يونٽ 12

ٽڪنڊڻ جا پاسا ۽ ڪنڊون

SIDES AND ANGLES OF A TRAINGLE

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي مطالعي کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جا ٻہ پاسا ڏيگهہ ۾ برابر نہ هجن تہ وڏيڪ پاسي جي سامهون واري ڪنڊ جو مقدار وڏيڪ هوندو.
- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جون ٻہ ڪنڊون ماپ ۾ برابر نہ هجن تہ وڏي ڪنڊ جي سا مهون وارو پاسو، ننڍي ڪنڊ جي سامهون واري پاسي کان وڏو ٿيندو.
- ٽڪنڊي جي ڪن ٻہ ٻن پاسن جي ڏيگهہ جي ماپ،جوجور ٽئين پاسي جي ڏيگهہ کان وڏيڪ هوندو آهي.
- ڪنهن ٽبڪي جو گهٽ ۾ گهٽ فاصلو ڪنهن ليڪ کان عمود هوندو آهي.

تعارف:

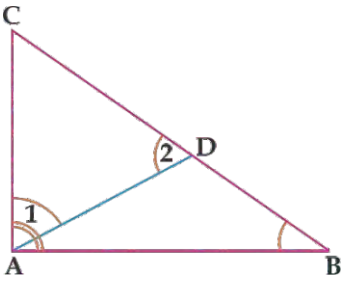
هن يونٽ ۾ اسان ٽڪندي جي پاسن ۽ ڪنڊن سان تعلق رکندڙ سڌيان، انهن جا شامل نتيجن بابت پڙهندا سين ۽ انهن سان تعلق رکندڙ حساب پڻ حل ڪنداسين.

12.1 ٽڪندي جا پاسا ۽ ڪنڊون

سڌيان 12.1.1

ثابت ڪريو ته:

جيڪڏهن ڪنهن ٽڪندي جا ٻه پاسا ڏيگهه ۾ برابر نه هجن، ته وڏيڪ ڏيگهه واري پاسي جي سامهون واري ڪنڊ جو مقدار وڏيڪ هوندو.



مليل: ΔABC ۾ $m\overline{BC} > m\overline{AC}$

گهربل: $m\angle A > m\angle B$

جوڙ جڪ: $\overline{BC}$ کي ٽنبڪي D تي اهڙي طرح ڪٽيو جو $\overline{AC} \cong \overline{CD}$ ڪٽيو ۽ ٽنبڪي A کي D سان ملايو.

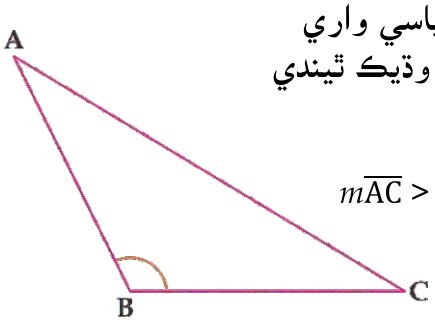
ثابتي:

بيان	سبب / دليل
(i) ΔACD ۾ $\overline{AC} \cong \overline{CD}$	(i) جوڙجڪ
(ii) $\therefore m\angle CAD = m\angle CDA$	(ii) يڪسان پاسا،
(iii) $\angle CDA$ پرَ ٽڪندي ABD جي ٻاهرين ڪنڊ آهي	(iii) ٻاهرين ڪنڊن جي وصف مطابق
	(iv) ٻاهرين ڪنڊ ٽڪندي جي اڻ پروارين ڪنڊن کان وڏي ٿيندي آهي.
(iv) $\therefore m\angle CDA > m\angle B$	
(v) $m\angle A > m\angle CAD$ پرَ	(v) $\therefore m\angle A = m\angle CAD + m\angle DAB$
(vi) $m\angle A > m\angle CDA$	(vi) $m\angle CDA = m\angle CAD$
(vii) $\therefore m\angle A > m\angle B$	(vii) مٿيان (iv) ۽ (vi) ۾ رنا برابري واري متعدي خاصيت

Q.E.D

هينيان مثال متئين سڌيان کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

ثابت ڪريو ته اٽپور پاسي ٽڪنڊي ۾ وڏي پاسي واري سامهون ڪنڊ جي ماپ 60° کان وڌيڪ ٿيندي



مليل: ٽڪنڊو ABC ۾ $m\overline{AC} > m\overline{AB}$ ۽ $m\overline{AC} > m\overline{BC}$:. $m\angle B > 60^0$

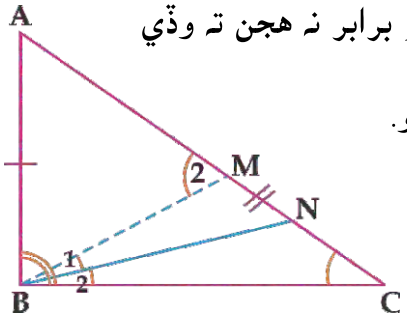
گهربل ثابتي:

بيان	سبب / دليل
ٽڪنڊي ABC ۾	
اسان کي $m\angle B > m\angle C$	مليل $m\overline{AC} > m\overline{BC}$, $m\overline{AC} > m\overline{AB}$
۽ $m\angle B > m\angle A$	
پر $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$	ٽڪنڊي ABC جون ڪنڊون $\angle A, \angle B$ ۽ $\angle C$ آهن
$\therefore\ m\angle B + m\angle B + m\angle B > 180^0$	$m\angle B > m\angle C$ and $m\angle B > m\angle A$ جوڙ ڪرڻ سان
$3\ m\angle B > 180^0$	3 سان ونڊ ڪرڻ سان
$= \quad m\angle B > \frac{180^0}{3}$	
ته پوءِ $m\angle B > 60^0$	

Q.E.D

سڌيان 12.1.2

ثابت ڪريو ته جيڪڏهن ٽڪنڊي جون به ڪنڊون ماپ ۾ برابر نه هجن ته وڏي ڪنڊ جي سامهون وارو
پاسو، ننڍي ڪنڊ جي سامهون واري پاسي کان وڏو ٿيندو.



مليل: ٽڪنڊي ABC ۾ $m\angle B > m\angle C$

گهربل: $m\overline{AC} > m\overline{AB}$

جوڙجڪ: $\angle ABM$ کي $\angle C$ جي يڪسان ڪري ناهيو, $\angle MBC$

جواڻ ڪنڊ $\overline{BN}$, ناهو ته جيئن $m\angle 1 = m\angle 2$

ثابتي:

بيان	سبب / دليل
$\angle ANB$ ٻاهرين ڪنڊ آهي ΔCBN $\therefore$ ته پوءِ	ٻاهرين ڪنڊ جي وصف مطابق
$m\angle ANB = m\angle C + m\angle 2$	$\angle ANB$ ٻاهريت ڪنڊا آهي
$= m\angle C + m\angle 1$	$\therefore m\angle 2 = m\angle 1$ جوڙجڪ
$= m\angle ABM + m\angle 1$	$\therefore m\angle C = m\angle ABM$ جوڙجڪ
$= m\angle ABN$	ڪنڊن کي جوڙ جو موضوع
$\therefore \overline{AB} \cong \overline{AN}$	$\therefore m\angle ANB = m\angle ABN$ مٿي ثابت ٿيل
$\therefore m\overline{AC} > m\overline{AB}$	$\therefore m\overline{AC} > m\overline{AN}$

Q.E.D

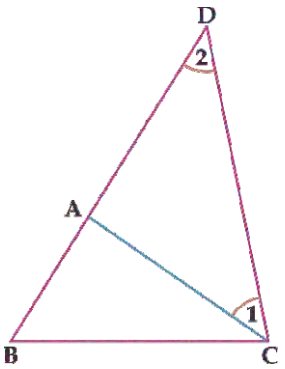
شامل نتيجا:

(1) گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جو هڪ پاسو ٽينيوز باقي ٻين هر هڪ پاسن کان وڏو هوندو آهي.

(2) ويڪري ڪنڊ ٽڪنڊي ۾، ويڪري ڪنڊ جي سامهون وارو پاسو ٻين پاسن مان هر هڪ کان وڏو هوندو آهي.

سڌيان 12.1.3

ٽڪنڊي جي ڪن ۾ ٻن پاسن جي ڏيگهه جي ماپ جوجوڙ اڻئين پاسي جي ڏيگهه کان وڌيڪ هوندي آهي.



مليل: ٽڪنڊو ABC

گهربل:

i) $m\overline{AB}+m\overline{AC}>m\overline{BC}$

ii) $m\overline{AB}+m\overline{BC}>m\overline{CA}$

iii) $m\overline{AC}+m\overline{BC}>m\overline{AB}$

جوڙجڪ: BA کي D ٽپڪي تائين اهڙي طرح وڌايو جو

$\overline{AD}\cong\overline{AC}$ ۽ $\overline{DC}$ ناهيو

ثابتي:

بيان	سبب / دليل
ٽڪنڊي ADC ۾ $\overline{AD}\cong\overline{AC}$	جوڙجڪ
$\therefore m\angle 1=m\angle 2$	يڪسان پاسن جي سامهون واريون ڪنڊو
پر $m\angle BCD>m\angle 1$	$m\angle BCD=m\angle BCA+m\angle 1$
$\therefore m\angle BCD>m\angle 2$	نا برابري واري متعدي خاصيت
تنهنڪري ΔBDC ۾ $m\overline{BD}>m\overline{BC}$	وڏي ڪنڊ جي سامهون وارو پاسو وڏو ٿيندو
پر $m\overline{BD}=m\overline{AB}+m\overline{AD}$	جوڙجڪ مطابق =
$=m\overline{AB}+m\overline{AC}$	$m\overline{AD}=m\overline{AC}$
$\therefore m\overline{AB}=m\overline{AC}>m\overline{BC}$	$\overline{BD}$ جي قيمت رکڻ سان
ساڳي طرح اسان ثابت ڪري سگهان ٿا ته	
$m\overline{AB}+m\overline{BC}>m\overline{AC}$	مٿئين طريقي ڪار مطابق
۽ $m\overline{BC}+m\overline{AC}>m\overline{AB}$	

Q.E.D

هينيان مثال مٿي ڏنل سڌيان کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندو.

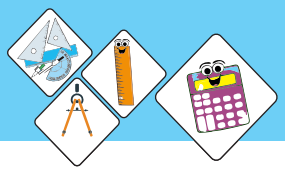
مثال 1: هينئين مان، ڪهڙا ڏيگهن جا ڏنل سيٽ ٽڪنڊو ناهيندا:

(i) 3 س. م، 4 س. م ۽ 5 س. م

(ii) 4س. م، 5 س. م ۽ 4.5 س. م

(iii) 60 م. م، 80 م. م ۽ 10 س. م

(iv) 3 س. م، 4 س. م ۽ 10 س. م



حل: (i) 3 س. م ، 4 س.م ۽ 5 س.م

جيئن ته $5 < 4 + 3$ ، $4 < 5 + 3$ ۽ $3 < 5 + 4$ ته پوءِ

ان پاسن جو جوڙ ٽي پاسي جي جوڙ کان وڏيڪ آهي.

ڏنل ڏيگهه جو سيٽ هڪ تڪنڊو ناهيندو

(ii) 4 س.م ، 5 س.م ۽ 4.5 س.م

جئين ته $4.5 < 4 + 5$ ، $4 < 4.5 + 5$ ۽ $4 < 3 + 4.5$ ته پوءِ

ڏنل ڏيگهه جو سيٽ هڪ تڪنڊو ناهيندو.

(iii) 60 م.م، 80 م.م ۽ 10 س.م

جيئن ته 10 =1 س.م تنهنڪري 60 م م= 6 س.م ۽ 80 م م = 8 س.م

هاڻ $10 < 8 + 6$ ، $8 < 10 + 6$ ۽ $6 < 10 + 8$ ته پوءِ

ڏنل ڏيگهه جو سيٽ هڪ تڪنڊو ناهيندو.

مثال 2: مٿين سڌيان کي ذهن ۾ رکي فيصلو ڪريو ته ڪهڙا ڏيگهن جا سيٽ تڪنڊو ناهيندا.

(i) 2 س. م ، 4 س.م ۽ 7 س.م (ii) 5.5 س.م ، 5 س.م ۽ 9.5 س.م

حل: (i) 2 س. م ، 4 س.م ۽ 7 س.م

جيئن ته $7 < 4 + 2$ ، $2 < 4 + 7$ ۽ $4 < 7 + 2$

هن قسم جي ڏيگهه جو سيٽ تڪنڊو نٿو ناهي سگهي.

(ii) 5.5 س.م ، 5 س.م ۽ 9.5 س.م

جيئن ته $9.5 < 5 + 5.5$ ، $5.5 < 9.5 + 5$ ۽ $5 < 5.5 + 9.5$ ته پوءِ

ڏنل ڏيگهه وارو سيٽ تڪنڊو ناهي سگهي ٿو

سرگرمي

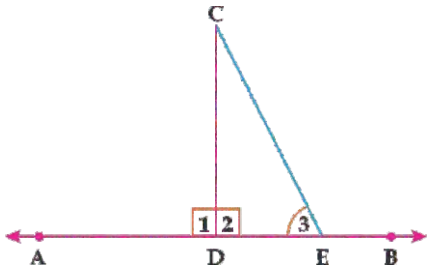
جيڪڏهن $a = 3$ cm

$b = 4$ cm

$c = 5$ cm

ته پوءِ ΔABC ناهي سگهبو يا نه

سڌيان 12.1.4 ڪنهن ٽڪي کان جيڪو ليک کان ٻاهر هجي، ليک تائين عمود سي کان گهٽ مفاصلو ٿيندو.



مليل: ٽڪي C کان $\overline{CD}$ ، ليک AB تي هڪ عمود ڪڍيو ويو آهي. جيڪو D ٽڪي تي ملي ٿو.

ء $\overline{CE}$ هڪ ٻيو ليک ٽڪر $\overline{AB}$ کي ٽڪي E تي ملي ٿو

گهربل: $m\overline{CD} < m\overline{CE}$

ثابتي:

بيان	سبب / دليل
$\angle 1$ ، ΔCDE جي ٻاهرين ڪنڊ آهي $\therefore m\angle 1 > m\angle 3$	ٻاهرين ڪنڊ جي وصف مطابق.
$\therefore m\angle 2 > m\angle 3$ $\therefore m\overline{CE} > m\overline{CD}$	ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊ، سامهون واري اندرين ڪنڊ کان وڏي هوندي آهي. $m\angle 1 = m\angle 2$ (هڪ گوني ڪنڊ آهي)
ساڳي طرح اهو ثابت ڪري سگهجي ٿو ته $m\overline{CD}$ جي ڊيگهه نندي ٿيندي ڪنهن به بي ليک ٽڪر کان، جيڪو C کان $\overleftrightarrow{AB}$ تائين ڪڍيو ويندو.	وڏي ڪنڊ جي سامهون وارو پاسو وڏو ٿيندو آهي. مٿين طريقي ڪار سان

Q.E.D

شامل نتيجو:

1. ڪنهن ليک تي ٽڪي ء ليک وچ ۾ مفاصلو ٻڌي آهي.

مشق 12.1

1. ٽڪنڊي ABC جو اندريون ٽپڪو O آهي.

   ثابت ڪريو تہ $m\overline{OA}+m\overline{OB}+m\overline{OC}>\frac{1}{2}(m\overline{AB}+m\overline{BC}+m\overline{CA})$

2. ٽڪنڊي ABC ۾ $m<B=70^0$ ۽ $m<C=45^0$ آهي. ٽڪنڊي جو ڪهڙو پاسو وڏي ۾ وڏوٽيندو؟

3. ٽڪنڊي ABC ۾ $m<A=58^0$ ۽ $m<B=65^0$ ٽڪنڊي جو ڪهڙو پاسو ننڍي ۾ ننڍو ٽيندو.

ورجايل مشق 12

1. صحيح ۽ غلط بيانن تي (✓) ٽڪ ڪريو.

(i) ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جو جوڙ ٽي پاسي کان وڏو ٽيندو آهي. T/F

(ii) ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جي ڪٽ، ٽي پاسي کان وڏيڪ ٽيندي آهي. T/F

(iii) عمودي مفاصلو ڪنهن ٽپڪي کان ليڪ تائين ننڍي ۾ ننڍو فاصلو آهي. T/F

(iv) گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي وڏي ۾ وڏي ڪنڊ 100^o جي آهي. T/F

(v) ڪنهن ليڪ تي عمود هميشہ 90^o جي ڪنڊ ٺاهيندو. T/F

2. خال پري جملن کي درست ڪريو.

(i) ڪنهن گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي _____ وڏو پاسو آهي.

(ii) ڪنهن ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ گوني ڪنڊ واري پاسن جو جوڙ _____ آهي.
هئپا ٽينيوز جي ماپ کان.

(iii) ٽڪنڊي ABC ۾ $m\angle A = 50^o$ ۽ $m\angle B = 30^o$ تہ _____ پاسو وڏو ٽيندو باقي جي ٻين پاسن کان.

(iv) چوڪنڊي جي اريب جي ڊيگهہ _____ آهي. ان جي پرواري پاسن جي جوڙ کان.

3. صحيح جواب تي (✓) ڪريو.

(i) ٽپور پاسي ٽڪندي جي هڪ پاسي جي ماپ 6 س م آهي ته پوءِ ان جي مڌيان جي ماپ _____ ٿيندي 9 س م کان:

(a) گهٽ (b) وڌيڪ (c) برابر (d) ڪو به نه

(ii) مستطيل جي گهيري جي ماپ 22 س م آهي ته ان جي اريب جي ڊيگهه _____ ٿيندي 11 س م کان.

(a) برابر (b) وڌيڪ (c) گهٽ (d) ڪو به نه

اختصار Summary

- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪندي جا ٻه پاسا ڊيگهه ۾ برابر نه هجن ته وڌيڪ پاسي جي سامهون واري ڪنڊ جو مقدار وڌيڪ هوندو.
- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪندي جون ٻه ڪنڊون ماپ ۾ برابر نه هجن ته وڏي ڪنڊ جي سامهون واروپاسو، ننڍي ڪنڊ جي سامهون واري پاسي کان وڏو ٿيندو.
- ٽڪندي جي ڪنڊ ٻه ٻن پاسن جي ڊيگهه جي ماپ ٽئين پاسي جي ڊيگهه کان وڌيڪ هوندي آهي.
- ڪنهن ٽڪي کي جيڪو ليڪ کان ٻاهر هجي، ليڪ تائين عمود جو سڀ کان گهٽ مفاصلو ٿيندو.