يونٽ 11

ليڪ جا اڌ ڪندڙ ۽ ڪنڊ جا اڌ ڪندڙ

Line Bisectors and Angle Bisectors

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- هيٺين سڌيانن کي شامل نتيجن سان گڏ سمجهي سگهندا ۽ انهن کي استعمال ڪري لاڳاپيل حساب حل ڪندا.
- ڪنهن ليڪ ٽڪر جي عمودي اڌڪندڙ تي موجود ٽپڪو انهيءَ ليڪ ٽڪر جي ٻنهي ڇيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو آهي.
- ليڪ ٽڪر تي ڪو ٻ ٽپڪو جيڪو ان جي ٻنهي ڇيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي، اهو ان جو عمودي اڌڪندڙ تي هوندو آهي.
- ٽڪندي جي پاسن جا عمودي اڌڪندڙ ساڳئي ٽپڪي مان گذرندا آهن
- ڪنهن ٻ ڪنڊ کي اڌواڌ ڪندڙ ليڪ تي موجود ٽپڪو انهيءَ ڪنڊ جي ٻانهن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوند آهي.
- ڪنهن ٻ ڪنڊ ۾ موجود اندر ٽپڪو ان جي ٻانهن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هجي تہ اهو ان جي اڌڪندڙ تي هوندو آهي.
- ٽڪندي جي ڪنڊن کي اڌ ڪندڙ ساڳي ٽپڪي گذرندا آهن.

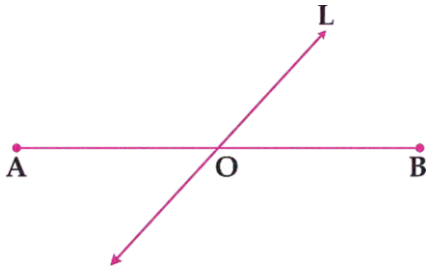
تعارف

اسان هتي ليک ٽکر ۽ ڪنڊ جي اڀ ڪنڊڙ سان تعلق رکندڙ سڌيان ۽ حساب جي مطالعو ڪنداسين.

وصول:

(i) ليک ٽکر جا اڀ ڪنڊڙ

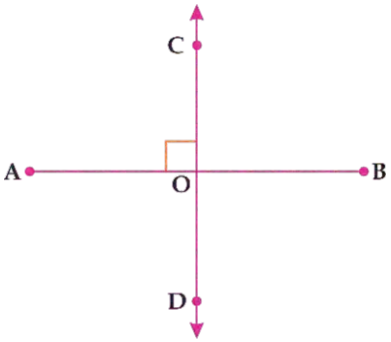
هڪ ليک، شعاع يا ٽکرو، بي ليک ٽکر کي ٻن برابر حصن ۾ ورهائي ٿو ان کي اڀ ڪنڊڙ چئبو آهي.



مثال طور: مليل شڪل ۾ ليک 'L'، $\overline{AB}$ ليک ٽکري جو اڀ ڪنڊڙ آهي جيڪو $\overline{AB}$ جي وچ واري ٽپڪي 'O' مان گذري ٿو.

(ii) ليک ٽکر جو عمودي اڀ ڪنڊڙ

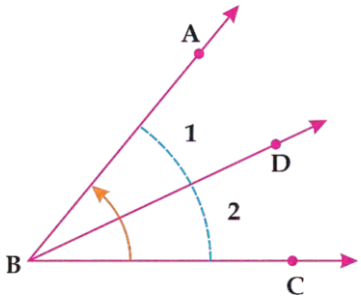
هڪ ليک جيڪا ليک ٽکر کي 90 درجن تي ٻن حصن ۾ اڀ ڪري ٿا ان کي ليک ٽکر جو عمودي اڀ ڪنڊڙ چئبو آهي.



مثال طور: ڏنل شڪل ۾ $\overleftrightarrow{CD}$ ليک ٽکر AB جو عمود آهي جيڪو وچين ٽپڪي 'O' مان گذري ٿو. ٿ پوءِ $\overline{CD}$ کي $\overline{AB}$ جوعمودي اڀ ڪنڊڙ چئبو آهي. مليل شڪل ۾ ليک $\overleftrightarrow{CD}$ ليک ٽکر $\overline{AB}$ جو عمودي اڀ ڪنڊڙ آهي.

(iii) ڪنڊ جو اڀ ڪنڊڙ

هڪ ليک، شعاع يا ليک ٽکر جڏهن ڪنهن ڪنڊڪي ٻن برابر ڪنڊن ۾ ورهائي ٿا ان کي ڪنڊ جو اڀ ڪنڊڙ چئبو آهي.

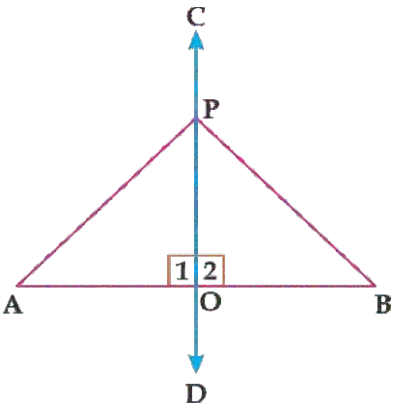


ڏنل شڪل ۾ $\angle CBA$ ڪنڊ جو اڀ ڪنڊڙ $\overrightarrow{BD}$ آهي، جيڪو ان ڪنڊ کي ٻن پورن ڪنڊن $\angle 1$ ۽ $\angle 2$ ۾ ورهائي ٿو. جيئن $\angle 2 \cong \angle 1$

سڌيان 11.1.1

ثابت ڪريو تہ:

ڪنهن ليڪ ٽڪر جي عمودي اڌڪندڙ تي موجود ٽپڪو انهيءَ ليڪ ٽڪر جي ٻنهي چيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو آهي.



مليل: $\overleftrightarrow{CD}$ عمودي اڌڪندڙ آهي $\overline{AB}$ جو جيڪو ان کي پوري وچ "O" تي ڪپي ٿو
P کو ٻہ ٽپڪو $\overleftrightarrow{CD}$ تي آهي.

گهربل: $\overline{AP} \cong \overline{BP}$، يعني P ٽپڪو A ۽ B کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.

ثابتي:

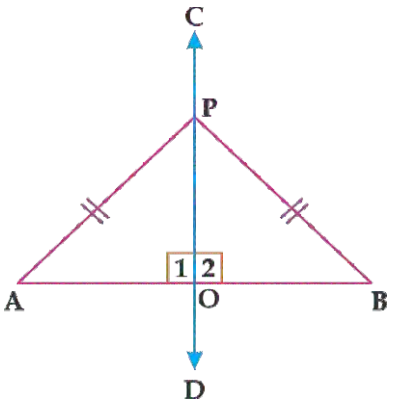
بيان	سبب / دليل
$\Delta AOP \leftrightarrow \Delta BOP$ ۾	
(i) $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	(i) مليل ("O" وچ وارو ٽپڪو آهي)
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) مليل ($\overline{CD} \perp \overline{AB}$ "O" ٽپڪي وٽ)
(iii) $\overline{PO} \cong \overline{PO}$	(iii) مشترڪ
$\therefore \Delta AOP \leftrightarrow \Delta BOP$	S.A.S موضوع
$\therefore \overline{AP} \cong \overline{BP}$	$\overline{AP} \cong \overline{BP}$
مگر ٽپڪو P ليڪ $\overleftrightarrow{CD}$ تي ڪو ٻہ ٽپڪو آهي ساڳي طرح $\overleftrightarrow{CD}$ تي ورتل ڪو ٻہ ٽپڪو ٻن ٽپڪن A ۽ B کان هڪ جيترو پري هوندو تنهنڪري ليڪ ٽڪر جي عمودي اڌڪندڙ تي موجود هر هڪ ٽپڪو انهيءَ جي چيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو.	ΔS. تڪندن جي يڪسانيت مطابق فرضي ورتل مٿيا قدم ورجائڻ سان

Q.E.D

سڌيان 11.1.2

ثابت ڪريو تہ:

ليڪ ٽڪر تي ڪو بہ ٽپڪو جيڪو ان جي ٻنهي ڇيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي تہ اهو ان جو عمودي اڌکنڊڙ هوندو آهي.



مليل: A ۽ B ۾ مشتمل ٽپڪا آهن ۽ P حرڪت ڪندڙ ٽپڪو آهي جيئن $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

گهربل: P عمودي اڌکنڊڙ آهي $\overline{AB}$ جو

جوڙجڪ: $\overline{AB}$ کي "O" تي ٻن برابر حصن ۾ ڪپيو ۽ P ۽ O کي پاڻ ۾ ملايو.

ثابتي:

بيان	Reasons
$\Delta POA \leftrightarrow \Delta POB$ ۾	
(i) $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	(i) جوڙجڪ
(ii) $\overline{PA} \cong \overline{PB}$	(ii) مليل
(iii) $\overline{PO} \cong \overline{PO}$	(iii) مشترڪ
$\Delta POA \cong \Delta BOP$	پ . ڪ . پ موضوع ٽڪنڊن جي يڪسانيت مطابق
$\angle 1 \cong \angle 2$	Δs هڪ ليڪ آهي (سپليمنٽ جو موضوع) جيڪڏهن ٻہ سپليمنٽري ڪنڊون ماپ ۾ برابر آهن تہ هر هڪ گوني ڪنڊ آهي.
پر $\angle 1$ ۽ $\angle 2$ سپليمنٽري ڪنڊون آهن	
هر هڪ $\angle 2$ ۽ $\angle 1$ گوني ڪنڊ آهي	
تنهنڪري $\overline{PO}$ عمودي اڌکنڊڙ آهي $\overline{AB}$ جو تہ	$\overline{PO} \perp \overline{AB}$ ۽ $\overline{AO} \cong \overline{BO}$
پوءِ هر ٽپڪو جيڪو A ۽ B کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو اهو $\overline{AB}$ جو عمودي اڌکنڊڙ ٿيندو.	اسان مٿيان قدم ورجائڻ سان ان کي ثابت ڪري سگهون ٿا.

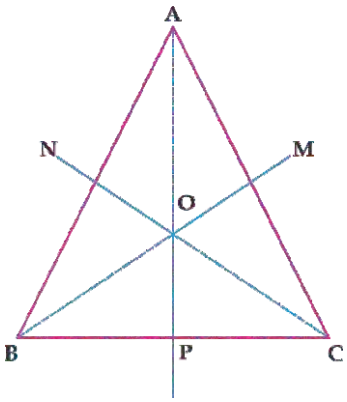
Q.E.D

مشق 11.1

1. ثابت ڪريو تہ ڪنهن ٽڪنڊي جي ڪن ۾ ٻن پاسن جا عمودي اڌ ڪندڙ هڪ اهڙي ٽپڪي تي ملن ٿا جيڪو سندس ٽنهي ڇيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.
2. ثابت ڪريو تہ گول جو مرڪز، زهہ جي عمودي اڌڪندڙن تي آهي.
3. ٽن غير هم ليڪ ٽپڪن مان گذرندڙ گول جو مرڪز ڪٿي ٽيندو ۽ ڇو.
4. جيڪڏهن ٻہ گول پاڻ ۾ A ۽ B ٽپڪن تي ڪپين، پوءِ ثابت ڪريو تہ انهن جي مرڪز مان گذرندڙ ليڪ جو عمودي اڌڪندڙ ٽيندي.
5. تي مارڪيٽون A, B ۽ C هڪ ليڪ تي نہ آهن. ڪاروباري شخص اهڙي جڳهہ تي مسجد ٺاهڻ چاهي ٿو، جيڪا هنن مارڪيٽن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هجي، مسجد جي جڳهہ طئہ ڪرڻ کان پوءِ ثابت ڪريو تہ هئي جڳهہ ٽنهي مارڪيٽن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.

سڌيان 11.1.3:

ثابت ڪريو ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي ساڳئي ٽپڪي‌مان گزرندڙ آهن



مليل: ٽڪنڊو ABC

گهربل: ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي اڌڪندڙ ٽپڪي‌مان گزرندڙ آهن

جوڙجڪ: $\overline{AC}$ ۽ $\overline{AB}$ جا عمودي اڌڪندڙ $\overline{MO}$ ۽ $\overline{NO}$ ٺاهيو جيڪي ٽپڪي "O" تي ملن ٿا.

ڪي ٽپڪي P اڌ ڪريو.

$\overline{OP}$, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ۽ ڪيو.

ثابتي:

بيان	سبب / دليل
$\overline{NO}$، $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ آهي.	جوڙجڪ
$\therefore \overline{AO} \cong \overline{OB}$ ساڳئيطرح سان $\overline{AO} \cong \overline{OC}$ $\therefore \overline{OB} \cong \overline{OC}$	$\overline{MO}$ عمودي اڌ ڪندڙ آهي $\overline{AC}$ جو هر هڪ يڪسان آهي $\overline{AO}$ جي.
P ليڪ ٽڪر $\overline{BC}$ جي وچ وارو ٽپڪو آهي.	جوڙجڪ
تنهنڪري $\overline{OP}$ عمودي اڌ ڪندڙ آهي $\overline{BC}$ جو.	سڌيان 11.1.2 مطابق
هتي ٽڪندي جي پاسن جا عمودي اڌ ڪندڙ ساڳي ٽپڪي مان گذرن ٿا.	انهن مان هرهڪ ساڳئي ٽپڪي تي ملن ٿا.

Q.E.D

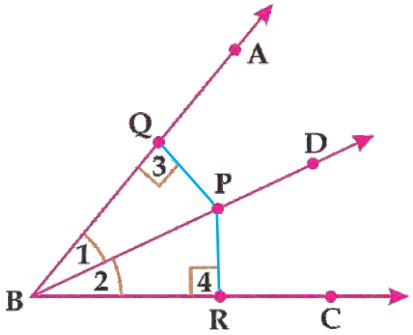
مشق 11.2

1. ثابت ڪريو ته سوڙهيٽڪنڊيجو گهيريندڙ مرڪز ٽڪنڊي جي اندرين ۾ هوندو.
2. ثابت ڪريو ته ٻيپور پاسي ٽرئيپزيم جي چئني پاسن جا عمودي اڌ ڪندڙ هم ٽپڪي تي ملندا
3. ثابت ڪريو ته ٽڪنڊي جا عمود هم ٽپڪي تي ملندا

11.1.4 سڌيان

ثابت ڪريو ته

ڪنهن به ڪنڊڪي اڌواڌ ڪندڙ ليڪ تي موجود ٽپڪو، انهي ڪنڊ جي بانهن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.



مليل: $\overline{BD}$ ڪنڊ $\angle ABC$ جو اڏواڙ ڪنڊڙ آهي.

P، $\overline{BD}$ تي ڪنهن ڪوبه ٽپڪو آهي ۽

$\overline{PQ}$ ۽ $\overline{PR}$ ترتيبوار، پانهن $\overline{BA}$ ۽ $\overline{BC}$

تي عمود آهن.

گهربل:

$\overline{PQ} = \overline{PR}$ (يعني ٽپڪو P، $\overline{BA}$ ۽ $\overline{BC}$ کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي)

ثابتي:

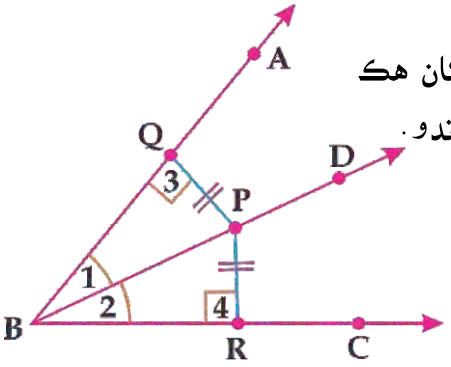
بيان	Reasons
$\Delta PQB \leftrightarrow \Delta PRB$ ھ	
$\angle 3 \cong \angle 4$ (i)	(i) هڪ گوني ڪنڊ آهي.
$\angle 1 \cong \angle 2$ (ii)	(ii) مليل ($\overline{BD}$ اڏ ڪنڊڙ آهي)
$\overline{BP} \cong \overline{BP}$ (iii)	(iii) مشترڪ
$\Delta PQB \cong \Delta PRB$	A.A.S≅A.A.S
$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$	
يعني P ٽپڪو، $\overline{BA}$ ۽ $\overline{BC}$ کان هڪجيتري مفاصلي تي آهي.	ٽڪنڊن جي يڪسانيت مطابق Δs

Q.E.D

11.1.5 سڌيان

ثابت ڪريو ته

ڪنهن به ڪنڊ ھ موجود اندر ٽپڪو، ان جي پانهن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هجي ته اهوان جو اڏ ڪنڊڙ تي هوندو.



مليل: $\overline{BD}$ تي موجود ٽپڪو P، ڪنڊ $\angle ABC$

جي پانهن $\overrightarrow{AB}$ ۽ $\overrightarrow{BC}$ کان هڪ جيتري

مفاصلي تي آهي.

$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ ۽ $\overline{PQ} \perp \overline{BA}$ ۽ $\overline{PR} \perp \overline{BC}$.

گهربل: يعني $\overrightarrow{BD}$ ڪنڊ $\angle ABC$ جو اڏواڙ ڪنڊڙ آهي.

ثابتي:

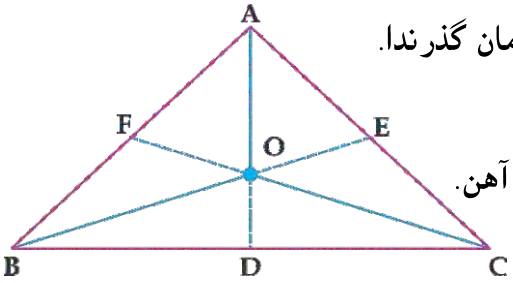
بيان	Reasons
ΔPQB ↔ ΔPRB هڪ	گوني ڪنڊ جي ٽڪنڊن نسبت Δs
(i) ∠3 ≅ ∠4	(i) هڪ گوني ڪنڊ آهي.
(ii) $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$	(ii) مليل
(iii) $\overline{BP} \cong \overline{BP}$	(iii) مشترڪ هيپاٽينيوز
ΔPQB ≅ ΔPRB H.S ≅ H.S	گوني ڪنڊ ٽڪنڊي هڪ
∠1 ≅ ∠2, ٽڪنڊن جي يڪسانيت سان	
يعني $\overrightarrow{BD}$، ڪنڊ ∠ABC جو اڌواڌ ڪنڊ آهي.	

Q.E.D

11.1.6 سڌيان

ثابت ڪريو ته

ٽڪنڊي جي ڪنڊن کي اڌ ڪنڊ ساڳي ٽپڪي مان گذرندا.



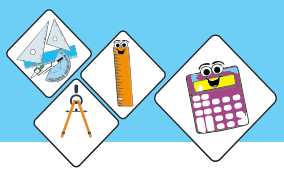
مليل: ٽڪنڊي ΔABC هڪ

$\overline{BE}$ ۽ $\overline{BF}$ ڪنڊن ∠C ۽ ∠B جا اڌ ڪنڊ آهن.

جيڪي هڪ ٻئي کي O ٽپڪي تي ملن ٿا.

گهربل: ∠A, ∠B ۽ ∠C جا اڌ ڪنڊ هم ٽپڪي تي ملندا.

جوڙجڪ: $\overline{OD} \perp \overline{BC}$. ۽ $\overline{OF} \perp \overline{AB}$ تي ناهيو.



ثابتي:

بيان	سبب / دليل
مطابقت ۾	
(i) $\overline{OD} \cong \overline{OF}$	ڪنڊ تي اڌ ڪنڊ ٽيڪو، ان جي ٻانهن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.
(ii) $\overline{OD} \cong \overline{OE}$	
(iii) $\overline{OE} \cong \overline{OF}$	(i) ۽ (ii) مان
تنهنڪري ٽيڪو O ∠A اڌ ڪنڊ تي آهي.	سنڌيان 11.5
ٽيڪو O ∠B ۽ ∠C جي اڌ ڪنڊ تي پڻ آهي.	مليل
تنهنڪري ∠A، ∠B ۽ ∠C جا اڌ ڪنڊ هڪ ٽيڪي تي هوندا آهن.	

Q.E.D

مشق 11.3

1. ٻٽ ٻيور پاسي ٽڪندن جا بنياد مشترڪ آهن، ثابت ڪريو ته انهن جي چوٽين کي ملائيندڙ ليڪ، مشترڪ بنياد کي گوني ڪنڊ تي اڌواڌ ڪندي.
2. ٽڪندي جي ڪنڊن جا اڌواڌ ڪنڊ آمهون سامهون وارن پاسن کي ٻه اڌواڌ ڪن ٿا ته. ثابت ڪريو ته ٽڪندو ٻيور پاسوٽڪندو آهي.
3. ٻيور پاسي ٽڪندي ABC ۾ $m\overline{AB} = m\overline{AC}$ آهي. $\Delta ABC,$ ثابت ڪريو ته B ۽ C چوٽين کان سامهون پاسن سان ٺهندڙ عمود برابر آهن.

ورجايل مشق 11

1. ثابت ڪريو تہ جيڪڏهن ٽڪنڊي جا ٻہ عمود يڪسان آهن تہ ٽڪنڊو ٻپور پاسو آهي.
2. ثابت ڪريو تہ ٽڪنڊي جو اندرپو ٽبڪو ٽنهي پاسن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي، اهو ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪنڊن جي اڏكندڙ تي هوندو.
3. هيٺين بيانن جي سامهون درست لاءِ (T) ۽ غلط لاءِ (F) لکو.

(i) پاسن جو اڏواڏ ڪرڻ جو مطلب آهي تي اسان ڏنل پاسي کي ٻن حصن ۾ تقسيم ڪيو.

(ii) ٻپور پاسي گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي بنياد جي هرهڪ ڪنڊ 45 جي آهي.

(iii) يڪسان پاسن وارن ٽڪنڊن جون ڪنڊون پڻ يڪسان هونديون.

4. صحيح جواب جي چونڊ ڪريو.

(i) سوڙهي ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ _____ سوڙهيون ڪنڊون آهن.

(a) هڪ (b) ٻہ (c) ٽي (d) ڪا ٻہ نہ

(ii) ليڪ ٽڪر تي هڪ ٽبڪو جيڪو ان جي ٻنهي ڇيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي اهو ان جو _____ آهي.

(a) عمودي اڏ ڪندڙ (b) عمودي

(c) مرڪز (d) وچ وارو ٽبڪو

(iii) ڪنهن سوڙهي ڪنڊ ٽڪنڊي جي پاسن جو _____ ٽڪنڊي جي اندر هڪ ٻئي کي ڪپيندو.

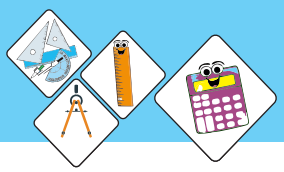
(a) عمود (b) عمودي اڏ ڪندڙ

(c) ويڪري (d) سوڙهي

(iv) ٽڪنڊي جي ڪنڊن جا اڏ ڪندڙ آهن _____.

(a) هم ٽبڪيتي (b) هموارا

(c) ڪو نہ ڪپيندا (d) اڻ برابر



خلاصو

- ليڪ ٽڪر جو اڌواڌ ڪندڙ، ليڪ ٽڪر کي ٻن برابر حصن ۾ تقسيم ڪندو آهي.
- عمودي اڌ ڪندڙ ليڪ ٽڪر کي 90 تي ٻن برابر حصن ۾ ڪپين ٿا.
- ڪنهن ليڪ جي عمودي اڌ ڪندڙ تي موجود ٽپڪو، انهيءَ ليڪ ٽڪر جي ٻنهي ڇيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو آهي.
- ليڪ ٽڪر تي ڪو به ٽپڪو جيڪو ان جي ٻنهي ڇيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي، اهو ان جو عمودي اڌ ڪندڙ تي هوندو .
- ٽڪندي جي پاسن جا عمودي اڌ ڪندڙ هم ٽپڪن تي ملن ٿا.
- ڪنهن به ڪنڊ کي اڌ و اڌ ڪندڙ ليڪ تي موجود ٽپڪو انهيءَ ڪنڊ جي ٻانهن تي هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.
- ڪنهن به ڪنڊ ۾ موجود اندريون ٽپڪو، ان جي ٻانهن کي هڪ جيتري مفاصلي تي هجي تہ اهو ان جو اڌ ڪندڙ تي آهي.
- ٽڪندي جي ڪنڊن کي اڌ ڪندڙ ساڳي ٽپڪي مان گذرندا آهن.