يونٽ 5

آلجبري هيرا ڦيري

ALGEBRAIC MANIPULATION

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي مطالعي کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- آلجبري اظهارن جو جزن ذريعي وڏو عام پورو ونڊيندڙ (H.C.F) ۽ ننڍي عام ييج اپت معلوم ڪندا.
- ونڊ ذريعي ، وڏو عام پوروونڊيندڙ ۽ ننڍي عام ينج اپت ظاهر ڪندا.
- وڏي عام پوري ونڊيندڙ ۽ ننڍي عام ينج اپت جي وچ ۾ تعلق بابت جاڻي سگهندا.
- وڏو عام پورو وندنيڙ ء ننڍي عام ينج اپت سان تعلق رکندڙ روزمره زندگي جاحساب حل ڪري سگهندا.
- وڏو عام پورو ونڊيندڙ ۽ ننڍي عام ينج اپت کي استعمال ڪري، جوڙ، ڪٽ، ضرب ۽ ونڊ تي مشتمل اٽپوري اظهارن کي حل ڪري سگهندا.
- آلجبري اظهارن جو جزن ۽ ونڊ ذريعي ٻيومول معلوم ڪري سگهندا.

تعارف:

آلجبري هيرا ڦيري (manipulation) ۽ آلجبري اظهارن جي هيراڦيري سان تعلق رکي ٿي جي اظهار اڪثر ڪري سادي صورت ۾ ، يا اهڙي صورت ۾ هوندو جنهن کي آساني سان حل ڪري سگهجي، اها آلجبري اظهارن جي حسابن کي حل ڪرڻ لاءِ اهم ۽ بنيادي مهارت آهي.

هن يونٽ ۾ اسان جزن ۽ وند ذريعي آلجبري اظهارن جي وڏي عام پوري ونڊيندڙ ۽ ننڍي عام پينج اپت ۽ پيو مول ڪي، ۽ ان جي روزمره زندگي ۾ استعمال تي بحث ڪنداسين.

5.1 وڏو عام پورو ونڊيندڙ (HCF) / (GCD) ۽ ننڍي عام پينج اپت (LCM)

5.1.1: آلجبري اظهار جي جزن ذريعي وڏو عام پورو ونڊيندڙ ۽ ننڍي عام پينج اپت معلوم ڪريو.

(a) جزن ذريعي وڏو عام پورو ونڊيندڙ لهڻ

مليل اظهار جو وڏو عام پورو ونڊيندڙ معلوم ڪرڻ لاءِ پهريائين اسان هر هڪ گهڻ رقمي جا جزا معلوم ڪنداسين ، ان کانپوءِ اسان مشترڪ جزن جي ضرب ڪنداسين. مشترڪ جزن جي هن ضرب اپت کي، جزن ذريعي وڏو عام پورو ونڊيندڙ چئبو آهي.

نوٽ: جيڪڏهن ڪوبه مشترڪ جزو نه هجي ته پوءِ و ع پ و ا ٿيندو آهي.

مثال 01 هيٺين اظهارن جو جزن ذريعي و . ع . پ . و لهو.

(i) $x^2+12x+35$ ۽ x^2+x-20

(ii) x^2+4x+3 ۽ $(x+1)^2, x^2-1$

حل: (i) اسان ڏنل اظهارن $x^2+12x+35$ ۽ x^2+x-20 جا جزا لهنداسين، جيڪي هن ريت آهن.

$$x^2+x-20 = x^2+5x-4x-20$$
$$= x(x+5)-4(x+5)$$
$$=(x+5)(x-4)$$

۽ $$x^2+12x+35 = x^2+7x+5x+35$$
$$= x(x+7)+5(x+7)$$
$$= (x+5)(x+7)$$

ٻنهي اظهارن ۾ مشترڪ جزو آهي $(x+5)$.

تنهنڪري و ع پ و ٿيندو $(x+5)$

حل: (ii) اسان ڏنل اظهارن x^2-1 ,$(x+1)^2$ ۽ x^2+4x+3 جا جزا لهنداسين، جيڪي هيٺ ڏجن ٿا.

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$$
$$x^2-1 = (x+1)(x-1)$$
۽
$$x^2+4x+3 = x^2+3x+x+3$$
$$= x(x+3)+1(x+3)$$
$$= (x+3)(x+1)$$

تنهي ڏنل اظهارن ۾ مشترڪ جزو $(x+1)$ آهي.

تنهنڪري و ع پ و ٿيندو $(x+1)$

مثال 02 هيٺين اظهارن جو جزن ذريعي و ع پ و لهو.

حل: a^3-b^3 , a^6-b^6

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^6-b^6 = (a^2)^3-(b^2)^3$$
$$= (a^2-b^2)\{(a^2)^2+a^2b^2+(b^2)^2\}$$
$$= (a-b)(a+b)\{(a^2)^2+2a^2b^2+(b^2)^2-a^2b^2\}$$
$$= (a-b)(a+b)\{(a^2+b^2)^2-(ab)^2\}$$
$$= (a-b)(a+b)(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)$$
$$\text{H.C.F} = (a-b)(a^2+b^2+ab) = a^3- a^3-b^3$$

(b) جزن ذريعي ننڍي عام ينج اپت لهڻ.

ٻه يا ٻن کان وڌيڪ گهڻ رقمين جي ن ع پ ا، ننڍي درجي وارو اهڙو اظهار آهي جيڪو مليل گهڻ رقمي سان ونڊ جي سگهندو.

جزن ذريعي ن ع پ ا لهڻ لاءِ اسان هيٺين فارمولا استعمال ڪنداسين.

ن ع پ ا = مشترڪ جزن جي ضرب x غير مشترڪ جزن جي ضرب.

مثال 01 x^3-8 ۽ x^2+x-6 جي ن ع پ ا لهو.

حل: اسان هاڻ x^3-8 ۽ x^2+x-6 جا جزا لهنداسين.

$$\therefore \quad x^3-8 = (x)^3-(2)^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$$
۽
$$x^2+x-6 = x^2+3x-2x-6 = x(x+3)-2(x+3)$$
$$= (x+3)(x-2)$$

مشترڪ جزو آهي $(x-2)$

غير مشترڪ جزا آهن $(x+3)(x^2+2x+4)$

ن ع پ ا = مشترڪ جزا × غير مشترڪ جزا

ن ع پ ا = $(x-2)(x^2+2x+4)(x+3)=(x^3-8)(x+3)$

مثال 2: x^3-1 ۽ x^3-2x^2+x جي ننڍي عام پنج اپت لهو.

اسان ڏنل اظهارن x^3-1 ۽ x^3-2x^2+x جا جزا لهنداسين.

$\therefore \quad x^3-1=(x)^3-(1)^3=(x-1)(x^2+x+1)$

۽ $\quad x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$

ن ع پ ا = مشترڪ جزا × غير مشترڪ جزا

ن ع پ ا = $x(x-1)^2(x^2+x+1)$

5.1.2 وڏو عام پورو وندبيندڙ ۽ ننڍي عام پنج اپت جي وچ ۾ تعلق بابت چاڻ. ين گهڻ

رقمين P(x) ۽ q(x) جي صورت ۾ و ع پ و ۽ ن ع پ ا، جو تعلق هينئين طرح بيان ڪبو آهي.

و ع پ و × ن ع پ ا = $p(x) \times q(x)$

مثال 1: هيٺ ڏنل گهڻ رقمين P(x) ۽ q(x) جي، ن ع پ ا ۽ و ع پ و لهو ۽ ن ع پ ا ۽ و ع پ و جي پاڻ ۾ تعلق جي چڪاس / تصديق ڪريو.

$p(x)=x^2-5x+6$ ۽ $q(x)=x^2-9$.

حل: سڀ کا پهريائين، ڏنل گهڻ رقمين P(x) ۽ q(x) جا ننڍي ۾ ننڍا جزا لهو

$$p(x)=x^2-5x+6$$
$$=x^2-3x-2x+6$$
$$=x(x-3)-2(x-3)$$
$$=(x-3)(x-2)$$

۽ $\quad q(x)=x^2-9=(x-3)(x+3)$

و ع پ و = $(x-3)$

۽ ن ع پ ا = $(x-2)(x-3)(x+3)=(x-2)(x^2-9)$

هان P(x) ۽ q(x) جي ضرب اپت لهو

so, $\quad p(x)\times q(x)=(x^2-5x+6)\times(x^2-9) \quad \ldots$ (i)

$\quad$ LCM × HCF $=(x-2)(x-3)(x+3)\times(x-3)$

$\Rightarrow \quad =(x^2-5x+6)\times(x^2-9) \quad \ldots$ (ii)

(i) ۽ (ii) جي مليل نتيجن مان اسان کي معلوم ٿيو ته

و ع پ و X ن ع پ ا = P(x) X q(x)

تنهنڪري تصديق ٿي وئي.

مثال 2: هيٺين گهڻ رقمين جي فارمولا جي مدد سان ن ع پ ا ء لهو

$q(x)= x^2+8x+12$ ۽ $p(x)= x^2+14x+48$

حل: پهريائين اسان P(x) ۽ q(x) جو و ع پ و لهنداسين

$$p(x)= x^2+14x+48$$
$$= x^2+8x+6x+48$$
$$= x(x+8)+6(x+8)$$
$$= (x+6)(x+8)$$

۽

$$q(x) = x^2+8x+12$$
$$= x^2+6x+2x+12$$
$$= x(x+6)+2(x+6)$$
$$= (x+2)(x+6)$$

تنهنڪري P(x) ۽ q(x) جو و ع پ و آهي $x+6$

$$\text{LCM}=\frac{p(x)\times q(x)}{\text{HCF}}$$
$$=\frac{(x^2+14x+48)\times(x^2+8x+12)}{(x+6)}$$
$$=\frac{(x+6)(x+8)(x+2)(x+6)}{(x+6)}$$
$$\text{LCM} = (x+2)(x+6)(x+8).$$

5.1.3: جزن يا وند ذريعي و ع پ و ء ن ع پ ا کي ظاهر ڪرڻ.

ﮬ يا ﮬن ڪان وڌيڪ آلجبري اظهارن جو وند ذريعي و ع پ و لهڻ جو لاءِ هيٺيان مثال سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

مثال 1: هيٺ ڏنل گهڻ رقمين جو وند ذريعي و ع پ و معلوم ڪريو.

$2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ ۽ $2x^3 + 9x^2 + 11x + 2$

حل: اصلوڪي وند جي طريقي سان اسان کي ملندو.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 1 \\
\cline{2-2}
2x^3+7x^2+4x-4 & \; 2x^3+9x^2+11x+2 \\
 & -2x^3 \pm 7x^2 \pm 4x \mp 4 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 2x^2+7x+6
\end{array}
$$

وري

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x \\
\cline{2-2}
2x^2+7x+6 & \; 2x^3+7x^2+4x-4 \\
 & -2x^3 \pm 7x^2 \pm 6x + 0 \\
\cline{2-2}
 & \qquad -2x-4
\end{array}
$$

-2 کي (common) ڪرڻ سان

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x+3 \\
\cline{2-2}
x+2 & \; 2x^2+7x+6 \\
 & -2x^2 \pm 4x + 0 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 3x+6 \\
 & \quad -3x \pm 6 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 0 \quad 0
\end{array}
$$

گهربل و ع پ و آهي $x + 2$

مثال 2: هيٺ ڏنل گهڻ رقمين جو وند ذريعي و ع پ و معلوم ڪريو.

x^2, $x^2 + 2x + 1$ ۽ $x^2 + 4x + 3$

حل: پهريائين اسان ٻن اظهارن جو و ع پ و لهنداسين ۽ پوءِ ان جو ٽي **اظهار** سان و ع پ و لهنداسين،

هاڻ اصلوڪي وند جي طريقي سان اسان کي ملندو

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 1 \\
\cline{2-2}
x^2+2x+1 & x^2+4x+3 \\
 & x^2 \pm 2x \pm 1 \\
\cline{2-2}
 & \quad 2x+2
\end{array}
$$

اسان 2+ کي (common) خارج ڪرڻ سان

وري.

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x+1 & x^2+2x+1 \\ & -x^2 \pm x+0 \\ \hline & x+1 \\ & -x \pm 1 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

تہ x^2+2x+1 ، $x+1$ ۽ x^2+4x+3 جو و ع پ و آهي x+1

هاڻ اسان $x+1$ ۽ x^2-1 جو و ع پ و لهنداسين

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline x+1 & x^2-1 \\ & -x^2 \pm x \\ \hline & -x-1 \\ & \text{mxm1} \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

تنهي گهڻ رقمين جو و ع پ و آهي (x+1)

هاڻ اسان ونڊ ذريعي ن ع پ ا لهنداسين

ﮨ يا ﮨن کان وڌيڪ آلجبري اظهارن (گهڻ رقمين) جي ونڊ ذريعي ن ع پ

ا معلوم ڪرڻ لاءِ هيٺين فارمولا استعمال ڪنداسين

$$\text{L.C.M} = \frac{\text{ﮨن گهڻ رقمين جي ضرب اپت}}{\text{ﮨن گهڻ رقمين جو و ع پ و}}$$

مثال 3: $x^3-6x^2+11x-6$ ۽ x^3-4x+3 جي ن ع پ ا لهو

حل: $x^3-6x^2+11x-6$ ۽ x^3-4x+3

پهريائين عام ونڊ جي طريقي سان و ع پ و لهو

$$\begin{array}{r|l} x^3-4x+3 & x^3-6x^2+11x-6 \\ & -x^3 \qquad \pm 4x \pm 3 \\ \hline & -6x^2+15x-9 \end{array}$$

$-6x^2+15x-9$ مان -3 کي خارج ڪرڻ سان $2x^2-5x+3$ ملندو

هاڻ x^3-4x+3 by 2 کي 2 سان ضرب ڪرڻ سان

$$\begin{array}{r|l} & x+5 \\ \hline 2x^2-5x+3 & 2x^3-8x+6 \\ & -2x^3 \pm 3x \mp 5x^2 \\ \hline & 5x^2-11x+6 \end{array}$$

2 سان ضرب ڪرڻ سان ملندو ,$10x^2-22x+12$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 5 \\
2x^2-5x+3 & \; 10x^2-22x+12 \\
 & -10x^2 \quad 25x \pm 15 \\ \hline
 & \qquad 3x-3
\end{array}
$$

(x-1) ملندو سان ڪرڻ خارج 3 مان (3x-3)

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x-3 \\
x-1 & \; 2x^2-5x+3 \\
 & -2x^2 \quad 2x \\ \hline
 & \qquad -3x+3 \\
 & \qquad\; 3x \pm 3 \\ \hline
 & \qquad\; 0 \quad 0
\end{array}
$$

HCF = $x-1$

اسان کي خبر آهي ته $\dfrac{p(x).q(x)}{HCF}$

$$\text{L.C.M} = \frac{(x^3-6x^2+11x-6)(x^3-4x+3)}{x-1}$$

هاڻ $x^3-6x^2+11x-6$ کي $x-1$ سان ونڊ ڪريو.

$$
\begin{array}{r|l}
x-1 & \; x^3-6x^2+11x-6 \\
 & -x^3 \quad \mp x^2 \\ \hline
 & \qquad -5x^2+11x \\
 & \qquad -5x^2 \quad \pm 5x \\ \hline
 & \qquad\qquad 6x-6 \\
 & \qquad\quad -6x \pm 6 \\ \hline
 & \qquad\qquad 0 \quad 0
\end{array}
$$

L.C.M = $(x^3-4x+3)(x^2-5x+6)$

5.1.4 و ع پ ع ۽ ن ع پ ۽ سام تعلق رکندڙ روزمره زندگي جا حساب حل ڪريو.

مثال 1: ردا وٽ ڪپڙن جا ٻه ٽڪڙا آهن، هڪ 45 انچ ۽ ٻيو 90 انچ ويڪرو آهي. هوءَ ٻنهي پٽين کي برابر ويڪر ۾ ڪٽڻ چاهي ٿي. ته ڪيتري ويڪر واريون پٽيون ڪٽي سگهندي.

حل: هي حساب و ع پ و جي ذريعي حل ڪري سگهجي ٿو. چاڪاڻ ته هوءَ ڪپڙي کي ممڪن ويڪرن پٽين ۾ ڪٽڻ يا تقسيم ڪري ٿي

تنهنڪري 45 ۽ 90 جو و ع پ و ٿيندو

$$45 = 3\times 3\times 5$$
$$90 = 2\times 3\times 3\times 5$$

و ع پ و = مشترڪ جزن جي ضرب اپت

و ع پ و $= 3\times 3\times 5$

و ع پ و $= 45$

ته پوءِ ردا هر هڪ ٽڪر 45 انچن جي ويڪر جو ڪٽي.

مثال 2: سرفراز هر 8 ڏينهن کان پوءِ ۽ عمران هر 4 ڏينهن کان پوءِ ورزش ڪن ٿا. سرفراز ۽ عمران ٻنهي اڄ ورزش ڪئي آهي، ته ڪيترن ڏينهن کان پوءِ هوگڏجي ورزش ڪندا.

حل: هي حسان ن ع پ ا جي ذريعي حل ڪري سگهبو، چاڪاڻ ته اسان ورزش جو وقت معلوم ڪرڻ جي ڪوشش پيا ڪريون، اهو 8 ۽ 4 جي ن ع پ ا آهي.

$$8 = 2\times 2\times 2$$
$$4 = 2\times 2$$

ن ع پ ا = مشترڪ جزن جي ضرب اپت x غيرمشترڪ جزن جي ضرب اپت

ن ع پ ا = $2\times 2\times 2$

ن ع پ ا = 8

تنهنڪري اهي وري 8 ڏينهن کان پوءِ گڏجي ورزش ڪندا.

مشق 5.1

1. هيٺين اظهارن جو جزن ذريعي وڏو عام پورو ونديندڙ لهو.

(i) $72x^4y^5z^2$ ۽ $120x^3y^6z^8$ (ii) $18r^3s^4t^5, 120r^4s^3t^8$ ۽ $210r^7s^7t^3$

(iii) $x^2-3x-18$ ۽ x^2+5x+6 (iv) $4x^2-9$ ۽ $2x^2-5x+3$

(v) $(2a^2-8b^2), (4a^2+4ab-24b^2)$ ۽ $(2a^2-12ab+16b^2)$

(vi) x^3+x^2+x+1 ۽ x^3+3x^2+3x+1

2. هيٺين اظهارن جو وندو وسيلي وڏو عام پورو ونديندڙ لهو.

(i) x^2+3x+2 ۽ $3x^2-3x-6$

(ii) $2x^3+15x^2+31x+12$ ۽ $6x^3+46x^2+100x+8$

(iii) $x^3-5x^2+10x-8$ ۽ x^3-4x^2-7x-6

(iv) $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ ۽ $x^3+4x^2+4x+1x^3+5x^2+7x+2$

3. هيٺين اظهارن جي جزن وسيلي ننڍي عام پينج اپت لهو.

(i) $27a^4b^5c^2$ ۽ $81ab^2c^8$ (ii) $24p^2q^3r^4, 100p^5q^4r^5$ ۽ $300p^3qr^8$

(iii) $21x^2-14x$ ۽ x^2-5x+2 (iv) $x^2+11x+28$ ۽ x^2+x-12

(v) $6x^2+11x+3,\ 3x^2-2x-1$ ۽ $3x^2-11x-4$

(vi) x^2-y^2, x^3-y^3 ۽ $x^4+x^2y^2+y^4$

4. وند وسيلي ننڍي عام پينج اپت لهو.

(i) $x^2-25x+100$ ۽ x^2-x-20

(ii) $3x^2+14x+8$ ۽ $6x^2+x-2$

(iii) $x^2-y^2-z^2-2yz$ ۽ $y^2-z^2-x^2-2xz$

(iv) $3x^3+9x^2-84x$ ۽ $4x^4-24x^3+32x^2$

5. جيڪڏهن $x^2-11x+24$ ۽ $x+6$ جو و ع پ و.$(x-3)$ آهي ته ان جي ن ع پ ا لهو.

6. $x^2+8x+15$ ٻن اظهارن جو و ع پ و ۽ ن ع پ ا$(x+3)$ ۽ $(x^3+7x^2+7x-15)$ آهي، جيڪڏهن هڪ اظهار آهي ته ٻيو اظهار لهو.

7. ٻن ٻه درجي گهٽ رقمين جو و ع پ و ۽ ن ع پ ا، ترتيبوار $3x-2$ ۽ x^3+7x^2-4 آهن ته ٻنهي اظهارن جي ضرب اپت معلوم ڪريو.

8. و ع پ و ۽ ن ع پ ا جي وچ ۾ تعلق جي تصديق ڪرو.
$(HCF\times LCM = p(x)\ q(x))$ آهي جڏهن ته $p(x)=x^2-8x-20$ ۽ $q(x)=x^2-15x+50$ آهي.

9. هڪ واڍي ڪاٺ جا ڪجهه تختا ورتا، جن مان ڪجهه 12 س م ۽ ڪجهه 18 س م ڊگها آهن. هو انهن کي اهڙي طرح ڪٽڻ چاهي ٿو ته جيئن هن وٽ آساني سان استعمال ڪرڻ جي لاءِ هڪجيتري ماپ وارا تختا هجن. ڪاٺ جو ضايع ڪرڻ کان سواءِ هن کي ڪيتري ماپ جا تختا ڪٽڻ گهرجن

10. ٽرين A ۽ ٽرين B حيدرآباد ۾ صبح جو 10:30 تي بيهن ٿيون. ٽرين A هر 12 منٽن کان پوءِ ۽ ٽرين B هر 14 منٽن کان پوءِ بيهن ٿيون. ٻڌايو ته اهي ٻئي گڏ ڪڏهن بيهنديون.

5.2 آلجبري اٽپورن تي بنيادي عمل

جيڪڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ آلجبري اظهار آهن ۽ $q(x) \neq 0$ ته پوءِ $\frac{p(x)}{q(x)}$ هڪ آلجبري اٽپور سڏبو آهي.

آلجبري اٽپور جي سادي صورت، هڪ اهڙو اٽپور آهي، جنهن جي انس ۽ چيد ۾ 1 کانسواءِ ڪوبہ مشترڪ جزو نہ هجي. آلجبري اٽپور ۾ بنيادي عمل $(\times,\div,-,+)$ جو استعمال عام اٽپور وانگرئي ٿيندو آهي.

هينين مثالن ۾ اسان و ع پ و ۽ ن ع پ ا جي استعمال وسيلي بنيادي عملن وارن اٽپوري اظهارن کي سادي صورت ۾ ڪرڻ بابت وضاحت ڪنداسين.

5.2.1 وڏو عام پورو ونديندڙ ۽ ننڍي عام پنج اپت جي استعمال وسيلي، جوڙ، ڪٽ، ضرب ۽ ونڊ تي مشتمل اٽپوري اظهارن کي گهٽ ڪرڻ.

مثال 01 سادي صورت ۾ آڻيو. $\frac{x^2-x-6}{2x^2-5x-3}+\frac{1}{4x^2-1}$

حل:

$$\frac{x^2-x-6}{2x^2-5x-3}+\frac{1}{4x^2-1}$$

$$=\frac{x^2-3x+2x-6}{2x^2-6x+x-3}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$=\frac{x(x-3)+2(x-3)}{2x(x-3)+1(x-3)}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$=\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(2x+1)}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$ جڏهن $x \neq 3$

$$= \frac{(x+2)}{(2x+1)} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{(x+2)(2x-1)+1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{2x^2 - x + 4x - 2 + 1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{2x^2 + 3x - 1}{4x^2 - 1}$$

مثال 02 سادي صورت ۾ آڻيو $\frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x^2+x-6}$

حل:

$$\frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x^2+x-6}$$

$$= \frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x^2+4x-3x-6}$$

$$= \frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x(x+2)-3(x+2)}$$

$$= \frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{(x+2)(2x-3)}$$

$$= \frac{2(2x-3)-(x-4)}{(x+2)(2x-3)}$$

$$= \frac{4x-6-x+4}{(x+2)(2x-3)}$$

$$= \frac{3x-2}{2x^2+x-6}$$

مثال 03 : سادي صورت ۾ آڻيو $\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b}$

حل:

$$\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b}$$

$$\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b} = \frac{a(b^2+2)}{b(a+2)-3(a+2)} \times \frac{b^2-3b-3b+9}{b(b^2+2)}$$

$$= \frac{a}{(a+2)(b-3)} \times \frac{b(b-3)-3(b-3)}{b}$$

$$= \frac{a}{(a+2)(b-3)} \times \frac{(b-3)(b-3)}{b}$$

$$= \frac{a}{(a+2)(b-3)} \times \frac{(b-3)(b-3)}{b}$$

$$= \frac{a(b-3)}{b(a+2)}$$ جڏهن تہ $p + q \neq 0$

۽ $r + s \neq 0$

مثال 4: سادي صورت ۾ آڻيو. $\dfrac{p^2-q^2}{r^2+2rs+s^2} \div \dfrac{2(p+q)}{3(r+s)s}$

حل:

$$\frac{p^2-q^2}{r^2+2rs+s^2} \div \frac{2(p+q)}{3(r+s)s}$$

$$= \frac{(p+q)(p-q)}{(r+s)^2} \div \frac{2(p+q)}{3(r+s)s}$$

$$= \frac{(p+q)(p-q)}{(r+s)^2} \times \frac{3(r+s)s}{2(p+q)}$$

$$= \frac{3s(p-q)}{2(r+s)},$$

مشق 5.2

1. هيٺين کي سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $\dfrac{4x}{x^2+2x+1} + \dfrac{3}{x+1}$

(ii) $\dfrac{3}{x(2x+1)} + \dfrac{6x+7}{3x(x+1)}$

(iii) $\dfrac{3x-1}{x^2+2x+1} - \dfrac{4x^2-1}{x^2-2x-3}$

(iv) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{3}{x+3}$

(v) $\dfrac{x^2+4x+3}{5} \times \dfrac{10}{x+1}$

(vi) $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-6x-7} \div \dfrac{x+9}{x+1}$

(vii) $\left[\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}\right] \div \left[\dfrac{2}{x+3} - 1\right]$

(viii) $\left(\dfrac{1}{x^2-9}\right) \div \left(\dfrac{1}{x+3}\right) - \dfrac{3}{x-2}$

(ix) $\dfrac{1}{x^2+8x+15} + \dfrac{1}{x^2+7x+12} - \dfrac{1}{x^2+x-12}$

(x) $2\left(\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-16} + \dfrac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}\right) \times \dfrac{x^2-2x-8}{8x^2+2x+4}$.

5.3 آلجبري اظهار جو ٻيو مول

5.3.1 آلجبري اظهار جو جزن ۽ ونڊ ذريعي ٻيو مول لهو.

آلجبري اظهارن جو ٻيو مول لهڻ لاءِ اسان ٻن طريقن بابت بحث ڪنداسگهن.

(a) جزن ذريعي (b) ونڊ ذريعي

(a) جزن ذريعي ٻيو مول لهڻ جو طريقو

مثال 1: آلجبري اظهار $49x^2+126xy+81y^2$ جو ٻيو مول جزن ذريعي لهو.

حل:

$$49x^2+126xy+81y^2$$
$$= (7x)^2 + 2(7x)(9y) + (9y)^2,$$
$$= (7x+9y)^2,$$

تنهنڪري

$$\sqrt{49x^2+126xy+81y^2} = \sqrt{(7x+9y)^2} = 7x + 9y$$

(b) ونڊ ذريعي ٻيو مول لهڻ جو طريقو

مثال 02 $4x^4 + 12x^3 - 19x^2 - 42x + 49$ اظهار جو ونڊ ذريعي ٻيو مول لهو.

حل: طريقو هيٺ واضح ڪيو ويو آهي.

	$2x^2 + 3x - 7$
$2x^2$	$4x^4 + 12x^3 - 19x^2 - 42x + 49$
$+2x^2$	$\pm 4x^4$
$4x^2 + 3x$	$12x^3 - 19x^2 - 42x + 49$
$+3x$	$\pm 12x^3 \pm 9x^2$
$4x^2 + 6x - 7$	$-28x^2 - 42x + 49$
-7	$28x^2 \quad 42x \pm 49$
$4x^2 + 6x - 14$	$0 \quad 0 \quad 0$

تنهنڪري

$$\sqrt{4x^4 + 12x^3 - 19x^2 - 42x + 49} = 2x^2 + 3x - 7.$$

مثال 03 a جو اهڙو ملھ لھو جيڪو $36x^4+36x^3+57x^2+24x+a$ کي هڪ مڪمل چورس بڻائي.

حل: ونڊ واري طريقي سان اسان کي

$$6x^2+3x+4$$

$6x^2$ $+6x^2$	$36x^4+36x^3+57x^2+24x+a$ $\pm 36x^4$
$12x^2+3x$ $+3x$	$36x^3+57x^2-24x+a$ $\pm 36x^3 \pm 9x^2$
$12x^2+6x+4$ $+4$	$48x^2+24x+a$ $\pm 48x^2 \pm 24x \pm 16$
$12x^2+6x+8$	$a-16$

مليل اظهار مڪمل چورس ٿيندو جيڪڏهن

$$a-16=0 \Rightarrow a=16,$$

تنهنڪري $a=16$ ڏنل اظهارن کي مڪمل چورس بڻائيندو.

مثال 04 $x^4+4x^3+10x^2+5$ ۾ ڇا جوڙ ڪجي جو هڪ مڪمل چورس ملي.

حل: ونڊ واري طريقي سان اسان کي

$$x^2+2x+3$$

x^2 x^2	$x^4+4x^3+10x^2+5$ $\pm x^4$
$2x^2+3x$ $+3x$	$4x^3+0x^2+0x+5$ $\pm 4x^3 \pm 4x^2$
$2x^2+4x+3$ $+3$	$6x^2+0x+5$ $\pm 6x^2 \pm 0x \pm 9$
$2x^2+4x+6$	$-12x-4$

يا $-(12x+4)$

تنهنڪري $12x+4$ جي جوڙ ڪرڻ سان ڏنل اظهار مڪمل چورس ٿيندو.

مشق 5.3

1. هيٺين آلجبري اظهارن جو ٻيو مول جزن وسيلي لهو.

(i) $36x^2-60xy+25y^2$

(ii) $9x^2+\frac{1}{x^2}+6$

(iii) $4x^4y^4-\frac{12x^3y^3}{z^2}+\frac{9x^2y^2}{z^4}$

(iv) $36(3-2x)^2-48(3-2x)y+16y^2$

(v) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x-\frac{1}{x}\right)+3$

(vi) $(4x^2-4x+1)(9x^2-54x+81)$

(vii) $(x^2-2x+1)(x^2-6x+9)$

(viii) $(x^2+8x+15)(x^2+7x+10)(x^2+5x+6)$

2. هيٺين آلجبري اظهارن جو ٻيو مول ونڊ ذريعي لهو.

(i) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

(ii) $25x^4+40x^3+26x^2+8x+1$

(iii) $4x^4+8x^3+20x^2+16x+16$

(iv) $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+47-\frac{14y}{x}+\frac{14x}{y}$

(v) $x^2-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$

(vi) $x^2+\frac{y^2}{9}+9z^2+\frac{2xy}{3}+2yz+6xz$

(vii) $(x^2+\frac{1}{x^2})^2-8(x^2+\frac{1}{x^2})+16$

(viii) $x^6+\frac{1}{x^6}-4\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+6,\ x\neq 0$

3. $4x^4+4x^3+17x^2+8x+9$ ۾ ڇا جوڙ ڪجي، جو هڪ مڪمل چورس بڻائي.

4. $9x^6-12x^5+4x^4-18x^3-12x^2+18$ مان ڇا ڪٽ ڪجي جو هڪ مڪمل چورس بڻائي.

5. جو اهڙو ملھ جيڪو m', $9x^4+12x^3+34x^2+mx+25$ کي هڪ مڪمل چورس بڻائي.

6. p ۽ q جي ڪهڙن ملهن لاءِ $x^4+8x^3+30x^2+px+q$ اظهار هڪ مڪمل چورس ٿيندو.

ورجايل مشق 5

.1 غلط ۽ صحيح سوال

هيٺين جملن کي غور سان پڙهو ۽ صحيح بيان لاءِ “T” غلط بيان لاءِ “F” تي گول لڳايو.

(i) $y^2 - 4$ ۽ y-2 جو و ع پ و y-2 آهي. T / F

(ii) $a^2 - 1$ ۽ $a^3 - 1$ جو و ع پ و a+1 آهي. T / F

(iii) $x^3 + 1$. ۽ x+1 جي ن ع پ ا، $x^3 + 1$ آهي. T / F

(iv) $x^2 + y^2$ ۽ $x^2 - y^2$ جي ن ع پ ا، $x^4 - y^4$ آهي. T / F

(v) $a + 3$. ۽ $a^2 + 5a + 6$ جو و ع پ و $a^2 + 4a + 3$ آهي. T / F

.2 خال پريو.

(i) گهڻ رقمين جو و ع پ و معلوم ڪرڻ لاءِ ________ طريقا آهن.

(ii) ٻن اظهارن جي ن ع پ ا x و ع پ و = ________ آهي.

(iii) $y^2 - 5y$، $y + 6$ ۽ $y - 2$ جو و ع پ و ________ آهي.

(iv) y^2+5y+6 ۽ y^2+3y+2 جي ننڍي عام پينج اپت ________ آهي.

(v) $y^2 - \frac{1}{y^2}$ ۽ $y + \frac{1}{y}$ جو و ع پ و ________ آهي.

.3 صحيح جواب تي (✓) ٽڪ لڳايو.

(i) $x^3 - 8y^3$ ۽ $x^2 - 4xy + 4y^2$ جو و ع پ و آهي.

(a) $x - 4y$ (b) $x^2 + 2xy + y^2$
(c) $x + 2y$ (d) $(x - 2y)$

(ii) $(2y+3z)^5$ ۽ $(2y+3z)^3$ جي ن ع پ ا آهي.

(a) $2y+3z$ (b) $(2y+3z)^3$
(c) $(2y+3z)^2$ (d) $(2y+3z)^5$

(iii) $x^3 - y^3$ ۽ x^2+xy+y^2 جو و ع پ و آهي.

(a) $x+y$ (b) x^2+xy+y^2
(c) $x-y$ (d) $(x-y)^2$

(iv) $(x-y)^4$ ۽ $(x-y)^3$ جي ن ع پ ا آهي.

(a) $(x-y)$ (b) $(x-y)^3$
(c) $(x-y)^4$ (d) $(x-y)^7$

(v) $\frac{y}{x^2-y^2}+\frac{1}{x+y}$ جي سادي صورت آهي.

(a) $\frac{y+1}{x^2-y^2}$ (b) $\frac{x}{x^2-y^2}$

(c) $\frac{y}{x^2-y^2}$ (d) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$

(vi) $\frac{1}{5x-y}-\frac{y}{25x^2-y^2}$ جي سادي صورت آهي.

(a) $\frac{5x}{25x^2-y^2}$ (b) $\frac{5x}{5x^2-y}$

(c) $\frac{-5x}{5x+y}$ (d) $\frac{-5x}{25x^2-y^2}$

(vii) $\frac{a^3x^3+a^3y^3}{a^2(x+y)}=$ ______________ :

(a) ax^2+ay^2 (b) x^2+y^2

(c) $a(x^2-xy+y^2)$ (d) $a(x^2+xy+y^2)$

(viii) $\frac{b}{a+b}-\frac{a}{a-b}=$ ______________ :

(a) $\frac{a^2+b^2}{a-b}$ (b) $\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}$

(c) $\frac{a+b}{a^2-b^2}$ (d) $\frac{a-b}{a^2-b^2}$

(ix) ن ع پ ا = ______________

(a) $\frac{\text{HCF}}{\text{P×Q}}$ (b) $\frac{\text{P×Q}}{\text{HCF}}$

(c) $\frac{\text{P}}{\text{HCF}}$ (d) $\frac{Q}{\text{HCF}}$

(x) x^2-x+1 ۽ x^3+1 جي ن ع پ ا آهي.

(a) $x+1$ (b) x^2-x+1 (c) x^3+1 (d) x^2+x+1

خلاصو

- الجبري اظهارن جو و ع پ ۽ ننديي عام پنج اپت معلوم ڪرڻ لاءِ ٻه طريقا آهي.

  (1) جزن ذريعي (2) وندڻ ذريعي

- ٻن اظهارن جي ن ع ي ا x و ع پ و = ٻن اظهارن جي ضرب اپت
- ن ع ي ا ۽ و ع پ و جي مدد سان آلجبري اظهارن جي جوڙ، ڪٽ ضرب ۽ وندڻ معلوم ڪري سگهجي ٿي.
- آلجبري اظهارن جو ٻيومول معلوم ڪرڻ لاءِ ٻه طريقا آهن.

  (i) جزن واري طريقي سان ٻيومول

  (ii) وندڻ واري طريقي سان ٻيومول.