يونٽ 3

آلجبري اظهار ۽ فارمولا

Algebraic Expression and Formulas

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- ناطق اظهار، ناطق عددن وانگر هوندا آهن جي ڄاڻ حاصل ڪندا.
- ناطق اظهار جي تعريف ٻن گهڻ رقمين $p(x)$ ۽ $q(x)$ جي ونڊ اپت (Quotient) $\frac{p(x)}{q(x)}$ (جنهن ۾ $q(x)$ گهٽ رقمي ٻڙي نہ آهي) بيان ڪندا.
- ڏنل آلجبري اظهارن جي چڪاس ڪري سگهندا تہ
  - گهڻ رقمي آهي يا نہ
  - ناطق اظهار آهي يا نہ
- ناطق اظهار کي $\frac{p(x)}{q(x)}$ جي طور وضاحت ڪندا، جيڪڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ مڪمل عددي سِرَن سان گهڻ رقميون آهي جن ۾ ڪو بہ مشترڪ جزو نہ هجي.
- چڪاس ڪندا تہ ناطق آلجبري اظهار سادي صورت ۾ آهي يا نہ.
- ناطق اظهار کي سادي صورت ۾ گهٽائي سگهندا.
- ناطق اظهار جو جوڙ، ڪٽ ۽ ضرب اپت معلوم ڪري سگهندا.
- هڪ ناطق اظهار کي، ٻي ناطق اظهار سان ونڊ ڪري سادي صورت ۾ آڻي سگهندا.
- خاص حقيقي عددن سان، آلجبري اظهارن جي قيمت معلوم ڪري سگهندا.
- فارمولا بابت ڄاڻ حاصل ڪري سگهن.
  - $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ ۽ $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$
  - '$a^2 + b^2$' ۽ 'ab' جو ملهہ معلوم ڪن، جڏهن $(a+b)$ ۽ $(a-b)$ جا ملهہ معلوم هجن.

- فارمولا بابت ڄاڻ حاصل ڪري سگھن

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

- $a^2+b^2+c^2$ جو ملھ معلوم ڪريو جڏھن $a+b+c$ ۽ $ab+bc+ca$ جو ملھ مليل ھجي.
- $a+b+c$ جو ملھ معلوم ڪريو، جڏھن $a^2+b^2+c^2$ ۽ $ab+bc+ca$ جو ملھ مليل ھجي.
- $ab+bc+ca$ جو ملھ معلوم ڪريو، جڏھن $a^2+b^2+c^2$ ۽ $a+b+c$ جو ملھ مليل ھجي.
- فارمولا بابت ڄاڻ حاصل ڪري سگھن

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$$

  - $a^3 \pm b^3$ جو ملھ معلوم ڪريو، جڏھن $'a \pm b'$ ۽ $'ab'$ جو ملھ مليل ھجي.
  - $x^3 \pm \frac{1}{x^3}$ جو ملھ معلوم ڪريو، جڏھن $x \pm \frac{1}{x}$ جو ملھ مليل ھجي.

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

  - $x+\frac{1}{x}$ ۽ $x^2+\frac{1}{x^2}-1$ جي ضرب معلوم ڪن.
  - $x-\frac{1}{x}$ ۽ $x^2+\frac{1}{x^2}+1$ جي ضرب معلوم ڪن
  - لاڳيتي ضرب معلوم ڪري سگھندا.

$$(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

- غير ناطق عدد ۽ انھن جا استعمال جي سڃاڻپ ڪري سگھن.
- ٻي درجي جي غير ناطق عدد جي وضاحت ڪن.
- بنيادي عملن ڪي ٻي درجي جي غير ناطق عددي اظھارن جي چيدن ڪي ناطق ڪن ۽ ان جو جائزو وٺي سگھن.
- چيد ڪي ناطق ڪرڻ جي عمل جي وضاحت ڪن، ۽ $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$، $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ نموني جي اظھار جي چيد ڪي ناطق ڪن ۽ جڏھن تہ x ۽ y قدرتي عدد a ۽ b سچا عدد آھن.

3.1 آلجبري اظهار

اسان اڳيئي گذريل ڪلاسن ۾ آلجبري اظهارن بابت پڙهيو آهي
اچو تہ ان جي قسمن تي بحث ڪريون
آلجبري اظهار هينين ٽن قسمن جا ٿيندا آهن.

(a) گهڻ رقمي اظهار يا گهڻ رقمي. (Polynomial Expression or Polynomial)

(b) ناطق اظهار (Rational Expression)

(c) غير ناطق اظهار (Irrational Expression)

(a) گهڻ رقمي اظهار يا گهڻ رقمي. (Polynomial Expression or Polynomial)

هڪ گهڻ رقمي ڪنهن بدلجندڙ x ۾ هينئين نموني لکي سگهجي ٿي

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} \dots + a_{n-1}x^1 + a_n$$

جتي 'n' هڪ غير منفي (يعني واڌو) سڄو عدد آهي ۽ عددي سرا (منڊ) $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ حقيقي عدد آهن.

اڪثر ڪري هڪ گهڻ رقميءَ کي $p(x)$ لکبو آهي، تنهن ڪري مٿي ڏيڪاريل الجبري اظهار کي $P(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} \dots + a_{n-1}x^1 + a_n$ ظاهر ڪبو.
جيڪڏهن $a_0 \neq 0$ ، تہ ان گهڻ رقمي کي n درجي جي گهڻ رقمي ۽ a_0 کي گهڻ رقمي جو عددي سرو (منڊ) چئبو آهي.
گهڻ رقمين ۽ انجي درجن جا ڪجھ مثال هيٺ ڏجن ٿا.

(i) $8x-5$ درجو 1 آهي

(ii) $x^4-2x^3+5x^2+1$ درجو 4 آهي.

(iii) $6x^{31}+3$ درجو 31 آهي

(iv) $12x^4-x^3+\frac{2}{3}x^2-3x+1$ درجو 4 آهي.

(v) 4 درجو 0 آهي.

(vi) $\sqrt{10}x^{12}+2x^6-x^5-18x+1$ درجو 12 آهي.

$x^3-x^3y^2+x^2y^2-10$ ٻن متغيرن (بدلجندڙن) Variables x ۽ y سان هڪ آلجبري اظهار جو درجو 5 آهي.

ساڳيءَ طرح $x^3y^5z^2-x^3y^2z^3+x^2yz-34$ ٽن متغيرن بدلجندڙن (Variables) x, y ۽ z سان هڪ آلجبري اظهار جو درجو 10 آهي.
(ڇو جو هن آلجبري اظهار جي سڀني رقمن مان سگهن جو وڏي ۾ وڏو جوڙ 10 آهي).

ياد رکو تہ:

- جيڪڏهن گهڻ رقميءَ ۾ صرف هڪ رقم موجود هجي تہ انکي هڪ رقمي (Monomial) اظهار چئبو آهي، مثال طور: $3x, 7xy, 6xy^2z^5$ وغيره.
- جيڪڏهن گهڻ رقميءَ ۾ صرف ٻہ رقم موجود هجن تہ انکي ٻہ رقمي (Binomial) اظهار چئبو آهي، مثال طور: $x+4, 5x+y, 7x-3$ وغيره.
- جيڪڏهن گهڻ رقميءَ ۾ صرف ٽي رقم موجود هجي تہ انکي ٽي رقمي (Trinomial) اظهار چئبو آهي، مثال طور: x^2-2x+1 ، $\frac{1}{\sqrt{3}}x^2y^2-5xy+3$ وغيره.
- جيڪڏهن گهڻ رقميءَ ۾ چار يا وڌيڪ رقمون موجود هجن تہ انکي ڪيترائي رقمي (Multinomial) اظهار چئبو آهي.

(b) ناطق اظهار (Rational Expression)

اهڙي آلجبري اظهار جيڪو $\frac{p(x)}{q(x)}$ جي صورت ۾ لکي سگهجي جنهن ۾ $p(x)$ ۽ $q(x)$ گهڻ رقميون هجن ۽ $q(x) \neq 0$ هجي انکي ناطق آلجبري اظهار چئبو آهي.

مثال طور: $\frac{x+1}{x}$ ، $\frac{x^2-x+1}{x-5}$ ، $\frac{\sqrt{3}x^2-5x+4}{x^2+6x-5}$ وغيره.

نوٽ: هر گهڻ رقمي اظهار ناطق اظهار آهي پر هر ناطق اظهار گهڻ رقمي اظهار نہ آهي.

(c) غير ناطق اظهار (Irrational Expression)

اهڙي آلجبري اظهار جيڪو $\frac{p(x)}{q(x)}$ جي صورت ۾ لکي نہ سگهجي جنهن ۾ $p(x)$ ۽ $q(x)$ گهڻ رقميون هجن ۽ $q(x) \neq 0$ هجي انکي غير ناطق آلجبري اظهار چئبو آهي.

مثال طور: $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{\sqrt{x}+1}{x}$ ، $\frac{\sqrt{x^3}+2x+3}{\sqrt{x}-9}$ ، $\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}$ وغيره.

3.1.1 اهو معلوم هجي تہ ناطق آلجبري اظهار ناطق عددن وانگر عمل ڪندا آهن.

جيئن p ۽ q ٻہ ناطق عدد آهن تہ پوءِ $\frac{p}{q}$ سچا عدد ٿي سگهن ٿا يا نہ تنهن ڪري عددن جو سرشتو وڌايو آهي ۽ $\frac{p}{q}$ کي ناطق جي صورت ۾ ظاهر ڪيو آهي، جتي $p, q \in Z$ جنهن ۾ $q \neq 0$

ساڳيءَ طرح: جيڪڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ ٻہ گهڻ رقميون آهن تہ لازمي نہ آهي تہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ ٻہ گهڻ رقمي هجي

3.1.2 ناطق اظهار جي وضاحت ڪريو جيئين $\frac{p(x)}{q(x)}$ وند اپت آهي $p(x)$ ۽ $q(x)$ جي، جتي $q(x) \neq 0$

جيئن اسين ڄاڻون ٿا $\frac{p(x)}{q(x)}$ صورت ۾ جتي $p(x)$ ۽ $q(x)$ ٻہ گهڻ رقميون آهن، $q(x)$ غير ٻڙي گهڻ رقمي آهي. انکي ناطق اظهار چئبو آهي.

مثال طور: $\frac{x^2-5}{3x^2+4}$ ، $3x^2+4 \neq 0$ ناطق اظهار آهن.

3.1.3: چڪاس ڪريو تہ ڏنل آلجبري اظهار

(i) گهڻ رقمي آهي يا نہ (ii) ناطق اظهار آهي يا نہ

هينيان مثال گهڻ رقمي ۽ ناطق اظهارن کي سڃاڻڻ مدد ڪندا.

مثال 01

(i) $2x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ (ii) $6x^3 - 4x^2 - 5x$

حل: (i) $2x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

اهو گهڻ رقمي اظهار نہ آهي ڇاڪاڻ تہ ٻي رقم کي سگهہ واڌو سڄو عدد نہ آهي.

حل: (ii) $6x^3 - 4x^2 - 5x$

اهو گهڻ رقمي اظهار آهي ڇاڪاڻ تہ هر رقم کي سگهہ واڌو سڄو عدد آهي.

مثال 02 ناطق اظهار آهي يا نہ

(i) $\frac{x-2}{3x^2+1}$ (ii) $6x^3 - \frac{1}{\sqrt{x+4}}$

حل (i) $\dfrac{x-2}{3x^2+1}$

انس ۽ ڇيد ٻئي گهڻ رقمي اظهار آهن، تنهنڪري اهو ناطق اظهار آهي.

حل (ii) $6x^3-\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$

اهو ناطق اظهار نہ آهي ڇاڪاڻ تہ ٻي رقم جو ڇيد گهڻ رقمي اظهار نہ آهي.

3.1.4 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ کي انجي سادي صورت ۾ وضاحت ڪريو جڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ گهڻ رقمي اظهار آهن انهن کي عددي سر(منڊ) (Coefficient) سچا عدد (Integral) آهن ۽ ڪو عام جزو (Common factor) نہ آهي.

ناطق اظهار کي مختصر حالت ۾ تڏهن چونداسين جڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ وٽ 1 کان علاوه ڪو بہ مشترڪ جزو نہ آهي.

مثال طور: $\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$ جي ننڍي ۾ ننڍي صورت $\dfrac{x+1}{x-1}$ آهي.

3.1.5 چڪاس ڪريو تہ ڏنل ناطق آلجبري اظهار سندس ننڍي ۾ ننڍي صورت ۾ آهي. $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ناطق اظهار جي چڪاس ڪرڻ لاءِ $p(x)$ ۽ $q(x)$ جا عام جزا (Common factors) ڏسو.

جيڪڏهن عام جزو 1 آهي تہ ناطق آلجبري اظهار ننڍي صورت ۾ آهي.

مثال طور: $\dfrac{x+1}{x-1}$ ننڍي ۾ ننڍي صورت ۾ آهي ڇاڪاڻ تہ $x+1$ ۽ $x-1$ جو عام جزو 1 آهي.

3.1.6 ناطق اظهارن کي سنڌن سادي صورت ۾ آڻيو:

فرض ڪريو ته $\frac{p(x)}{q(x)}$ هڪ ناطق اظهار آهي جنهن ۾ $q(x) \neq 0$

قدم1: جيڪڏهن ممڪن هجي ته $p(x)$ ۽ $q(x)$ اظهارن جا جزا لکو.

قدم2: جيڪڏهن ممڪن هجي ته $p(x)$ ۽ $q(x)$ جا عام جزا لکو.

قدم3: $p(x)$ ۽ $q(x)$ جا عام جزا پاڻ ۾ ڪٽيو.

مثال 01 هيٺين ناطق اظهارن کي ساديءَ صورت ۾ آڻيو.

(i) $\frac{(x^2-x)(x^2-5x+6)}{2x(x^2-3x+2)}$ (ii) $\frac{5(x^2-4)}{(3x+6)\,(x-3)}$

حل: (i)

$$\frac{(x^2-x)(x^2-5x+6)}{2x(x^2-3x+2)}$$

$$=\frac{x(x-1)}{2x}\cdot\frac{x^2-3x-2x+6}{x^2-2x-x+2}$$

$$=\left(\frac{x-1}{2}\right)\cdot\frac{\{x(x-3)-2(x-3)\}}{\{x(x-2)-1(x-2)\}}$$

$$=\frac{(x-1)(x-3)(x-2)}{2(x-2)(x-1)}$$

$$=\frac{(x-3)}{2}$$

$=\frac{1}{2}(x-3)$ گهربل سادي صورت آهي.

حل: (ii)

$$\frac{5(x^2-4)}{(3x+6)\,(x-3)}$$

$$=\frac{x^2-4}{x-3}\cdot\frac{5}{3x+6}$$

$$=\frac{x^2-2^2}{x-3}\cdot\frac{5}{3(x+2)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{x-3} \cdot \frac{5}{3(x+2)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{x-3} \cdot \frac{5}{3(x+2)} \qquad x \neq -2$$

$$= \frac{5(x-2)}{3(x-3)}$$ گھربل سادي صورت آھي

3.1.7 ناطق اظھارن جي جوڙ، ڪٽ ۽ ضرب اپت لھو.

ناطق اظھارن جي جوڙ، ڪٽ ۽ ضرب ھينين مثالن جي مدد سان ڪبي آھي.

مثال 01 $\frac{3}{x+1} + \frac{4x}{x^2-1}$

حل:

$$\frac{3}{x+1} + \frac{4x}{x^2-1}$$

$$= \frac{3}{x+1} + \frac{4x}{(x-1)(x+1)}$$ جزا

$$= \frac{3(x-1)+4x}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{3x-3+4x}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{7x-3}{(x-1)(x+1)} \qquad x \neq 1, -1.$$

$$= \frac{7x-3}{x^2-1}$$ گھربل سادي صورت آھي

مثال 02 $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^3-1}$

حل:

$$=\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^3-1}$$

$$=\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$ جزا

$$=\frac{(x^2+x+1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x^2+x+1-x-1}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x^2}{(x+1)(x^3-1)}$$ گھربل سادي صورت آھي

مثال 03 $\frac{x^2}{x^2+x-12}\cdot\frac{x^2-9}{2x^2}$

حل:

$$\frac{x^2}{x^2+x-12}\cdot\frac{x^2-9}{2x^2}, x\neq 0$$

$$=\frac{x^2}{x^2+4x-3x-12}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{2x^2}$$

$$=\frac{1}{x(x+4)-3(x-4)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{2}$$

$$=\frac{1}{(x+4)(x-3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{2}$$

$$=\frac{(x+3)}{2(x+4)}$$ گھربل سادي صورت آھي

3.1.8 ھڪ ناطق اظھار کي ٻئي ناطق اظھار سان ونڊ ڪري ساديءَ صورت ۾ آڻڻ:

ھڪ ناطق اظھار کي ٻئي ناطق اظھار سان ونڊ ڪرڻ جي ترتيب، پھرين ونڊ کي ضرب ۾ بدلائي ساديءَ صورت ۾ آڻبو:

مثال 01 $\dfrac{3x-9y}{2x+10y}\div\dfrac{x^2-3xy}{4x+20y}$

حل:

$$\frac{3x-9y}{2x+10y}\div\frac{x^2-3xy}{4x+20y}$$

$$=\frac{3x-9y}{2x+10y}\times\frac{4x+20y}{x^2-3xy}$$ ضرب ۾ بدلائڻ

$$=\frac{3(x-3y)}{2(x+5y)}\times\frac{4(x+5y)}{x(x-3y)}=\frac{6}{x}$$ گهربل سادي صورت آهي

3.1.9 ڪجھ مخصوص حقيقي عددن سان آلجبري اظهارن جو ملھ لھو:

ڪجھ مخصوص حقيقي عددن سان آلجبري اظهارن جو ملھ لھڻ هيٺ ڏنل مثالن ۾ واضح ڪيل آهي.

مثال 01 $\dfrac{x^2+yz}{x^3+y^2-7yz^4}$ جو ملھ لھو جڏهن $x=3$, $y=2$ ۽ $z=-1$

مليل $x=3$, $y=2$ ۽ $z=-1$

حل

$$=\frac{x^2+yz}{x^3+y^2-7yz^4}$$

$$=\frac{(3)^2+(2)(-1)}{(3)^3+(2)^2-7(2)(-1)^4}$$

$$=\frac{9-2}{27+4-14}=\frac{7}{17}$$

مشق 3.1

.1 ٻڌايو تہ هيٺ آلجبري اظهار گهڻ رقمي آهن يا نہ:

(i) $2xy^2-3x^2+5y^3-6$ (ii) $3xy^{-2}$

(iii) $6x^2-10x+7-\sqrt{45}$ (iv) $5\sqrt{x}-x+5x^2$

(v) $\dfrac{2}{x+2}$ (vi) $\dfrac{2}{x}+x^3-2$

2. ٻڌايو تہ هيٺ ڏنل آلجبري اظهار ناطق آهن يا نہ:

(i) $\dfrac{x^2+2x+3}{x-4}$ (ii) $\dfrac{x^2+5\sqrt{x}-2x}{3x^2+5x+4}$ (iii) $\dfrac{13x^2-9x+4}{x^2+5x+\sqrt{7}}$

(iv) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ (v) $\dfrac{7}{x+7}$ (vi) $5\sqrt{x}-x+5x^2$

3. هينيان ساديءَ صورت ۾ آڻيو:

(i) $\dfrac{p^2-100}{p+10}$ (ii) $\dfrac{3a^2+3ab}{3a^2+6ab+3b^2}$ (iii) $\dfrac{(a-b)}{(a+b)}\times\dfrac{(a^2+ab)}{(2a^2-2b^2)}$

(iv) $\dfrac{(x+y)^2-z^2}{x+y+z}$ (v) $\dfrac{(m^2-6m)(3m+15)}{2m-12}$ (vi) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}$

4. هينيان ساديءَ صورت ۾ آڻيو:

(i) $\dfrac{4x-1}{2x-2}+\dfrac{4x+1}{2x+2}$ (ii) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x+3}$ (iii) $\dfrac{xy}{xy+1}+\dfrac{xy+1}{xy-1}$

(iv) $\dfrac{x-2}{x+3}-\dfrac{x+1}{x+6}$ (v) $\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}$ (vi) $\dfrac{4y}{y^2-1}-\dfrac{y+1}{y-1}$

5. ساديءَ صورت ۾ آڻيو:

(i) $\left(\dfrac{x^2}{4y^2-x^2}+1\right)\div\left(1-\dfrac{x}{2y}\right)$ (ii) $\dfrac{x+3}{3y-2x}\cdot\dfrac{4x^2-9y^2}{xy+3y}$

(iii) $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}\times\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ (iv) $\dfrac{8(y+3)}{9}\times\dfrac{12(y+1)}{4(y+3)}\div\dfrac{8(y+1)}{5}$

(v) $\dfrac{q^2-25}{q^2-3q}\div\dfrac{q^2+5q}{q^2-9}$ (vi) $\dfrac{4}{z^2-4z-5}\div\dfrac{2}{4z^2-4}$

6. $t+\frac{1}{t}$ جو ملھ لھو، جڏھن $t=\frac{x-y}{x+y}$ ھجي.

7. ھيٺين جو ملھ لھو:

(i) $\frac{5(x+y)}{3x^2\sqrt{y+6}}$, if $x=-4$, $y=9$

(ii) $\frac{42ab^2c^3}{3a^2b+1}$, if $a=3$, $b=2$ and $c=1$

(iii) $\frac{(x+y)^3-z^2}{x^2y^2+z^2}$, if $x=2$, $y=-4$ and $z=3$,

(iv) $\frac{3x^2y}{z}-\frac{bc}{x+1}$, if $x=2$, $y=-1$, $z=3$, b= 4, $c=\frac{1}{3}$

(v) $\frac{(ab^2-c)}{(a+cd^2)}\times\frac{(c+d)}{(a^2b-d)}$, if $a=1$, $b=3$, $c=-3$ and $d=2$.

3.2 آلجبري فارمولا

اسان گذريل ڪلاس ۾ ڪجھ آلجبري فارمولا پڙھيا ۽ استعمال ڪيا آھن، ھاڻي ڪجھ نوان فارمولا سڪنداسين ۽ لاڳو ڪندا سين:

3.2.1 فارمولا جاچڻ:

(i) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

چڪاس

$$\text{L.H.S} =(a+b)^2+(a-b)^2$$

$$=a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2 \qquad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$=2a^2+2b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$\text{L.H.S} =2(a^2+b^2) = \text{R.H.S}$$

(ii) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

چڪاس

$$\text{L.H.S} =(a+b)^2-(a-b)^2$$

$$=a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2) \qquad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$\text{L.H.S} =4ab = \text{R.H.S}$$

مثال 01 هيٺين مثالن ۾ طريقو واضح ڪيل آهي

(i) $a^2 + b^2$ (ii) ab جو ملهه لهو، جڏهن $a + b = 6$ ۽ $a - b = 4$

(i) گهربل $a^2 + b^2 = ?$

حل: مليل $a - b = 4$ ، $a + b = 6$

اسان کي معلوم آهي ته $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$a+b = 6$ ۽ $a - b = 4$ جو ملهه وجهڻ سان

$$(6)^2 + (4)^2 = 2(a^2 + b^2),$$
$$\Rightarrow \quad 36 + 16 = 2(a^2 + b^2)$$
$$\Rightarrow \quad 52 = 2(a^2 + b^2)$$
$$\Rightarrow \quad 26 = a^2 + b^2$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{a^2 + b^2 = 26}$$

(ii) گهربل $ab = ?$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

$a + b = 6$ $a - b = 4$ جو ملهه وجهڻ سان

$$\therefore \quad (6)^2 - (4)^2 = 4ab,$$
$$\Rightarrow \quad 36 - 16 = 4ab,$$
$$\Rightarrow \quad 20 = 4ab,$$
$$\Rightarrow \quad 5 = ab,$$
$$\boxed{ab = 5}$$

جيئن ته $a^2 + b^2 = 26$ ۽ $ab = 5$

3.3.2 فارمولا چائون:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c)\\ &= a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)\\ &= a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2\\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\end{aligned}$$

مثال 01 $a^2+b^2+c^2$ جو ملهه لهو، جڏهن $a+b+c=7$ ۽ $ab+bc+ca=15$

حل: گهربل $a^2+b^2+c^2=?$

اسان کي معلوم آهي ته $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

هاڻي $a+b+c=7$ ۽ $ab+bc+ca=15$ جو ملهه وجهڻ سان

$\therefore \quad (7)^2 = a^2+b^2+c^2+2(15)$

$\Rightarrow \quad 49 = a^2+b^2+c^2+30$

$\Rightarrow \quad 49-30 = a^2+b^2+c^2$

$\Rightarrow \quad 19 = a^2+b^2+c^2$

$\Rightarrow \quad \boxed{a^2+b^2+c^2=19}$

جيئن ته $(a^2+b^2+c^2)$ جو ملهه 19 آهي.

مثال 02 $(a+b+c)$ جو ملهه لهو، جڏهن $a^2+b^2+c^2=38$ ۽ $ab+bc+ac=31$ هجي.

حل: مليل $a^2+b^2+c^2=38$ ۽ $ab+bc+ac=31$

اسان کي معلوم آهي ته $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2=38$ ۽ $ab+bc+ac=31$ جو ملهه وجهڻ سان

$(a+b+c)^2 = 38+2(31)$

$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2 = 38+62$

$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2 = 100$

$\Rightarrow \quad (a+b+c) = \left(\pm\sqrt{100}\right)$

$\Rightarrow \quad \boxed{(a+b+c)=\pm 10}$

جيئن ته $(a+b+c)$ جو ملهه ± 10 آهي.

مثال 03 $(ab+bc+ac)$ جو ملهه لهو، جڏهن $a+b+c=8$ ۽ $a^2+b^2+c^2=20$ هجي.

حل: مليل $a+b+c=8$ ۽ $a^2+b^2+c^2=20$

اسان کي معلوم آهي ته $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a+b+c=8$ ۽ $a^2+b^2+c^2=20$ جو ملهه وجهڻ سان

$(8)^2 = 20+2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow \quad 64 = 20+2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow \quad 64-20 = 2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow \quad 44 = 2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow \quad 22 = ab+bc+ac$

$\Rightarrow \quad ab+bc+ac = 22$

جيئن ته $(ab+bc+ac)$ جو ملهه 22 آهي.

3.2.3: ڪعب جو فارمولا:

(i) $\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)}$

چڪاس

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+b^3+3a^2b+3ab^2\\ &= a^3+b^3+3ab(a+b)\end{aligned}$$

(ii) $\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)}$

چڪاس

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2\\ &= (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3-3a^2b+3ab^2\\ &= a^3-b^3-3ab(a-b)\end{aligned}$$

هيٺيان مثال ڪعب جي فارمولا جو استعمال سمجهڻ لاءِ ڪارائتا آهن:

مثال 01 a^3+b^3 جو ملهه لهو، جڏهن $a+b=4$ ۽ $ab=5$ هجي.

حل مليل $a+b=4$ ۽ a^3+b^3

اسان کي معلوم آهي تہ $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

$a+b=4$ ۽ $ab=5$ جو ملهه وجهڻ سان

$$(4)^3 = a^3+b^3+3(5)(4)$$

$$\Rightarrow \quad 64 = a^3+b^3+60$$

$$\Rightarrow \quad 64-60 = a^3+b^3$$

$$\Rightarrow \quad 4 = a^3+b^3$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a^3+b^3=4}$$

جيئن تہ (a^3+b^3) جو ملهه 4 آهي.

مثال 02 ab جو ملھ لھو، جڏھن $a^3-b^3=5$ ۽ $a-b=5$ هجي.

حل: مليل: $a^3-b^3=5$ ۽ $a-b=5$

اسان کي معلوم آهي تہ $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

$a^3-b^3=5$ ۽ $a-b=5$ جو ملھ وجھڻ سان

$$\begin{aligned}
& (5)^3 = 5-3ab(5) \\
\Rightarrow\quad & 125 = 5-15ab \\
\Rightarrow\quad & 125-5 = -15ab \\
\Rightarrow\quad & 120 = -15ab \\
\Rightarrow\quad & -8 = ab \\
\Rightarrow\quad & \boxed{ab=-8}
\end{aligned}$$

جيئن تہ ab جو ملھ 8- آهي

مثال 03 $x^3+\frac{1}{x^3}$ جو ملھ لھو، جڏھن $x+\frac{1}{x}=3$ هجي.

حل: مليل $x+\frac{1}{x}=3$

بنهي پاسن کعب لڳائڻ سان

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=3^3$$

$$\Rightarrow\quad x^3+\frac{1}{x^3}+3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=27 \qquad \left[\ (a+b)^3=a^3+b^3-3ab(a+b)\ \right]$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & x^3+\frac{1}{x^3}+3(3)=27 \\
\Rightarrow\quad & x^3+\frac{1}{x^3}+9=27 \\
\Rightarrow\quad & x^3+\frac{1}{x^3}=27-9 \\
\Rightarrow\quad & \boxed{x^3+\frac{1}{x^3}=18}
\end{aligned}$$

جيئن تہ $x^3+\frac{1}{x^3}$ جو ملھ 18 آهي.

مثال 04 $8x^3-\frac{1}{x^3}$ جو ملهه لهو، جڏهن $2x-\frac{1}{x}=4$ هجي.

حل: مليل $2x-\frac{1}{x}=4$

ٻنهي پاسن ڪعب لڳائڻ سان

$$(2x-\frac{1}{x})^3=(4)^3$$

$$(2x)^3-(\frac{1}{x})^3-3(2x)(\frac{1}{x})(2x-\frac{1}{x})=64$$

$$8x^3-\frac{1}{x^3}-6(4)=64$$

$$8x^3-\frac{1}{x^3}-24=64 \qquad \Rightarrow 8x^3-\frac{1}{x^3}=88$$

جيئن ته $8x^3-\frac{1}{x^3}$ جو ملهه 88 آهي.

3.2.4: ڪعب جو فارمولا:

(i) $\boldsymbol{a^3 \pm b^3=(a \pm b)(a^2 \mp ab+b^2)}$

چڪاس

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$
$$=a^3+b^3$$

(ii) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

چڪاس

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$$
$$=a^3-b^3$$

مثال 01 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)$ ۽ $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ جي ضرب اپت لهو.

حل: $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$

$$\therefore\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$$

مثال 02 $\left(x-\frac{1}{x}\right)$ ۽ $\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)=x^3-\frac{1}{x^3}$ جي ضرب اپت لهو.

حل:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\therefore\quad (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)=x^3-\frac{1}{x^3}$$

مثال 03 $(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$ ۽ $(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$ جي لاڳيتي ضرب اپت لهو.

حل:

$$(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$$

$$= (x^3+y^3)(x^3-y^3) \qquad [\because (a\pm b)\ (a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3]$$
$$= x^6-y^6.$$

مشق 3.2

1. a^2+b^2 ۽ ab جو ملھ لھو، جڏھن $a+b=8$ ۽ $a-b=6$ ھجي.
2. a^2+b^2 ۽ ab جو ملھ لھو، جڏھن $a+b=5$ ۽ $a-b=3$ ھجي.
3. $a^2+b^2+c^2$ جو ملھ لھو، جڏھن $a+b+c=9$ ۽ $ab+bc+ac=13$ ھجي.
4. $a^2+b^2+c^2$ جو ملھ لھو، جڏھن $a+b+c=\frac{1}{3}$ ۽ $ab+bc+ac=\frac{-2}{9}$ ھجي.
5. $a+b+c$ جو ملھ لھو، جڏھن $a^2+b^2+c^2=29$ ۽ $ab+bc+ac=10$ ھجي.
6. $a+b+c$ جو ملھ لھو، جڏھن $a^2+b^2+c^2=0.9$ ۽ $ab+bc+ac=0.8$ ھجي.
7. $ab+bc+ac$ جو ملھ لھو، جڏھن $a+b+c=10$ ۽ $a^2+b^2+c^2=20$ ھجي.
8. a^3+b^3 جو ملھ لھو، جڏھن $a+b=4$ ۽ $ab=3$ ھجي.
9. ab جو ملھ لھو، جڏھن $a^3-b^3=16$ ۽ $a-b=4$ ھجي.
10. ab جو ملھ لھو، جڏھن $a^3-b^3=5$ ۽ $a-b=5$ ھجي.
11. a^3-b^3 جو ملھ لھو، جڏھن $a-b=5$ ۽ $ab=7$ ھجي.

.12 $125x^3+y^3$ جو ملهه لهو، جڏهن $5x+y=13$ ۽ $xy=10$ هجي.

.13 $216a^3-343b^3$ جو ملهه لهو، جڏهن $6a-7b=11$ ۽ $ab=8$ هجي.

.14 $x^3+\frac{1}{x^3}$ جو ملهه لهو، جڏهن $x+\frac{1}{x}=7$ هجي.

.15 $x^3-\frac{1}{x^3}$ جو ملهه لهو، جڏهن $x-\frac{1}{x}=11$ هجي.

.16 ٻڌايو ته هيٺ ڏنل آلجبري اظهارگهڻ رقمي آهن يا نه:

(i) $\left(\frac{3}{2}b+\frac{2}{3b}\right)\left(\frac{9b^2}{4}+\frac{4}{9b^2}-1\right)$ (ii) $\left(\frac{7y^2}{9}+\frac{9}{7y^2}\right)\left(\frac{49y^4}{81}+\frac{81}{49y^4}-1\right)$

(iii) $\left(\frac{x^4}{12}+\frac{12}{x^4}\right)\left(\frac{x^8}{144}+\frac{144}{x^8}+1\right)$ (iv) $\left(c^2-\frac{1}{c^2}\right)\left(c^4+\frac{1}{c^4}+1\right)$

.17 مناسب فارمولا جي مدد سان لاڳيتي ضرب اپت لهو.

(i) $(2x^2+3y^2)(4x^4-6x^2y^2+9y^4)$

(ii) $(2x^2-3y^2)(4x^4+6x^2y^2+9y^4)$

(iii) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

(iv) $(2x+3y)(2x-3y)(4x^2+9y^2)(16x^4+81y^4)$

3.3 غير ناطق عددي اظهار (Surds) ۽ انهن جو استعمال

3.3.1 غير ناطق عددي اظهار (Surds) جي سڃاڻپ ۽ انهن جو استعمال

وصف: اهڙو عددي اظهار جنهن ۾ موجود رقمن ۾ گهٽ ۾ گهٽ هڪ رقم تي ٻيئي مول جي نشاني هجي انکي ”غير ناطق عددي اظهار“ (Surd) چئبو آهي.

مثال طور: $\sqrt{2}, \sqrt{a-4}, \sqrt[3]{\frac{5}{10}}, \left(\frac{1}{3}+\sqrt{3}\right), \left(\sqrt[5]{2}-\frac{1}{2}\right)$ غير ناطق عددي اظهار (Surds) آهن.

سيئي (سرڊ Surds) غير ناطق عددي اظهار آهن.

جيڪڏهن $\sqrt[n]{a}$ هڪ غير ناطق عدد هجي ۽ ’a‘ مڪمل n^{th} وين سگهه نه هجي ته انکي n^{th} ترتيب جو غير ناطق عدد چئبو. $\sqrt[n]{a}$ حل هڪ غير ناطق عدد آهي ان کي غير ناطق مول ۽ ناطق مول جو پايو چئبو آهي.

مثال طور: $\sqrt[7]{10}, \sqrt[5]{2}, \sqrt[4]{6}, \sqrt[3]{5}, \sqrt{\frac{5}{7}}$ 2nd, 3rd, 4th, 5th ۽ 7th ترتيب جا سرڊ Surds آهن.
پر $\sqrt[3]{27}$ ۽ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ سرڊ (Surds) نہ آهن. ڇاڪاڻ تہ آهي عدد 3 ۽ $\frac{1}{2}$ جي نمائندگي ڪن ٿا جيڪي غير ناطق عدد نہ آهن.

3.3.2 ٻي درجي جو غير ناطق عددن (Surd of the second order) جي وضاحت ڪريو. ٻئي درجي جي غير ناطق عددن کي بنيادي عمل استعمال ڪري، ڇيد کي ناطق ڪري انجو جائزو وٺو.

(a) ٻي ترتيب جو غير ناطق عددي اظهار (Surd of the second order)

(i) هڪ غير ناطق اظهار جيڪو هڪ رقم وارو هجي انکي هڪ رقمي غير ناطق اظهار (Monomial Surd) چئبو آهي.

مثال طور: $\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{a-9}, \sqrt{53}$ وغيره ٻي درجي جا هڪ رقم وارو غير ناطق اظهار آهن.

(ii) هڪ غير ناطق عدد جيڪو ٻن هڪ رقمي غير ناطق اظهارن جو جوڙ يا فرق رکي يا هڪ رقمي غير ناطق اظهار ۽ ناطق اظهار جو جوڙ هجي انکي ٻہ درجي ناطق اظهار (Binomial Surd) چئبو آهي.

مثال طور: $\sqrt{17}+\sqrt{11}, \sqrt{2}-13, \sqrt{3}-35$ وغيره ٻي ترتيب جا ٻہ درجي غير ناطق عدد آهن.

(iii) ٻہ درجي غير ناطق اظهارن جو ميل (Conjugate of Binomial Surds) اظهار جا نمونا.

(a) $\left(\sqrt{a}+c\sqrt{b}\right)$ ۽ $\left(\sqrt{a}-c\sqrt{b}\right)$ هڪٻئي جا غير ناطق ميل (زوج) (Conjugate) آهن.

(b) $a+\sqrt{b}$ ۽ $a-\sqrt{b}$ هڪٻئي جا غير ناطق ميل (زوج) (Conjugate) آهن.

(b) ٻي ترتيب جي غيرناطق اظهارن تي بنيادي عمل، انجي ڇيدن کي ناطق اظهارن ۾ بدلائڻ ۽ انهن جومطلب

(i) غير ناطق اظهارن (Surds) جي جوڙ ۽ ڪٽ

غير ناطق اظهارن (Surds) جي جوڙ ۽ ڪٽ ڪرڻ لاءِ هيٺيان قائدا استعمال ڪري سگهجن ٿا.

مثال طور: $a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}$ ۽ $a\sqrt{c}-b\sqrt{c}=(a-b)\sqrt{c}$

مثال 01 $\sqrt{343}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}$ ساديءِ صورت ۾ آڻيو:

حل:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{343}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}\\
&=\sqrt{\underline{7\times7}\times7}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}\\
&=7\sqrt{7}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}\\
&=(7-3-2)\sqrt{7}\\
&=(7-5)\sqrt{7}\\
&=2\sqrt{7}
\end{aligned}$$

مثال 02 $\sqrt{32}+5\sqrt{2}+\sqrt{128}+7\sqrt{2}$ ساديءِ صورت ۾ آڻيو:

حل:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{32}+5\sqrt{2}+\sqrt{128}+7\sqrt{2}\\
&=\sqrt{16\times2}+5\sqrt{2}+\sqrt{64\times2}+7\sqrt{2}\\
&=\sqrt{(4)^2\times2}+5\sqrt{2}+\sqrt{(8)^2\times2}+7\sqrt{2}\\
&=4\sqrt{2}+5\sqrt{2}+8\sqrt{2}+7\sqrt{2}\\
&=(4+5+8+7)\sqrt{2}\\
&=24\sqrt{2}
\end{aligned}$$

(ii) غير ناطق اظهارن (Surds) جي ضرب ۽ ونڊ

غير ناطق اظهارن (Surds) جي ضرب ۽ ونڊ ڪرڻ لاءِ هيٺيان قائدا استعمال ڪري سگھجن ٿا.

(a) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ (b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}},\ a>0$ ۽ $b>0$

مثال 01 $\sqrt{125}\times\sqrt{48}$ ساديءِ صورت ۾ آڻيو:

حل:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{125}\times\sqrt{48}\\
&=\sqrt{(5)^2\times5}\times\sqrt{(4)^2\times3}\\
&=5\sqrt{5}\times4\times\sqrt{3}\\
&=(5\times4)\left(\sqrt{5}\times\sqrt{3}\right)\\
&=20\sqrt{15}
\end{aligned}$$

مثال 02 $\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{144}}$ ساديءَ صورت ۾ آڻيو:

حل:

$$\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{144}}$$

$$=\frac{\sqrt{2\times 81}}{\sqrt{12\times 12}}$$

$$=\frac{\sqrt{2\times(9)^2}}{\sqrt{(12)^2}}=\frac{9\sqrt{2}}{12}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

مشق 3.3

1. ساديءَ صورت ۾ آڻيو:

(i) $\sqrt[4]{81x^{-8}z^{4}}$ (ii) $\sqrt[3]{256a^{6}b^{12}c^{9}}$ (iii) $\sqrt[7]{128}$ (iv) $\sqrt{7776}$

(v) $\frac{\sqrt[3]{(125)^2\times 8}}{\sqrt{(2\times 32)^2}}$ (vi) $\frac{\sqrt{21}\times\sqrt{28}}{\sqrt{121}}$ (vii) $\sqrt{\frac{(216)^{\frac{2}{3}}\times(125)^{2}}{(0.04)^{-3}}}$

(viii) $\frac{\sqrt[6]{4}\times\sqrt[3]{27}\times\sqrt{60}}{\sqrt{180}\times\sqrt[3]{0.25}\times\sqrt[4]{9}}$

2. هيٺين جو ميل (زوج) (Conjugate) لکو.

(i) $\left(8-4\sqrt{3}\right)$ (ii) $\left(6\sqrt{6}+2\sqrt{3}\right)$ (iii) $\left(8\sqrt{12}+\sqrt{8}\right)$ (iv) $\left(2-\sqrt{3}\right)$

3. ساديءَ صورت ۾ آڻيو:

(i) $\left(6\sqrt{2}+4\sqrt{2}+7\sqrt{128}\right)$ (ii) $\sqrt{5}+\sqrt{125}+7\sqrt{5}$

(iii) $\left(13+15\sqrt{3}\right)+\left(7-6\sqrt{3}\right)$ (iv) $\sqrt{250}+\sqrt{490}+3\sqrt{10}$

(v) $\sqrt{245}+\sqrt{625}-\sqrt{45}$ (vi) $10\sqrt{11}-\sqrt{396}-3\sqrt{11}$

(vii) $\sqrt{17}\left(10\sqrt{17}-2\sqrt{17}\right)$ (viii) $\frac{3}{2}\left(\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50}\right)$

(ix) $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (x) $\left(\sqrt{13}+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{13}-\sqrt{11}\right)$

(xi) $\left(3\sqrt{6}-4\sqrt{5}\right)^2$ (xii) $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2$

3.4 ناطق ڪرڻ (Rationalization)

3.4.1 غير ناطق اظهارن تي حقيقي عددن جي ناطق ڪرڻ جا نمونا $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ۽ انهن جا مجموعا، جتي x,y قدرتي عدد آهن ۽ (a ۽ b) سچا عدد آهن.

- جيڪڏهن ٻن غير ناطق اظهارن (Surds) جي ضرب اپت هڪ ناطق عدد آهي ته هر غير ناطق اظهار هڪٻئي جو ناطق ڪندڙ جزو سڏبو.

  مثال طور: $\left(35-\sqrt{31}\right)$ ۽ $\left(35+\sqrt{31}\right)$ هڪٻئي جا ناطق جزا آهن.

- ڏنل غير ناطق اظهارن جي پنهنجي ناطق ڪندڙ جزي سان ضرب جو عمل سان ناطق عدد ضرب اپت جي طور تي حاصل ڪرڻ کي ناطق ڪندڙ چئبو آهي.

غير ناطق اظهارن ميل (Conjugate surds) جي ضرب اپت هڪ ناطق عدد آهي.

مثال 01 $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ جي ضرب اپت لهو:

حل: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ ۽ $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

$$=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2$$

جيڪو هڪ ناطق عدد آهي $3-2=1$

ڇيدن جو ناطق ٿيڻ (Rationalization of denominator)

متين بحث کي ذهن ۾ رکي، اسان نتيجو ڪڍيو ته $(a+b\sqrt{x})$ يا $(a-b\sqrt{x})$ نموني جي هڪ ڇيد کي ناطق ڪرڻ لاءِ اسين ٻئي ڇيد ۽ انس جي ميل جزي $(a+b\sqrt{x})$ (Conjugate factor) يا $(a-b\sqrt{x})$ سان ضرب ڪنداسين.ائين ڪرڻ سان اسان ٻئي مول کي خارج ڪيون ٿا ۽ اهڙيءَ طرح ڇيد کي ڪنهن به غير ناطق اظهار (Surd) کان آزاد حاصل ڪري سگهون ٿا.

حقيقي عددن جي ناطق ٿيڻ جا نمونا (Rationalization of real numbers of the types)

(i) $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

هيٺيان مثال ناطق ڪرڻ جي تصور (Concept of Rationalization) ڪي سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

مثال 01 $\frac{1}{5+2\sqrt{3}}$ ناطق ڪريو:

$5+2\sqrt{3}$ جيڏڪي $5-2\sqrt{3}$ سان انجي ميل ڪي ضرب ۽ ونڊ ڪريو.

حل:

$$\frac{1}{5+2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{5+2\sqrt{3}}\times\frac{5-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{(5)^2-(2\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{25-12}$$

$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{13}$$

$$=\frac{5}{13}-\frac{2}{13}\sqrt{3}$$

مثال 02 $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ناطق ڪريو:

حل:

$$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2}$$

$$=\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{1}$$

$$=5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

مشق 3.4

.1 هينين جي ڇيد کي ناطق ڪريو:

(i) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ (ii) $\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$ (iii) $\dfrac{1}{4\sqrt{3}-5\sqrt{2}}$

(iv) $\dfrac{16}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$ (v) $\dfrac{9-\sqrt{2}}{9+\sqrt{2}}$ (vi) $\dfrac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{13}-3}$

.2 (i) جيڪڏهن $x=8-3\sqrt{7}$ ته $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$ لهو.

(ii) جيڪڏهن $\dfrac{1}{x}=2\sqrt{28}-11$ ته x لهو.

(iii) جيڪڏهن $x=3-2\sqrt{2}$ ته $x+\dfrac{1}{x}, x-\dfrac{1}{x}, x^2+\dfrac{1}{x^2}, x^2-\dfrac{1}{x^2}$ ۽ $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ لهو:

مشق ورجايو 3

.1 درست جوابن تي گول پايو:

(i) هر گهڻ رقمي آهي:

(a) هڪ غير ناطق اظهار (b) هڪ ناطق اظهار

(c) هڪ جملو (d) انهن مان ڪو بہ نہ

(ii) هڪ اهڙو غيرناطق عدد جيڪو ٻن هڪ رقمي غيرناطق اظهارن جو جوڙ هجي انکي چئبو آهي:

(a) ٽہ رقمي غيرناطق اظهار (b) ٻہ رقمي غير ناطق اظهار

(c) غيرناطق اظهارن جو ميل (d) هڪ رقمي غير ناطق اظهار

(iii) $3x + 2y - 3$ آهي هڪ آلجبري:

(a) اظهار (b) مساوات (c) جملو (d) غيرمساوات

(iv) $3x^2y + 5y^4 - 10$ جو درجو آهي:

(a) 4 (b) 5

(c) 3 (d) 10

(v) $\sqrt{7}$ آهي:

(a) هڪ رقمي غير ناطق اظهار جو (b) ٽہ رقمي غير ناطق اظهار جو

(c) ٻہ رقمي غير ناطق اظهار جو (d) غير ناطق اظهارن جي ميل جو

(vi) ٻن گهڻ رقمي اظهارن $p(x)$ ۽ $q(x)$ جي وند اپت $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ جتي $q(x) \neq 0$ انکي چئبو آهي:

(a) هڪ ناطق اظهار (b) هڪ غير ناطق اظهار

(c) گهڻ رقمي (d) ميل (conjugate)

(vii) $\dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x+y}$ جي برابر آهي:

(a) $\dfrac{2x}{x^2-y^2}$ (b) $\dfrac{2y}{x^2-y^2}$ (c) $\dfrac{-2x}{x^2-y^2}$ (d) $\dfrac{-2y}{x^2-y^2}$

(viii) $2 - \sqrt{3}$ جو ميل آهي:

(a) $2+\sqrt{3}$ (b) $-2-\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{2} + 3$ (d) $\sqrt{3} - 4$

(ix) $a^3 - 3ab(a-b) - b^3$ جي برابر آهي:

(a) $(a-b)^3$ (b) $(a+b)^3$ (c) $a^3 + b^3$ (d) $a^3 - b^3$

(x) جيڪڏهن $a+b=5$ ۽ $a-b=3$ تہ ab جو ملهہ آهي:

(a) 4 (b) 5 (c) 3 (d) 6

(xi) $\left(5+\sqrt{15}\right)\left(5-\sqrt{15}\right)$ جي برابر آهي:

(a) 10 (b) 15 (c) 25 (d) 30

(xii) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ جي برابر آهي:

(a) $(a+b-c)^2$ (b) $(a+b+c)^2$ (c) $(a-b+c)^2$ (d) $(a+b+c)^3$

.1 خال پريو:

(i) ڪنهن به گهڻ رقميءَ جو درجو ________ آهي.

(ii) غير ناطق اظهار $2-\sqrt{3}$ جو ميل (Conjugate) ________ آهي.

(iii) ڪنهن به گهڻ رقمي اظهار $2x^3+x^2-4x^4+7x-9$ جو درجو ________ آهي.

(iv) $\dfrac{\sqrt{x}}{3x+5}$ هڪ ________ اظهار آهي $x \neq \dfrac{-5}{3}$

(v) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$ ________ جي برابر آهي.

خلاصو

- هڪ گهڻ رقمي اظهار هڪ بدلجندڙ x ۾ لکي سگهجي ٿو.
- جيئن $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}x^1+a_n$ هڪ گهڻ رقمي اظهار اڪثر $p(x)$ طور ظاهر ڪبو آهي.
- هڪ آلجبري اظهار جيڪو $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ جي صورت ۾ لکي سگهجي ٿو، جتي $q(x) \neq 0$ ، ۽ $p(x), q(x)$ ٻئي گهڻ رقمي اظهار آهن انڪي x ۾ ناطق اظهار چئبو آهي.
- هڪ آلجبري اظهار جيڪو $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ جي صورت ۾ نٿو لکي سگهجي، جتي $q(x) \neq 0$، ۽ $p(x), q(x)$ ٻئي گهڻ رقمي اظهار آهن انڪي x ۾ غير ناطق اظهار چئبو آهي.
- هڪ گهڻ رقمي اظهار جيڪو صرف هڪ درجو رکي ٿو انکي هڪ درجي گهڻ رقمي چئبو آهي.
- هڪ گهڻ رقمي اظهار جيڪو ٻه درجا رکي ٿو انکي ٻه درجي گهڻ رقمي چئبو آهي.
- هڪ گهڻ رقمي اظهار جيڪو ٽي درجا رکي ٿو انکي ٽه درجي گهڻ رقمي چئبو آهي.

- هڪ ڳھڻ رقمي اظهار جيڪو تي يا ٽي ڪان وڌيڪ درجا رکي ٿو انکي وڌيڪ رقمي چئبو آهي.
- الجبري اظهار $\frac{p(x)}{q(x)}$ کي پنهجي سادي صورت ۾ چئجي ٿو، جيڪڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ ڳھڻ رقمي اظهار آهن پنهي جا عددي سرا (منڊ) سچن عددن سان ۽ انهن کي ڪو بہ عام جزو (Common Factor) نہ آهي.
- $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ ۽ $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$
- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$
- $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ ۽ $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- هڪ آلجبري اظهار کي غير ناطق اظهار (Surd) چئبو آهي، جنهن کي گهٽ ۾
- گهٽ هڪ رقم يي مول جي نشانيءَ واري هجي. مثال طور: $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{\frac{3}{10}}$ غير ناطق اظهار (Surd) آهن.
- جيڪڏهن $\sqrt[n]{a}$ هڪ غير ناطق اظهار آهي ۽ 'a' مڪمل (nth) وين سگهہ نہ آهي تہ پوءِ انکي (nth) وين ترتيب جو غير ناطق اظهار (Surd) چئبو آهي.
- هڪ غيرناطق اظهار جنهن کي هڪ رقم هجي انکي هڪ رقمي اظهار(Monomial) چئبو آهي.
- هڪ غير ناطق عدد جيڪو بن هڪ رقمي ناطق اظهارن جو جوڙ يا فرق رکي يا هڪ درجي غير ناطق اظهار ۽ ناطق اظهار جو جوڙ هجي انکي بہ درجي ناطق اظهار چئبو آهي.
- $\left(\sqrt{a}+c\sqrt{b}\right)$ ۽ $\left(\sqrt{a}-c\sqrt{b}\right)$ نمونی جا اظهار هڪٻئي جا غير ناطق ميل آهن.
- $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ۽ $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ مهيا ڪيل $a>0$ ۽ $b>0$
- جيڪڏهن بن غير ناطق اظهارن (Surds) جي ضرب اپت هڪ ناطق عدد آهي تہ پوءِ هر هڪ غير ناطق اظهار (Surd) کي هڪٻئي جو ناطق ڪندڙ جزو چئبو آهي.
- ڏنل غيرناطق اظهار (surd) جي ضرب جو عمل انجي ناطق ڪندڙ جزي سان ناطق عدد حاصل ڪرڻ لاءِ ضرب اپت کي غيرناطق اظهار (surd) جو ناطق ٿيڻ چئبو آهي.