ٻہ درجي مساوات
(Quadratic Equation)

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هي يونٽ مڪمل ڪرڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- هڪ بدلجندڙ ۾ ٻہ درجي مساوات حل ڪري سگھندا.
  - جزن وسيلي
  - مڪمل چورس بنائڻ
- مڪمل چورس بنائڻ جو طريقو استعمال ڪري ٻہ درجي فارمولا حاصل ڪندا ٻہ درجي فارمولو استعمال ڪري ٻہ درجي مساوات حل ڪندا.
- $ax^4 + bx^2 + c = 0$ نموني مساوات کي ٻہ درجي مساوات ۾ تبديل ڪري چوٿائي يا چوٿائي درجي جي مساوات.
- $ap(x) + \frac{c}{p(x)} = b,$ صورت واري مساوات کي حل ڪري سگھندا، جڏھن تہ a ، b ۽ c عدد آھن.
- ٻنھي طرفن واري مساوات جي صورت $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0,$ کي حل ڪري سگھندا.جڏھن تہ a ، b ۽ c عدد آھن.
- سگھن واريو مساواتون، جنھن جي بدلجندڙ تي سگھ نما ھجن، حل ڪري سگھندا.
- مساوات جي صورت $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=k$ کي حل ڪري سگھندا جڏھن تہ $a+b=c+d$ $k \neq 0$
- مساوات ڏنل صورت ۾ حل ڪندا.
  - $\sqrt{(ax+b)} = cx + d.$
  - $\sqrt{(x+a)} + \sqrt{(x+b)} = \sqrt{(x+c)}$
  - $\sqrt{(x^2 + px + m)} + \sqrt{(x^2 + px + n)} = q.$

8.1 به درجي مساوات ۽ انهن جو حل

8.1.1 وضاحت ڪري پوءِ به درجي مساوات جي معياري صورت جي تعريف ڪريو.

به درجي گهڻ رقمي مساوات کي به درجي مساوات چئبو آهي.

به درجي مساوات جي معياري صورت $ax^2+bx+c=0$ آهي جڏهن ته $a \neq 0$ ۽ $a, b, c \in \mathbb{R}$

هن صورت ۾ "a" عددي سرو آهي x^2 جو، b عددي سرو آهي. x جو ۽ c مستقل جزو آهي.

$ax^2+bx+c=0$ ۾ جيڪڏهن $a = 0$ ته اها گهٽجي هڪ درجي مساوات $bx+c=0$ ٿيندي ۽ جيڪڏهن $b = 0$ ته پوءِ اها، خالص به درجي صورت $ax^2+ c=0$ ۾ ٿيندي.

هينيان مثال به درجي مساوات جا آهن.

(i) $4x^2+4x+1=0$ (به درجي مساوات جي معياري صورت)

(ii) $x^2-4=0$ (خالص به درجي مساوات)

8.1.2: هڪ بدلجندڙ ۾ به درجي مساوات جو حل ڪريو.

- جزن ذريعي
- مڪمل چورس بٽائڻ ذريعي

هتي اسان به درجي مساوات کي حل ڪرڻ لاءِ ٻن طريقن کي غور ڪريون ٿا.

(a) جزن ڪرڻ جو طريقو (b) مڪمل چورس بٽائڻ جو طريقو

(a) جزن ڪرڻ جو طريقو

مثال 01 حل ڪريو.

(i) $x^2+2x-15=0$ (ii) $2x^2-5x=12$

حل (i): $x^2+2x-15=0$

$\Rightarrow \quad x^2+5x-3x-15=0$

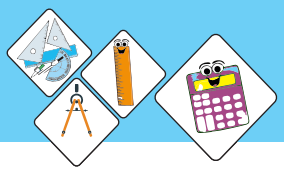
$\Rightarrow \quad x(x+5)-3(x+5)=0$

$\Rightarrow \quad (x-3)(x+5)=0$

$\Rightarrow \quad x-3=0 \quad$ يا $\quad x+5=0$

$\Rightarrow \quad x=3 \quad$ يا $\quad x=-5$

تنهنڪري حل سيٽ آهي $\{-5,3\}$



حل (ii):

$$2x^2-5x=12$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2-5x-12=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2-8x+3x-12=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x(x-4)+3(x-4)=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-4)(2x+3)=0$$

$$\Rightarrow \quad x-4=0 \quad \text{or} \quad 2x+3=0$$

$$\Rightarrow \quad x=4 \quad \text{or} \quad x=\frac{-3}{2}$$

تنهنڪري حل سيٽ آهي $\left\{-\frac{3}{2}, 4\right\}$

مثال 02 خالص ۽ درجي مساوات $4m^2-1=0$ ، جزن واري طريقي سان حل ڪريو.

حل:

$$4m^2-1=0$$

$$\Rightarrow \quad (2m)^2-(1)^2=0$$

$$\Rightarrow \quad (2m-1)(2m-1)=0 \quad \left[\because a^2-b^2=(a-b)(a+b)\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2m-1=0 \quad \text{or} \quad 2m+1=0$$

$$\Rightarrow \quad 2m=1 \quad \text{or} \quad 2m=-1$$

$$\Rightarrow \quad m=\frac{1}{2} \quad \text{or} \quad m=-\frac{1}{2}$$

تنهنڪري حل سيٽ آهي $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

(b) مڪمل چورس بڻائڻ وارو طريقو

طريقي جي وضاحت هيٺ ڪجي ٿي.

(i) پهريائين مساوات کي معياري صورت $ax^2+bx+c=0$ ۾ لکو.

(ii) مساوات کي ٻنهي پاسن کان x^2 جي عددي منڊي، جيڪو 1 کان مختلف هجي، ان سان وندڪريو.

(iii) مستقل رقم کي ساڄي پاسي ٽپايو.

(iv) ٻنهي طرف x جو عددي منڊو $\left(\frac{1}{2}\times\right)^2$ جوڙ ڪريو.

(v) کاٻي طرف واري رقم کي چورس ۾ لکو ۽ ساڄي طرف واري رقم کي مختصر ڪيو.

(vi) مليل مساوات جي ٻنهي طرفن جو ٻيو مول ونو، حاصل ٿيندڙ مساوات کي، حل ڪريو ۽ حل سيٽ لکو.

مثال 01 حل ڪريو $2x^2+8x-1=0$

حل:

$$2x^2+8x-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+8x=1 \quad \ldots \text{(i)}$$

$$\Rightarrow \quad x^2+4x=\frac{1}{2} \quad \ldots \text{(ii)}$$

مساوات (i) کي 2 سان ونڊ ڪرڻ سان)

مساوات جي ٻنهي طرفن $4=\left[\frac{1}{2}\times 4\right]^2$ جوڙ ڪريو. ته اسان کي ملندو

$$x^2+4x+4=\frac{1}{2}+4$$

$$\Rightarrow \quad x^2+2(2)x+(2)^2=\frac{1}{2}+(2)^2$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)^2=\frac{1}{2}+4$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)^2=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x+2=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

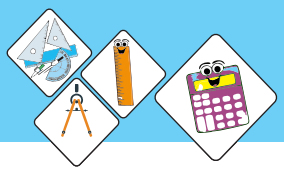
$$\Rightarrow \quad x+2=\frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \Big| \qquad x+2=-\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad x+2=\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad \Big| \qquad x+2=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=-2+\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad \Big| \qquad x=-2-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-4+3\sqrt{2}}{2} \qquad \Big| \qquad x=\frac{-4-3\sqrt{2}}{2}$$

ته حل سيٽ آهي $\left\{\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}, \frac{-4-3\sqrt{2}}{2}\right\}$.



مشق 8.1

1. هيٺيون ۾ درجي مساواتون جزن ڪرڻ واري طريقي سان حل ڪريو.

(i) $x^2+5x+6=0$ (ii) $6x^2-x-1=0$ (iii) $x^2-11x+30=0$

(iv) $x^2-2x=0$ (v) $x^2-2x-15=0$ (vi) $12x^2-41x+24=0$

(vii) $(x-5)^2-9=0$ (viii) $(3x+4)^2-16=0$

2. هيٺين مان هر هڪ مڪمل چورس ٻڌائڻ واري طريقي سان حل ڪريو.

(i) $x^2+6x+1=0$ (ii) $(3x+2)(x+2)=6-2(x+1)$. (iii) $3x^2-8x=-1$

(iv) $24x^2=-10x+21$ (v) $2(x^2-3)-3x=2(x+3)$ (vi) $2x^2+4x-1=0$

3. مساوات $3x^2+bx-8=0$ ۾ انهن جي جزن مان 2 هڪ جڙ هجي.

(i) b جو ملهه ڳا آهي.

(ii) مساوات جو ٻيو جزو ڪهڙو آهي.

8.2 ۾ درجي فارمولا

مليل مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کي حل ڪرڻ لاءِ اسان هيٺيون فارمولا $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ استعمال ڪنداسين. جنهن کي ۾ درجي فارمولا چئبو آهي.

8.2.1: مڪمل چورس ٻڌائڻ وارو طريقو استعمال ڪري ۾ درجي فارمولا حاصل ڪريو.

۾ درجي مساوات معياري صورت ۾ لکو.

$ax^2+bx+c=0$ . . . (i)

مساوات (i) کي ٻنهي طرف a سان ونڊ ڪرڻ سان حاصل ٿيندو.

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$$

$$\therefore \quad x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$$

مستقل جزي $\frac{c}{a}$ کي ساجي پاسي ٽپائڻ سان

$$\therefore \quad x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a} \quad \text{. . . (ii)}$$

مساوات ۾ ٻنهي طرفن $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ جوڙ ڪرڻ سان

$$\therefore \quad x^2+\frac{bx}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

8.2.2: بہ درجي مساوات کر حل کرڻ لاءِ بہ درجي فارمولا جو استعمال

مثال 01 بہ درجي فارمولا استعمال کري حل کريو.

(i) $2x^2-5x-3=0$ (ii) $x^2+x+1=0$

حل (i):

$2x^2-5x-3=0$

هتي $a=2, b=-5$ ۽ $c=-3$

بہ درجي فارمولا استعمال کرڻ سان

$$\because \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(2)(-3)}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm\sqrt{25-(-24)}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm\sqrt{49}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm7}{4}$$

$\Rightarrow \quad x = \frac{5+7}{4}$ | $x = \frac{5-7}{4}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{12}{4}$ | $x = \frac{-2}{4}$

$\Rightarrow \quad x = 3$ | $x = -\frac{1}{2}$

تہ جزا آهن 3 ۽ $-\frac{1}{2}$

تہ حل سيٽ آهي $\left\{3, -\frac{1}{2}\right\}$

حل (ii): $x^2 + x + 1 = 0$

هتي $a = 1, b = 1$ ۽ $c = 1$ آهي.

ہ درجي فارمولا استعمال ڪرڻ سان

$$\because x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

تہ حل سيٽ آهي $\left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

مشق 8.2

هيٺيون مساواتون ہ درجي فارمولا استعمال ڪري حل ڪريو.

(i) $x^2 - 2x = 15$ (ii) $10x^2 + 19x - 15 = 0$ (iii) $x^2 = -x + 1$

(iv) $2x = 9 - 3x^2$ (v) $9x^2 = 12x - 49$ (vi) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - 1 = 0$

(vii) $3x^2 - 2x + 2 = 0$ (viii) $6x^2 - x - 1 = 0$ (ix) $4x^2 - 10x = 0$

(x) $x^2 - 1 = 0$ (xi) $x^2 - 6x + 9 = 0$ (xii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-4} = 4$

8.3 به درجي صورت ۾ گهٽجندڙ جهڙيون مساواتون

مساواتن جا ڪيترا ئي نمونا آهن جيڪي به درجي نه آهن پر انهن کي به درجي صورت ۾ ڪو مناسب نعمل بدل وٹي گهٽائي سگهجي ٿو.

8.3.1: $ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$ نموني جي مساوات به درجي صورت ۾ گهٽجڻ جهڙن مساواتن کي حل ڪريو. چوٿائي درجي جي مساوات

فرض ڪريو ته $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ، چوٿائي يا چوٿائي درجي جي مساوات آهي ۽ به درجي صورت $ay^2 + by + c = 0$ ۾ گهٽائي سگهجي ٿي. هي طريقو هيٺين مثالن سان سمجهايو ويو آهي.

مثال چوٿائي درجي جي مساوات $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$ کي حل ڪريو.

حل:

$$4x^4 - 25x^2 + 36 = 0 \quad \ldots \text{(i)}$$

هن مساوات کي لکي سگهجي ٿو

$$(x^2)^2 - 25x^2 + 36 = 0 \quad \ldots \text{(ii)}$$

$y = x^2$ مساوات (ii) ۾ لکڻ سان اسان کي ملندو

$$4y^2 - 25x^2 + 36 = 0$$

هتي $a = 4, b = -25$ ۽ $c = 36$ آهي.

$$\because \quad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\therefore \quad y = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4(4)(36)}}{2(4)}$$

$$y = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2(4)} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{25 \pm 7}{8}$$

i.e., $y = \frac{25 + 7}{8}$ | $y = \frac{25 - 7}{8}$

$y = \frac{32}{8} = 4$ | $y = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

but, $y = x^2$, then

$x^2 = 4$ | $x^2 = \frac{9}{4}$

$x = \pm\frac{3}{2}$ | $x = \pm 2$

تہ حل سيٽ آهي $\left\{\pm 2 , \pm\frac{3}{2}\right\}$

8.3.2: $ap(x)+\frac{b}{p(x)} = c$ نموني جي مساوات حل ڪريو، جڏهن b, a ۽ c حقيقي آهن.
$a\neq 0$ ۽ $p(x)$ هڪ آلجبري اظهار آهي.

مثال 01 حل ڪريو $8\sqrt{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} = 2$

حل:

$$8\sqrt{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} = 2 \quad \ldots \text{(i)}$$

فرض ڪريو تہ $p(x) = y = \sqrt{x+3}$ تہ (i) ۾ رقم رکڻ سان

$$\Rightarrow \quad 8y - \frac{1}{y} = 2$$
$$\Rightarrow \quad 8y^2 - 1 = 2y$$
$$\Rightarrow \quad 8y^2 - 2y - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 8y^2 - 4y + 2y - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 4y(2y-1) + 1(2y-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (4y+1)(2y-1) = 0$$

$4y+1=0$	$2y-1=0$
$y = \frac{-1}{4}$	$y = \frac{1}{2}$,
when $y = -\frac{1}{4}$,	$y = \frac{1}{2}$, then,
$\sqrt{x+3} = -\frac{1}{4}$	$\sqrt{x+3} = \frac{1}{2}$
بنهي پاسي چورس وٺڻ سان	بنهي پاسي چورس وٺڻ سان
$x+3 = \frac{1}{16}$	$x+3 = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{16} - 3$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1-48}{16}$$
$$\Rightarrow \quad x = -\frac{47}{16}$$

$$x = \frac{1}{4} - 3$$
$$x = \frac{1-12}{4}$$
$$x = -\frac{11}{4}$$

چڪاس

$$8\sqrt{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} = 2$$

مثين مساوات ۾ $x = -\frac{11}{4}$ وجهڻ سان

$$8\sqrt{\frac{-11}{4} + 3} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-11}{4} + 3}} = 2$$
$$8\sqrt{\frac{-11+12}{4}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-11+12}{4}}} = 2$$
$$8\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2$$
$$8\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$
$$4 - 2 = 2$$
$$2 = 2$$

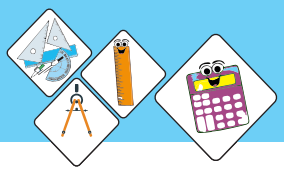
ثابت ٿي ويو. Verified

مثين مساوات ۾ $x = -\frac{47}{16}$ وجهڻ سان

$$8\sqrt{\frac{-47}{16} + 3} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-47}{16} + 3}} = 2$$
$$8\sqrt{\frac{-47+48}{16}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-47+48}{16}}} = 2$$
$$8\sqrt{\frac{1}{16}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16}}} = 2$$
$$8\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 2$$
$$2 - 4 = 2$$
$$-2 \neq 2$$

ثابت نہ ٿيو. Non verified

تہ حل سيٽ آهي $= \left\{-\frac{11}{4}\right\}$.



8.3.3: باهمي مساوات $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$, حل ڪريو. جڏهن ته a, b ۽ c ناطق عدد آهن

هڪ گهٽ رقمي مساوات کي باهمي مساوات (Reciprocal Equation) چئبو جيڪڏهن اها تبديل نه ٿئي هجي جڏهن x کي تبديل ڪجي $\frac{1}{x}$ سان.

هن قسم جي باهمي مساوات $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$, کي حل ڪرڻ جو طريقو هيٺين مثالن ۾ ڏجي ٿو، جڏهن a, b, c ناطق عدد هجن.

مثال 10 حل ڪريو $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$

حل:

جيڪڏهن $x+\frac{1}{x}=y$ ، ته پوءِ $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, ، ته مساوات (i) ۾ رکڻ سان ملندو

$$2(y^2-2)-9y+14=0$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2-9y+10=0$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2-4y-5y+10=0$$

$$\Rightarrow \quad 2y(y-2)-5(y-2)=0$$

$$\Rightarrow \quad (y-2)(2y-5)=0$$

i.e. $y-2=0$

$\Rightarrow \quad y=2$

جڏهن $y=x+\frac{1}{x}$, ته پوءِ

$$x+\frac{1}{x}=2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+1=2x$$

$$\Rightarrow \quad x^2-2x+1=0$$

$$2y-5=0$$

$$y=\frac{5}{2}$$

استعمال ڪرڻ سان ملندو $y=x+\frac{1}{x}$,

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+2=5x$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x-1=0$$
$$\Rightarrow \quad x=1$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2-5x+2=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2-4x-x+2=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x(x-2)-1(x-2)=0$$
$$\Rightarrow \quad (x-2)(2x-1)=0$$
$$\Rightarrow \quad x-2=0$$
$$\Rightarrow \quad x=2$$
$$\Rightarrow \quad 2x-1=0$$
$$\Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

تہ حل سيٽ ٿيندو $= \left\{\frac{1}{2}, 2, 1\right\}$.

8.3.4: سگھن واريون حل ڪريو جنهن ۾ بدلجندڙ تي سگھ نما هجن مساواتون جن ۾ بدلجندڙن تي سگھ نما مليل هجن تہ انهن کي سگھن واري مساوات چئبو آهي. اهڙ مساواتن جو حل هيٺين مثالن سان ظاهر ڪيو ويو آهي.

مثال 01 حل ڪريو $7^{1+x} + 7^{1-x} = 50$

حل:

$$7^{1+x} + 7^{1-x} = 50 \quad \ldots \text{(i)}$$

$7.7^x + 7.7^{-x} - 50 = 0$ (سگھن تي تقسيم ڪرڻ سان)

$$\Rightarrow \quad 7.7^x + \frac{7}{7^x} = 50 \quad \ldots \text{(ii)}$$

فرض ڪريو تہ $y = 7^x$

$\therefore$ مساوات (ii) کي گھٽائڻ سان

$$7y + \frac{7}{y} - 50 = 0,$$
$$\Rightarrow \quad 7y^2 + 7 - 50y = 0$$
$$\Rightarrow \quad 7y^2 - 50y + 7 = 0$$ (Factorizing)
$$\Rightarrow \quad 7y^2 - 49y - y + 7 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 7y(y-7) - 1(y-7) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (7y-1)(y-7) = 0$$

$\Rightarrow \quad 7y-1=0$	$y-7=0$
$\Rightarrow \quad y=\frac{1}{7}$	$\Rightarrow \quad y=7$
then $7^x=7^{-1}$	$y=7$ then $7^x=7^1$
$\Rightarrow \quad x=-1$	$x=1$

تہ حل سيٽ آهي $=\{-1,1\}$

8.3.5: نموني واريون مساواتون حل ڪريو. جڏهن تہ $a+b=c+d$ ۽ $k\neq 0$ مستقل آهي.

مثال 01 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=48$

حل: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=48$

ترتيب کي تبديل ڪرڻ سان

$(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)=48$

$(x^2+4x+x+4)(x^2+2x+3x+6)=48$

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=48 \ldots$ (i)

فرض ڪريو تہ $x^2+5x=t$

By substituting in equation (i)

$\Rightarrow \quad (t+4)(t+6)=48$

$\Rightarrow \quad t^2+4t+6t+24=48$

$\Rightarrow \quad t^2+10t-24=0$

$\Rightarrow \quad t^2+12t-2t-24=0$

$\Rightarrow \quad t(t+12)-2(t+12)=0$

$\Rightarrow \quad (t+12)(t-2)=0$

ياوري

$\Rightarrow \quad t+12=0$	$t-2=0$
$\Rightarrow \quad t=-12$	$t=2$
(ii) مساوات ۾ رقم تبديل ڪرڻ سان	(ii) مساوات ۾ رقم تبديل ڪرڻ سان
$\Rightarrow \quad x^2+5x=-12$	$x^2+5x=2$
$\Rightarrow \quad x^2+5x+12=0$	$x^2+5x-2=0$

هتي $a=1,\ b=5$ and $c=12,$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{25-48}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{-23}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-5\pm i\sqrt{23}}{2}$$

هتي $a=1,\ b=5$ and $c=-2,$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+8}}{2}$$

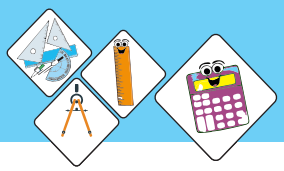
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$$

حل سيٽ آهي $\left\{\frac{-5\pm i\sqrt{23}}{2},\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}\right\}$

مشق 8.3

هيٺيون مساواتون حل ڪريو.

1. $x^4-8x^2-9=0$
2. $x^4-3x^2-4=0$
3. $12x^4-11x^2+2=0$
4. $\frac{2x+3}{x+1}+6\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)=7$
5. $\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2+1}}+6\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2+1}}=5$
6. $5^{x+1}+5^{2-x}=5^3+1$
7. $2^x+\frac{16}{2^x}=8$
8. $2\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x}{x+1}\right)+2=0$
9. $4\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-4\left(\frac{x}{x-1}\right)+4=0$
10. $9^{x+2}-6\cdot 3^{x+1}+1=0$
11. $2x+2^{-x+6}-20=0$
12. $(x-1)(x+5)(x+8)(x+2)=880$
13. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$
14. $(x-2)(x+1)(x+3)(x-4)=24$



8.4 مولي مساواتون

اهڙيون مساواتون جن جي بدلجندڙ اظهارن تي مول هجي تہ انهن کي مولي مساواتون چئبو آهي. مولي مساواتن جو چڪاس ڪرڻ ضروري آهي.

8.4.1: مساواتن جي هيٺين نمونن جو حل

نمونو (i): $\sqrt{ax+b}=cx+d$ نمونو (ii): $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{x+c}$

نمونو (iii): $\sqrt{x^2+px+m}+\sqrt{x^2+px+n}=q$

نمونو (i): $\sqrt{ax+b}=cx+d$

مثال حل ڪريو $\sqrt{217-x}=x-7$

حل:

$\sqrt{217-x}=x-7$

ٻنهي پاسي چورس ڪرڻ سان

$$(\sqrt{217-x})^2=(x-7)^2$$

$$\Rightarrow 217-x=(x-7)^2$$

$$\Rightarrow 217-x=x^2-14x+49$$

$$\Rightarrow x^2-13x-168=0$$

$$\Rightarrow x^2-21x+8x-168=0$$

$$\Rightarrow x(x-21)+8(x-21)=0$$

$$\Rightarrow (x-21)(x+8)=0$$

$x=21$ يا $x=-8$

چڪاس: $x=21$

$\sqrt{217-x}=x-7$

$\therefore \sqrt{217-21}=21-7$

$\Rightarrow \sqrt{196}=14$

$\Rightarrow 14=14$

ثابت ٿيو verified

چڪاس: $x=-8$

$\sqrt{217-x}=x-7$

$\therefore \sqrt{217-(-8)}=-8-7$

$\Rightarrow \sqrt{225}=15$

$\Rightarrow 15\neq -15$

ثابت نہ ٿيو not verified

حل سيٽ آهي {21}

نمونو(ii): $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{x+c}$

مثال حل ڪريو $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13}$

حل:

$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13}$

بنهي پاسي چورس ڪرڻ سان

$$(\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2})^2=(\sqrt{6x+13})^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x+7})^2+2(\sqrt{x+7})(\sqrt{x+2})+((\sqrt{x+2})^2=6x+13$$

$$\Rightarrow x+7+2\sqrt{(x+7)(x+2x)}+x+2=6x+13,$$

$$\Rightarrow 2x+7+2+2\sqrt{(x^2+7x+2x+14}=6x+13$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+9x+14}=4x+4$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+9x+14}=2x+2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+9x+14}=2(x+1)$$

وري بنهي پاسي چورس ڪرڻ سان

$$\left(\sqrt{x^2+9x+14}\right)^2=[2(x+1)]^2$$

$$\Rightarrow x^2+9x+14=4(x+1)^2$$
$$\Rightarrow x^2+9x+14=4(x^2+2x+1)$$
$$\Rightarrow x^2+9x+14=4x^2+8x+4$$
$$\Rightarrow 3x^2-x-10=0$$
$$\Rightarrow 3x^2+5x-6x-10=0$$
$$\Rightarrow x(3x+5)-2(3x+5)=0$$
$$\Rightarrow (x-2)(3x+5)=0$$

يا وري

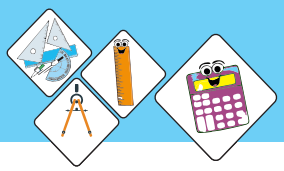
$3x+5=0$ | $x-2=0$

i.e. $x=-\frac{5}{3}$ يا $x=2$

چڪاس:

$x=-\frac{5}{3}$ | $x=2$

$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13}$ | $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13},$



$$\sqrt{-\frac{5}{3}+7}+\sqrt{-\frac{5}{3}+2}=\sqrt{6\left(-\frac{5}{3}\right)+13}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{16}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{\sqrt{3}}\neq\sqrt{3}$$

ثابت نہ ٹيو. Not verified.

$$\sqrt{2+7}+\sqrt{2+2}=\sqrt{6(2)+13},$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{9}+\sqrt{4}=\sqrt{25}$$

$$\Rightarrow \quad 3+2=5$$

$$\Rightarrow \quad 5=5$$

ثابت ٹيو. Verified.

جئين تہ $-\frac{5}{3}$ پاهرين جز آهي تنهن ڪري $x=5$ حل آهي {5}

نمونو (iii): $\sqrt{x^2+px+m}+\sqrt{x^2+px+n}=q$

مثال 01 حل ڪريو $\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$

حل: مليل مساوات ۾ $y=x^2-3x$ رکڻ سان اسان کي ملندو

$$\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$$

$$\sqrt{y+21}-\sqrt{y+5}=2$$

$$\sqrt{y+21}=2+\sqrt{y+5}$$

ٻنهي طرفن چورس ڪرڻ سان

$$y+21=(2)^2+4\sqrt{y+5}+(\sqrt{y+5})^2$$

$$\Rightarrow \quad y+21=(2)^2+4\sqrt{y+5}+\left(\sqrt{y+5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad y+21=4+4\sqrt{y+5}+y+5$$

$$\Rightarrow \quad 4\sqrt{y+5}=y+21-4-y-5$$

$$\Rightarrow \quad 4\sqrt{y+5}=12$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{y+5}=3$$

وري ٻنهي طرفن چورس ڪرڻ سان اسان کي ملندو.

$$\Rightarrow \quad y+5=9$$

$$\Rightarrow \quad y=4,$$

$y=4$ رکبو، تبديل ڪيل $y=x^2-3x$ ۾ تہ اسان کي ملندو.

$$4=x^2-3x,$$
$$\Rightarrow \quad x^2-3x-4=0,$$
$$\Rightarrow \quad x^2-4x+x-4=0,$$
$$\Rightarrow \quad x(x-4)+1(x-4)=0,$$
$$\Rightarrow \quad (x-4)(x+1)=0,$$
$$\text{i.e.,} \quad x-4=0 \qquad x+1=0$$
$$\Rightarrow \quad x=4, \qquad x=-1,$$

چكاس:

جي لاءِ $x=-1$

$$\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$$
$$\sqrt{(-1)^2-3(-1)+21}-\sqrt{(-1)^2-3(-1)+5}=2$$
$$\sqrt{1+3+21}-\sqrt{1+3+5}=2$$
$$\sqrt{25}-\sqrt{9}=2$$
$$5-3=2$$
$$2=2$$

For $x=4$

$$\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$$
$$\sqrt{(4)^2-3(4)+21}-\sqrt{(4)^2-3(4)+5}=2$$
$$\sqrt{16+12+21}-\sqrt{16-12+5}=2$$
$$\sqrt{25}-\sqrt{9}=2$$
$$5-3=2$$
$$2=2$$

تنهنكري ٻئي جز مليل مساوات جو حصو آهن تنهنكري حل سيٽ ٿيندو $\{-1,4\}$

مشق 8.4

هيٺين مساواتن کي حل ڪريو.

1. $x+\sqrt{x+5}=7$
2. $\sqrt{x-2}=8-x$
3. $\sqrt{7-5x}+\sqrt{13-5x}=3\sqrt{4-2x}$
4. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}=\sqrt{6x+13}$
5. $\sqrt{2x^2+3x+4}+\sqrt{2x^2+3x+9}=5$
6. $\sqrt{y^2-3y+9}-\sqrt{y^2-3y+36}=0$

ورجايل مشق 8.4

1. خال پريو.

(i) گهٽ رقمي مساوات جنهن ۾ بدلجندڙ جو درجو _____ هجي تہ ان کي ٻہ درجي مساوات چئبو آهي.

(ii) ٻہ درجي مساوات جي معياري آهي _____.

(iii) $3^x + 3^{2x} = 1$ کي _____ مساوات چئبو.

(iv) $3^x = 9$ جو حل ٿيندو _____ .

(v) $ax^2 + bx + c = 0$ جو حل ٿيندو _____ .

2. درست جواب تي (√) ڪريو.

(i) ٻہ درجي مساوات جو درجو آهي.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(ii) ٻہ درجي مساوات جي معياري صورت آهي.

(a) $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ (b) $ax^2 + c = 0, a \neq 0$

(c) $ax^2 + bx = 0, a \neq 0$ (d) $ax^3 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$

(iii) $ax^2 + bx + c = 0$ جي لاءِ ٻہ درجي فارمولا آهي.

(a) $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ (b) $\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(c) $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (d) $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

(iv) $x^2 + 10x + 24 = 0$ جو حل سيٽ آهي.

(a) $\{-6, -4\}$ (b) $\{-6, 4\}$

(c) $\{6, 4\}$ (d) $\{6, -4\}$

(v) ٻہ درجي مساوات جا وڌ ۾ وڌ جزا آهن

(a) 2 (b) 3 (c) 1 (d) 4

(vi) $x^2 - 15x + 56$ جا هڪ درجي جزا آهن.

(a) $(x-7)$ ۽ $(x+8)$ (b) $(x+7)$ ۽ $(x-8)$

(c) $(x-7)$ ۽ $(x-8)$ (d) $(x+7)$ ۽ $(x+8)$

(vii) گهٽ رقمي مساوات جيڪا تبديل نہ ٿي سگهي جڏهن x کي $\frac{1}{x}$ سان تبديل ڪجهي ان کي چئبو _____ .

(a) سگهن واري مساوات (b) باهمي مساوات (Reciprocal)

(c) مولي مساوات (d) هن مان ڪوبہ نہ

(viii) $3^x + 3^{2-x} + 6 = 0$ مساوات جو _____ نمونو آهي.

(a) سگھن واري مساوات (b) مولي مساوات

(c) باهمي مساوات (Reciprocal) (d) هن مان ڪوبہ نہ

(ix) $4x^2-16=0$ جو حل سيٽ آهي.

(a) $\{\pm 4\}$ (b) $\{4\}$ (c) $\{\pm 2\}$ هنن مان ڪوبہ نہ

(x) $2x^4-3x^3+7x^2-3x+2=0$ مساوات _____ نموني جي چئبي.

(a) باهمي مساوات (Reciprocal) (b) مولي مساوات

(c) سگھن واري مساوات (d) هن مان ڪوبہ نہ

3. غلط ۽ صحيح جواب

هيٺيان جملا غور پڙهو ۽ صحيح بيان لاءِ "T" ۽ "F" ٿي گولن پايو.

(i) هر ہہ درجي مساوات جزن وسيلي حل ڪري سگھجي ٿي. T/F

(ii) هر ہہ درجي مساوات کي ہہ جزا هوندا آهن. T/F

(iii) ہہ درجي مساوات کي ڪوبہ حل نا هوندوآهي. T/F

(iv) $ax^2+bx+c=0$ کي ہہ درجي مساوات x واري آهي. جيڪڏهن $a=0$ ۽ $b,$ حقيقي عدد آهن. T/F

(v) باهر يان جزا مساوات کي مطمئن ڪن ٿا. T/F

(vi) باهر يان جزا مساوات کي مطمئن نٿا ڪن. T/F

(vii) ہہ درجي مساوات ۾ بدلجندڙ جو وڏي ۾ وڏو سگھ نما 2 آهي. T/F

خلاصو

- گھٽ رقمي مساوات جنهن ۾ بدلجندڙ جو درجو ہہ هجي ان کي ہہ درجي مساوات چئبو آهي.
- $ax^2+bx+c=0$ ، $a\neq 0$ ، a, b, c ۽ حقيقي عدد هنن تہ ان کي ہہ درجي مساوات جي معياري صورت چئبو آهي.
- ہہ درجي مساوات، $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ جو ہہ درجي فارمولا $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- سگھن واري مساواتن ۾ بدلجندڙ تي سگھ نما هوندا آهن.
- هڪ مساوات جيڪا مول جي نشاني هيٺ اظهار هجي تہ ان کي مولي مساوات چئبو آهي.