

یونٹ

10

پورو چوت چوکندا ۽ ڙڪندا (Parellelogram And Triangles)

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن یونٹ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تم:

هيئين سڌيانن کي شامل نتيجن سان گڏ سمجھي سگهندما ۽ انهن کي استعمال
کري لاڳاپيل حساب حل ڪندا.

هڪ پورو چوت چوکندي ۾ (a)

آمھون سامھون وارا پاسا يڪسان آهن.

آمھون سامھون واريون ڪنڊون يڪسان آهن.

اريڪ هڪ ٻئي کي اڏواهه ڪندا آهن.

جيڪڏهن ڪنهن چوکندي جا به آمھون سامھون وارا پاسا يڪسان ۽ پورو چوت

آهن ته اهو چوکنڊو پورو چوت چوکنڊو آهي.

جيڪڏهن ڪوليڪٽکر، ڪنهن ڙڪندي جي ٻن پاسن جي وچين ٿپڪن کي پاڻ ۾

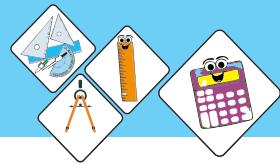
ملائي ٿو ته اهو ڙڪندي جي تئين پاسي جي پورو چوت هوندو ۽ ماپ ۾ انهي جي
اڻ جيترو هوندو.

ڙڪندي جا مڌيان هڪ ٿپڪي تي ملن ٿا ۽ اهو ٿپڪو هر مڌيان کي پورن ٿن حصن

۾ ورهائي ٿو.

جيڪڏهن تي يا ٿن کان وڌيڪ پورو چوت ليڪون هڪ ڪڀينڊڙ ليڪ کي يڪسان

ٿڪرن ۾ ورهائين ته، اهي ليڪون ڪنهن بي ڪڀينڊڙ ليڪ کي پڻ يڪسان ٿڪرن
ڪرن ۾ ورهائيينديون.



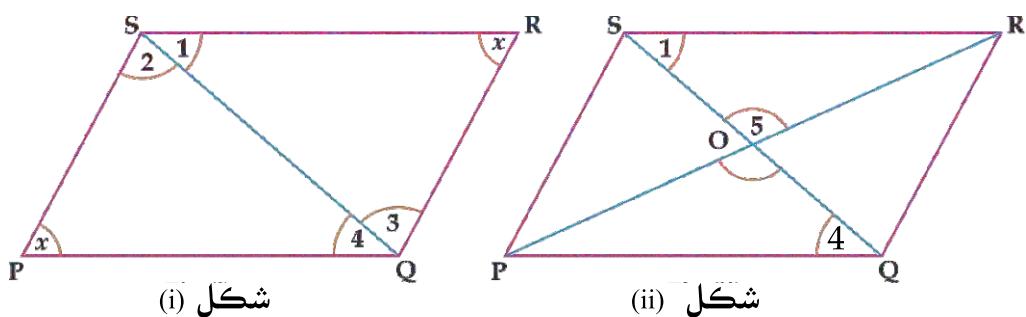
تارف:

گذريل ڪلاسن ۾ شاگردن ڪيترن ئي قسمن جي گهڻ پاسن واريون شڪلون جهڙڪ تکندا، پورو چوت چوڪنبو، چورس، مستطيل، رامبس ۽ تر پئيزير وغيره بابت سكييو ۽ ئاهيون آهن ۽ انهن جي پاسن ۽ ڪندين جي يڪسانيت بابت پڻ سكييو آهي. هن یونت ۾ اسان پورو چوت چوڪندي ۽ ٽڪنڊن سان تعلق رکندڙ سڌيانن بابت سڪنداسين.

10.1: پورو چوت چوڪندا ۽ ٽڪندا:

ستيان 10.1.1:

- پورو چوت چوڪندي ۾ آمهون سامهون پاسا يڪسان آهن.
- آمهون سامهون واريون ڪنڊون يڪسان آهن.
- اريب هڪ پئي کي ادواه ڪن ٿا.



مليل: $\overset{m}{\parallel} PQRS$

گهريل: (1) $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$; (2) $\overline{PS} \cong \overline{QR}$

$\angle P \cong \angle R$; $\angle S \cong \angle Q$

اريب هڪ پئي کي تٻكي O تي ادواه ڪن ٿيون . (3)

جوڙجڪ:

مليل شڪل (i) ۾ Q ۽ S کي ملايو.



ثابتی

سبب / دلیل	بيان
متبدل ڪندبون $\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$ جو ڙ جي خاصيت جو موضوع ڪندبن جو جو ڙ جو موضوع ساڳيو طريقو متئي ڏنل	شكل (i) هر (1) $\overline{SR} \parallel \overline{PQ}, \overline{SQ}$ $m\angle 1 = m\angle 4$ $m\angle 2 = m\angle 3$ $\therefore m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$ $\angle S \cong \angle Q$ يا $\angle P \cong \angle R$ ساڳي طرح تنهنکري ته آمهون سامهون ڪندبون يڪسان آهن
(1) هر ثابت ٿيل پنهي هر مشترڪ $A.S.A \cong A.S.A$	(2) $\Delta SPQ \leftrightarrow \Delta QRS$ $\angle 1 \cong \angle 4$ and $\angle 2 \cong \angle 3$ $\overline{SQ} \cong \overline{SQ}$ $\therefore \Delta SPQ \cong \Delta QRS$ $\therefore \overline{PQ} \cong \overline{RS}$ and $\overline{PS} \cong \overline{QR}$
(1) هر ثابت ٿيل چوٽي واريون مخالف ڪندبون . (2) هر متئي ثابت ٿيل $A.S.A \cong A.S.A$ تكنڊن جي يڪساننيت سان	ته آمهون سامهون پاسا يڪسان آهن شكل (3) $\Delta POQ \leftrightarrow \Delta ROS$ $\angle 1 \cong \angle 4$ $\angle POQ \cong \angle SOR$ $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$ $\Delta POQ \cong \Delta ROS$ $\overline{PO} \cong \overline{OR}$ and $\overline{OQ} \cong \overline{OS}$ اربيون هڪ ٻئي کي اواد ڪن ٿيون

Q.E.D



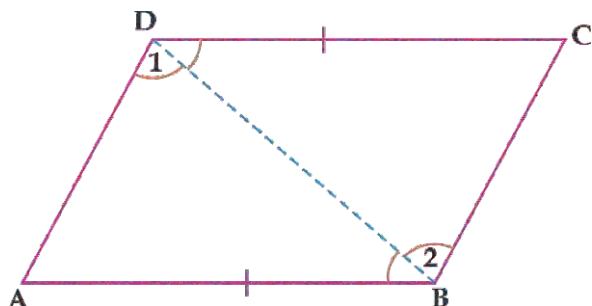


مشق 10.1

- .1 پورو چوت چوکندي جي ڪن به ٻن آمهون سامهون وارن پاسن جي وچين ٿيڪن
کي ملائيندڙ ليك انهيءِ جي بین پاسن سان پورو چوت هوندي آهي.
- .2 پورو چوت چوکندي جي ڪنهن به پاسي ته نهندڙ اندريون ڪندون سڀليمنٽري
هونديون آهن.
- .3 ثابت ڪريو ته پورو چوت چوکندي جي ساڳي پاسي وارين ٻن ڪندن جا ادواه
ڪندڙ، هڪ ٻئي کي گوني ڪندتني ڪپيندا.
- .4 جيڪڏهن چوکندي جون اريبون هڪ ٻئي کي ادواه ڪن ته، اهو پورو چوت
چوکنبو آهي.
- .5 پورو چوت چوکندي جي ڪنهن به ٻن پاسن جون مخالف ڪندون برابر آهن.

ستيان 10.1.2

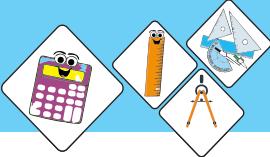
جيڪڏهن ڪنهن چوکندي جا به آمهون سامهون وارا پاسا يڪسان ۽ پورو چوت
آهن ته اهو چوکنبو پورو چوت چوکنبو آهي.



مليل: چوکندي $ABCD$, هر $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

گھريل: $ABCD$, هڪ چوکنبو آهي
جوڙجڪ: تپكا B ۽ D ملايو.




 ثابتی

سبب / دلیل	بیان
متبدل ڪندون	$\overline{BD} \cong \overline{AB} \parallel \overline{CD}$
ملييل (i)	$\angle ABD \cong \angle CBD$ ∵ $\therefore \Delta ADB \leftrightarrow \Delta CBD$
مٿي ثابت ٿيل (ii)	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (i)
مشترڪ (iii)	$\angle ABD \cong \angle CDB$ (ii) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (iii) $\Delta ADB \cong \Delta CBD$ ∵ $\angle 1 \cong \angle 2$ ∵
S.A.S \cong S.A.S	پڙ هي متبدل تکندا هن
ملييل متبدل ڪندون	$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ABCD is a $\parallel m$

Q.E.D


 مشق 10.2

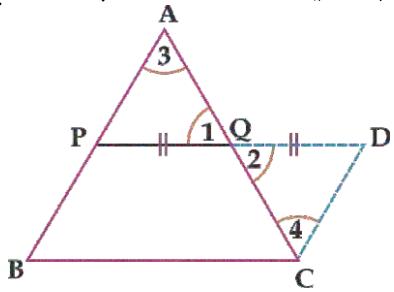
- .1 ثابت کرييو ته هڪ چو ڪندو، پورو چوت چو ڪندو هوندو، جيڪڏهن ان جون آمهون سامهون واريون ڪندون يڪسان آهن.
- .2 ثابت کرييو ته هڪ چو ڪندو، پورو چوت چو ڪندو هوندو، جيڪڏهن ان جون اريبوون هڪ ٻئي کي اذواذه ڪن ٿيون.
- .3 جيڪڏهن هڪ چو ڪندو پورو چوت چو ڪندو آهي، ته ان جون اريبوون به يڪسان تکندا ناهينديون.
- .4 جيڪڏهن ڪنهن چو ڪندبي جي هر پاسي کان ٺهندڙ ڪندون سڀليميٽري آهن ته اهو پورو چوت چو ڪندو هوندو.





ستيان 10.1.3

جيڪڏهن کو لٽک تکر ڪنهن چو ڪندبي جي ٻن پاسن جي وچين ٽٽکن کي پاڻ
۾ ملائي ٿو ته اهو ٽکنڊو جي تئين پاسي جي پورو چوت هوندو ۽ ماپ ۾ انهيءَ
جي اڏ جيترو هوندو.



مليل: ٽکنڊي $\triangle ABC$ ۾ پاسن \overline{AC} ۽ \overline{AB} جا وچيان $\triangle ABC$, \overline{PQ} ۽ P آهن، ته
ليڪ تکر انهن کي ملائي ٿو.

گھربل: $m\overline{PQ} = \frac{1}{2} m\overline{BC}$ ۽ $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$

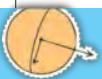
جو ڙجڪ: \overline{PQ} ٽي ٽبکو D اهڙي طرح ڪٺو جو $\overline{QD} \cong \overline{PQ}$. \overline{QD} کي ملائي.

ثابتی

سبب / دليل	بيان
<p>(i) چو ڙجڪ (ii) چو ٿي واريون ڪندبون (iii) مليل</p> <p>$\triangle s$ ٽکنڊن جي يڪساننيت سان مليل هر هڪ \overline{AP} جي يڪسان آهي. متتبادل ڪندن جي وصف مطابق متتبادل ڪندبون يڪسان آهن S جي سامهون پاسا پورو چوت ۽ يڪسان آهن</p> <p>$\overline{PQ} \cong \overline{PD}$ ساڳي ليڪ ٽي آهن ۽ $m\overline{PQ} = m\overline{QD} = \frac{1}{2} m\overline{PD}$</p>	<p>$\Delta APQ \leftrightarrow \Delta CDQ$ $\overline{PQ} \cong \overline{QD}$ (i) $\angle 1 \cong \angle 2$ (ii) $\overline{AQ} \cong \overline{QC}$ (iii)</p> <p>$\Delta APQ \cong \Delta CDQ \therefore$ $\overline{AP} \cong \overline{CD}$ ۽ $\angle 3 \cong \angle 4 \therefore$ $\overline{PB} \cong \overline{AP}$ پر $\overline{PB} \cong \overline{CD} \therefore$ $\angle 4$ جي $\angle s$ متتبادل آهن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ i.e. $\overline{PB} \parallel \overline{CD} \therefore$ $\overline{PBCD} \parallel \overline{m}$ آهي $\overline{PD} \parallel \overline{BC}$ ۽ $\overline{PD} \cong \overline{BC} \therefore$ $\overline{PQ} \parallel \overline{BC} \therefore$ $m\overline{PQ} = \frac{1}{2} m\overline{BC}$</p>

Q.E.D





مشق 10.3



جیکڏهن ڪوليڪ تڪرڪنهن ٽڪندي جي ٻن پاسن جي وچين ٽپڪن کي پاڻ هر ملائي ٿو، ته اهو ٽئي پاسي جي پورو چوت هوندو ۽ ان جي دڳهه 4 س. مر آهي ته ٽئي پاسي جي دڳهه ڪيتري ٿيندي.

ثابت ڪريو ته چوڪندي جي آمهون سامهون وارن پاسن جا اڌڪندڙ ليك تڪر هڪ بئي کي ادواه ڪن ٿا.

چوڪندي جي چئني پاسن جي وچين ٽپڪن کي ترتيبوار هڪ بئي سان ملائڻ جيڪو نديو چوڪنبو ٺهندو سو پورو چوت هوندو.

ثابت ڪريو ته ڪوليڪ تڪرٽڪندي جي هڪ پاسي جي وچئين ٽپڪي مان گذری ٻي پاسي جو پورو چوت ٿئي ته اهو ٽئين پاسي کي پڻ ادواه ڪندو.

ثابت ڪريو ته ٽڪندي جي ٿنهي پاسن جي وچين ٽپڪن کي پاڻ هر ملائڻ سان جيڪي چار ننديا ٽڪندا ٺهن ٿا. اهي پاڻ هر يڪسان هوندا.

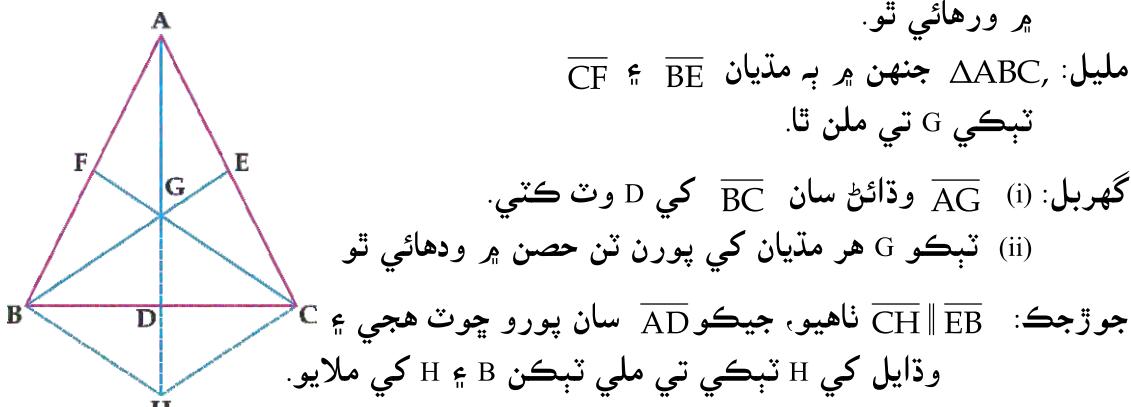
سديان 10.1.4

ٽڪندي جا مڌيان هڪ ٽپڪي تي ملن ٿا ۽ اهو ٽپڪو هر مڌيان کي پورن ٽن حصن هر ورهائي ٿو.

مليل: $\triangle ABC$, جنهن هر ٻه مڌيان $\overline{CF} \parallel \overline{BE}$ ۽ \overline{AD} ٿپڪي G تي ملن ٿا.

گهريل: (i) \overline{AG} وڌائڻ سان \overline{BC} کي D وٽ ڪتي.

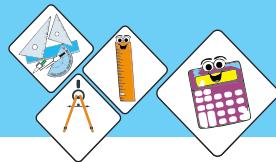
(ii) ٽپڪو G هر مڌيان کي پورن ٽن حصن هر ودهائي ٿو



جوڙجيڪ: $\overline{CH} \parallel \overline{EB}$ ٺاهيو، جيڪو $\overline{AD} \parallel \overline{EB}$ سان پورو چوت هجي ۽

وڌايل کي H ٽپڪي تي ملي ٽپڪن B ۽ H کي ملايو.



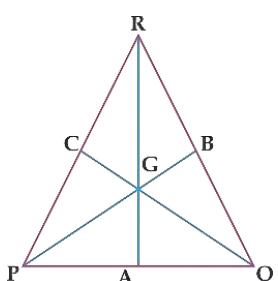


جیکڏهن تکندي چا ٿئي مديان \overline{QC} , \overline{PB} ۽ \overline{RA} بئکي G تي ملن ته ثابت ڪريو ته ستئراك به آهي ثابتني

سبب / دليل	بيان
مليل جو ڙجڪ سديان 10.1.3 جو عڪس	تکندي هر $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ $\overline{EG} \parallel \overline{CH}$ ۽ $\overline{AG} \cong \overline{GH}$ وري تکندي هر $\overline{AB} \cong \overline{BH}$ $\overline{AG} \cong \overline{GH}$ $\overline{AF} \cong \overline{FB}$ $\overline{FG} \parallel \overline{BH}$ تنهنڪري هڪ پورو چوت چو ڪندو آهي. جنهن جون اريبيون $\overline{BC} \cong \overline{GH}$ هڪ ٻئي کي ادواز ڪن ٿيون نه پوءِ $\overline{GD} \cong \overline{DH}$, $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ مديان \overline{AD} آهي $m\overline{AG} = m\overline{GH} = 2m\overline{GD}$ G تپکو \overline{AD} کي تن حصن هر ورهائيندڙ آهي ساڳي طرح اسان G کي \overline{BE} ۽ \overline{CF} کي تن حصن هر ورهائين وارو تپکو پڻ ثابت ڪري سگهون ٿا.
مشي ثابل ٿيل مليل سديان 10.1.3 جو عڪس	
سديان 10.1.1 مطابق	
مشي ثابت ٿيل آهي $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ $\overline{GD} \cong \overline{DH}$ $\Rightarrow m\overline{GH} = 2m\overline{GD}$ جيئن ته \overline{AG} ٻيڻو آهي \overline{GD} جو متئن طريقي مطابق	

Q.E.D

مشق 10.4

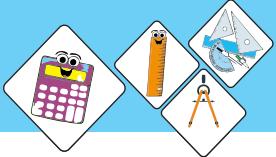


جیکڏهن تکندي جا ٿئي مديان يڪسان هجن ته ثابت ڪريو ته اهو تپور پاسو تکنبو آهي.

جیکڏهن تکندي \overline{PQR} جا ٿئي مديان \overline{RA} , \overline{QC} , \overline{PB} ۽ \overline{GR} بئکي G تي ملن ته ثابت ڪريو ته G سينترائڊ آهي

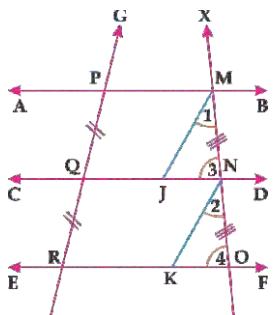
مليل شكل هر \overline{GR} جي ديجهه 2 س. مر آهي ته پوءِ \overline{AG} . جي ديجهه معلوم ڪريو.





10.1.5 سدیان

جیکڏهن ٿي يا ٿن کان وڌيڪ پورو چوت ليڪون، هڪ ڪپيندڙ ليڪ کي يڪسان ٿکرن ۾ ورهائين ته اهي ليڪون ڪنهن بي ڪپيندڙ ليڪ کي پڻ يڪسان ٿکرن ۾ ورهائينديون.



مليل: $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{EF}$ ۽ \overleftrightarrow{GH} لیک اهڙي طرح ٿيڪن P , Q ۽ R تي

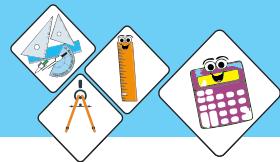
گھر بل: $\overline{NM} \cong \overline{NO}$

جوڙ جڪ: \overleftrightarrow{GH} لikon \overleftrightarrow{NK} ميں $J \leftrightarrow K$ تي ملن.

ثابتی

<p>سبب / دلیل</p> <p>$\leftrightarrow \leftrightarrow$ ملیل $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ جو ڙ جڪ</p> <p>آمھون سامھون وارا پاسا پورو چوت آهن $\overline{QR} \parallel \overline{NK}$ and $\overline{QN} \parallel \overline{RK}$</p> <p>ملیل</p> <p>مساوات جي عبوری خاصیت هر هڪ \overline{GH} جي پورو چوت آهي نسبتی ڪندون</p> <p>(i) مٿي ثابت ٿيل (ii) نسبتی ڪندون \parallel ليڪن جون (iii) مٿي ثابت ٿيل</p> <p>A.A.S \cong A.S.A</p> <p>تكندين جي يڪسانیت مطابق</p>	<p>بيان</p> <p>چو ڪندي $\overline{PM} \parallel \overline{QJ}$ $\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{MJ}$</p> <p>$\overline{PM} \parallel \overline{QJ}$ is a \parallel^m $\therefore \overline{PQ} \cong \overline{MJ}$</p> <p>PQJM هڪ پورو چوت چو ڪندو آهي ساڳي طرح QRKN به هڪ پورو چوت چو ڪندو آهي.</p> <p>$\overline{QR} \cong \overline{NK}$ \therefore $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$ پر \therefore $\overline{MJ} \cong \overline{NK}$ \therefore</p> <p>تنهنڪري $\overline{MJ} \parallel \overline{NK}$ $\angle 1 \cong \angle 2$ \therefore $\Delta MNJ \leftrightarrow \Delta NOK$ هاڻ $\angle 1 \cong \angle 2$ (i) $\angle 3 \cong \angle 4$ (ii)</p> <p>$\overline{MJ} \cong \overline{NK}$ (iii)</p> <p>$\Delta MNJ \cong \Delta NOK$ \therefore $\overline{MN} \cong \overline{NO}$ \therefore</p>
--	---

O.E.D



مشق 10.5



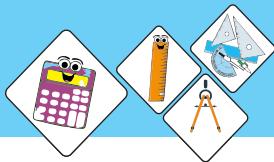
کنهن تکندي جي پاسن جي وچين تېکن کي ملائٹ سان نهندڙ نئين تکندي جون ڪندون، اصولوکي تکندي جي مساوي هونديون آهن.
ترئپينريمر جي ٻنهي غير پورو چوت پاسن جي وچين تېکن کي ملائيندڙ ليڪ ٿکر ٻين ٻنهي پاسن سان پورو چوت به آهي ۽ ماپ ۾ انهن جي جوڙ جي اڏ جيترو آهي.
کنهن تکندي جي چوٽيءَ کان، پايو تي نکتل هر ليڪ ٿکر کي ٻين پاسن جي وچين تېکن کي ملائيندڙ ليڪ ٿکر کي پورا به ٿکر ڪري ٿي.

ورجاييل مشق 10

حال پيريو.

- (i) پورو چوت چوکندي ۾ آمهون سامهون واراپاسا _____ آهن
- (ii) پورو چوت چوکندي ۾ آمهون سامهون واريون ڪندون _____ آهن
- (iii) تکندي ۾ مڌيان _____ آهن
- (iv) پورو چوت چوکندي جو ارييون هڪ ٻئي کي _____ ڪن ٿيون
- (v) پورو چوت چوکندي جو نسبتي ڪندون _____ آهن
- (vi) تکندي جا مڌيان _____ آهن
- (vii) چوکندي جي اندرин ڪندن جي ماپ جو جوڙ برابر _____ آهي
صحيح جواب تي تڪ لڳايو.
- .2
- (i) چورس جون ارييون پاڻ ۾ هڪ ٻي سان _____ آهن
- (a) عمود
- (b) غير يڪسان
- (c) يڪسان
- (d) ٻئي (a) ۽ (c)
- (ii) چوکندي جي اندرin ڪندن جي ماپن جو جوڙ _____ آهي
4 گوني ڪندون (a)
2 گوني ڪندون (b)
3 گوني ڪندون (c)
کو به نم (d)





تکندي ABC ه $\angle AC$ و $\angle AB$ کي ملائيندز ليك تکر برابر آهي (iii)

$$\frac{\text{س.م جي ته}}{\text{س.م BC}} = 3.5$$

$$\frac{5.5}{\text{س.م}} = 4.5 \quad \text{(a)}$$

$$\frac{7}{\text{س.م}} = 6 \quad \text{(c)}$$

$$\frac{6}{\text{س.م}} = 4.5 \quad \text{(a)}$$

جا به متیان $m\overline{GD} = 1.7$ پاٹ کي تکي G تي کپین ٿا. جيڪڏهن س.م (iv)

$$\frac{\text{ته پوءی}}{mAG} = mAG$$

$$\frac{8.85}{\text{س.م}} = 2.7 \quad \text{(a)}$$

$$\frac{5.1}{\text{س.م}} = 3.4 \quad \text{(c)}$$

پوروچوت چوکندي ABCD جون ڪندون $\angle C$ جي ماپن جو جوڑ 130 آهي ته (v)

$$\frac{m\angle C}{پوءی}$$

$$\frac{65^0}{\text{کابه نه}} = 25^0 \quad \text{(a)}$$

به نه

جيڪڏهن چوکندي جي آمهون سامهون ڪندن جي ماپ برابر آهي ۽ انهن مان کابه (vi)

گوني ڪندن آهي ته چوکنبو آهي

چورس (a)

پورو چوت چوکنبو (b)

ترئپيريم (c)

مستطيل (d)

سيينترائيد هك مشترك تکو آهي کات جو (vii)

تکندي جا متیان (a)

پورو چوت چوکندي جون ارييون (b)

تمدد (c)

تکندي جي ڪند جا اڌڪندز (d)

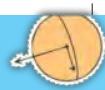
ڪنهن تکندي جي متیان تکو آهي (viii)

چوتيء کان هك جيٽري مفاصلي تي (a)

پاسي جي وچ واري نقطي کان هك جيٽري مفاصلي تي (b)

عمود کان هك جيٽري مفاصلي تي (c)

کو به نه (d)



خلاصو

- پورو چوت چوکندي جا آمهون سامهون وارا پاسا يكسان هوندا آهن.
- پورو چوت چوکندي جون آمهون سامهون واريون ڪندون يكسان هونديون آهن.
- سپليمييٽري ڪندون لاڳيتين ڪندن جي خاصيت رکن ٿيون.
- پورو چوت چوکندي جون ارييون هڪ ٻئي کي اڏواڻ ڪن ٿيون ۽ هر هڪ اريب ان کي ٻن يكسان ڦڪنن ۾ ورهائي ٿي.
- جيڪڏهن پورو چوت چوکندي جون گوني ڪندون هجن ته هي سڀ ڪندون گوني ٿينديون.
- پورو چوت چوکندي جون ارييون، ان کي چئن يكسان ڦڪنن ۾ تقسيم ڪن ٿيون.
- پورو چوت چوکندي جي ڪندن جو جوڑ 360° آهي.
- ڦڪندي جي ٻاهرин ڪندن جو جوڙ 180° آهي.
- ڦڪندي جي ٻاهرин ڪندن جو جوڙ 360° آهي.
- جيڪڏهن ٿي يا تن کان وڌيڪ پورو چوت ليڪون هڪ ڪپينڊڙ ليك کي يكسان ٿکرن ۾ ورهائين ته ، اهي ليڪون ڪنهن بي ڪپينڊڙ ليك کي پڻ يكسان ٿکرن ڪرن ۾ ورهائينديون.
- ڦڪندي جا مڌيان هڪ ٽبکي ٿي ملن ٿا ۽ اهو ٽبکو هر مڌيان کي پورن تن حصن ۾ ورهائي ٿو.
- جيڪڏهن ڪوليڪ ٿکر، ڪنهن ڦڪندي جي ٻن پاسن جي وچين ٽبکن کي پاڻ ۾ ملائي ٿو ته اهو ڦڪندي جي ٿئين پاسي جي پورو چوت هوندو ۽ ماپ ۾ انهيءجي اڻ جيٽرو هوندو.

