6.1 هڪ درجي مساواتون

6.1.1 هڪ متغير (بدلجندڙ) (Variable) واري هڪ درجي مساوات (Equation) دهرايو.

جيڪڏهن هڪ ڪليل جملي ۾ "=" شامل هجي ته اهڙي جملي کي مساوات چئبو آهي. هڪ متغير (بدلجندڙ) (Variable) سان هڪ درجي مساوات جيئن: $ax+b=0$ ۾ $a \neq 0$ مساواتون آهن. جتي متغير (بدلجندڙ) (Variable) کي "1" سگھه آهي جيڪا عام طور تي ظاهر نه ڪبي آهي.

6.1.2 ناطق عدد واريون هڪ درجي مساواتون حل ڪريو.

اڻ ڄاتل متغير (بدلجندڙ) (Variable) جيڪو مساوات ۾ ڏنل آهي انجي ملھ لاءِ مساوات درست ٿي وڃي ته انکي حل يا مساوات جو مول چئبو آهي.

مثال 01 حل ڪيو $3x-1=5$

حل

$$3x-1=5$$
$$\Rightarrow \quad 3x=5+1$$
$$\Rightarrow \quad x=\frac{6}{3}$$
$$\Rightarrow \quad x=2$$

جيئن ته $\{2\}$ حل سيٽ آهي.

مثال 02 حل ڪيو $\frac{2}{3}(x+3)=3+\frac{5x}{9}$

حل

$$\frac{2}{3}(x+3)=3+\frac{5x}{9}$$
$$9\times\frac{2}{3}(x+3)=9\times 3+9\times\frac{5x}{9}$$

ٻنهي پاسن 9 ضرب ڪرڻ سان

$$\Rightarrow \quad 3\times 2(x+3)=27+5x$$
$$\Rightarrow \quad 6\,(x+3)=27+5x$$
$$\Rightarrow \quad 6x+18=27+5x$$
$$\Rightarrow \quad 6x-5x=27-18$$
$$\Rightarrow \quad x=9$$

جيئن ته $\{9\}$ حل سيٽ آهي.

مثال 03 پيءُ جي عمر پٽ جي عمر کان تيرهوڻي آهي. اها چئن سالن کانپوءِ صرف پنجوڻي ٿي وڃي ٿي ته ٻنهي جون موجوده عمريون ٻڌايو.

حل فرض ڪريو ته پٽ جي موجوده عمر x سال آهي

۽ پيءُ جي موجوده عمر $13x$ سال آهي

ڏنل شرط مطابق $\quad 13\,x+4=5\,(x+4) \quad \therefore$

$\Rightarrow \quad 13x + 4 = 5x + 20$

بنهي پاسن کان $5x$ ڪٽ ڪرڻ سان $\Rightarrow \quad 13x - 5x + 4 = 5x - 5x + 20$

$\Rightarrow \quad 8x + 4 = 20$

بنهي پاسن کان 4 ڪٽ ڪرڻ سان $\Rightarrow \quad 8x + 4 - 4 = 20 - 4$

$\Rightarrow \quad 8x = 16$

بنهي پاسي ونڊ ڪرڻ سان $\Rightarrow \quad \frac{8x}{8} = \frac{16}{8}$

$\Rightarrow \quad x = 2$

جيئن تہ: پٽ جي موجوده عمر 2 سال

۽ پيءُ جي عمر $13 \times 2 = 26$ سال آهي.

مثال 04 جڏهن هڪ عدد جي $\frac{1}{3}$ حصي ۾ 16 جوڙ ڪرڻ سان جواب اصل عدد جو $2\frac{1}{3}$ اچي تہ عدد لکو.

حل: فرض ڪريو تہ عدد x آهي،

ڏنل شرط مطابق $16 + \frac{1}{3}x = 2\frac{1}{3}x$

$$\Rightarrow \quad 16 + \frac{1}{3}x = \frac{7}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \frac{7}{3}x - \frac{1}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\right)x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \left(\frac{7-1}{3}\right)x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \frac{6}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 16 \times 3 = 6x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{48}{6} = x \qquad \Rightarrow x = 8$$

6.1.3 مساوات جنهن ۾ مول شامل آهن، هڪ درجي مساوات جي نموني سادي ڪريو ۽ انهن جو حل لکو.

هڪ بدلجندڙ واري مساوات جنهن ۾ مولي اظهار شامل هجن انکي مولي مساوات (Radical Equation) چئبو آهي.

مثال طور: $\left(3\sqrt{t} - \sqrt{t+1} = 2\right)$ ۽ $\sqrt{x} = 8$ مولي مساواتون آهن.

هيٺين مثال جي مدد سان مساواتون حل ڪري سگهجن ٿيون.

مثال 01 حل ڪيو. $\sqrt{2x+11}=\sqrt{3x+7}$

حل:

$$\sqrt{2x+11}=\sqrt{3x+7}$$

$$\therefore \quad \left(\sqrt{2x+11}\right)^2=\left(\sqrt{3x+7}\right)^2 \quad \text{ٻئي پاسا چورس ڪرڻ سان}$$

$$\Rightarrow \quad 2x+11=3x+7$$

$$\Rightarrow \quad 2x-3x=7-11$$

$$\Rightarrow \quad -x=-4$$

$$\Rightarrow \quad x=4$$

جيئن تہ 4 حل سيٽ آهي.

چڪاس: مساوات ۾ $x=4$ جو ملهہ وجهڻ سان

$$\sqrt{2(4)+11}=\sqrt{3(4)+7}$$

$$\sqrt{8+11}=\sqrt{12+7}$$

$$\sqrt{19}=\sqrt{19}$$

نوٽ: ڪنهن وقت مليل جزمولي مساوات ڪي مطمئن نہ ڪندي آهي تہ انکي ٻاهريان جز چئبو آهي.

مشق 6.1

1. هيٺيون مساواتون حل ڪريو:

(i) $\frac{1}{4}x=5$ (ii) $\frac{x}{4}=-3$ (iii) $-5=\frac{-x}{6}$

(iv) $\frac{-x}{8}=-5$ (v) $y-\frac{2}{5}=-\frac{1}{3}$ (vi) $2y-\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$

(vii) $\frac{2x-4}{5}=\frac{5x-12}{4}$ (viii) $\frac{3x}{5}+7=\frac{2x}{3}$ (ix) $\frac{3x}{5}+7=\frac{2x}{3}+\frac{4x}{5}$

(x) $\frac{6}{2x-5}-\frac{4}{x-3}=0$ (xi) $\frac{7x-4}{15}=\frac{7x+4}{10}$

(xii) $\frac{3x-2}{10}=\frac{7x-3}{15}-2$ (xiii) $\frac{12x-3}{12}=\frac{12x+3}{8}$

(xiv) $\frac{1}{4}x+x=-3+\frac{1}{2}x$ (xv) $\frac{1}{3}+2m=m-\frac{3}{2}$

1. جڏهن هڪ عدد ۾ 25 جوڙ ڪري نتيجي کي اڌ ڪجي ٿو ته جواب اصل عدد جي ٽيڻ ٿئي ٿو، ٻڌايو ته عدد ڪهڙو آهي؟
2. هڪ عدد ۾ 4 جوڙ ڪرڻ سان نتيجو اصل عدد جي ٽيڻ مان 10 ڪٽ ڪرڻ جي برابر ٿئي ٿو، ٻڌايو ته عدد ڇا آهي.
3. بلال عليءَ کان 6 سال وڏو آهي، هاڻي کان 5 سال بعد سندن عمرين جو جوڙ 40 ٿيندو ته ٻنهي جي عمر ڪيتري آهي.
4. هيٺين مساواتن جو حل سيٽ لهو ۽ جوابن جي چڪاس پڻ ڪريو.

(i) $6+\sqrt{x}=7$ (ii) $\sqrt{x-9}=1$ (iii) $\sqrt{\frac{y}{4}}-2=3$

(iv) $\sqrt{4x+5}=\sqrt{3x-7}$ (v) $\frac{\sqrt{3y+12}}{7}=3$ (vi) $\sqrt{x}+9=7$

(vii) $\sqrt{25y-50}=10\sqrt{y+3}$ (viii) $\sqrt{x}-8=1$ (ix) $10\sqrt{x+20}=100$

6.2 قطعي ملهه واريون مساواتون

6.2.1 قطعي ملهه جي وضاحت:

هڪ حقيقي عدد x جو قطعي ملهه $|x|$ لکبو آهي. جيڪو ٻڙيءَ کان عدد تائين جو مفاصلو آهي، اهو ٻڙيءَ جي کابي پاسي هجي يا ساڄي پاسي هجي، تنهنڪري قطعي ملهه ڪڏهن به ڪاٽو نہ ٿيندو آهي.

جيڪڏهن x ڪو حقيقي عدد آهي، ته پوءِ x جو قطعي ملهه يا مقدار $|x|$ ظاهر ڪبو آهي، انکي هيٺين ريت بيان ڪبو.

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{جڏهن } x>0 \\ 0, & \text{جڏهن } x=0 \\ -x, & \text{جڏهن } x<0 \end{cases}$$

$$|-5|=5, |+7|=7, \left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}, |0|=0$$

نوٽ: – عدد جو قطعي ملهه هميشه غيرڪاٽو ٿيندو آهي.

6.2.2 مساواتون حل ڪريو، هڪ بدلجندڙ ۾ قطعي ملهه شامل آهن.

هيٺيان مثال قطعي ملهه تي مشتمل مساواتن کي حل ڪرڻ کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

مثال 01 $|5x-3|-2=3$

حل: مليل $|5x-3|-2=3$

$\Rightarrow \quad |5x-3|=5$

قطعي ملھ جي وصف مطابق

$5x-3=-5$ يا $5x-3=5$

$5x=-5+3$ يا $\Rightarrow 5x=5+3$

$5x=-2$ يا $\Rightarrow 5x=8$

$x=-\frac{2}{5}$ يا $\Rightarrow x=\frac{8}{5}$

تنھنڪري حل سيٽ آھي $\left\{\frac{8}{5}\ ,\ -\frac{2}{5}\right\}$

مثال 02 $|5x-3|+7=3$ جو حل سيٽ لھو:

حل: مليل $|5x-3|+7=3$

$\Rightarrow \quad |5x-3|=-5$

قطعي ملھ جي قائدي مطابق حقيقي عددن جو مقدار ڪڏھن بہ ڪاٿو نٿو ٿي سگھي.

تنھنڪري حل سيٽ { } خالي سيٽ آھي

مثال 03 حل ڪريو $|5x-3|-2=3$ جڏھن تہ $x\in W$

حل: مليل $|5x-3|-2=3$

$\Rightarrow \quad |5x-3|=5$

مقدار جي قائدي مطابق

$5x-3=\pm 5$

تنھنڪري $5x-3=5$ يا $5x-3=-5$

$\Rightarrow 5x=5+3$ يا $5x=-5+3$

$\Rightarrow 5x=8$ يا $5x=-2$

$\Rightarrow x=\frac{8}{5}$ يا $x=-\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{5}$ ۽ $\frac{8}{5}\notin W$

اھڙيءَ طرح حل سيٽ { } خالي سيٽ آھي.

مثال 04 حل ڪريو $|2y-5|+2=7$

مليل $|2y-5|+2=7$

$$\Rightarrow \quad |2y-5| = 7-2$$

$$\Rightarrow \quad |2y-5| = 5$$

قائدي مطابق

$2y-5=-5$ يا $2y-5=5$ تنهنڪري

$2y=-5+5$ يا $\Rightarrow 2y=5+5$

$2y=0$ يا $\Rightarrow 2y=10$

$y=\frac{0}{2}$ يا $\Rightarrow y=\frac{10}{2}$

$y=0$ يا $\Rightarrow y=5$

تنهنڪري حل سيٽ $\{5, 0\}$ آهي.

مشق 6.2

هيٺين مساواتن جو حل سيٽ لهو:

1. $|2x+1|=6$ **2.** $|5x-12|=7$, where $x \in W$ **3.** $\left|\frac{2x}{7}\right|=12$ **4.** $\left|\frac{2x+1}{3}\right|=8$

5. $|5x-3|-8=4$, where $x \in N$ **6.** $\left|\frac{5x+1}{7}\right|-3=8$ **7.** $\left|\frac{2x+3}{4}\right|+2=7$

8. $\left|\frac{3x+6}{12}\right|+1=3$, where $x \in Z$ **9.** $\frac{3}{2}=|7x+8|$ **10.** $\left|\frac{2x-3}{5}\right|-12=5$

6.3 هڪ درجي غير مساواتون

هڪ اهڙو الجبري اظهار جنهن ۾ برابر نہ هئڻ جي نشاني "$\neq$" هجي انکي غير مساوات چئبو آهي.

6.3.1 غير مساواتن ۾ $(\leq, \geq)$ ۽ $(<, >)$ نشانيون استعمال ڪبيون آهن.

هيٺ اڻ برابري واريون نشانيون ڏجن ٿيون

'$<$' ننڍو آهي

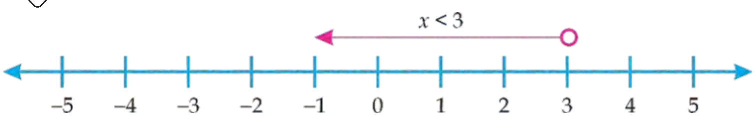
'$>$' وڏو آهي

'$\leq$' ننڍو آهي يا برابر آهي

'$\geq$' وڏو آهي يا برابر آهي

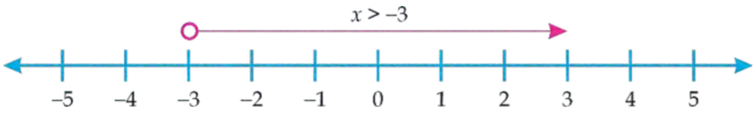
مثال 01

$x< 3$



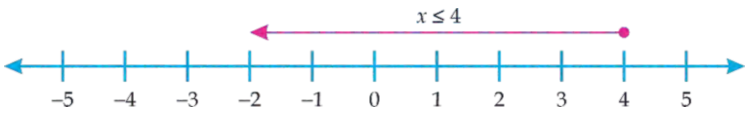
مثال 02

$x>-3$



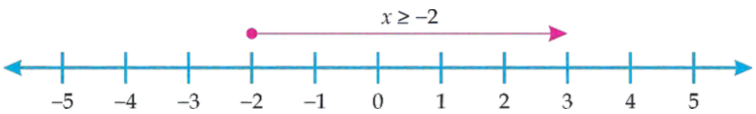
مثال 03

$x\leq 4$



مثال 04

$x\geq -2$



نوٽ: خالي گول "o" ظاهر ڪري ٿو تہ عدد شامل نہ آهي ۽ رنگيل گول "●" عدد شامل هئڻ کي ظاهر ڪري ٿو.

6.3.2 اڻ برابري جون خاصيتون سڃاڻو، (ٽہ رخي، متعدي، جوڙاپت، ضرب اپت). هيٺ ڪجھ غير مساواتن جا مثال آهن:

(i) ٽہ رخي خاصيت (Trichotomy Property)

ٻن حقيقي عدد a ۽ b لاءِ هيٺين مان هڪ ۽ صرف هڪ بيان صحيح آهي.

$a<b$، $a=b$ يا $a>b$

(ii) متعدي خاصيت (Transitive Property)

ٽن حقيقي عددن b, a ۽ c لاءِ

جيڪڏهن $a<b$ ۽ $b<c \Leftarrow a<c$

۽ $a>b$ ۽ $b>c \Leftarrow a>c$

(iii) (Additive Property) جوڙ اپت واري خاصيت

ٽن حقيقي عددن لاءِ:

جيڪڏهن $a>b$ ته پوءِ $a+c>b+c$، $\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}$

جيڪڏهن $a<b$ ته پوءِ $a+c<b+c$، $\forall\ a,b,c\in$

(iv) (Multiplicative Property) ضرب اپت واري خاصيت

(a) جيڪڏهن $a>b$ ته پوءِ $ac>bc$، $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ ۽ $c>0$

يا جيڪڏهن $a<b$ ته پوءِ $ac<bc$، $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ ۽ $c>0$

(b) جيڪڏهن $a>b$ ته پوءِ $ac<bc$، $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ ۽ $c<0$

يا جيڪڏهن $a<b$ ته پوءِ $ac>bc$، $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ ۽ $c<0$

6.4 هڪ درجي غير مساواتون حل ڪرڻ

6.4.1 حقيقي عددي سرن سان، هڪ درجي غير مساواتون حل ڪرڻ.

هينيان مثال اسانجي مدد ڪندا حل سمجهڻ ۽ عددي ليڪ تي ظاهر ڪرڻ ۾.

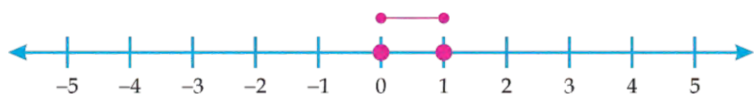
مثال 01 $3x+1<7\quad \forall x\in W$ کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو:

حل: گهربل

$$3x+1<7 \qquad \forall x\in W$$
$$3x-1<7-1$$
$$3x<6$$
$$x<\frac{6}{3}$$
$$x<2$$

جيتوڻيڪ، حل سيٽ $\{x\,|\,x\in W \text{ and } x<2\}=\{0,1\}$ آهي.

حل کي عددي ليڪ تي هينين ريت ظاهر ڪبو آهي.



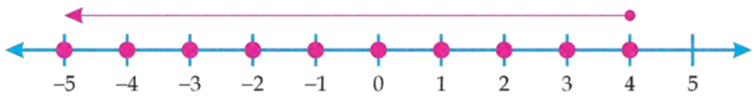
مثال 02 $x-11\le 9-4x\ \forall x\in Z$ کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو:

حل مليل $x-11\le 9-4x\ \ \forall x\in Z$

$$x-11\le 9-4x$$
$$x+4x\le 9+11$$
$$5x\le 20$$
$$x\le \frac{20}{5}$$
$$x\le 4$$

تنهنڪري، حل سيٽ $\{x\,|\,x\in Z \text{ and } x\le 4\}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ آهي

حل کي عددي ليڪ تي هينئن ريت ظاهر ڪبو آهي.



مثال 03 $2x+5>7\ x\in Z$ جو حل سيٽ لهو، عددي ليڪ تي پڻ ظاهر ڪريو:

حل مليل $2x+5>7\ x\in Z$

هيءَ غير مساوات هينئن ريت ظاهر ڪبي آهي.

$$2x>7-5$$
يا $2x>2$

يا $x>1$

تنهنڪري حل سيٽ $\{x\,|\,x\in Z \wedge x>1\}$ آهي.

عددي ليڪ تي هينئن ريت ظاهر ڪبو آهي.

مثال 04 $-6<2x+1<11,\ \forall x\in Z$ جو حل سيٽ لهو، عددي ليڪ تي پڻ ظاهر ڪريو:

حل مليل $-6<2x+1<11,\ \forall x\in Z$

هيءَ غير مساوات هينئن ريت ظاهر ڪبي آهي.

$2x+1<11$ ۽ $-6<(2x+1)$

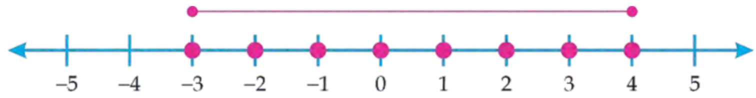
يا $2x+1<11-1$ ۽ $-6-1<2x$

يا $2x<10$ ۽ $-7<2x$

يا $\frac{-7}{2}<x$ ۽ $x<5$

تنهنڪري حل سيٽ $\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}=\{x|x\in Z\wedge -\frac{7}{2}<x<5\}$ آهي.

عددي ليڪ تي هينئن ريت ظاهر ڪبو آهي.



مثال 05 عائشه چئن مان ٽن ٽيسٽن ۾ 78، 72 ۽ 86 اسڪور ڪيو، چوٿين ٽيسٽ ۾ ڪيترو اسڪور ڪرڻ گهرجي جو سراسري 80 اسڪور ٿئي.

حل: فرض ڪريو ته چوٿين ٽيسٽ جو اسڪور x آهي.

$$\frac{78+72+86+x}{4}\geq 80$$
$$78+72+86+x\geq 320$$
$$236+x\geq 320$$
$$x\geq 320-236$$
$$x\geq 84$$

عائشه کي 80 جي سراسري برقرار رکڻ لاءِ چوٿين ٽيسٽ ۾ 84 اسڪور ڪرڻ گهرجي.

مشق 6.3

.1 هيٺين غير مساواتن جو حل سيٽ لهو ۽ عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو.

(i) $2x-7>6+x \quad \forall x\in \mathbb{N}$

(ii) $7x-6>3x+10, \quad \forall x\in \mathbb{R}$

(iii) $\frac{y+5}{20}<\frac{25-4y}{10}, \forall y\in \mathbb{N}$

(iv) $|2x+3|<x+2, \forall y\in \mathbb{Z}$

(v) $|2y+8|<11, \forall y\in \mathbb{R}$

(vi) $5(2y-3)>6(y-8), \forall y\in \mathbb{R}$

.2 عليءَ پنهنجي ٻن ٽيسٽن ۾ ترتيبوار 66 ۽ 72 مارڪون اسڪور ڪيون، هن کي ٽئين ٽيسٽ لاءِ ڪيترون مارڪون اسڪور ڪرڻ گهرجن. جيڪڏهن هڪ اضافي انعام جي قابل ٿيڻ لاءِ گهٽ ۾ گهٽ سراسري 75 مارڪون گهربل هجن.

.3 7 ننڍو آهي هڪ عدد جي ٽي دفعا جوڙاپٽ جي ۽ 5 گهٽ ۾ گهٽ آهي 10 کان، ان صورت کي مطمئن ڪندڙ سڀ عدد لهو.

مشق ورجايو 6

.1 صحيح ۽ غلط سوال

هينين جملن کي غور سان پڙهو ۽ صحيح بيان جي صورت ۾ "T" تي گول پايو ۽ غلط جي صورت ۾ "F" تي.

(i) $ay+b=0$ جتي $a=0$ هڪ درجي مساوات آهي. T/F

(ii) $3y-2<7 \wedge y \in \mathbb{N}$ جو حل سيٽ $\{4, 5, 6, \ldots\}$ آهي. T/F

(iii) $\sqrt{y}+1=3$ جو حل سيٽ $\{4\}$ آهي. T/F

(iv) $|4y|=8$ جو حل سيٽ $\{2, -2\}$ آهي. T/F

(v) $-2 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{R}$ جو حل سيٽ $\{-2, 0, 2\}$ آهي. T/F

.2 خال ڀريو:

(i) $2y=-y$ جو حل سيٽ ________________ آهي.

(ii) $\sqrt{y+5}=5$ جو حل سيٽ ________________ آهي.

(iii) $|x|-4=0$ جو حل سيٽ ________________ آهي.

(iv) $\sqrt{x+5}+2=4$ جو حل سيٽ ________________ آهي.

(v) $0<y+2<5$ جو حل سيٽ ________________ آهي جڏهن $y \in$.

.3 صحيح جوابن تي ٽڪ (✓) جو نشان لڳايو.

(i) هڪ متغير (بدلجندڙ) (Variable) ۾ هڪ درجي مساوات جو حل سيٽ آهي.

(a) هڪ عنصر (b) ٻہ عنصر

(c) ٽي عنصر (d) هڪ کان وڌيڪ عنصر

(ii) $|-20|$

(a) $=20$ (b) <20

(c) $=-20$ (d) >20

(iii) $x \leq 4$ جو مطلب آهي

(a) $x<4$ (b) $x=4$

(c) $x<4$ or $x=4$ (d) $x>4$ or $x=4$

(iv) $\sqrt{y} = 10$ جو حل سيٽ آهي:

(a) {100} (b) {10}

(c) {−10} (d) {−10,10}

(v) $\sqrt{y+4} + 2 = 8$ آهي هڪ:

(a) هڪ درجي مساوات (b) مولي مساوات

(c) ڪعبي مساوات (d) ٻہ درجي مساوات

(vi) $5-3y = -7$ جو حل سيٽ آهي.

(a) { −4} (b) {1, 4}

(c) { 4} (d) { 12 }

(vii) $\sqrt{5y+5} + 5 = 10$ جو حل سيٽ آهي:

(a) { ±4 } (b) { 5 }

(c) { 4 } (d) { −4 }

(viii) $\left|\frac{5y}{3}\right| = 5$ جو حل سيٽ آهي:

(a) { 3 } (b) { −5, 5 }

(c) { 3, −3 } (d) { −3 }

(ix) $|-y| = 0$ جو حل سيٽ آهي:

(a) { 1 } (b) { −1 }

(c) { 0 } (d) { }

(x) جيڪڏهن $x > 0$، $y > 0$ ۽ $x-y < 0$ تہ پوءِ

(a) $x < y$ (b) $x + y < 0$

(c) $x > y$ (d) $y - x < 0$

خلاصو

- $ax + b = 0,$ جهڙي هڪ مساوات جتي $a,b \in \mathbb{R}$ ۽ $a \neq 0$ هجي انکي هڪ درجي مساوات چئبو آهي.
- هڪ مساوات جنهن ۾ مول جي نشاني هجي انکي مولي مساوات غير ناطق (Irrational equation) چئبو آهي، مولي مساوات جي پاهرين بنيادن جي صورت ۾ حل جي چڪاس ضروري آهي.
- جيڪڏهن $x \in \mathbb{R}$ تہ پوءِ $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x & < 0 \end{cases}$
- جيڪڏهن $x, y \in \mathbb{R}$ پوءِ

(i) $|x| \geq 0$ (ii) $|-x| = |x|$ (iii) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(iv) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (v) $|x| = b$ then $x = b$ or $x = -b$

- غير مساوات لاءِ اسين $>$، $<$، $\geq$، $\leq$ استعمال ڪندا آهيون:
- هڪ درجي آلجبري اظهار جنهن ۾ غير برابريءَ جي نشاني هجي انکي هڪ درجي غير برابري يا غير مساوات چئبو آهي.
- غير مساوات جون خاصيتون:

(i) $a < b$ يا $a = b$ يا $a > b$، $\forall a, b \in \mathbb{R}$ تہ رخي مساوات (Trichotomy)

(ii) $a > b$ ۽ $b > c \Rightarrow a > c$، $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ معتدي مساوات (Transitive)

(iii) $a > b$، $c > 0 \Rightarrow ac > bc$ ۽ $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$، $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ضرب ۽ ونڊ جي خاصيت.

(Multiplication and Division Properties)

يونٽ 7

سڌي ليڪ ۾ گراف ۽ ان جا استعمال

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ کي مڪمل ڪرڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- حقيقي عددن جي جوڙي کي ترتيبوار جوڙي جي صورت ۾ سڃاڻي سگهن.
- مختلف مثالن سان هڪ ترتيبوار (جوڙي جي سڃاڻپ ڪري سگهن جهڙي طرح (2, 3) کي امتحاني هال ۾ ظاهر ڪيل جاءِ جي صورت ۽ انهن جي بي قطار ۽ ٽي ڪالم جي صورت ۾ ڪاٽ ڪن.
- ڪارتيسي مٿاڇري / عام مٿاڇري تي گوني ڪنڊ ٺڪندي تي ڪپيندڙ ٻن ليڪن کي O نقطي وٽ اڊواڊ ڪرڻ کي ڳاڻ ڪري سگهن.
- مستطيلي مٿاڇري تي x— محور ۽ y— محورکي ترتيبوار ٽٻڪو "O" کي اصل ٽٻڪي طور ۽ محددي محور ڪري سڃاڻپ ڪن.
- مستطيلي مٿاڇري تي، ترتيب ڏنل جوڙي کي جاميٽري جي ٽٻڪن طور ظاهر ڪري سڃاڻپ ڪن ته
  - a کي x— محددي (يا abscissa) x— محدد
  - b کي y— محددي (يا ordinate) y— محدد
- ٽٻڪن جي ڏنل سيٽن کي ملائي مختلف جاميٽري جون شڪلون ناهي سگهن (ليڪ ٽڪر، ٽڪنڊو مستطيل وغيره).
- ٻن بدلجندڙن جي هڪ درجي مساوات جي مليل جوڙي ۾ رقمن جي جدول ناهي سگهن.
- ڏنل اظهار جو گراف حاصل ڪرڻ لاءِ ٽٻڪن جا جوڙا ظاهر ڪري سگهن.
- گراف ناهڻ لاءِ مناسب پيمانو چونڊي سگهن.
- گراف ناهي سگهن.
  - $y = c$ نموني جي مساوات جو
  - $x = a$ نموني جي مساوات جو
  - $y = mx + c$ نموني جي مساوات جو
  - $y = mx$ نموني جي مساوات جو
- x ۽ y جي رقمن لاءِ مليل جدول مان گراف ناهي سگهن.
- روزمره زندگي سان تعلق رکندڙ حساب حل ڪري سگهن.
- سڌي تناسب ۾ مليل ٻن مقدارن جي تبديل ٿيندڙ گراف کي سڌي ليڪ جي گراف ۾ بڌائي سگهن.
- هڪ مقدار جي ٻي مقدار سان مشابهت رکندڙ گراف کي پڙهي ۽ سڃاڻي سگهن.
- تبديل ڪرڻ جي نمونن جا گراف پڙهي سگهن.
  - ميل ۽ ڪلوميٽر
  - ايڪڙ ۽ هيڪٽر
  - سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ
  - پاڪستاني ۽ ٻين ملڪن جو چالو سڪو وغيره.
- همزاد هڪ درجي مساوات ٻن بدلجندڙ سان، گراف جي طريقي سان حل ڪري سگهن.

7.1 ڪارتيسي مٿاڇرو ۽ سڌي ليڪ جا گراف

7.1.1 حقيقي عدد جي جوڙي جي ترتيب ڏنل جوڙي جي صورت ۾ سڃاڻپ ڪريو.

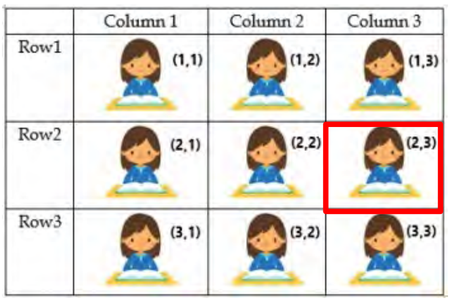
ترتيب ڏنل جوڙو ٻن حقيقي عددن جي جوڙو آهي، جنهن ڪي خاص ترتيب سان نندين ڏنگين ۾ لکيو ويندو آهي. هي ۾ رکي جڳهه ۾ شين جي جڳهه کي ظاهر ڪرڻ ۾ مدد ڪندو آهي.

7.1.2 مختلف مثالن سان ترتيب ڏنل جوڙي جي سڃاڻپ ڪريو، جيئن (2, 3) ترتيب ڏنل جوڙ، امتحان هال ۾ سيٽ کي ڏيکارڻ لاءِ ظاهر ڪري ٿو ته ٻي قطار ۽ ٽيون ڪالم آهي.

اچو ته پنهنجي چوڌاري موجود شين جا مثال ڏسون، هنن مثالن سان اسان، شين کي قطار ۽ ڪالم ۾ موجود جڳهه کي ظاهر ڪريون ٿا جيڪي ترتيب ڏنل جوڙو ناهين ٿيون. ترتيب ڏنل جوڙ ڪنهن شيءِ يا جڳهه جي حالت جي نشاندهي ڪري ٿو.

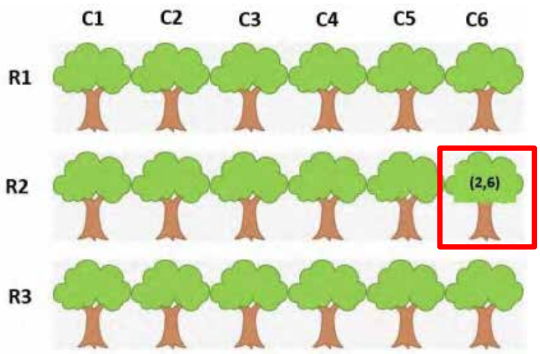
مثال 01

ترتيب ڏنل جوڙو (2, 3) شاگرد جي امتحان هال ۾ موجود جڳهه کي ظاهر ڪري ٿو. جيئن ٻي قطار ۽ ٽيون ڪالم. ساڳي طرح هر شاگرد منفرد ترتيب سان ظاهر ٿيل آهي.



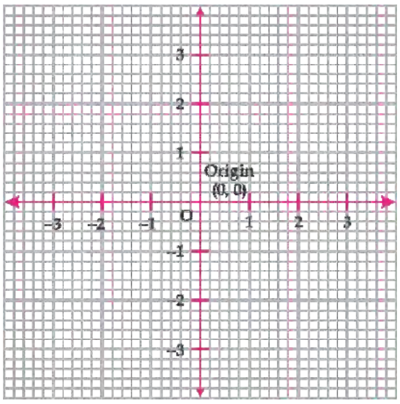
مثال 02

جيڪڏهن هڪ هاري باغ ۾ هڪ جيتري مفاصلي تي وڻ پوکڻ جي منصوبه بندي ڪري ٿو، ته پوءِ (2, 6) ظاهر ڪري ٿو ته ٻي قطار ۽ ڇهون ڪالم جو وڻ باغ ۾.

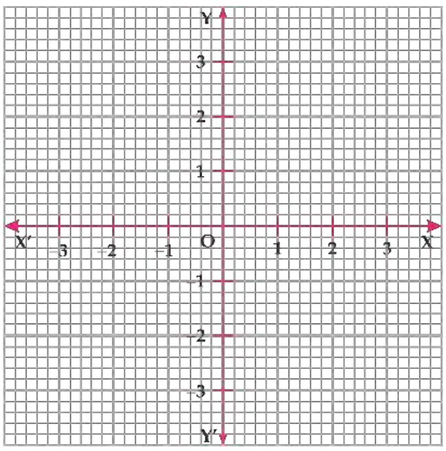


7.1.3 ڪارتيسي/ يام متاچري تي ٻہ عددي ليڪون ڪنهن گوني ڪند ڪي O ٽبڪي تي ڪپين ٿيون بيان ڪريو.

ڪارتيسي محددي نظام مشتمل حصي ٻن حقيقي عددن جي ليڪن تي جيڪي گوني ڪند تي "O" ٽبڪي وٽ پاڻ ڪي ڪپين ٿيون. ان تي مشتمل هوندو آهي هي ٻہ عددي ليڪون هڪ سڌي سطح جي تعريف ڪن ٿيون جن ڪي ڪارتيسي متاچرو چئبو آهي.



7.1.4 مستطيلي متاچري ۾ اصل ٽبڪو "O" ۾ محددي محور (فقي ۾ عمودي محور x– محور ۾ y– محور) جي سڃاڻپ ڪريو.



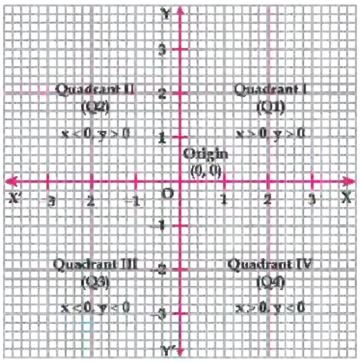
ڪارتيسي محددي نظام ۾، افقي عددي ليڪ ڪي x—محور ۾ عمودي عددي ليڪ ڪي y—محور چئبو آهي. اهو نقطو جتي ٻئي ليڪون هڪٻئي ڪي ڪپين ٿہ ان ڪي اصل ٽبڪو چئبو آهي، جنهن ڪي O سان ظاهر ڪيو ويندو آهي.

مليل شڪل ۾ افقي ليڪ XX′، x— محور آهي ۾ عمودي ليڪ YY′، y— محور آهي، نقطو جتي ٻئي ليڪون پاڻ ۾ ملن ٿيون ان ڪي متاچري جو اصل چئبو آهي جيڪو "O" آهي.

7.1.5 مستطيلي متاچري تي ترتيب ڏنل جوڙي کي جاميٽري جي ٽپڪن طور ظاهر ڪري، سڃاڻپ ڪريو.

- a کي $x-$ محددي (يا abscissa) $x-$ محدد
- b کي $y-$ محددي (يا ordinate) $y-$ محدد

عام طور تي ڪوبہ ٽپڪو ڪارٽيسي متاچري تي ترتيب ڏنل جوڙي (a,b) جي صورت ۾ ظاهر ڪري سگهبو آهي، جنهن ۾ a، $x-$ محددي (abscissa) ۽ b، $y-$ محددي (ordinate) آهي.

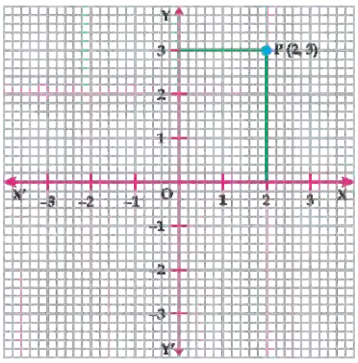


متاچري تي ٽپڪن کي ظاهر ڪرڻ لاءِ اسان کي $x-$ محددي، جيڪو افقي مفاصلو آهي $y-$ محور کان ۽ $y-$ محددي جيڪو عمودي مفاصلو آهي $x-$ محور کان ضروري معلوم هجي.

$x-$ محور ۽ $y-$ محور ڪارٽيسي متاچري کي چئن حصن (چوٿن) ۾ ورهائين ٿا جن جا رومن عددي عدد I، II، III ۽ IV آهن. ڪارٽيسي متاچري کي xy متاچرو پڻ چئبو آهي.

- پهرين چوٿي I ۾ ٻئي $x-$ محددي ۽ $y-$ محددي واڌو آهن $x > 0$ ۽ $y > 0$.
- ٻئي چوٿي II ۾ x محددي ڪاٽو ۽ $y-$ محددي واڌو آهي $x < 0$ ۽ $y > 0$.
- ٽئين چوٿي III ۾ x محددي ۽ $y-$ محددي ڪاٽو آهن $x < 0$ ۽ $y < 0$.
- چوٿين چوٿي IV ۾ x محددي واڌو ۽ $y-$ محددي ڪاٽو آهي $x > 0$ ۽ $y < 0$.
- اصل ٽپڪي تي $x = y = o$، تنهنڪري اصل نقطي جا محددي $(0, 0)$ آهن.

گراف ڪيڏ جو طريقي جڏهن هڪ ٽپڪو ڪارٽيسي متاچري (xy متاچري) تي اچو تہ هينين مثالن ذريعي سکون تہ ڪيئن هڪ ٽپڪو ڪارٽيسي متاچري تي ظاهر ڪجي.



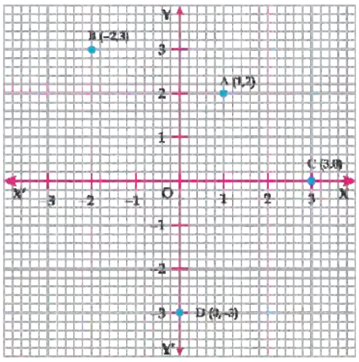
$(2, 3)$ کي ظاهر ڪرڻ جي لاءِ، اصل ٽپڪي کان شروع ڪريو ۽ 2 ايڪا ساڄي طرف $y-$ محور کان ۽ پوءِ 3 ايڪا مٿي $x-$ محور کان حرڪت ڪريو جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. اسان P ٽپڪي تي پهچي وياسين جيڪو $(2,3)$ کي ظاهر ڪري ٿو.

مثال 01 هيٺين ٽپڪن جا x محددي ۽ $y-$ محددي ظاهر ڪريو. اهو پڻ ٻڌايو ته ڪهڙي چوٿي ۾ اهي موجود آهن، ٽپڪا پڻ ظاهر ڪريو.

(i) A (1, 2)   (ii) B (−2, 3)

(iii) C (3, 0)   (iv) D (0, −3)

حل: پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو



(i) A (1, 2)

هتي $x-$ محددي 1 ايڪو ۽ محددي 2 ايڪا آهن.

جيئن ته $x > 0$ ۽ $y > 0$ مليل ٽپڪا پهرين چوٿي ۾ آهن.

(ii) B (−2, 3)

هتي $x-$ محددي −2 ايڪا ۽ $y-$ محددي 3 ايڪا آهن.

جيئن ته $x > 0$ ۽ $y > 0$ تنهنڪري مليل ٽپڪا ٻئي چوٿي ۾ آهن.

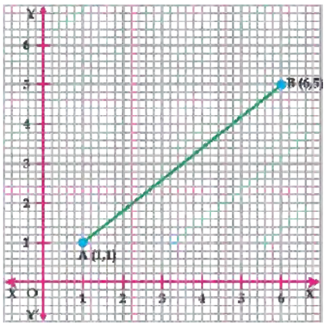
(iii) C (3, 0)

هتي $x-$ محددي −3 ايڪا ۽ $y-$ محددي 0 ايڪا آهي. تنهنڪري C ٽپڪو $x-$ محور تي آهي جيڪو اصل کان ساڄي طرف آهي.

(iv) D (0, −3)

هتي $x-$ محددي 0 ايڪا، $y-$ محددي 3 ايڪا آهن. تنهنڪري D ٽپڪو $y-$ محور تي آهي جيڪو اصل کان هيٺ آهي.

7.1.6 مختلف جاميٽري جون شڪليون ناهيو (ليڪ ٽڪر ٽڪنڊو ۽ مستطيل وغيره.



هيٺين ڪلاسن ۾ اسان ڪيترن ئي جاميٽري جي شڪلين جي باري ۾ پڙهي آيا آهيون ۽ پڻ ڏنل معلومات مطابق ڪيئن ٺا ناهجي. هاڻ اسان مختلف جاميٽري جون شڪليون گراف پيپر تي مليل ٽپڪن مطابق ناهينداسين.

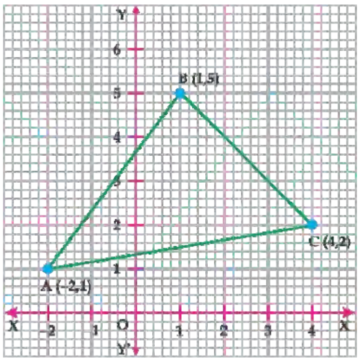
مثال 01 ليڪ ٽڪر AB ناهيو جنهن جا آخري ٽپڪا A (1, 1) ۽ B (6, 5) آهن.

طريقو: پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو.

پهرئين اسان گراف پيپر تي ليڪ جي ٽپڪن جي نشاندهي ڪنداسين، پوءِ انهن کي ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ حاصل ڪرڻ لاءِ ملائينداسين، جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

مثال 02 تڪندو ABC ناهيو جنهن جا ڪنڊ وارا ٽپڪا A (−2, 1)، B (1, 5) ۽ C (4, 2) آهن.

طريقو:

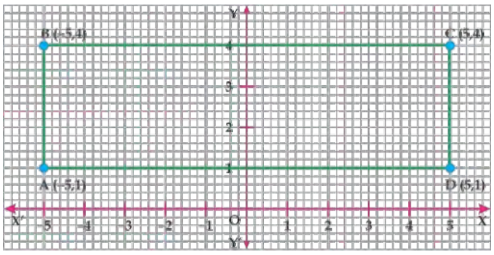


پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو.

پهرئين اسان A، B ۽ C جي ٽپڪن جي نشاندهي ڪنداسين، پوءِ انهن کي ملائي ΔABC حاصل ڪنداسين، جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

مثال 03 هڪ مستطيل ناهيو جنهن جا ڪنڊ وارا ٽپڪا A (−5, 1)، B (−5, 4)، C (5, 4) ۽ D ((5, 1) آهن.

طريقو:



پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو.

A (−5, 1)، B (−5, 4)، C (5, 4) ۽ D ((5,1) ٽپڪن جي گراف پيپر تي نشاندهي ڪريو. هاڻ ٽپڪن A، B، C ۽ D کي پاڻ ۾ ملايو، نتيجو (1) AB مستطيل آهي.

7.1.7 ٻن بدلجندڙن ۾ هڪ درجي مساوات کي حل ڪرڻ لاءِ رقمن جي جوڙن جي جدول کي ٺاهڻ

هن جي هيٺين مثالن جي مدد سان وضاحت ڪري سگهجي ٿي.

مثال 01 فرض ڪريو ته $x + y = 5$، ٻن بدلجندڙن x ۽ y ۾ هڪ درجي مساوات هجي x ۽ y جي ڪجهه رقمن لاءِ جدول ناهيو.

حل: مليل آهي ته $x + y = 5$ جنهن $y = 5x$ لکي سگهجي ٿو.

هاڻ جدول تيار ڪيو، x جون رقمون وجهو ۽ y جي قيمتون حاصل ڪريو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	8	7	6	5	4	3	2	…

مشق 7.1

.1 هيٺين ٽپڪن مان $x-$ محددي ۽ y محددي جي وضاحت ڪريو.

i. A(-2, 2) ii. B(5, -1) iii. C(4, 0)
iv. D(-5, -6) v. E(3, 4) vi. F($-\sqrt{8}$, $\sqrt{8}$)

.2 هيٺيان ٽپڪا ڪهڙي چوٿائي ۾ موجود آهي واضح ڪريو.

i. A(2, -1) ii. B(-3, 3) iii. C($2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$)
iv. D(-2, -4) v. E(5, 4) vi. F$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

.3 x ۽ y متاچري ۾ هيٺين ٽپڪن A، B، C ۽ D کي ناهيو.

i. A(2, 1), B(3, 2), C(-3, 4), D(-4, -5)
ii. A(2, 0), B(0, 2), C(3, -3), D(-3, 3)
iii. A(0, 0), B(-3, -3), C(5, -6), D(-6, 5)

.4 ٽپڪن A (4, 6) ۽ B (−6, 8) کي ملائي، ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ ناهيو.

.5 ٽپڪن A (−1, 4) ۽ B (−3, 6) کي (3, −2) کي ملائي ٽڪنڊو ABC ناهيو.

.6 ٽپڪن A (0,−1)، B (0,5)، C (7,−1) ۽ D (7,5) کي ملائي ABCD مستطيل ناهيو.

.7 ٽپڪن O (0, 0)، A (5, 0)، B = (5, 5) ۽ C (−2, −3) کي ملائي OABC چورس ناهيو.

.8 ٽپڪن O (0, 0)، A (2, 4)، B (5, 0) ۽ C (6, 4) کي ملائي OABC هڪ پوروچوت چوڪندو ناهيو.

.9 هيٺين هڪ درجي مساوات جي لاءِ x ۽ y جي ڪجهه رقمن جي جدول ناهيو.

i. $x+y-2=0$ ii. $2x-y-2=4$
iii. $\frac{1}{2}(x+2y)-6=0$ iv. $\frac{2}{3}(x-2y)=-2$

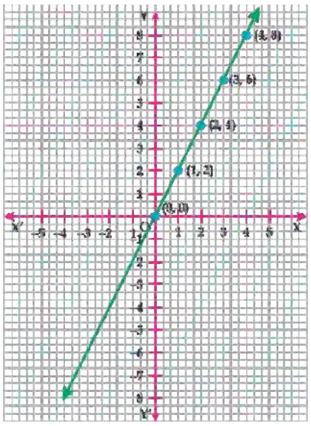
7.1.8 مليل اظهار جو گراف حاصل ڪرڻ لاءِ رقمن جا جوڙ ظاهر ڪريو.

فرض ڪريو ته هڪ درجي مساوات $y=2x$ ٻن بدلجندڙن تي مشتمل آهي جتي x کي آزاد (Independent) ۽ y کي منحصر (Dependent) بدلجندڙ چئبو آهي. چاڪاڻ ته y جي رقم جو دارومدار x جي رقم تي آهي.

مسلسل مساوات جو گراف ناهڻ جي لاءِ اسان x ۽ y جي جدول ناهيندا آهيون ۽ هي ترتيب ڏنل جوڙ انهي جي محددي متاچري تي رکندا آهيون، ٻه ٽپڪا ليڪ کي واضح ڪرڻ لاءِ ڪافي آهي، تنهن هوندي به ممڪن غلطين کان بچڻ خاطر ٻن کان وڌيڪ ٽپڪا پڻ ظاهر ڪري سگهجن ٿا.

x	0	1	2	3	4	…
y	0	2	4	6	8	…

لاڳيتو ترتيب ڏنل جوڙن x, y کي گراف ۾ جوڙ ڪندي اهو واضح آهي تہ y جي رقم x جي رقم کان ٻيڻي آهي ۽ ان کان پوءِ هڪ ئي ليڪ تي موجود تنهن کي ڊيڪارٽ لاءِ اسان هڪ ليڪ ناهينداسين گراف تير جا نشان اهو ظاهر ڪن ٿا، گراف تي ٻنهي پاسي نہ ڪٽندڙ ليڪ آهي. هيٺيون گراف ائين ڏسڻ ۾ اچي تو شڪل ۾ ڏسو.



7.1.9 گراف ناهڻ جي لاءِ مناسب پئماني جي چونڊ ڪريو.

پئماني جي اهڙي طرح چونڊ ڪجي جو مواد آساني ظاهر ڪري ۽ پڙهي سگهجي.

هڪ مساوات جو گراف ناهڻ جي لاءِ اسان هڪ پئمانو چونڊينداسين. مثال طور هڪ ننڍو چورس هڪ يونٽ کي ظاهر ڪندو يا 2 ننڍا چورس 1 يونٽ کي ظاهر ڪندا وغيره، ان جي چونڊ پني جي پکيڙ ڏسي ڪبي. ڪنهن وقت ٻنهي x ۽ y محددن جي لاءِ اسان ساڳي پئماني جي چونڊ ڪنداسين اسان مختلف پئمانا، x ۽ y محددن جي رقمن کي ڏسي چونڊ ڪنداسين.

7.1.10 گراف ڻاهيو.

- $y = c$ جي نموني جي مساوات جو.
- $x = a$ واري نمونڱ جي مساوات جو.
- $y = mx$ واري نمونڱ جي مساوات جو.
- $y = mx + c$ واري نمونڱي جي مساوات جو.

7.1.10 (i) $y = c$ نموني واري مساوات جو گراف ڻاهڻ.

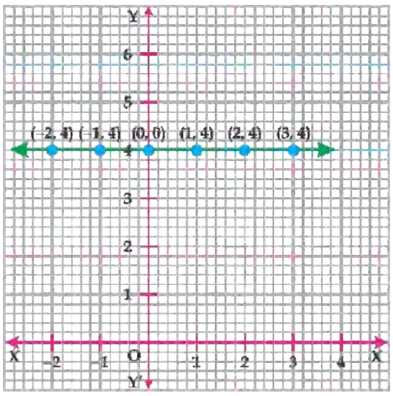
مثال 01 گراف ڻاهيو جڏهن $y = 4$

حل: پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو

گراف ڻاهڻ جي لاءِ جدول ڻاهيو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	4	4	4	4	4	4	4	…

$y = 4$ ۾، مساوات جو گرف شڪل ۾ ڏيڪاريل آهي



نوٽ:
$y = c$ جو گراف x– محور جي پورروچوٽ آهي.

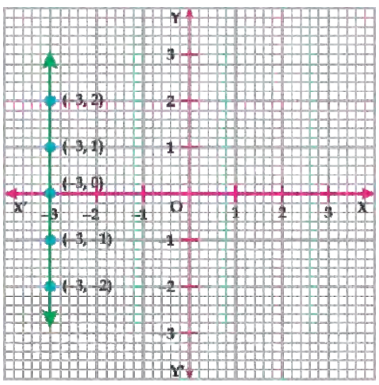
7.1.10(ii) $x = a$ نموني واري مساوات جو گراف ڻاهڻ.

مثال 01 $x = 3$ مساوات جو گراف ڻاهيو.

طريقو: پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو.

x	-3	-3	-3	-3	-3	…
y	-2	-1	0	1	2	…

مساوات جو گراف شڪل ۾ ڏيڪاريل آهي.



نوٽ:
$x = a$ جو گراف y– محور جي پورروچوٽ آهي.

7.1.10 (iii) $y = mx$ نموني واري مساوات جو گراف ناهڻ.

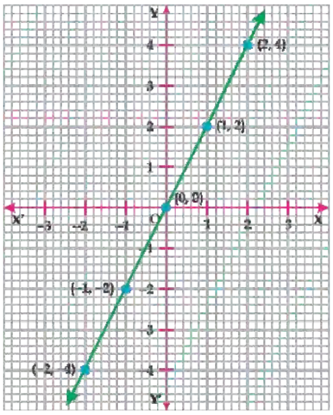
$y = mx$ مساوات ۾ y جي رقم (يا y− محدد) m ۽ ضرب پت آهي جڏهن ته m هڪ مستقل حقيقي عدد آهي.

مثال 01 جيڪڏهن $y = 2x$ ته m جو ملهه لهو ۽ گراف ناهيو.

حل: پيمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو.

گراف جي لاءِ جدول ناهيو.

x	-2	-1	0	1	2	...
y	-4	-2	0	2	4	...



نوٽ: $y = mx$ جو گراف هميشه اصل ٽپڪي مان گذرندو.

7.1.10 (iv) $y = mx + c$ نموني واري مساوات جو گراف ناهڻ.

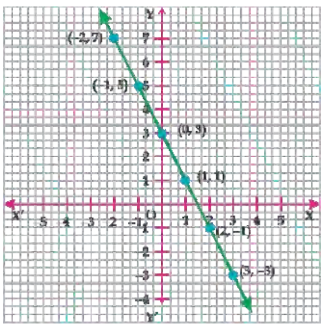
$y = mx + c$ مساوات ۾ m ۽ c حقيقي عدد آهن ۽ m = گهيريا لاهي، y = ليڪ کي جدا ڪندڙ.

مثال 01 $y = -2x + 3$ جو گراف ناهيو.

پيمانو: 3 ننڍا چورس = 1 ايڪو.

گراف ڪيڻ ڪاءِ جدول ناهيو.

x	-2	-1	0	1	2	3	...
y	7	5	3	1	-1	-3	...



نوٽ: $y = mx + c$ جو گراف هميشه y− محور کي $y = c$ تي ڪپيندو.

7.1.11 جدا جدا رقمن جي ڏنل جدول گراف ناهڻ.

جدا جدا مليل رقمن جي جدول جو گراف ناهڻ جي لاءِ x ۽ y کي ٽپڪن جي صورت ۾ ملائبو آهي جيڪي گراف پني تي ظاهر ڪبيون آهن.

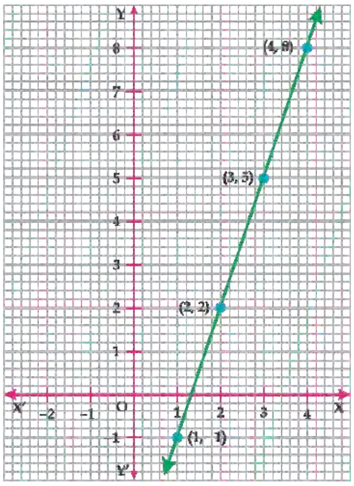
مثال 01

هيٺ ڏنل جدول ۾ مليل ٽپڪن جو گراف ٺاهيو.

x	1	2	3	4	…
y	-1	2	5	8	…

طريقو: مليل جدول ۾ A (1, 1)، B (2, 2)، C (3, 5) ۽ D (4, 8) آهي ته اسان گراف پني تي گراف ٺاهينداسين.

پئمانو: 5 ننڍ چورس = 1 ايڪو.



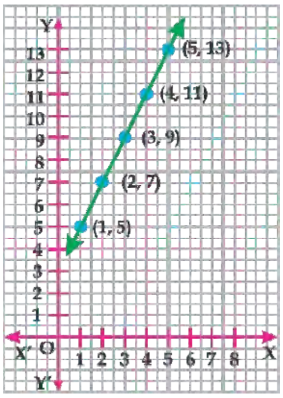
7.1.12 روزمرو زندگي سان تعلق رکندڙ حسابن کي حل ڪريو.

هڪ درجي مساوات کي روزمرو زندگي جي حسابن سان نموني طور عددن کي استعمال ڪري سگهجي ٿو، جهڙوڪ وقت جي عرصي ۾ توهان ڪيترا پئسا ٺاهي سگهو ٿا يا سائيڪل هلائڻ وارو گهٽ شرح تي پيڊلنگ ڪرڻ سان ڪيتري مفاصلي تائين سفر ڪري سگهي ٿو. محددي مٿاچري تي اهڙن تعلقن جو گراف ٺاهڻ جي لاءِ اسان اڪثر ڪري حساب ۽ انهن جي حل بابت سوچيندا آهيون.

مثال 01

ڪنهن ماڻهو جو وزن y ڪلوگرامن ۾، عمر x سالن ۾ مساوات $y = 2x + 3$ جي صورت ۾ بيان ڪيل آهي. عمر ۽ وزن جو مساوات مطابق گراف ٺاهيو.

عمر (x)	1	2	3	4	5	…
وزن (y)	5	7	9	11	13	…



مشق 7.2

.1 هيٺ ڏنل مساوات جي جدول ٺاهيو، جيڪا رقمن جي جوڙي $x + y = 6$ کي مطمئن ڪري.

.2 هيٺ مليل جدول مان مناسب پيمانو وٺي گراف ٺاهيو.

x	0	-1	4	-4
y	2	4	5	-5

.3 هيٺين جو گراف ٺاهيو.

i. $y=3$ ii. $x=3$ iii. $y=0$

iv. $y=2x+3$ v. $x=3.5$ vi. $-y=2x$

4 هيٺ ڏنل جدول مان غائب ٿيل محدد معلوم ڪريو

نمبر شمار	مساوات	$x-$ محدد	$y-$ محدد
(i)	$y=\frac{1}{2}x$		0
		4	
(ii)	$x=\frac{2}{3}y$	1	
			$\frac{3}{2}$
(iii)	$2x + 4y = 8$	0	
			$\frac{1}{4}$
(iv)	$2x + y= 6$	1	
			0
(v)	$x - y = 2$		0
		1	
(vi)	$x - 3y = 6$	3	
			-1

.5 هڪ ماڻهو جو وزن y ڪلوگرامن، عمر x سالن ۾ مساوات $y = 2x$ جي صورت ۾ ظاهر ڪئي وئي آهي ته هيٺين جدول مان عمر ـ وزن جو گراف ٺاهيو.

6. عائشہ ہن ڦيٽن واري گاڏي لاڳيتو 20 ڪلوميٽر في ڪلاڪ سان هلائي سگهي ٿي. هن صورت جو مفاصلي ۽ وقت جو گراف ٺاهيو.

(a) 100 ڪلوميٽر سواري ڪرڻ لاءِ عائشہ کي گهربل وقت.

(b) ٽوٽل 3 ڪلاڪن ۾ عائشہ جو طئہ ڪيل مفاصلو.

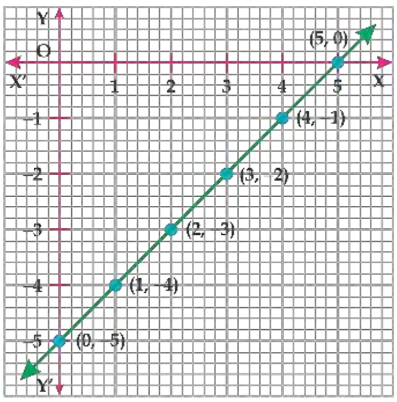
7.2 تبديل ڪرڻ جا گراف:

7.2.1 سڌي تناسب ۾ مليل ٻن مقدارن سان تبديل ٿيندڙ گراف، هڪ سڌي ليڪ جي گراف، هڪ سڌي ليڪ جي گراف طور سمجهائڻ.

هتي سڌي تناسب سان تعلق رکندڙ ٻن مقدارن جي تبديل ٿيڻ سان تبديل ٿيندڙ گراف کي سڌي ليڪ ۾ گراف طور فرض ڪنداسين. اسان ترتيب ڏنل جوڙن کي پيش ڪنداسين جيڪي $y = x - 5$ مساوات جي صورت ۾ گراف تي موجود آهن انهن جي رقم کي اسان هيٺ ڏنل جدول مطابق معلوم ڪنداسين.

x	0	1	2	3	4	5
y	-5	-4	-3	-2	-1	0
(x, y)	(0, -5)	(1,-4)	(2, -3)	(3, -2)	(4, -1)	(5, 0)

مليل هڪ درجي مساوات مطابق گراف جي ٽپڪن کي ظاهر ڪريو، جنهن ۾ هر x–محدد ۾ ايڪي جي تبديلي جو y–محدد جي رقم جي تبديلي سان تناسب آهي.



7.2.2 هڪ مقدار جو تعلق ٻي مقدار سان آهي مليل گراف کي پڙهي ڄاڻ حاصل ڪرڻ.

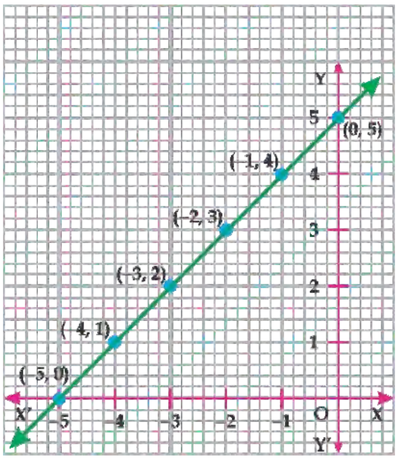
سمجهو تہ $y = x - 5$ هڪ درجي مساوات

$y = x - 5$ جي مدد سان اسان x جون رقمون ۽ y جون رقمون تناسب سان پڙهي سگهون ٿا.

y جي ڏنل رقم مان اسان x سان تعلق رکندڙ رقم پڙهي سگهون ٿا.
$y = x - 5$ کي $x = y - 5$ جي مساوات ۾ ۽ تعلق رکندڙ گراف پڻ ناهي سگهون ٿا.
تبديل ٿيل گراف ۾ اسان x کي y جي جز ۾ ظاهر ڪري سگهون ٿا. جيئن هيٺ ڏنل آهي $y = x - 5$

y	-5	-4	-3	-2	-1	0
x	0	1	2	3	4	5
(y, x)	(-5, 0)	(-4, 1)	(-3, 2)	(-2, 3)	(-1, 4)	(0, 5)

x جو تبديل ٿيل گراف y جي نسبت سان گراف پني تي ٺهيل آهي.



7.2.3 تبديل ڪرڻ جي نموني جا گراف پڙهو.

- ميل ۽ ڪلوميٽر
- ايڪٽر ۽ هيڪٽر
- سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ
- پاڪستاني سڪو ۽ بين ملڪن جا سڪا وغيره.

جيڪڏهن مقدارن ۾ وڌڻ يا گهٽ ٿيڻ جو تعلق آهي ته، ان تعلق جو گراف سڌي ليڪ ۾ ٿيندو، جيڪو ٻنهي مقدارن جي حد کي ڏيکاريندو گڏيل محددي محور تي.

(i) ميل ۽ ڪلوميٽر جي تبديلي جو گراف پڙهو.

اچو ته ميل ۽ ڪلوميٽر جي گراف جو نموني بابت بحث ڪريون، ٻئي ايڪا مفاصلي جا هجن. جيڪڏهن ميل جو مفاصلو x– محور تي آهي ته ڪلوميٽر جو مفاصلو y– محور تي ٿيندو. اچو ته هينيون مثال ڏسون.

مثال هينيان ميلن ۾ ڪلوميٽرن جي تبديلي جا گراف پڙهو.

(i) 2 ميل ڪلوميٽرن ۾

(ii) 5 ميل ڪوميٽرن ۾

(iii) 3 ميل ڪلوميٽرن ۾

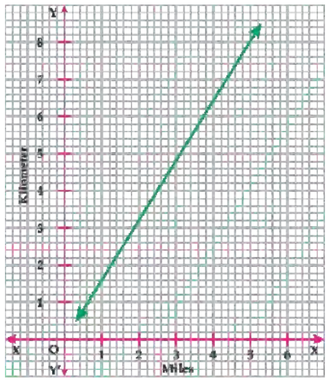
(iv) 7 ميل ڪلوميٽرن ۾

۽ ڏنل پئمانا استعمال ڪري تبديل ڪريو.

ميلن ۾ ڪلوميٽرن ۾ تبديلي جو گرا

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ميل x محور تي

5 ننڍا چورس = 1 ڪلوميٽر y محور تي



حل: (i) 2 ميل ڪوميٽرن ۾

پڙهنداسين ته

2 ميل ≅ 3.20 ڪلوميٽرن جي

(ii) 5 ميل ڪلوميٽرن ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

5 ميل ≅ 8 ڪلوميٽرن جي

(iii) 3 ڪلوميٽر ميلن ۾

متئين گراف جي مليل پئماني مطابصق پڙهنداسين ته

3 ڪلوميٽر ≅ 1.8 ميل

(iv) 7 ڪلوميٽر ميلن ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

7 ڪلوميٽر ≅ 4.20 ميل

(ii) **هڪٽرن ايڪڙن ۾ تبديلي ڪي پڙهو.**

اچو تہ هيڪٽر ۽ ايڪڙن جي نموني جي گراف تي بحث ڪريون، ٻئي زمين جي ايراضي جا ايڪا آهن جيڪڏهن هيڪٽر جو مفاصلو x− محور تي ظاهر ڪجي ۽ ايڪڙن جو مفاصلو y− محور تي ، تہ اچو هينيان مثال ڏسون.

مثال: هينيان هيڪٽر ۽ ايڪڙن جي تبديلي جا گراف پڙهو.

(i) 2 هيڪٽرن کي ايڪڙن ۾

(ii) 6 هيڪٽرن کي ايڪڙن ۾

(iii) 10 ايڪڙن کي هيڪٽرن ۾

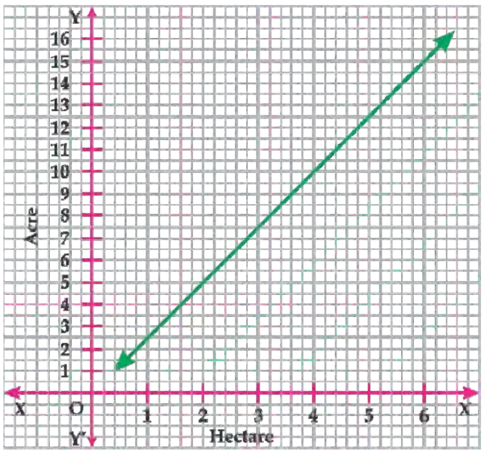
(iv) 8 ايڪڙن کي هيڪٽرن ۾

۽ ڏنل پيمانا استعمال ڪري تبديل ڪريو.

هيڪٽرن ۽ ايڪڙن ۾ تبديل ٿيندڙ گراف

پيمانو: 5 ننڍا چورس = 1 هيڪٽر x− محور تي

2 ننڍا چورس = 1 هيڪٽر y− محور تي



حل: (i) **2 هيڪٽرن کي ايڪڙن ۾**

مٿئين گراف کي مليل پيماني مطابق پڙهنداسين تہ

2 هيڪٽر ≅ 5 ايڪڙن ۾

(ii) **6 هيڪٽر، ايڪڙن ۾**

مٿئين گراف کي مليل پيماني مطابق پڙهنداسين تہ

6 هيڪٽر ≅ 5 ايڪڙ جي

(iii) **10 ايڪڙ، هيڪٽر ۾**

مٿئين گراف کي مليل پيماني مطابق پڙهنداسين تہ

10 ايڪڙ ≅ 4 هيڪٽر

(iv) 8 ايڪڙ، هيڪٽرن ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

8 ايڪڙ ≅ 3.20 هيڪٽر

(iii) سينٽي گريڊ جو فارنهائيٽ ۾ تبديلي جو گراف پرهو.

اچو ته سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ گراف جي نموني تي بحث ڪريون. ٻئي گرمي جي درجي جا ايڪا آهن. جيڪڏهن سينٽي گريڊ $x-$ محور تي ظاهر ڪجي ۽ فارنهائيٽ کي $y-$ محور تي ظاهر ڪجي، ته پوءِ اچو ته هيٺيان مثال ڏسون.

مثال: هيٺيان سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ جي تبديلي جا گراف پڙهو.

(i) 1^o سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾

(ii) 3^o سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾

(iii) 36^o فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

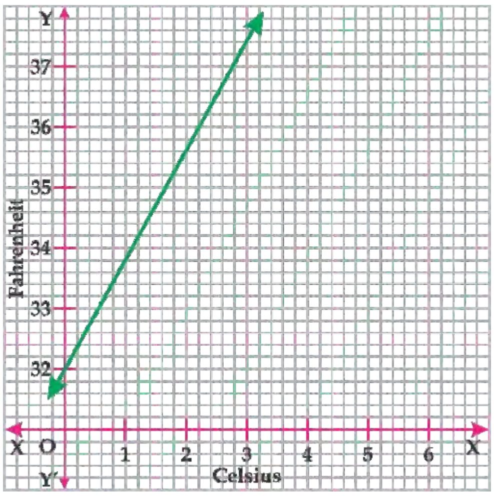
(iv) 37^o فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

۾ ڏنل پئمانا استعمال ڪري تبديل ڪريو.

سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ ۾ تبديل ٿيندڙ گراف

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 سينٽي گريڊ $x-$ محور تي

5 ننڍا چورس = 1 فارنهائيٽ $y-$ محور تي



حل: (i) 1^o سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

1^o سينٽي گريڊ ≅ 33.8^o کي فارنهائيٽ جي

(ii) 3^o سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين تہ

3^o سينٽي گريڊ $\cong 31.8^o$ کي فارنهائيٽ جي

(iii) 36^o فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين تہ

36^o فارنهائيٽ $\cong 2.2^o$ سينٽي گريڊ

(iv) 37^o فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين تہ

37^o فارنهائيٽ $\cong 2.8^o$ سينٽي گريڊ جي

(iv) سکي جي تبديلي جو گراف پڙهو.

مثال 1: هيٺيان گراف، آمريکي ڊالر ۽ پاڪستاني رپيو جي تبديلي جا پڙهو.

(i) 2 آمرکي ڊالرن کي رپين ۾

(ii) 5 آمرکي ڊالرن کي روپين ۾

(iii) 360 رپين کي آمرکي ڊالرن ۾

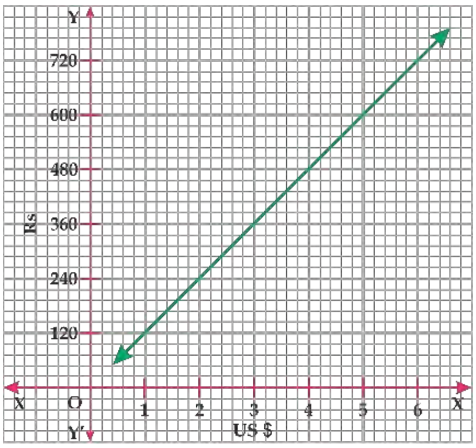
(iv) 720 رپين کي آمرکي ڊالرن ۾

۾ ڏنل پئمانا استعمال ڪري تبديل ڪريو.

آمريکي ڊالرن ۾ پاڪستاني رپين جي تبديلي جو گراف

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 آمريکي ڊالر x– محور تي

5 ننڍا چورس = 120 پاڪستاني رپيہ y– محور تي



حل: (i) 2 آمريکي ڊالرن کي رپين ۾

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين تہ

2 آمريکي ڊالر $\cong 240$ رپين جي

(ii) **5 آمريڪي ڊالرن کي رپين ۾**

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين تہ

5 آمريڪي ڊالر $\cong$ 600 رپين جي

(iii) **360 پاڪستاني رپين کي ڊالرن ۾**

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين تہ

360 رپيو $\cong$ 3 ڊالر ۾

(iv) **720 پاڪستاني رپين کي ڊالرن ۾**

متئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين تہ

720 پاڪستان رپيہ $\cong$ 6 ڊالرن جي

7.3 گرافي طريقي سان ٻن بدلجندڙ تي مشتمل مساوات جو حل:

7.3.1 ٻن بدلجندڙ واري همزاد هڪ درجي مساوات کي گرافي طريقي سان حل ڪريو.

اسان اڳ ۾ ئي ٻن هڪ درجي مساوات کي آلجبري طريقي سان حل ڪرڻ سکي آيا آهيون. هاڻ اسان هن حصي ۾ ٻن هڪ درجي مساواتن کي ٻن بدلجندڙن سان گرافي طريقي سان حل ڪرڻ سکنداسين. هتي ٻن ليڪن جي ڪپيندڙ ٽبڪو مساوات جو حل سيٽ هوندو آهي.

مثال 01 مليل مساواتن جو گرافي طريقي سان حل سيٽ معلوم ڪريو.

$x + y = 3$ ۽ $x - y = 5$

حل: مليل مساواتن هن طرح آهن.

$$x+y = 3 \longrightarrow (1)$$

۽ $$x-y = 5 \longrightarrow (2)$$

هنن مساواتن کي اسان y جي جزي لاءِ هن طرح لکنداسين

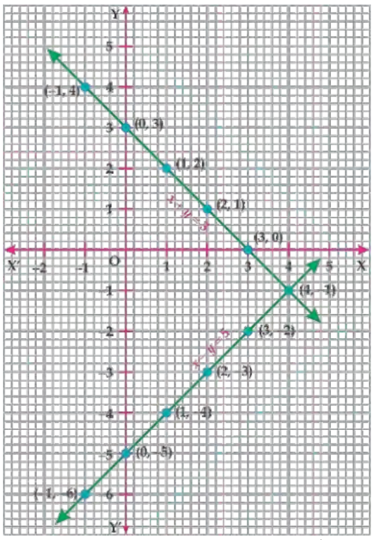
$$y= 3 - x \longrightarrow (3)$$

$$y= x - 5 \longrightarrow (4)$$

هاڻ هرهڪ، هڪ درجي مساوات لاءِ الڳ جدول ناهيو.

جدول مساوات (3) جي لاءِ هيٺ ڏنل آهي.

x	-1	0	1	2	3	4	...
y	4	3	2	1	0	-1	...



جدول مساوات (4) جي لاءِ هيٺ ڏنل آهي.

x	-1	0	1	2	3	4	...
y	-6	-5	-4	-3	-2	-1	...

هاڻي ٻنهي جدولن ۾ مليل ٽبڪن کي استعمال ڪري سڌيون ليڪون ناهيو.

اسان ڏسنداسين ته مليل مساواتن جون سڌيون ليڪون l_1 ڪپي ٿي l کي ٽبڪي $(4, -1)$ تي.

تنهنڪري حل سيٽ آهي $\{4, -1\}$.

مثال مليل مساوات $y = 2x + 4$ ۽ $y = 2x - 2$ جو گراف جي صورت ۾ حل سيٽ معلوم ڪريو.

حل: مليل مساواتون هن ريت آهن.

$$y = 2x + 4 \rightarrow (1)$$

ي $$y = 2x - 2 \rightarrow (2)$$

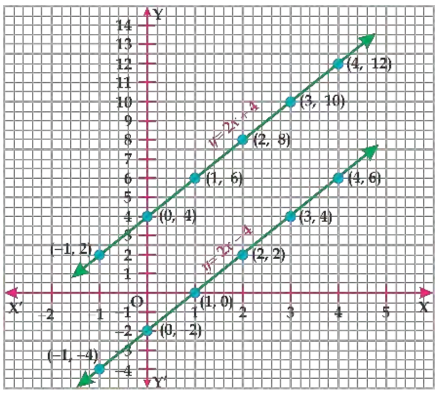
هن هرهڪ، هڪ درجي مساوات جي لاءِ الڳ جدول ناهيو.

مساوات (i) جي لاءِ جدول هيٺ ڏنل آهي.

x	-1	0	1	2	3	4
y	2	4	6	8	10	12

مساوات (ii) جي لاءِ جدول هيٺ ڏنل آهي.

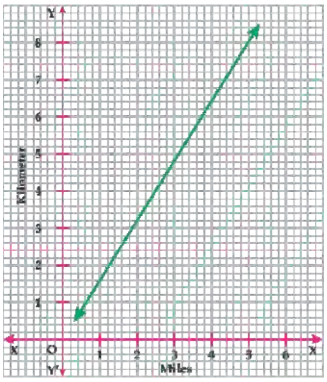
x	-1	0	1	2	3	4
y	-4	-2	0	2	4	6



هاڻي هنن ٽبڪن کي ٻنهي مساواتن لاءِ ظاهر ڪريو. ۽ پوءِ هنن ٽبڪن کي ملائي ۾ ليڪون ناهيو.

اسان ڏسي سگهون ٿا ته هنن مساواتن مان حاصل ٿيل ٻنهي سڌين ليڪن ۾ ڪابه مشترڪ ٽبڪو نه آهي. ان جو مطلب ته هي ليڪون پاڻ ۾ ڪٿي ڪنهن به ٽبڪي تي نه ٿيون ڪپين تنهنڪري ان جو حل سيٽ خالي سيٽ آهي. حل سيٽ { } آهي.

مشق 7.3



.1 ميل ۽ ڪلوميٽر جا مليل تبديل ٿيل گراف پڙهو.

(i) 1 ميل کي ڪلوميٽرن ۾

(ii) 3 ميلن کي ڪلوميٽرن ۾

(iii) 2 ڪلوميٽرن کي ميلن ۾

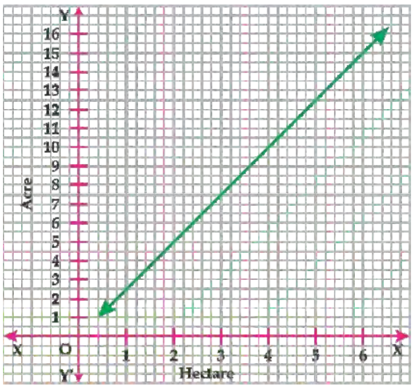
(iv) 8 ڪلوميٽرن کي ميلن ۾

۽ مليل پئماني کي استعمال ڪري تبديل ڪريو.

ميلن ۽ ڪلوميٽرن جي وچ ۾ تبديل ٿيل گراف

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ميل x– محور سان

5 ننڍا چورس = 1 ميل y– محور سان



.2 هيڪٽر ۽ ايڪڙن جا مليل تبديل ٿيل گراف پڙهو

(i) 2 هيڪٽرن کي ايڪڙن ۾

(ii) 5 هيڪٽرن کي ايڪڙن ۾

(iii) 5 ايڪڙن کي هيڪٽرن ۾

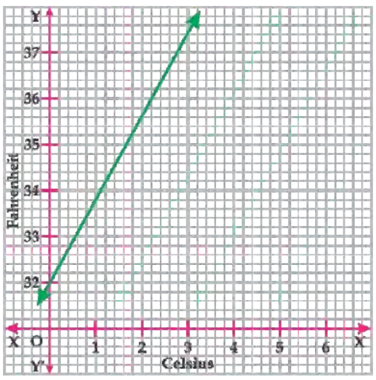
(iv) 15 ايڪڙن کي هيڪٽرن ۾

۽ مليل پئماني کي استعمال ڪري تبديل ڪريو.

هيڪٽرن ۽ ايڪڙن جي وچ ۾ تبديل ٿيل گراف

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 هيڪٽر x– محور سان

2 ننڍا چورس = 1 ايڪڙ y– محور سان



.3 سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ جا مليل، تبديل ٿيل گراف پڙهو.

(i) 2^o سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾

(ii) 80^o سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾

(iii) 32^o فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

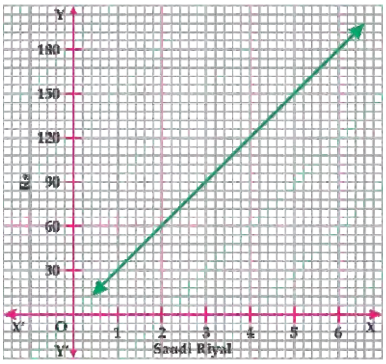
(iv) 36.4^o فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

سينٽي گريڊ فارنهائيٽ جي وچ ۾ تبديل ٿيل گراف

پئمانو: 5 ننڍا چورس =1 سينٽي گريڊ x– محور سان

5 ننڍا چورس =1 فارنهائيٽ y– محور سان

4. پاڪستاني رپين ۽ سعودي ريالن جا مليل، تبديل ٿيل گراف پڙهو.



(i) 3 سعودي ريال کي رپين ۾

(ii) 5.2 سعودي ريال کي رپين ۾

(iii) 150 رپين کي سعودي ريالن ۾

(iv) 78 رپين کي سعودي ريالن ۾

۽ مليل پئماني کي استعمال ڪري تبديل ڪريو.

پاڪستاني رپين ۽ سعودي ريالن ۾ تبديل ڪرڻ جو گراف.

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 سعودي ريال x– محور سان

5 ننڍا چورس = 30 رپيه y– محور سان

5. هينين همزاد مساواتن کي گراف جي طريقي سان حل ڪريو.

i. $3x - 11 = y;\ x-3y=9$

ii. $x + y = 4;\ 2x - 1=5y$

iii. $2x = y + 5;\ x=2y+1$

iv. $y=3x - 5;\ x+y=11$

v. $2x + y = 3;\ x - y=0$

vi. $2x+2=y;\ y=x - 1$

vii. $5 = x + 4y;\ 2x+3y=0$

viii. $3x = 5y-2;\ 3x+5y=8$

ix. $\frac{x+2}{5} +y= 6;\ y=2x - 12$

x. $3x -2y = 13;\ 2x+3y=13$

ورجايل مشق 7

1. صحيح ۽ غلط جواب.

هينيان جملا غور سان پڙهو ۽ T يا F تي گول لڳايو جيڪو به هجي.

(i) ڪارتيسي متاچري ڪي xy متاچرو پڻ چئبو آهي. T/F

(ii) ٻي چوٿائي ۾ ٻئي x ۽ y محدد مثبت هوندا آهن. T/F

(iii) ٽپڪو $(1, -2)$ پهرئين چوٿائي ۾ هوندا آهن. T/F

(iv) ٽپڪو $(-3, -4)$ چوٿين چوٿائي ۾ هوندا آهن. T/F

2. هينين مان صحيح جواب تي (√) نل لڳايو.

(i) ٽپڪو $(-3, -4)$ ظاهر ٿيل هوندو آهي.

(a) پهرئين چوٿائي ۾ (b) ٻئي چوٿائي ۾

(c) ٽئين چوٿائي ۾ (d) چوٿين چوٿائي ۾

(ii) ٻہ محددي محور جي ڪنڊ تي ڪپيندا آهن.

(a) 45^o (b) 90^o

(c) 180^o (d) 270^o

(iii) ليڪ $y = 4$ پورروچوٽ آهي.

(a) $x-$ محور (b) $y-$ محور

(c) ٻنهي محورن تي (d) ڪوبہ نہ

(iv) ليڪ $x = 5$ پورروچوٽ آهي.

(a) $x-$ محور (b) $y-$ محور

(c) ٻنهي محورن تي (d) ڪوبہ نہ

(v) ليڪ $x = 5$ جي $x-$ محور تي ٽپڪو آهن.

(a) $(-5, 5)$ (b) $(0, -5)$

(c) $(-5, 0)$ (d) $(5, 0)$

(vi) ليڪ $x = 2$ جي $x = 5$ جو حل سيٽ آهي.

(a) $\{(2, 5)\}$ (b) $\{(2, 5)\}$

(c) $\{(0, 5)\}$ (d) $\{\ \}$

(vii) محددي محور پاڻ ۾ ______ آهن.

(a) عمود (b) پورروچوٽ

(c) 30^o تي ڪپيندڙ (d) 45^o تي ڪپيندڙ

خلاصو

- ترتيب ڏنل جوڙو، ڪارتيسي متاچري تي ٽبڪي جي جڳهه کي ظاهر ڪندو آهي.
- ٻہ طرفي ڪارتيسي محددي نظام، ٻن عمودي ليڪن x– ۽ y– محور سان تعريف ڪيو ويندو آهي ٻئي محور هڪ ٻئي کي مخصوص ٽبڪي تي اڍو اڙ ڪندا جنهن کي اصل $(0, 0)$ چئبو آهي.
- متاچرو چئن چوٿاين ۾ محور سان ورهايل آهي.
- ڪارتيسي متاچري کي xy متاچرو پڻ چئبو آهي.
- پهرين چوٿي I ۾ ٻئي x– محددي ۽ y– محددي واڌو آهن $x > 0$ ۽ $y > 0$.
- ٻئي چوٿي II ۾ x محددي ڪاٽو ۽ y– محددي واڌو آهي $x < 0$ ۽ $y > 0$.
- ٽئين چوٿي III ۾ x محددي ۽ y– محددي ڪاٽو آهن $x < 0$ ۽ $y < 0$.
- چوٿين چوٿيIV ۾ x محددي واڌو ۽ y– محددي ڪاٽو آهي $x > 0$ ۽ $y < 0$.
- اصل ٽبڪي تي $x = y = o$، تنهنڪري اصل نقطي جا محددي $(0, 0)$ آهن.
- عام طرح سان ڪارتيسي متاچري ۾ ٽبڪن کي ترتيب ڏنل جوڙن (a, b) جي صورت ۾ ظاهر ڪبو آهي، جڏهن تہ a، x– محددي (abscissa) ۽ b، y محددي (ordinate) آهي.
- $x = a$ جو گراف y– محور جي پوروچوٺ آهي.
- $y = c$ جو گراف x– محور جي پوروچوٺ آهي.
- $y = mx$ جو گراف هميشہ اصل مان گذرندو آهي.
- $y = mx + c$ جو گراف y– محور کي $y = c$ ۾ ڪٽيندو آهي.