يونٽ 4

جزالھڻ
Factorization

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- هيٺين نمونن جي اظهارن جي جزن لهڻ جي عمل کي Recall ڪندا
  - $ka + kb + kc$ (سيني رقمن ۾ مشترڪ جزا)
  - $ac + ad + bc + bd$ (رقمن جي جوڙي ۾ مشترڪ جزا)
  - $a^2 \pm 2ab + b^2$ (مڪمل چورس)
  - $a^2 - b^2$ (ٻن چورسن جو فرق)
  - $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2$
  - $(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$
- هيٺين نمونن جي اظهارن جا جزا لهڻ.

  نمونو I: $a^4 + a^2b^2 + b^4$ ۽ $a^4 + b^4$

  نمونو II: $x^2 + px + q$

  نمونو III: $ax^2 + bx + c$

  نمونو IV:

  $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d) + k$

  $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + k$

  $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + kx^2$

  نمونو V: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ۽ $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

  نمونو VI: $a^3 \pm b^3$
- پاڇي واري سڌيان کي بيان ڪري ثابت ڪرڻ ۽ مثالن سان وضاحت ڪرڻ
- پاڇي لهڻ (ونڊ ڪرڻ کان سواءِ) جڏهن مليل گھڻ رقمي، هڪ درجي واري گھڻ رقمي سان ونڊ ٿيل هجي.
- گھڻ رقمي جي ٻڙي جي وضاحت ڪرڻ.
- جزن وارو سڌيان بيان ۽ ثابت ڪريو
- مصنوعي ورهاست واري طريقي کي بيان ڪرڻ.
- ونڊ اپت ۽ پاڇي معلوم ڪرڻ جڏهن مليل گھڻ رقمي، هڪ درجي واري گھڻ رقمي سان ونڊ ٿيل هجي.
- نامعلوم جي قيمت معلوم ڪرڻ، جيڪڏهن گھڻ رقمي جون ٻڙيون مليل هجن.
- نامعلوم جي قيمت معلوم ڪرڻ جيڪڏهن گھڻ رقمي جا جزا مليل هجن.
- جزن وارو سڌيان استعمال ڪري ٽن درجن واري گھڻ رقمي جا جزا لهڻ.

تعارف:

اسان جزا لهڻ بابت مطالعو ڪنداسين، جنهن جو رياضي ۾ اهم ڪردار آهي. اهي منجهيل اظهارن کي (آسان) سادي اظهارن ۾ تبديل ڪرڻ لاءِ مددگار آهن

4.1 جزا لهڻ Factorization

فرض ڪريو ته $p(x), q(x)$ ۽ $r(x)$ ٽي گهڻ رقميون آهن، اهڙي طرح جو هتي $p(x) \times q(x) = r(x)$ آهي. گهڻ رقمي $p(x), r(x)$ ۽ $q(x)$ جي ضرب اپت آهي ۽ گهڻ رقمي $p(x)$ ۽ $q(x)$ کي $r(x)$ جا جزا چئبو آهي.

گهڻ رقمين جي جزن جا ڪجهه مثال هيٺ ڏجن ٿا.

(i) $6x^2y^3 = (2\times3)(x\times x)(y\times y\times y)$

(ii) $ax + aby + abcz = a(x + by + bcz)$

(iii) $5x + 15xy = 5x(1+3y)$

(iv) $x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

4.1.1 هيٺين نمونن جي اظهارن جي جزن لهڻ جي عمل کي ياد ڪرڻ

(i) $ka + kb + kc$ (سيني رقمن ۾ مشترڪ جزا)

(ii) $ac + ad + bc + bd$ (رقمن جي جوڙي ۾ مشترڪ جزا)

(iii) $a^2 \pm 2ab + b^2$ (مڪمل چورس)

(iv) $a^2 - b^2$ (ٻن چورسن جو فرق)

(v) $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2$

(vi) $(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$

(i) $ka + kb + kc$ نموني جا جزا لهڻ

اچو ته هيٺيان مثال ڏسو

مثال 01 $10a + 15b - 20c$ جا جزا لهو.

حل: $10a + 15b - 20c$

$5(2a + 3b - 4c)$ (5 عدد اظهار مان common ڪرڻ سان)

مثال 02 $\frac{4}{9}-\frac{8}{12}x-\frac{16}{15}xy$ جا جزا لهو

حل:

$$\frac{4}{9}-\frac{8}{12}x-\frac{16}{15}xy$$

$$=\frac{4}{3\cdot 3}-\frac{4\cdot 2\cdot}{3\cdot 4}x-\frac{4\ \ 4}{3\cdot 5}xy$$

$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}\right)-x\frac{4}{5}xy$ ($\frac{4}{3}$ کي اظهارن مان common ڪرڻ سان)

(ii) $ac+ad+bc+bd$ نموني جا جزا لهڻ.

هيٺيان مثال ڏسو.

مثال 01 $3a-ac-3c+c^2$ جا جزا لهو.

حل:

$$3a-ac-3c+c^2$$
$$= a(3-c)-c(3-c)$$
$$= (3-c)(a-c)$$

مثال 02 $9y^2z+3xyz-9xy^2-3x^2y$ جا جزا لهو.

حل:

$$9y^2z+3xyz-9xy^2-3x^2y$$
$$= 3yz(3y+x)-3xy(3y+x)$$
$$= (3y+x)(3yz-3xy)$$
$$= (3y+x)\times 3y(z-x)$$

$3y\ (x+3y)(z-x)$ گهربل جزا آهن.

(iii) $a^2\pm 2ab+b^2$ نموني جا جزا لهڻ

اسان کي خبر آهي ته

$$a^2+2ab+b^2=(a)^2+2(a)(b)+(b)^2=(a+b)^2$$

۽

$$a^2-2ab+b^2=(a)^2-2(a)(b)+(b)^2=(a-b)^2$$

اچو تہ هينيان مثال ڏسون.

مثال 01 $16a^2 + 40ab + 25b^2$ جا جزا لهو.

حل: $16a^2 + 40ab + 25b^2$

$$= (4a)^2 + 2(4a)(5b) + (5b)^2$$
$$= (4a + 5b)^2 \qquad [\because a^2+2ab+b^2=(a+b)^2]$$

مثال 02 $4p^2 - 28\,pq + 49q^2$ جا جزا لهو.

حل: $4p^2 - 28\,pq + 49q^2$

$$= (2p)^2 - 2(2p)(7q) + (7q)^2$$
$$= (2p - 7q)^2 \qquad [\because a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2]$$

(iv) $a^2 - b^2$ نموني جا جزا لهڻ.

اچو تہ هينيان مثال ڏسون.

مثال 01 $4x^2 - 1$ جا جزا لهو.

حل: $4x^2 - 1$

$$= (2x)^2 - (1)^2$$
$$= (2x - 1)(2x + 1) \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$

مثال 02 $96y^2 - 6z^2$ جا جزا لهو.

حل: $96y^2 - 6z^2$

$$= 6(16y^2 - z^2)$$
$$= 6[(4y)^2 - z^2]$$
$$= 6(4y - z)(4y + z) \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$

مثال 03 $9r^4 - (6s - t^2)^2$ جا جزا لهو.

حل: $9r^4 - (6s - t^2)^2$

$$= (3r^2)^2 - (6s - t^2)^2$$
$$= [3r^2 - (6s - t^2)][3r^2 + (6s - t^2)], \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$
$$= (3r^2 - 6s + t^2)(3r^2 + 6s - t^2)$$

(v) $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2$ نموني جا جزا لهڻ.

اچو تہ هينيان مثال ڏسون.

مثال 01 $x^2 + 4xy^2 + 4y^4 - 4z^2$ جا جزا لهو.

حل: $x^2 + 4xy^2 + 4y^4 - 4z^2$

$$= \{(x)^2 + 2(x)(2y^2) + (2y^2)^2\} - (2z)^2$$
$$= (x + 2y^2)^2 - (2z)^2$$
$$= \{(x+2y^2) + 2z\}\{(x + 2y^2) - 2z\} \quad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$
$$= (x + 2y^2 + 2z)(x + 2y^2 - 2z)$$

مثال 02 $9p^2 - 6pq + q^2 - 9r^2$ جا جزا لهو.

حل: $9p^2 - 6pq + q^2 - 9r^2$

$$= (3p)^2 - 2(3p)(q) + q^2 - (3r)^2$$
$$= (3p - q)^2 - (3r)^2$$
$$= (3p - q + 3r)(3p - q - 3r) \quad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$

(vi) $\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2$ نموني جا جزا لهڻ.

مثال 01 $\left(\sqrt{xy}\right)^2 - \left(\sqrt{z}\right)^2$ جا جزا لهو.

حل: $\left(\sqrt{xy}\right)^2 - \left(\sqrt{z}\right)^2$

$$= \left(\sqrt{xy} - \sqrt{z}\right)\left(\sqrt{xy} + \sqrt{z}\right) \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

مشق 4.1

.1 هينين جا جزا لهو.

(i) $4x + 16y + 24z$ (ii) $x^2 + 3x^2y + 4x^2y^2z$

(iii) $3pqr + 6pqt + 3pqs$ (iv) $9qr(s^2 + t^2) + 18q^2r^2(s^2 + t^2)$

(v) $\dfrac{z^2x}{16} - \dfrac{x^2z^2}{8} + \dfrac{x^2z^3}{12}$ (vi) $a(x-y) - a^2b(x-y) + a^2b^2(x-y)$

.2 هيٺين جا جزا لهو.

(i) $7x + xz + 7z + z^2$

(ii) $9a^2b + 18ab^2 - 6ac - 12bc$

(iii) $6t - 12p + 4tq - 8pq$

(iv) $r^2 + 9rs - 7rs - 63s^2$

(v) $\frac{y^2}{4} - \frac{y^2z}{4} - \frac{z^2t}{9} + \frac{z^3t}{9}$

(vi) $\frac{10xy}{11} + \frac{5xz}{11} - \frac{14y^2}{11} - \frac{7yz}{11}$

.3 جزا معلوم ڪريو.

(i) $4a^2 + 12ab + 9b^2$

(ii) $36x^4 + 12x^2 + 1$

(iii) $x^2 + 1 + \frac{1}{4x^2}$

(iv) $81y^2 + 144yz + 64z^2$

(v) $625 + 50a^2b + a^4b^2$

(vi) $a^2 + 0.4a + 0.04$

.4 جزا لهو.

(i) $b^4 - 4b^2c^2 + 4c^4$

(ii) $\frac{9}{4}x^4 - 2 + \frac{4}{9x^4}$

(iii) $2a^3b^3 - 16a^2b^4 + 32ab^5$

(iv) $9(p+q)^2 - 6(p+q)r^2 + r^4$

(v) $x^2y^2 - 0.1xy + 0.0025$

(vi) $(a-b)^2 - 18(a-b) + 81$

.5 جزا لهو.

(i) $4a^2 - 9b^2$

(ii) $16x^2 - 25y^2$

(iii) $100x^2z^2 - y^4$

(iv) $\frac{1}{100}x^4 - 100y^4$

(v) $\frac{64}{81}f^2 - \frac{81}{64}g^4$

(vi) $\frac{x^4}{121} - 121y^2$

.6 جزا معلوم ڪريو.

(i) $(2x+z)^2 - (2x-z)^2$

(ii) $(4a-9b)^2 - (2a+5b)^2$

(iii) $169x^4 - (3t+4)^2$

(iv) $(9x^2 - 4y^2)^2 - (4x^2 - y^2)^2$

(v) $\left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(b^2 - 2 + \frac{1}{b^2}\right)$

(vi) $9x^2 + \frac{1}{9x^2} - 4y^2 - \frac{1}{4y^2} + 4$

.7 جزا معلوم ڪريو.

(i) $(x^2 + 2xy + y^2) - 9z^4$

(ii) $(4a^2 + 8ab^2 + 4b^4) - 9c^2$

(iii) $16d^4 - (c^4 - 2c^2d + d^2)$

(iv) $4(x^2 + 2xy^2 + y^4) - 9y^6$

(v) $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3$

(vi) $4x^2 - y^2 - 2y - 1$

8. جزا لکو.

(i) $(\sqrt{ab})^2 - (\sqrt{c})^2$ (ii) $(\sqrt{4x})^2 - (\sqrt{9y})^2$

(iii) $(\sqrt{yz})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)^2$ (iv) $xzt - \frac{1}{t}$

4.1.2 هيٺين نمونن جي اظهارن جا جزا لکو.

نمونو I: $a^4 + a^2b^2 + b^4$ or $a^4 + 4b^4$

هن نموني ۾ اُهي آلجبري اظهار شامل آهن جيڪي نه مڪمل چورس ۽ نه وري ٻن چورسن جي فرق واري صورت ۾ آهن.

هن نموني جي جزن لکڻ لاءِ هيٺين مثالن ۾ وضاحت ڪيل آهي.

مثال 01 $a^4 + a^2b^2 + b^4$ جا جزا لکو.

حل: $a^4 + a^2b^2 + b^4$

$= (a^4 + b^4) + a^2b^2$ (رقمن کي ترتيب ۾ لکو)

$= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - 2a^2b^2 + a^2b^2$ ($2a^2b^2$ کي جوڙ ۽ ڪٽ ڪرڻ سان)

$= \{(a^2)^2 + 2(a^2)(b^2) + (b^2)^2\} - a^2b^2$

$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$

$= \{(a^2 + b^2) - ab\}\{(a^2 + b^2) + ab\}$ $[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$

$= (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$ گهربل جزا آهن.

مثال 02 $a^4 + 4b^4$ جا جزا لکو.

حل: $a^4 + 4b^4$

$= (a^2)^2 + (2b^2)^2$

$= (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 2(a^2)(2b^2) - 2(a^2)(2b^2)$ [$2(a^2)(2b^2)$ جوڙ ۽ ڪٽ ڪرڻ سان]

$= \{(a^2)^2 + 2(a^2)(2b^2) + (2b^2)^2\} - 4a^2b^2$

$= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2$

$= \{(a^2 + 2b^2) - 2ab\}\{(a^2 + 2b^2) + 2ab\}$ $[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$

$(a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$ گهربل جزا آهن.

مثال 03 x^8+x^4+1 جا جزا لهو.

حل: x^8+x^4+1

$$= (x^8+1)+x^4$$
$$= \{(x^4)^2+(1)^2+2(x^4)(1)\}-2(x^4)(1)+x^4$$
$$= (x^4+1)^2-x^4 \qquad \boxed{[2(x^4)(1) \text{ جوڙ ۽ ڪٽ ڪرڻ سان}]}$$
$$= (x^4+1)^2-(x^2)^2$$
$$= \{(x^4+1)-x^2\}\{(x^4+1)+x^2\} \qquad [\because a^2-b^2=(a-b)(a+b)]$$
$$= \{(x^4+x^2+1)\}(x^4-x^2+1)$$
$$= \{(x^2+1)^2-2x^2+x^2\}(x^4-x^2+1)$$
$$= \{(x^2+1)^2-x^2\}(x^4-x^2+1)$$

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$ گهربل جزا آهن.

نمونو II: x^2+px+q

هن نموني جي اظهار جي جزن لهڻ لاءِ وچين رقم کي ٽوڙبو آهي.

مثال 01 $y^2+7y+12$ جا جزا لهو.

حل: $y^2+7y+12$

$$= y^2+3y+4y+12$$
$$= y(y+3)+4(y+3)$$
$$= (y+3)(y+4)$$

مثال 02 $x^2+13xy-30y^2$ جا جزا لهو.

حل: $x^2+13xy-30y^2$

$$= x^2+15xy-2xy-30y^2$$
$$= x(x+15)-2y(x+15)$$
$$= (x+15)(x-2y)$$

نمونو III: $ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ جڏهن ته

$ax^2+bx+c=0$ جي اظهار جا جزا لهڻ لاءِ هيٺين قدمن جي ضرورت آهي.

(i) ac جي ضرب اپت لهو جڏهن تہ a ، عددي منيو آهي x^2 جو ۽ c مستقل آهي.

(ii) ٻہ عدد x_1 ۽ x_2 لهو، جيئن تہ $x_1+x_2=b$ ۽ $x_1x_2=ac$

هن طريقي جي وضاحت لاءِ هينيان مثال مددگار ثابت ٿيندا

مثال 01 $10x^2-19xy+6y^2$ جا جزا لهو.

حل: $10x^2-19xy+6y^2$

$= 10x^2-15xy-4xy+6y^2$

$= 5x(2x-3y)-2y(2x-3y)$

$= (2x-3y)(5x-2y)$

مثال 02 $4x^2+12x+5$ جا جزا لهو.

حل: $4x^2+12x+5$

$= 4x^2+10x+2x+5$

$= 2x(2x+5)+1(2x+5)$

$= (2x+5)(2x+1)$

مشق 4.2

1. هينين جا جزا لهو.

(i) $a^4+a^2x^2+x^4$ (ii) b^4+b^2+1

(iii) $a^8+a^4x^4+x^8$ (iv) z^8+z^4+1

2. جزا لهو.

(i) x^4+4y^2 (ii) $36x^4z^4+9y^4$

(iii) $4t^4+625$ (iv) $4t^4+1$

3. جزا لهو.

(i) $x^2+3x-10$ (ii) $a^2b^2-3ab-10$

(iii) $y^2+7y-98$ (iv) $^2y^2z^2+2xyz-24$

4. جزا لهو.

(i) $9y^2+21yz-8z^2$ (ii) $42x^2-8x-2$

(iii) $4x^2+12x+5$ (iv) $3x^2-38xy-13y^2$

نمونو IV: $(ax^2+bx+c)(ax^2+bx+d)+k$

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+k$

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+kx^2$

اسان هنن نمونن جي اظهارن جي جزن لهڻ جي طريقي کي هيٺين مثالن جي مدد سان واضح ڪنداسين.

مثال 01 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-120$ جا جزا لهو

حل: $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-120$

فرض ڪريو ته $x^2+5x=t$ ته پوءِ

$$
\begin{aligned}
&(t+4)(t+6)-120\\
&= t^2+10t+24-120\\
&= t^2+10t-96\\
&= t^2-6t+16t-96 \qquad \text{(جزن ڪرڻ سان)}\\
&= t(t-6)+16(t-6)\\
&= (t-6)(t+16)\\
&= (x^2+5x-6)(x^2+5x+16) \qquad \because\ t=x^2+5x\\
&= (x^2-x+6x-6)(x^2+5x+16)\\
&= [x(x-1)+6(x-1)](x^2+5x+16)\\
&= (x-1)(x+6)(x^2+5x+16)
\end{aligned}
$$

مثال 02 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$ جا جزا لهو.

حل: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$

هتي $1+4=2+3=5$

$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-15$ (جزن کي ترتيب ۾ رکڻ سان)

$= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-15$

$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-15$

$= (t+4)(t+6)-15$ جڏهن تہ $t = x^2+5x$

$= t^2+10t+24-15$

$= t^2+10t+9$

$= (t+1)(t+9)$

$= (x^2+5x+1)(x^2+5x+9) \quad \because t = x^2+5x$

مثال 03 $(x+2)(x-2)(x-3)(x+3)+(-2x^2)$ جا جزا لهو.

حل: $(x+2)(x-2)(x-3)(x+3)+(-2x^2)$

$= (x+2)(x-2)(x-3)(x+3)+(-2x^2)$

$= (x^2-2^2)(x^2-3^2)-2x^2 \quad [\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2]$

$= (x^2-4)(x^2-9)-2x^2$

$= x^4-9x^2-4x^4+36-2x^2$

$= x^4-15x^2+36$

$= x^4-3x^2-12x^2+36$

$= x^2(x^2-3)-12(x^2-3)$

$= (x^2-3)(x^2-12)$

$= [(x)^2-(\sqrt{3})^2][(x)^2-(2\sqrt{3})^2]$

$= (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})$

مشق 4.3

1. هينين جا جزا لهو.

(i) $(x^2-4x-5)(x^2-4x-12)-144$ (ii) $(x^2+5x+6)(x^2+5x+4)-3$

(iii) $(x^2-2x+3)(x^2-2x+4)-42$ (iv) $(x^2-8x+4)(x^2-8x-4)+15$

(v) $(x^2+9x-1)(x^2+9x+5)-7$ (vi) $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-120$

2. جزا لهو.

(i) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-48$ (ii) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$

(iii) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-99$ (iv) $(x-3)(x-5)(x-7)(x-9)+15$

(v) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-224$ (vi) $(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)-255$

3. جزا لهو.

(i) $(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)-2x^2$ (ii) $(x-1)(x+1)(x+3)(x-3)-3x^2-23$

(iii) $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)+4x^2$ (iv) $(x-2)(x+2)(x-4)(x+4)-14x^2$

(v) $(x+5)(x+2)(x-5)(x-2)+4x^2$ (vi) $(x^2-x-12)(x^2-x-12)-x^2$

نمونو V: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ۽ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

اسان کي خبر آهي تہ

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$

۽

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

تہ متي ڏنل نموني جي جزن کي سمجهڻ لاءِ هينيان مثال مددگار ٿيندا.

مثال 01 جزا لهو (i) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$ (ii) $64x^3-12x^2+\frac{3x}{4}-\frac{1}{64}$

حل (i): $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$

$$=(2x)^3+3(2x)^2(y)+3(2x)(y)^2+(y)^3 \quad [\because (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3]$$

$$=(2x+y)^3$$

حل (ii): $64x^3 - 12x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{64}$

$$=(4x)^3 - 3(4x)^2\left(\frac{1}{4}\right) + 3(4x)\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 \qquad [\because (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3]$$

$$=\left(4x - \frac{1}{4}\right)^3$$

مشق 4.4

1. هيٺين جا جزا لهو.

(i) $b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$

(ii) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

(iii) $64x^3 + 12x^2 + 3x + \frac{1}{64}$

(iv) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

(v) $\frac{1}{27} + \frac{1}{3}y^2 + y^4 + y^6$

(vi) $\frac{8}{27}x^3 + 2x^2y + 3xy + \frac{27}{8}y^3$

(vii) $\frac{64}{9} + \frac{16}{3}x^2 + 4x + x^3$

(viii) $\frac{z^3}{8} + \frac{z^2y}{4} + \frac{zy^2}{6} + \frac{y^3}{27}$

2. جزا لهو.

(i) $d^3 - 6d^2c + 12dc^2 - 8c^3$

(ii) $x^6 - \frac{16}{3}x^4 + 4x^2 - \frac{64}{9}$

(iii) $\frac{x^3}{125} - \frac{3}{25}x^2y + \frac{3}{5}xy^2 - y^3$

(iv) $125z^3 - 75z^2y^2 + 15zy^4 - y^6$

(v) $\frac{z^3}{27} - \frac{z^2y}{3} + 36zy^2 - 216y^3$

(vi) $\frac{b^6}{27} - \frac{b^4c^2}{4} + \frac{b^2c^4}{6} - \frac{c^6}{8}$

(vii) $216 + \frac{9}{2}z^2 - 54z - \frac{z^3}{8}$

(viii) $\frac{8}{27}x^3 - 2x^2y + 3xy - \frac{27}{8}y^3$

نمونو VI: $a^3 \pm b^3$

اسان کي خبر آهي تہ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$,

۽ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

تہ مٿي ڏنل نموني جي جزن کي سمجھڻ لاءِ هيٺيان مثال مددگار ٿيندا.

مثال 01 — $8x^3+27$ جا جزا لهو

حل: $8x^3+27$

$$= (2x)^3+(3)^3$$
$$= (2x+3)[(2x)^2-(2x)(3)+(3)^2] \quad [\because a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)]$$
$$= (2x+3)(4x^2-6x+9)$$
$$8x^3+27=(2x+3)(4x^2-6x+9)$$

تنهنكري

مثال 02 — $108x^3-256xz^3$ جا جزا لهو

حل: $108x^4-256xz^3$

$$= 4x(27x^3-64z^3)$$
$$= 4x[(3x)^3-(4z)^3] \quad [\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)]$$
$$= 4x(3x-4z)[(3x)^2+(3x)(4z)+(4z)^2]$$
$$= 4x(3x-4z)(9x^2+12xz+16z^2)$$
$$108x^3-256xz^3=4x(3x-4z)[(9x^2+12xz+16z^2).$$

تنهنكري

مشق 4.5

1. هيٺين جا جزا لهو.

(i) x^3+8y^3 (ii) $a^{11}+a^2b^9$ (iii) a^6+1 (iv) a^3b^3+512

(v) $a^3b^3+27b^6$ (vi) $\frac{x^3}{125}+\frac{125}{x^3}$ (vii) $x^9+x^3y^6z^9$ (viii) $\frac{x^6}{27}+\frac{8}{x^3}$

2. جزا لهو.

(i) x^3-8y^3 (ii) x^9-8y^9 (iii) $1000-\frac{x^3y^3}{125}$ (iv) a^6-b^6

(v) $\frac{x^6}{64}-\frac{64}{x^{12}}$ (vi) $x^{12}-y^{12}$ (vii) $\frac{27}{x^3}-8y^6$ (viii) $8x^6-\frac{1}{729}$

4.2 پاچي ۽ جزن وارو سڏيان

ٽي يا وڌيڪ درجن وارين گهڻ رقمي اظهارن جي جزن معلوم ڪرڻ لاءِ گهٽو ڪري پاچي ۽ جزن وارا سڏيان استعمال ٿيندا آهن.

4.2.1: پاچي واري سڏيان کي بيان ڪري ثابت ڪريو، ۽ مثالن سان وضاحت ڪريو.

بيان:

جيڪڏهن ڪنهن $n \geq 1$ درجي واري گهڻ رقمي $p(x)$ کي $(x-a)$ سان ونڊ ڪجي ته پاچي $R = p(a)$ ملندي.

اسان $p(x)$ کي $p(x)=q(x)(x-a)+R$ لکي سگهون ٿا.(جنهن کي ونڊ جو الگورٿم چئبو آهي)

جڏهن ته R مستقل (پاچي) آهيءَ $q(x)$ جون درجو $p(x)$ کان هڪ گهٽ آهي.

ثابتي:

ونڊ جي الگورٿم تحت

$$p(x) = q(x)(x-a)+R,$$

فرض ڪريو ته $x=a$ ته پوءِ

$$p(a) = q(a)\times (a-a)+R,$$

$$p(a) = q(a)\times 0+R$$

$$\Rightarrow \quad p(a) = R = \text{پاچي.}$$

4.2.2: پاچي معلوم ڪريو (ونڊ ڪرڻ کان سواءِ) جڏهن مليل گهڻ رقمي هڪ درجي واري گهڻ رقمي سان ورڇ ٿيل هجي.

هينيان مثال، پاچي واري سڏيان استعمال ڪرڻ ۾ اسان لاءِ مددگار ثابت ٿيندا.

مثال 01 پاچي لهو جڏهن x^2-3x+4 کي $x-2$ سان ونڊ ڪجي.

حل: فرض ڪريو ته $p(x)=x^2-3x+4$

هتي پاچي واري سڏيان مطابق $a=2$ آهي.

$$p(2) = (2)^2 - 3\,(2) + 4$$
$$= 4 - 6 + 4 = 8 - 6 = 2$$
$$p(2) = R = 2$$

تنهنڪري پاچي 2 آهي

مثال 02 k جو ملهه لهو، جيڪڏهن گهڻ رقمي x^3+kx^2+3x-4 کي $x+2$ سان ونڊ ڪجي ته پاچي -2 بچي.

حل: هتي $p(x)=x^3+kx^2+3x-4$

$$\therefore \quad p(-2) = (-2)^3 + k(-2)^2 + 3(-2) - 4$$

پاچي $=-2$

$$\Rightarrow \quad -2 = 4k - 18$$

$$\Rightarrow \quad 4k = -2 + 18$$

$$\Rightarrow \quad 4k = 16$$

$$\Rightarrow \quad k = 4,$$

تنهنڪري k جو ملهه آهي 4

4.2.3: گهڻ رقمي جي ٻڙي

جيڪڏهن $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$ حقيقي منديئ (coefficient) واري گهڻ رقمي هجي ۽ جيڪڏهن گهڻ رقمي $p(x)$ ۾ $x=a$ وجهڻ سان $p(a)=0$ ملي ته “a” کي $p(x)$ گهڻي رقمي جي ٻڙي چئبو آهي.

مثال 03 $P(x) = x + 7$ ته پوءِ -7 گهڻ رقمي جي ٻڙي جيئن $P(-7) = -7 + 7 = 0$

4.2.4: جزن وارو سديان بيان ڪري ثابت ڪريو.

بيان: جيڪڏهن $p(a) = 0$ ته هڪ درجي گهڻ رقمي $x-a$ ، $p(x)$ گهڻ رقمي جو جزو آهي.

ثابتي: فرض ڪريو ته $q(x)$ کي $x - a$ سان ونڊ ڪجي ته پوءِ

$$p(x)=(x-a)q(x)+R$$

پاچي واري سديان مطابق $R = p(a)$

تنهنڪري. $p(x)=q(x)(x-a)+p(a)$

جيڪڏهن $p(a)=0$ هجي ته پوءِ $p(x)=q(x)(x-a)$ ٿيندو. جڏهن ته $(x-a)$ گهڻ رقمي $p(x)$ جو هڪ جزو آهي

هيٺيان مثال جزن واري سڌيان کي استعمال ڪرڻ ۾ مددگار ثابت ٿيندا.

مثال 01 معلوم ڪريو ته $x+2$ ، جزو آهي $x^3+\frac{9}{2}x^2+3x-4$ جو يا نه

حل: فرض ڪريو ته $p(x)=x^3+\frac{9x^2}{2}+3x-4$

$$\therefore\ R=p(-2)=(-2)^3+\frac{9}{2}(-2)^2+3(-2)-4$$
$$=-8+18-6-4$$
$$=-18+18=0\Rightarrow R=0,$$

پاڇي = 0

x + 2 جزو آهي P(x) جو

مثال 02 معلوم ڪريو ته x + 3 جزو آهي $x^3-x^2-8x+12$ جو.

حل: فرض ڪريو ته $p(x)=x^3-x^2-8x+12$

$$R=p(-3)=(-3)^3-(-3)^2-8(-3)+12$$
$$=-27-9+24+12$$
$$R=p(-3)=-36+36=0$$

x+3 جزو آهي $x^3-x^2-8x+12$ جو.

مشق 4.6

1. پاڇي وارو سڌيان استعمال ڪري پاڇي لھو جڏھن

(i) $x^3-6x^2+11x-8$ کي $(x-1)$ سان ونڊ ڪجي

(ii) $x^3+6x^2+11x+8$ کي $(x+1)$ سان ونڊ ڪجي

(iii) x^3-x^2+14 کي $(x-2)$ سان ونڊ ڪجي

(iv) $x^3-3x^2+4x-14$ کي $(x+2)$ سان ونڊ ڪجي

(v) $(2y-1)^3+6(3+4y)-9$ کي $(2y+1)$ سان ونڊ ڪجي

(vi) $4y^3-4y+3$ کي $(2y-1)$ سان ونڊ ڪجي

(vii) $(2y+1)^3-6(3-4y)-10$ کي $(2y-1)$ سان ونڊ ڪجي

(viii) $x^4+x^2y^2+y^4$ کي $(x-y)$ سان ونڊ ڪجي

4. m جو ملهه لهو، جيڪڏهن $p(y) = my^3+4y^2+3y-4$ ۽ $q(y) = y^3-4y+m$ کي $(y-3)$ سان ونڊ ڪجي ته ساڳي پاڇي بچي.

5. جيڪڏهن گهڻ رقمي $4x^3-7x^2+6x-3k$ کي $(x+2)$ سان پورو وونڊيسگهجي ته k جو ملهه لهو.

6. جيڪڏهن گهڻ رقمي $3y^2-4ry-4r^2$ جو جزو آهي $(y+2)$ ته r جو ملهه لهو.

4.3 مصنوعي ورهاست (Synthetic Division)

مصنوعي ورهاست، گهڻ رقمي کي، هڪ درجي گهڻ رقمي سان ونڊ ڪرڻ جوطريقو آهي.

4.3.1: مصنوعي (Synthetic) ورهاست وارو طريقو بيان ڪريو.

مصنوعي ورهاست واري طريقي کي هيٺ ڏنل مثالن جي مدد سان بيان ڪيو ويوآهي.

مثال 01 مصنوعي ورهاست کي استعمال ڪري گهڻ رقمي $p(x)=x^3-3x^2+5x+7$ کي $(x-1)$ سان ونڊ ڪريو.

حل: هتي ، $x-1=0 \Rightarrow x=1$, (1 ضرب ڪندڙ آهي)

گهڻ رقمي جا عدد سَرَ (منڊيا) لکو

تنهنڪري

1	1	−3	5	7	(قطار 1)
		1	−2	3	(قطار 2)
	1	−2	3	10= R	(قطار 3)

تفصيل

قدم I: گهڻ رقمي P(x) جا عددي سَرَ (منڊيا) ۽ منتقل پهرين قطار ۾ وڏ نندائي ترتيب ۾ لکو.

قدم II: پهريون عددي سرو (منڊيو) 3 قطار ۾ ان جي هيٺيان (1 قطار) ساڳي جاء تي لکو.

قدم III: ضرب ڪندڙ 1 ۽ عددي سَرَي 1 جي ضرب اپت کي ٻئي عددي سري جي هيٺيان قطار 2 ۾ لکو۽ جوڙ ڪري، ان جو جوڙ قطار 3 ۾ لکو ۽ ساڳي عمل کي دهرايو.

ته پوء $q(x)=x^2-2x+3$ ۽ $p(1) = R = 10$

نوٽ:	$q(x)$ جو درجو= [$p(x)$ جو درجو-1] 3-1=2
	ڪريو ته ۽ 3 قطار جو آخري رڪن، پاڇي آهي.

4.3.2 مصنوعي ورهاست کي استعمال ڪري

(a) وند اپت ۽ پاڇي معلوم ڪريو جڏهن مليل گهڻ رقمي هڪ درجي واري گهڻ رقمي سان وند ٿيل آهي.

(b) نامعلومن جي قيمت معلوم ڪريو، جيڪڏهن گهڻ رقمين جون ٻڙيو مليل هجن.

(c) نامعلومن جي قيمت معلوم ڪريو جيڪڏهن گهڻ رقمي جا جزا مليل هجن.

مثال 01 وند اپت ۽ پاڇي معلوم ڪريو جڏهن،

$p(x) = x^4-12x+50x^2-84x+49$ کي هڪ درجي گهڻ رقمي $x-5$ سان وند ڪجي.

حل: اسان کي مليل آهي ته, $p(x)=x^4-12x^3+50x^2-84x+49$

۽ هڪ درجي گهڻ رقمي $x-a=x-5, a=5$ ضرب ڪندڙ $p(5)=R=?$ ۽ $q(x)=?$ آهي.

وند اپت ۽ پاڇي معلوم ڪرڻ لاءِ اسان مصنوعي ورهاست استعمال ڪنداسين.

(قطار 1)	49	−84	50	−12	1	5
(قطار 2)	−45	75	−35	5		
(قطار 3)	4 = R	−9	15	−7	1	

ته پوءِ $q(x)=x^3-7x^2+15x-9$ ۽ $R=4$ گهربل ونداپت ۽ پاڇي آهن.

نوٽ: $R\neq 0$ تنهنڪري $(x-5)$ مليل گهڻ رقمي $p(x)$ جو جزو نه آهي.

مثال 02 m جي ڪهڙي ملهه لاءِ ، 1 گهڻ رقمي جي ٻڙي آهي.

حل: مليل آهي ته $p(x)= x^3-mx^2+x-1$

هتي ضرب ڪندڙ $a=1$ آهي

ته مصنوعي ورهاست واري طريقي مطابق اسان وٽ

$\lfloor 1$	1	$-m$	1	-1	(قطار 1)
		1	$1-m$	$2-m$	(قطار 2)
	1	$1-m$	$2-m$	$1-m=R,$	(قطار 3)

جيئن تہ 1 گهڻ رقمي جي بڙي آهي تنهنڪري x-1 هڪ جزو آهي

هتي R=0

تہ پوءِ $\Rightarrow \quad 1-m=0$

$$m=1$$

تہ پوءِ گهڻ رقمي جي بڙي لاءِ m برابر ٿيندي 1 جي.

مشق 4.7

1. مصنوعي ورهاست واري طريقي سان هيٺ ڏنل گهڻ رقمين کي وند ڪريو ۽ انهن جي وند اپت ۽ پاڇي پڻ معلوم ڪريو.

(i) $p(x)=x^3-x^2+x-1$ *by* $x-1$ (ii) $p(x)=x^3-x^2-x-1$ *by* $x+1$

(iii) $p(x)=x^3-6x^2+11x-6$ *by* $x+2$ (iv) $p(x)=x^3+6x^2-11x-6$ *by* $x-2$

(v) $p(x)=x^4-x^3+x^2-x-1$ *by* $x+2$ (vi) $p(x)=x^4+x^3-x^2+x-1$ *by* $x-1$

(vii) $p(x)=x^5+x^3-2x^2-3$ *by* $x+3$ (viii) $p(x)=x^5-x^4+x^3-3x^2+6x-6$ *by* $x-3$

(ix) $p(x)=2x^4-2x^3+100x^2-168x+95$ *by* $x-2$

(x) $p(x)=6x^4-72x^3+300x^2-564x+270$ *by* $x-5$

2. K جي ڪهڙي ملهہ لاءِ، گهڻ رقمي $p(x)=x^3+x^2-14x-k$ جو جزو -2 بڙي آهي.

3. m جي ڪهڙي ملهہ لاءِ $x^3+mx^2-7x-10$ جو جزو x-2 ٿيندو.

4. m جي ڪهڙي ملهہ لاءِ $x^3-7x^2+6x-3m$ جو x+2 جزو آهي.

5. k جي ڪهڙي ملهہ لاءِ $P(x)=2x^3-4mx^2+x-1$ گهڻ رقمي -1 جي ، بڙي آهي.

4.4 ٽه درجي گهڻ رقمين جا جزا لهڻ

اسان اڳ ۾ هڪ درجي ۽ ٻه درجي گهڻ رقمين کي حل ڪرڻ جا طريقا پڙهي آيا آهيون. هاڻ اسان جزن واري سڌيان کي استعمال ڪري ٽه درجي گهڻ رقمين جو ملهه لهنداسين.

4.4.1 جزن وارو سڌيان استعمال ڪري ٽه درجن گهڻ رقمين جا جزا لهڻ

ٽه درجي گهڻ رقمين جا جزا، جزن واري سڌيان سان لهڻ جي لاءِ اهو ضروري آهي ته گهڻ رقمين جو هڪ جزو يا وڌيڪ پڙيو معلوم هجن.

اچو ته هينيان مثال ڏسون

مثال 01 $x^3-6x^2+11x-6$ جا جزا لهو

حل: فرض ڪريو ته $p(x)=x^3-6x^2+11x-6$

6 جا جزا آهن $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

$$p(1)=(1)^3-6(1)^2+11(1)-6$$
$$p(1)=1-6+11-6$$
$$p(1)=0$$

تنهنڪري P(x) جو x-1 هڪ جزو آهي

مصنوعي ورهاست ذريعي ونڊ

قطار (1	-6	11	-6	1	$\lvert 1$
قطار (2	6	-5	1		
قطار (3	0	6	-5	1	

$$p(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$$
$$=(x-1)\{x^2-2x-3x+6\}$$
$$=(x-1)\{x(x-2)-3(x-2)\}$$

مثال 02 x^3-4x^2+x+6 جا جزا لهو

حل: جيڪڏهن x-1 جزو آهي P(x) جو تہ پوء

$$p(1)=(1)^3-4(1)^2+1+6$$
$$=1-4+1+6$$
$$=4\neq 0$$

تنهنڪري x-1 جزو نہ آهي P(x) جو

جيڪڏهن x+1 جزو آهي P(x) جو تہ پوء

$$p(-1)=(-1)^3-4(-1)^2+1(-1)+6$$
$$=-1-4-1+6$$
$$=0$$

تنهنڪري x+1 جزو آهي P(x) جو

مصنوعي ورهاست جي طريقي سان

-1	1	-4	1	6	(قطار 1)
		-1	5	-6	(قطار 2)
	1	-5	6	0	(قطار 3)

$$p(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$$
$$=(x+1)\{x^2-2x-3x+6\}$$
$$=(x+1)\{x(x-2)-3(x-2)\}$$
$$p(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$$

مشق 4.8

جزن واري طريقي سان جزا معلوم ڪريو.

1. x^3-x^2+x-1
2. x^3+x^2-x-1
3. $x^3-6x^2+11x-6$
4. $x^3+6x^2-11x-6$
5. x^3-2x^2+x-1
6. $6x^3+7x^2-x-2$
7. $x^3+8x^2+19x+12$
8. $2x^3+9x^2+10x+3$
9. $x^3+12x^2+44x+48$

ورجايل مشق 4

.1 صحيح ۽ غلط سوال

هينيان جملا غور سان پڙهو ۽ صحيح بيان لاءِ T ، غلط بيان لاءِ F تي گول لڳايو.

(i)	$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$	T/F
(ii)	$a^3+27=(a+3)(a^2-3a+9)$	T/F
(iii)	$b^3-8=(b-2)(b^2+2b+4)$	T/F
(iv)	$a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a+b)^2$	T/F
(v)	$a^6+b^6=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$	T/F
(vi)	$a^5+b^5=(a+b)^5$	T/F

.2 هينين جملن کي مڪمل ڪريو.

(i) $16x^2-y^4=(4x-y^2)$ ___________

(ii) $x^3-64y^3=(x-4y)$ ___________

(iii) $x^2+5x+6=(x+2)$ ___________

(iv) $x^2+y^2=(x-y)^2$ ___________

(v) $a^3+27b^3=(a+3b)$ ___________

.3 صحيح جواب تي ($a^2+2ab+b^2-c$) ٽڪ ڪرو.

(i) $a^2+2a-24$ جا جزا آهن

(a)	$a+4,\ a-6$	(b)	$a-4,\ a+6$
(c)	$a+3,\ a-8$	(d)	$a+8,\ a-3$

(ii) $a^2+2ab+b^2-c^2$ جا جزا آهن

(a)	$(a-b+c)(x-b-c)$	(b)	$(a+b+c)(a-b-c)$
(c)	$(a+b+c)(a+b-c)$	(d)	$(a+b+c)(a-b-c)$

(v) $\frac{1}{x+y}+\frac{y}{x^2-y^2}=$ جي سادي صورت آهي.

(a) $\frac{y+1}{x^2-y^2}$ (b) $\frac{x}{x^2-y^2}$

(c) $\frac{y}{x^2-y^2}$ (d) $\frac{y-1}{x^2-y^2}$

(vi) m جو ملھ لھو، جڏھن x^2+4x+m مڪمل چورس آهي.

(a) 8 (b) -8

(c) 4 (d) -4

خلاصو

- جزا لهڻ هڪ عمل آهي، جنهن ۾ اسان ڏنل گهڻ رقمي (اظهار) کي ٻه يا ٻن کان وڌيڪ اظهارن جي ضرب اپت ۾ ظاهر ڪندا آهيون.
- فارمولا:

(i) $ka + kb + kc = k(a + b + c)$

(ii) $\underline{ac + ad} + \underline{bc + bd} = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2 = (a + b)^2$

(iv) $a^2 - 2ab + b^2 = (a)^2 - 2(a)(b) + (b)^2 = (a - b)^2$

(v) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

- پاڇي ۾ جزن وارا سٽيان، ٻه اهم سٽيان آهن، هي اهڙي قسم جي گهڻ رقمين کي حل ڪرڻ لاءِ استعمال ٿيندا آهن، جن کي فارمولا جي مدد سان حل ڪري نه سگهبو آهي.

(i) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$ (ii) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$

(iii) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (iv) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

- گهڻ رقمين جون پڙيون

جيڪڏهن ڪو مخصوص عدد، گهڻ رقمي P(x) ۾ بدلجندڙ x جو متبادل آهي،جيئن P(a) جي قيمت ٻڙي آهي، ته پوءِ a کي گهڻ رقمي (Px) جو ٻڙي چئبوآهي.

- جزن وارو سٽيان

جزن واري سٽيان کي هن ريت بيان ڪري سگهبو آهي

جيڪڏهن $p(a)=0$ ته هڪ درجي گهڻ رقمي $(x-a)$ ، گهڻ رقمي $p(x)$ جو هڪ جزوآهي.

مصنوعي ورهاست واري طريقي جي وضاحت

قدم I: گهڻ رقميP(x) جا عددي سِرا (منيا) ۽ مستقل (Constant) پهرين قطار ۾ ننڍ وڏائي ترتيب ۾ لکو.

قدمII: پهريون عددي سِرو (منيو) ، 3 قطار ۾ ان جي هيٺان 1 قطار جي ساڳي جاءِ تي لکو.

قدمIII: عددي سري ۽ ان جي ضربيندڙ 2 جي ضرب اپت کي قطار 2 جي هيٺان لکو ۽ جوڙ ڪري ان جو جوڙ قطار 3 ۾ لکو ۽ ساڳي عمل کي ورجايو.