪنهن غير ٻڙي عدد جي سگهه ٻڙي آهي

تہ ان جو ملهہ 1 جي برابر ٿيندو. مثال طور $3^0 = 1$

مشق 1.4

1. سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $\frac{3^5}{3^2}$ (ii) $\frac{2^4 \cdot 5^3}{10^2}$ (iii) $\frac{(a+b)^2 \cdot (c+d)^3}{(a+b) \cdot (c+d)^2}$

2. سگهه جا قاعدا استعمال ڪري سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ (iii) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^5$

(iv) $(-3 \times 5^2)^3$ (v) $[3 \times (-4)^2]^3$ (vi) $\left(-\frac{a}{bc}\right)^5 \times \left(-\frac{a}{bc}\right)^4$

(vii) $\left(-\frac{c}{d}\right)^2 \left(-\frac{c}{d}\right)^3 \left(-\frac{c}{d}\right)^5$ (viii) $mn^2t^4n^3m^5t^7$ (ix) $a^2c^5b^2a^3c^3b^4a^4$

3. سگهه جا قاعدا استعمال ڪري سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $(5^2)^3$ (ii) $\{(xy)^3\}^5$ (iii) $\{(-4)^2\}^5$ (iv) $\{(-3)^3(-4)^2\}^3$ (v) $\left(\frac{b^2}{5}\right)^3$

(vi) $\left\{\left(-\frac{4}{9}\right)^2\right\}^3$ (vii) $\{(z^3)^2\}^4$ (viii) $\{(mm^2m^3m^4)^2\}^5$ (ix) $-[(-0.1)^2 (-0.1)^3 (-0.1)^4]^2$

1.5 منجهيل عدد (Complex numbers)

1.5.1 وضاحت سان منجهيل عددن (Complex numbers) z جي اظهار جي صورت ۾ وصف بيان ڪندا جيئن (a, b) يا $z = a + i\,b$، جڏهن ته a حقيقي ۽ b تصوراتي حصو آهي ۽ جتي $i = \sqrt{-1}$ آهي.

اسان کي خبر آهي ته حقيقي عدد جو چورس غيرڪاٽو آهي. ته پوءِ $x^2+1=0$ مساوات جو حل $\mathbb{R}$ سان تعلق نٿو رکي. حقيقي عددن جي هن ناڪافي هجڻ کي قابو پائڻ لاءِ رياضي دانن هڪ نئون عدد تصوراتي ايڪو $\sqrt{-1}$ روشناس ڪرايو، جنهن کي لفظ i (iota) سان ظاهر ڪيو ويو، جنهن کي $i^2=-1$ جي خاصيت آهي. ظاهر آهي ته "i" حقيقي عدد نه آهي. اهو رياضي ۾ هڪ نئون وجود آهي جيڪو اسان کي هر الجبري مساوات جي نموني $x^2+a=0$ جڏهن ته $a>0$ جو حل ڪرڻ جي قابل بنائي ٿو. عدد جهڙوڪ $\sqrt{-1}=i, \sqrt{-5}=\sqrt{5}i, \sqrt{-49}=7i$ خالص تصوراتي عدد آهن.

منجهيل (Complex) عددن جي وصف:

هڪ عدد جيڪو $a+ib$ جي نموني ۾ مليل هجي، جنهن ۾ a,b حقيقي عدد ۽ i هڪ تصوراتي ايڪو هجي ته اهڙي عدد کي منجهيل (Complex) عدد چئبو آهي ۽ ان کي z سان ظاهر ڪبو آهي. مثال طور $z=3+4i$ هڪ منجهيل (Complex) عدد آهي.

منجهيل (Complex) عدد $a+ib$ کي ترتيب ڏنل جوڙي جي صورت (a,b) جهڙي طرح $5+8i=(5,8)$ ۾ لکي سگهجي ٿو.

1.5.2 $z=a+ib$ ۾ a کي حقيقي ۽ b کي تصوراتي حصي طور سڃاڻپ ڪريو.

منجهيل (Complex) عدد $z=a+ib$ ۾ "a" حقيقي حصو ۽ "b" تصوراتي حصو آهي. منجهيل عدد جو حقيقي حصي کي $\text{Re}(z)$ سان ظاهر ڪبو آهي ۽ ان جي تصوراتي حصي کي $\text{Im}(z)$ سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال 01 مليل منجهيل (Complex) عددن جي حقيقي ۽ تصوراتي حصن جي سڃاڻپ ڪريو.

$$z=3-2i$$

$\text{Re}(z)=a=3$ ۽ $\text{Im}(z)=b=-2$ هتي

1.5.3 منجهيل (Complex) عدد جي گردان (Conjugate) جي تعريف لکو.

z جو گردان (Conjugate) کي $\bar{z}$ سان ظاهر ڪبو آهي.

جيڪڏهن $z=a+ib$ ته پوءِ $\bar{z}=a-ib$ يا $z=(a,b)$ ته پوءِ $\bar{z}=(a,-b)$

۽ جيڪڏهن $z=a-ib$ ته پوءِ $\bar{z}=a+ib$ يا $z=(a,-b)$ ته پوءِ $\bar{z}=(a,b)$

گردان (Conjugate) ۾ اسان صرف تصوراتي حصي جي نشاني تبديل ڪندا آهيون.

نوٽ: جيڪڏهن ڪو منجهيل (Complex) عدد z آهي ته $\overline{(\bar{z})}=z$

مثال هيٺين منجهيل (Complex) عددن جو گردان (Conjugate) معلوم ڪريو.

(i) $3+4i$ (ii) $\left(-\frac{4}{5},\frac{5}{4}\right)$

حل:

(i) فرض ڪريو ته $z_1=3+4i$

ته پوءِ $\bar{z}_1=\overline{3+4i}$

$\bar{z}_1=3-4i$

(ii) فرض ڪريو ته $z_2=\left(-\frac{4}{5},-\frac{5}{4}\right)$

$\bar{z}_2=\overline{\left(-\frac{4}{5},-\frac{5}{4}\right)}$

$\bar{z}_2=\left(-\frac{4}{5},\frac{5}{4}\right)$

1.5.4 منجهيل عددن (Complex Numbers) جي برابري واري صورت بابت ڄاڻ

ٻہ منجهيل عدد (Complex Numbers) ڪي برابر چئبو جيڪڏهن انهن ۾ هڪ جهڙا حقيقي ۽ تصوراتي حصا هجن جيئن

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad a+ib=c+id, \text{ تہ پوءِ } \quad a=c \text{ ۽ } b=d.$$

مثال 01 جيڪڏهن $x+3yi=16+9i$ تہ x ۽ y معلوم ڪريو.

حل: مليل آهي تہ

$$4x+3yi=16+9i \Rightarrow 4x=16 \text{ ۽ } 3y=9,$$

$$\Rightarrow \frac{4x}{4}=\frac{16}{4} \text{ ۽ } \frac{3y}{3}=\frac{9}{3}, \Rightarrow x=4 \text{ ۽ } y=3.$$

مثال 02 جيڪڏهن $x^2+iy^2=25+i36$ تہ x ۽ y معلوم ڪريو.

حل: مليل آهي تہ

$$x^2+y^2i=25+36i \Rightarrow x^2=25 \text{ ۽ } y^2=36,$$

$$x=\pm\sqrt{25} \text{ ۽ } y=\pm\sqrt{36} \Rightarrow x=\pm 5 \text{ ۽ } y=\pm 6$$

مشق 1.5

1. هيٺيان منجهيل عدد (Complex Numbers) کي ***a+ib*** واري نموني ۾ لکو.

(i) (1,2) (ii) (2,2) (iii) (3,4)

(iv) (−1,1) (v) (−2,2) (vi) (−3,4)

2. هيٺين منجهيل عددن (Complex Numbers) مان حقيقي ۽ تصوراتي حصن جي سڃاڻپ ڪريو.

(i) $1+2i$ (ii) $9i+4$ (iii) $(-5,6)$

(iv) $-1-i$ (v) $\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)i$ (vi) $2i-1$

3. هيٺين منجهيل عدد (Complex Numbers) جو گردان (Conjugate) معلوم ڪريو.

(i) $3+2i$ (ii) $(4,9)$ (iii) $(-1,1)$

(iv) $1-i$ (v) $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)i$ (vi) $3i+1$

4. هينين منجهيل (Complex Numbers) جي چڪاس ڪريو ته $(\overline{\overline{z}}) = z$

(i) $\left(\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{9}{10}\right)i$ (ii) $\left(-\frac{9}{11}\right)+\left(\frac{10}{9}\right)i$ (iii) $\frac{1}{2}-3i$

(iv) $2+3i$ (v) $-2-3\left(-\frac{10}{9}\right)i$ (vi) $4x+3iy$

5. x ۽ y جا ملھ لھو جڏھن:

(i) $x+yi=-5+5i$ (ii) $x^2+iy^2=\frac{16}{9}+\frac{9}{25}i$

(iii) $y^2+\frac{x}{3}i=121-\frac{9}{5}i$ (iv) $\frac{\sqrt{5}}{3}x-\frac{3}{\sqrt{2}}yi=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{9}i$

1.6 منجهيل عددن (Complex Numbers) تي بنيادي نشانيون (Basic Operations)

1.6.1 منجهيل عددن (Complex Numbers) تي بنيادي نشانيون استعمال ڪريو (جوڙ، ڪٽ، ضرب ۽ ونڊ)

(i) منجهيل عددن (Complex Numbers) جو جوڙ

فرض ڪريو ته $z_1= a + ib$ ۽ $z_2= c + id$ ڪي به ٻه منجهيل (Complex) عدد آهن.

جيئن $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ته پوءِ انهن جو جوڙ ٿيندو.

$$z_1+z_2 = (a + ib) + (c + id)$$
$$= (a+ c) +i (b + d) = (a + c, b + d).$$

ياد رکو ته:

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

مثال جيڪڏھن $z_1= 6+ 9i$ ۽ $z_2=-1 + 2i$ ته $z_1+ z_2$ جا ملھ لھو.

حل: مليل آهي ته $z_1= 6+ 9i = (6,9)$ ۽ $z_2=-1 + 2i = (-1,2)$

اساس ڪي خبر آهي ته $\mathbf{z_1 + z_2 = (a + c) +i(b+d) = (a + c, b + d)}$

$\therefore \quad z_1+ z_2 = (6, 9) + (-1, 2) = (6 - 1, 9 +2)$

$\Rightarrow \quad z_1+ z_2= (5, 11)$

(ii) منجهيل عددن (Complex Numbers) جي ڪٽ

فرض ڪريو ته $z_1= a + ib$ ۽ $z_2= c + id, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

ته پوءِ $z_1- z_2 = (a + ib) - (c + id)$

$$= (a - c) + i.(b - d) = (a - c, b - d)$$

ياد رکو ته:

$(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$

مثال جيڪڏھن $z_1= - 7 + 2i$ ۽ $z_2= 4 -9i$ ته $z_1- z_2$ جا ملھ لھو.

حل: مليل آهي ته $z_2= 4 -9i = (4,-9)$ ۽ $z_1= - 7 + 2i = (-7,2)$

اساس ڪي خبر آهي ته $\mathbf{z_1 - z_2 = (a - c, b - d)}$

$\therefore \quad z_1- z_2 = (- 7 - 4, 2+9)$

$\Rightarrow \quad z_1- z_2= (-11, 11)$

(iii) منجهيل عددن (Complex Numbers) جي ضرب

فرض ڪريو تہ $z_1 = a + ib$ ۽ $z_2 = c + id$ ڪي بہ ٻہ منجهيل عددآهن جنهن ۾ $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$$z_1 \cdot z_2 = (a+ib)(c+ib)$$
$$= c(a+ib) + di(a+ib)$$
$$= ac + bci + adi + bdi^2$$
$$= (ac-bd) + i(ad+bc) = (ac-bd, ad+bc) \quad \because i^2 = -1$$

ياد رکو تہ:

$(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

مثال جيڪڏهن $z_1 = 3+4i = (3,4)$ ۽ $z_2 = -3-4i = (-3,-4)$ تہ $z_1 z_2$ جي ضرب معلوم ڪريو.

حل: مليل آهي تہ $z_2 = -3-4i = (-3,-4)$ ۽ $z_1 = 3+4i = (3,4)$

اسان کي خبر آهي تہ $z_1 z_2 = (ac-bd, ad+bd)$

$$\therefore \quad z_1 z_2 = (3,4)\cdot(-3,-4)$$
$$\Rightarrow \quad z_1 z_2 = (-9+16, -12-12) = (7,-24)$$

(iv) منجهيل عددن (Complex Numbers) جي ونڊ

فرض ڪريو تہ $z_1 = a+ib = (a,b)$ ۽ $z_2 = c+id = (c,d)$ $z_2 \neq 0$, $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$

تہ z_1 ۽ z_2 جي ونڊ هن طرح لکبي.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id}$$
$$= \frac{a+ib}{c+id} \times \frac{c-id}{c-id}$$
$$= \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$
$$= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$
$$= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

ياد رکو تہ:

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

مثال 01 سادي صورت ۾ آڻيو. $\frac{2+3i}{4+2i}$

حل:

$$\frac{2+3i}{4+2i}$$
$$=\frac{2+3i}{4+2i}\times\frac{4-2i}{4-2i}$$
$$=\frac{(8+6)+i(12-4)}{(4)^2-(i2)^2}$$
$$=\frac{14+8i}{20}$$
$$=\frac{14}{20}+i\frac{8}{20}$$
$$=\frac{7}{10}+i\frac{4}{10}$$
$$=\left(\frac{7}{10},\frac{4}{10}\right)=\left(\frac{7}{10},\frac{2}{5}\right)$$ تنهنڪري سادي صورت ۾ آهي.

مثال 02 وند جو فارمولا استعمال ڪري منجهيل عدد (Complex Number) جي وند ڪريو.

$$(-1,3)\div(2,-4)$$

حل: فارمولا

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$
$$\frac{(-1,3)}{(2,-4)}=\left(\frac{(-1)(2)+(3)(-4)}{2^2+(-4)^2},\frac{(3)(2)-(-1)(-4)}{2^2+(-4)^2}\right)$$
$$=\left(\frac{-2-12}{4+16},\frac{6-4}{4+16}\right)$$
$$=\left(\frac{-14}{20},\frac{2}{20}\right)$$
$$=\left(\frac{-7}{10},\frac{1}{10}\right)$$

مشق 1.6

.1 هينين منجهيل عددن (Complex Numbers) کي ٻڌايل نشانين عمل ذريعي جي حل ڪريو.

(i) $(3,2)+(9,3)$ (ii) $\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$

(iii) $(15,12)-(10,-9)$ (iv) $\left(\frac{4}{5},\frac{8}{15}\right)-\left(\frac{4}{5},\frac{6}{10}\right)$

(v) $(1,2)(1,-2)$ (vi) $(4,-5)(5,-4)$

(vii) $(3,-7)\div(3,2)$ (viii) $(4,5)\div(2,-3)$

.2 سادي صورت ۾ آڻي، پنهنجو جواب $a+ib$ جي صورت ۾ لکو.

(i) $\frac{-1}{1+i}$ (ii) $(1+i)^4$ (iii) $\left(\frac{1}{1+i}\right)^2$ (iv) $(1+i)^8$

.3 جيڪڏهن $z_1=-4+6i$ ۽ $z_2=2\frac{1}{2}-2i$، چڪاس ڪريو ته

(i) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ (ii) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

.4 جيڪڏهن $z_1=1+i$ ۽ $z_2=1-i$، چڪاس ڪريو ته

(i) $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ (ii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

مشق ورجايو 1

.1 هينيان خال ڀريو.

(i) $\sqrt{5}$ جو ضربي ابتڙ آهي ___________.

(ii) $Q\cup Q'=$ ___________.

(iii) $\mathbb{R}$ ۾ جوڙلا ذاتي عنصر آهي ___________.

(iv) $5+(6+7)=(5+6)+$ ___________.

(v) $3+(-3)=$ ___________.

(vi) π ___________ عدد آهي.

(vii) $\frac{22}{7}$ هڪ ___________ عدد آهي.

(viii) $-3+5i$ جو گردان (Conjugate) ___________ آهي.

(ix) $2i(3-i)$ ۾ حقيقي حصو ___________ آهي.

(x) ٻن منجهيل عددن (Complex Numbers) (c,d) ۽ (a,b) جي ضرب جيڪا

$(a,b).(c.d)=$ ___________.

2. هيٺين بيانن کي غور سان پڙهو، درست بيانن لاءِ T تي گولو لڳايو. غلط بيانن لاءِ F تي گولو لڳايو.

(i)	ضرب جي تحت $\mathbb{R}$ بندش واري حالت ۾ آهي.	F / T
(ii)	جيڪڏهن $x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z$	F / T
(iii)	$\forall x,y,z \in \quad ,x(y-z)=xy-xz$	F / T
(iv)	هر ٻن تصوراتي عددن جي ضرب، حقيقي آهي.	F / T
(v)	ٻن حقيقي عددن جو جوڙ هڪ حقيقي عدد آهي.	F / T

3. درست جواب تي (✓) ٽڪ جو نشان لڳايو.

(i) $\sqrt{5}$ جو جوڙ جو ابتڙ آهي.

(a) $-\sqrt{5}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (c) $\sqrt{-5}$ (d) -5

(ii) $(5i).(-2i)=$ ___________.

(a) -10 (b) 10 (c) $-10i$ (d) $10i$

(iii) $3(5+7)=3.5+3.7$ ، خاصيت جو نالو آهي.

(a) متاواري (b) سنگت (c) ورهاست (d) بندش

(iv) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-2}=$ ___________.

(a) 2 (b) -2 (c) $2i$ (d) $-2i$

خلاصو

- حقيقي عددن جو سيٽ، ناطق ۽ غيرناطق جي سيٽ جو ميلاپ آهي جيئن $\mathbb{R} = Q \cup Q'$
- نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپورن جا بہ قسم آهن جيڪي نہ ورجندڙ ڏهائي اٽپور ۽ ورجندڙ ڏهائي اٽپور
- حقيقي عددن جون"+" ۽ "×" جي لحاظ سان خاصيتون

(i) بندش واري خاصيت

$a+b \in \mathbb{R}$ ۽ $ab \in \mathbb{R}, \forall a,b \in \mathbb{R}$

(ii) سنگت واري خاصيت

$a+(b+c)=(a+b)+c$ ۽ $a(bc)=(ab)c, \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

(iii) مٽاواري خاصيت

$a+b=b+a$ ۽ $ab=ba, \forall a,b \in \mathbb{R}$

(iv) ذاتي عنصر واري خاصيت (Identities Property)

$a+0=a=0+a$ ۽ $a\cdot 1=a=1\cdot a \ \forall a \in \mathbb{R}$

(v) ورهائجن واري خاصيت

$a(b+c)=ab+ac$ يا $(b+c)a=ba+ca, \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

(vi) ابتڙن واري خاصيت (Inverses Property)

$a+(-a)=0=-a+a$ ۽ $a \times \frac{1}{a}=1=\frac{1}{a}\times 1, \forall a, \in \mathbb{R} \ \wedge a \neq 0$

- عددي ليڪ: اهڙي ليڪ جيڪا حقيقي عددن کي ظاهر ڪرڻ لاءِ استعمال ٿئي ان کي عددي ليڪ چئبو آهي.

- مول ۽ مول جو پايو: $\sqrt[n]{a}$ ۾ $\sqrt{\ }$ کي مول جي نشاني ۽ a کي مول جو پايو چئبو آهي.

- سگهن جا قاعدا:

(i) جيڪڏهن $a^x \times a^y = a^{x+y}$ ته $x, y \in Z^+$ ۽ $a, b \in \mathbb{R}$

(ii) جيڪڏهن $x\ y \in Z^+$ ۽ $a \in \mathbb{R}$ ته پوءِ $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

(iii) $n \in Z^+$ ۽ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ته پوءِ $\left(a \times b\right)^n = a^n \times b^n$

(iv) $n \in Z^+$ ۽ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ته پوءِ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ جڏهن ته $b \neq 0$

- منجهيل عدد (Complex Numbers): $z = a + ib = \left(a, b\right)$ کي منجهيل عدد چئبو آهي.
جڏهن ته 'a' حقيقي حصو ۽ 'b' تصوراتي حصو آهي z جو ۽ $i = \sqrt{-1}$

- ٻن منجهيل عددن (Complex Numbers) تي عمل (نشانيون) جڏهن $z_2 = c + id$ ۽ $z_1 = a + ib$

$$z_1 + z_2 = \left(a + c\right) + i\left(b + d\right)$$

$$z_1 - z_2 = \left(a - c\right) + i\left(b - d\right)$$

$$z_1 z_2 = \left(ac - bd\right) + i\left(ad + bc\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + i\left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$