يڪسان ٽڪندا
Congruent Triangles

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

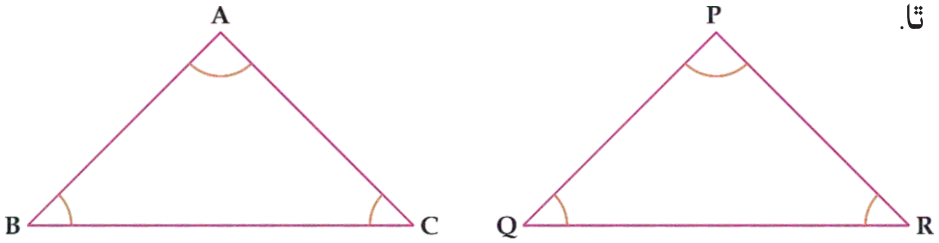
هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

هيٺين سڌيانن کي شامل نتيجن سان گڏ سمجهي سگهندا ۽ انهن کي استعمال ڪري لاڳاپيل حساب حل ڪندا.

- جيڪڏهن ڪن بہ ڏنل مطابقت ۾ هڪ ٽڪندي جون بہ ڪنڊون ۽ ڪو بہ هڪ پاسو ٻي ٽڪندي جي واسطيدارڪنڊن ۽ پاسي سان يڪسان هجن تہ ٻئي ٽڪندا يڪسان ٿيندا.
- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪندي جون بہ ڪنڊون يڪسان هجن تہ سندس سامهون وارا پاسا بہ يڪسان هوندا.
- جيڪڏهن ٻن ٽڪندي جي ڏنل موافقت ۾ هڪ ٽڪندي جا ٽئي پاسا، ٻئي ٽڪندي جي واسطيدار ٽنهي پاسن سان يڪسان هجن تہ، ٻئي ٽڪندا پاڻ ۾ يڪسان يا ساڳيا هوندا.
- جيڪڏهن ٻن گوني ڪنڊ ٽڪنڊن جي موافقت ۾ هڪ ٽڪندي جو هئياٽينيوز ۽ هڪ پاسي، ٻي ٽڪندي جي واسطيدار هئيپاٽينيوز ۽ ٻي پاسي سان يڪسان آهي تہ ٽڪندا پاڻ ۾ يڪسان هوندا.

تعارف

هڪ ٽڪنڊي جا ڇهه حصا هوندا آهن، ٽي پاسا ۽ ٽي ڪنڊون. جيڪڏهن اسان کي ٻه ٽڪنڊا ABC ۽ PQR مليل هجن، اسان انهن جي چوٽين کي ملائي، هنن ٽڪنڊن جي ڪنڊن ۽ پاسن ۾ (1-1) موافقت يا مطابقت کي ڇهن مختلف طريقن سان قائم ڪري سگهون ٿا.



ٽڪنڊن $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ ۾ مطابقت جو مطلب

(i) $\angle A \leftrightarrow \angle P$ ($\angle A$ جي مطابقت $\angle P$ سان)

(ii) $\angle B \leftrightarrow \angle Q$ ($\angle B$ جي مطابقت $\angle Q$ سان)

(iii) $\angle C \leftrightarrow \angle R$ ($\angle C$ جي مطابقت $\angle R$ سان)

(iv) $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{PQ}$ ($\overline{AB}$ جي مطابقت $\overline{PQ}$ سان)

(v) $\overline{BC} \leftrightarrow \overline{QR}$ ($\overline{BC}$ جي مطابقت $\overline{QR}$ سان)

(vi) $\overline{CA} \leftrightarrow \overline{RP}$ ($\overline{CA}$ جي مطابقت $\overline{RP}$ سان)

9.1 يڪسان ٽڪنڊا

جسامت (Size) ۽ شڪل (Shape) جي هڪ جهڙائي کي رياضي ۾ يڪسان چئبو آهي.

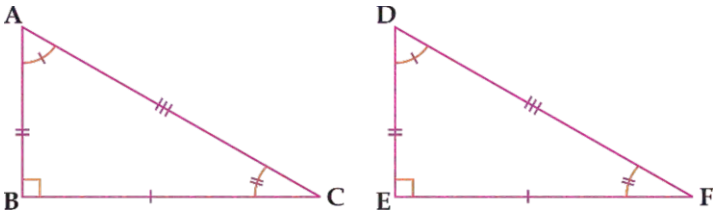
مليل تصوير ۾ ٻن ڪارين جا مختلف رنگ ۽ بيهڪون (Position) آهن. پرانهن جي جسامت ۽ شڪل هڪ جهڙي آهي. هن ٻن ڪارن کي يڪسان چئبو آهي. جيڪڏهن اسان هڪ ڪارجي تصوير ٻي جي مٿان رکنداسين تہ اهي هڪ ٻئي کي اورليپ(هڪ جهڙائي ڪري) ڪنديون

سرگرمي

تلاش ڪرڻ

ڇا توهان کي ٻہ يڪسان تصويرون يا شيون پنهنجي ڪلاس يا اسڪول ۾ سجاڻپ ڪري سگهہ ٿا. انهن يڪسان تصويرن جي فهرست ٺاهي تصوير ٺاهيو يا تصوير ڪيو.

بن ٽڪنڊن کي يڪسان چئبو جيڪڏهن سندن موافق (واسطيدار) ڪنڊون ۽ پاسا يڪسان آهن.



هي ٻه ٽڪنڊا ABC ۽ DEF يڪسان آهن جن کي هن طرح لکو

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

ٽڪنڊن ΔABC ۽ ΔDEF جون موافق پاسا ۽ ڪنڊون ماپ ۾ برابر آهن.

نوٽ: هيٺيان نتيجا ڪارآمد آهن.

(i) پنهنجو پاڻ سان يڪسان (Identity Congruance) جيڪو $\Delta ABC \cong \Delta ABC$

(ii) مطابقت جي خاصيت (Symmetric Property) جيڪڏهن $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ تہ پوءِ

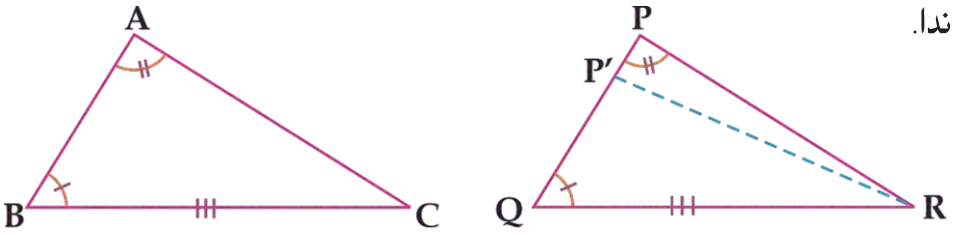
$$\Delta PQR \cong \Delta ABC$$

(iii) يڪسانيت جي متعدي خاصيت (Transitive Property of Congruence)

جيڪڏهن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ تہ پوءِ, $\Delta PQR \cong \Delta DEF$ ۽ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

9.1.1 سڌيان

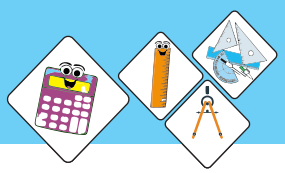
جيڪڏهن ڪن ٻن ٽڪنڊن جي ڏنل مطابقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جون ٻہ ڪنڊون ۽ هڪ پاسو، ٻي ٽڪنڊي جي واسطيدار ڪنڊن ۽ پاسي سان يڪسان هجن تہ ٻئي ٽڪنڊا يڪسان هوندا.



مليل: $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ ۾

$\angle A \cong \angle P$ ۽ $m\overline{BC} \cong m\overline{QR}$, $\angle B \cong \angle Q$

گهربل: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$



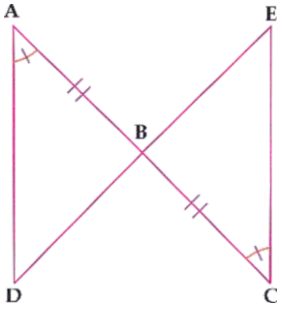
جوڙجڪ: فرض ڪريو ته $\overline{AB} \ncong \overline{PQ}$ ته پوءِ $\overline{PQ}$ تي هڪ ٽپڪو P' وٺو ته جيئن $\overline{AB} \cong \overline{P'Q}$

ثابتي

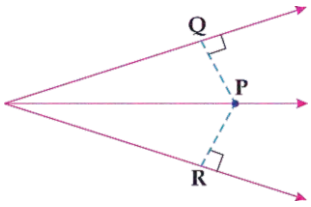
بيان	دليل/ سبب
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ جي مطابقت ۾	
i. $\angle A \cong \angle P$	i. مليل
ii. $\angle B \cong \angle Q$	ii. مليل
$\therefore \angle C \cong \angle R$	
جيڪڏهن $\overline{QP} \ncong \overline{BA}$ ته $\overline{QP}$ کي وڌائي	مفروضو
يا $\overline{QP}$ تي ٽپڪو P' اهڙي طرح وٺو ته	ٻه ڪندون ٻنهي ٽڪندن جو برابر آهن
$\overline{QP'} \cong \overline{BA}$	
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta P'QR$	
$\overline{BC} \cong \overline{QR}$	i. مليل
$\angle B \cong \angle Q$	ii. مليل
$\overline{BA} \cong \overline{QP'}$	iii. مفروضي طور
تنهنڪري $\Delta ABC \cong \Delta P'QR$	S.A.S مفروضو
$\therefore \angle C \cong \angle QRP'$	
پر $\angle C \cong \angle QRP$	ثابت ڪيل (2) ۾
$\therefore \angle QRP' \cong \angle QRP$	يڪسانيت جي متعدي خاصيت
اهو صرف تڏهن ممڪن آهي جڏهن P' ۽ P ٽپڪا هڪ ٻي تي ٽهڪي اچن	ڪنڊ جي بناوت جو موضوع
$\overline{RP'} \cong \overline{RP}$	
تنهنڪري $\overline{BA} \cong \overline{QP}$	P' ۽ P جو هڪ ٻئي تي ٽهڪي اچڻ
ΔABC ۽ ΔPQR جي مطابقت ۾	
i. $\overline{BC} \cong \overline{QR}$	i. مليل
ii. $\angle B \cong \angle Q$	ii. مليل
iii. $\overline{BA} \cong \overline{QP}$	iii. ثابت ڪيل
تنهنڪري $\Delta ABC \cong \Delta PQR$	S.A.S موضوع

Q.E.D.

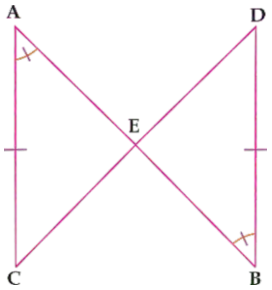
مشق 9.1



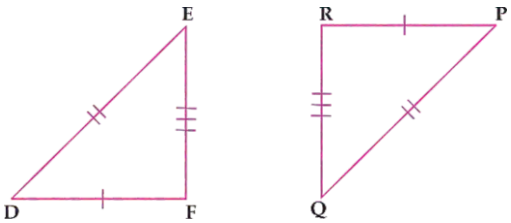
.1 مليل شڪل ۾
$\angle A \cong \angle C$ ۽ $m\overline{AB} = m\overline{CB}$
$\Delta ABD \cong \Delta CBE$ ته ثابت ڪريو ته



.2 ڪنڊ کي اڌ ڪندڙ واري ليڪ تي ڪنهن
ٽپڪي ڪان، ڪنڊ جي ٻا نهن تي
عمود نهيل آهن. ثابت ڪريو ته هي
عمود ماپ ۾ برابر آهن



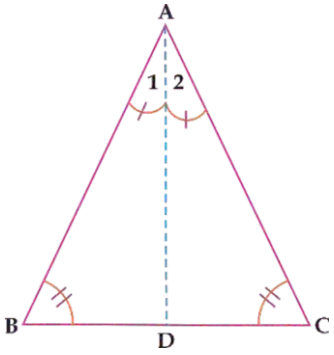
.3 مليل شڪل ۾ اسان کي $\Delta ACE \cong \Delta BDE$
مليل آهن جيئن $m\overline{AC} = m\overline{BD} = 3\ cm$
$\angle A = (3x + 1)^\circ$, $m\angle E = (3y - 2)^\circ$
۽ $m\angle B = (x + 35)^\circ$
ته y ۽ x جون قيمتون معلوم ڪريو.



.4 مليل شڪل ۾ $\Delta DEF \cong \Delta PQR$
تنهنڪري
س. ۾ $m\overline{DE} = (6x + 1)$
س. ۾ $m\overline{EF} = 8$
س. ۾ $m\overline{RQ} = (5y - 7)$ ۽
س. ۾ $m\overline{PQ} = (10x - 19)$
ته y ۽ x جون قيمتون معلوم ڪريو.

9.1.2 سڌيان

جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جون ٻه ڪنڊون يڪسان هجن تہ انهن ڪنڊن جي سامهون وارا پاسا ٻہ يڪسان ٿيندا.



مليل: ΔABC ۾

$m\angle B \cong m\angle C$

گهربل: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

جوڙجڪ: $\angle A$ کي اڌ ڪندڙ $\overline{AD}$ ڪيو.

جيڪو $\overline{BC}$ کي ٽپڪي D تي ملي.

ثابتي

بيان		دليل/ سبب
موافقت	$\Delta ADB \leftrightarrow \Delta ADC$	i. مليل
i.	$\angle B \cong \angle C$	ii. جوڙجڪ
ii.	$\angle 1 \cong \angle 2$	iii. مشترڪ (پنهنجو پاڻ سان يڪسان موضوع S.A.S
iii.	$\overline{AD} \cong \overline{AD}$	ٽڪنڊن جي يڪسانيت جي لحاظ کان
تنهنڪري	$\Delta ABD \cong \Delta ADC$	
	$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	

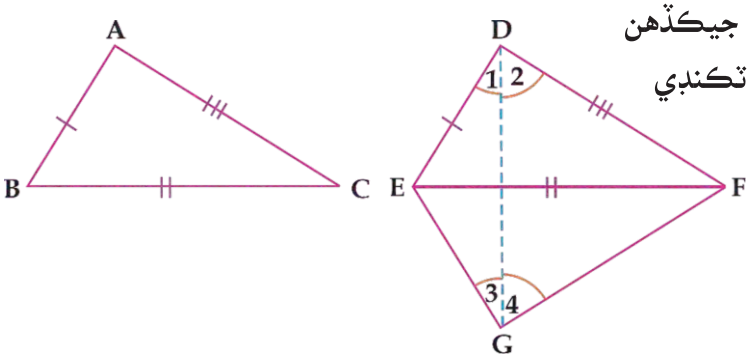
Q.E.D

مشق 9.2

1. ABC هڪ ٽڪنڊو آهي، جنهن ۾ $m\angle A=35°$ ۽ $m\angle B=100°$ ، $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ آهي.
ثابت ڪريو تہ ΔBDC ٻيور پاسو ٽڪنڊو آهي.
2. ٽڪنڊي جي ڪنهن ڪنڊ جو اڌڪندڙ سامهون واري پاسي تي عمود آهي تہ اهو ٽڪنڊو هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو آهي.
3. ABC هڪ ٽڪنڊو آهي. جنهن ۾ $m\angle B = 45°$ ۽ $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ مليل آهي.
ثابت ڪريو تہ ΔDBC هڪ ٻيور پاسو ٽڪنڊو آهي.

سڌيان 9.1.3

ٻن ٽڪنڊن جي موافقت ۾ جيڪڏهن هڪ ٽڪنڊي جا ٽئي پاسا ٻئي ٽڪنڊي جي واسطيدار ٽنهي پاسن سان يڪسان هجن تہ ٻئي ٽڪنڊا يڪسان ٿيندا.



مليل: $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ ۾

$\overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AB} \cong \overline{DE}$ ۽ $\overline{CA} \cong \overline{FD}$

گهربل: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

جوڙجڪ: فرض ڪريو تہ پاسو $\overline{BC}$ سيني پاسن کان وڏو آهي ΔABC تہ ΔGEF ناهيو اهڙي طرح جيئن

(i) ٽپڪو G

(ii) $\angle FEG \cong \angle B$

(iii) $\overline{EG} \cong \overline{BA}$

D کي G سان ملايو.

ثابتي

بيان	دليل/ سبب
مطابقت $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta GEF$ ۾	
i. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	i. مليل
ii. $\angle B \cong \angle GEF$	ii. جوڙجڪ
iii. $\overline{BA} \cong \overline{GE}$	iii. جوڙجڪ
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta GEF$ تنهنڪري	S.A.S. موضوع
$\therefore \overline{AC} \cong \overline{GF}$ ۽ $\angle A \cong \angle G$	ٽڪنڊن جي يڪسانيت
پر $\overline{DF} \cong \overline{AC}$	مليل
$\therefore \overline{GF} \cong \overline{DF}$	متعدي خاصيت
$\therefore \Delta DEG, m\angle 1 = m\angle 3$	سامهون وارا پاسا يڪسان آهن
	$\overline{EG} \cong \overline{BA} \cong \overline{ED}$

ساڳي طرح $m\angle 2 = m\angle 4$ ۾ ΔGFE	$\overline{DF} \cong \overline{GF}$
انهي ڪري $\therefore\ m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$	مساوات جي جوڙ جي خاصيت
يا $m\angle D = m\angle G$	$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle D$
پر $m\angle G = m\angle A$	$m\angle 3 + m\angle 4 = m\angle G$
$\therefore\ m\angle A = m\angle D$	متي ثابت ٿيل
مطابقت $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ ۾	متعدي خاصيت
i. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	i. مليل
ii. $\angle A \cong \angle D$	ii. متي ثابت ٿيل
iii. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	iii. مليل
$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta DEF$ تہ پوءِ	S.A.S موضوع

Q.E.D

شامل نتيجو:

ٽپور پاسي ٽڪندي جون ڪنڊون ماپ ۾ برابر هونديون آهن.

مشق 9.3

1. ABC هڪ ٻپور پاسو ٽڪنڊو آهي. D ان جي بنياد $\overline{BC}$ جي وچ وارو ٽپڪو آهي، ثابت ڪريو تہ $\overline{AD}$، $\angle A$ جو اڌڪندڙ ۽ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

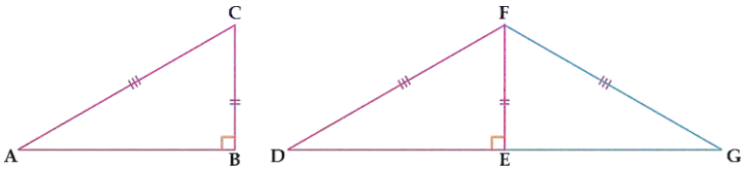
2. ΔABC ۽ ΔDBC ٻپور پاسي وارا ٽڪنڊا مشترڪ بنياد $\overline{BC}$ تي ٺهيل آهن ثابت ڪريو تہ $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ آهي.

3. PQRS هڪ چورس آهي. جنهن ۾ ترتيبوار $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ ۽ $\overline{RS}$ پاسن جا وچيان ٽپڪا X,Y ۽ Z آهن ثابت ڪريو تہ $\Delta PXY \cong \Delta SZY$

4. ثابت ڪريو تہ ٽپور پاسي ٽڪنڊي جا مڌيان يڪسان ٽيندا آهن.

9.1.4 سڌيان

جيڪڏهن بن گوني ڪنڊ ٽڪنڊن جي موافقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جو هئپاٽينيوز ۽ هڪ پاسو، ٻئي ٽڪنڊي جي هئپاٽينيوز ۽ واسطيدار ٻي پاسي سان يڪسان آهي ته ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان ٿيندا.



مليل: گوني ڪنڊ ٽڪنڊن ΔDEF ۽ ΔABC جي مطابقت ۾

(گوني ڪنڊ) $\angle B \cong \angle E$، (هئپاٽينيوز) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ۽ $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ پاسو.

گهربل: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

جوڙجڪ: $\overline{DE}$ کي ٻڌي G تائين وڌايو، ته جيئن $\overline{AB} \cong \overline{EG}$. ٽڪن F ۽ G کي پاڻ ۾ملايو

ثابتي:

بيان			دليل/ سبب
$m\angle DEF + m\angle GEF = 180^o$			سپليمنٽري ڪنڊن جو موضوع
	پر	$m\angle DEF = 90^o$	مليل
	ته پوءِ	$\therefore\ m\angle GEF = 90^o$	$\therefore\ 180^o - 90^o = 90^o$
$\Delta GEF \leftrightarrow \Delta ABC$ ۾			(i) جوڙجڪ
	.i	$\overline{GE} \cong \overline{AB}$	(ii) هر هڪ گوني ڪنڊ آهي
	.ii	$\angle GEF \cong \angle ABC$	(iii) مليل
	.iii	$\overline{EF} \cong \overline{BC}$	S.A.S. ≅ S.A.S.
		$\therefore\ \Delta GEF \cong \Delta ABC$	
انڪري $\angle A \cong \angle G$ ۽		$\therefore\ \overline{FG} \cong \overline{AC}$	يڪسان پاسن جون مخالف ڪنڊون
		$\therefore\ \overline{FG} \cong \overline{DF}$	هرهڪ ΔG جي يڪسان آهي.
ٽڪندي		ΔDFG ۾، $\angle D \cong \angle G$	
		$\therefore\ \angle D \cong \angle A$	مطابقت
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ ۾			(i) ثابت ٿيل
	.i	$\angle A \cong \angle D$	(ii) گوني ڪنڊ
	.ii	$\angle ABC \cong \angle DEF$	(iii) مليل
	.iii	$\overline{AC} \cong \overline{DF}$	
تنهنڪري		$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta DEF$	A.A.S ≅ A.A.S

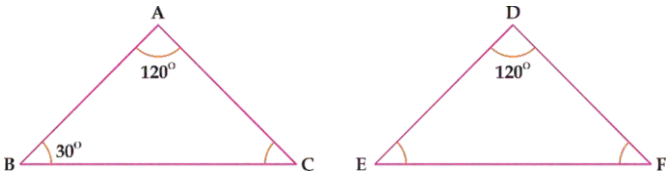
Q.E.D

مشق 9.4

1. ثابت ڪريو تہ
ٻيور پاسي ٽڪنڊي جي بنياد جي چوٽين ڪان نڪتل سامهون واري پاسي ٻئي عمود پاڻ ۾ پاسي تي يڪسان هوندا آهن.
2. ثابت ڪريو تہ جيڪڏهن ٽڪنڊي جي ڪنڊ جو عمودي اڏكندڙ، ان جي سامهون واري پاسي کي تہ اهو ٽڪنڊو ٻيور پاسو ٽڪنڊو ٿيندو.
3. ثابت ڪريو تہ ٻيور پاسي ٽڪنڊي جي بنياد کي اڏاڻ ڪندڙ مڊيان، ٽڪنڊي جي چوٽي واري ڪنڊ کي اڏاڻ ڪندا ۽ بنياد جي عمود هوندا.
4. ثابت ڪريو تہ جيڪڏهن ٽڪنڊي جا تي عمود يڪسان آهن تہ ٽڪنڊو ٽيور پاسو آهي.

مشق ورجايو 9

1. جيڪڏهن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, $m\angle F$ برا آهي.



A. $90°$
B. $60°$
C. $30°$
D. $20°$

2. هيٺين مان صحيح ۽ غلط بيانن جي سڃاڻپ ڪريو.
(i) چوڪنڊي ۾ سيني ڪنڊن جي ماپ جو جوڙ $360°$ آهي.
(ii) ٽڪنڊي ۾ سيني ڪنڊن جي ماپ جو جوڙ $270°$ آهي.
(iii) ٽيور پاسي ٽڪنڊي ۾ ڪنڊون ساڳي ماپ جون هونديون آهن.
(iv) ٽڪنڊي ۾ ٻہ گوني ڪنڊون هونديون.
(v) ٻيور پاسي ٽڪنڊن ۾ موافقت ۾ ڪنڊون ۽ موافقت ۾ پاسان ماپ ۾ برابرهوندا آهن.
3. جملي درست ڪرڻ لاءِ خال پريو.
(i) $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ تہ پوءِ $\overline{AC}$ جي موافقت آهي _____.
(ii) $\Delta KLM \leftrightarrow \Delta PQR$ تہ پوءِ $\angle MKL$ جي موافقت آهي _____.
(iii) ٽيور پاسي ٽڪنڊي ۾ بنيادي ڪنڊون _____ آهن.
(iv) جيڪڏهن ٽڪنڊي جي هر هڪ ڪنڊ جي ماپ $60°$ آهي تہ ٽڪنڊو _____ آهي.
(v) گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾، گوني ڪنڊ جي سامهون وارو پاسو _____ چئبو آهي.
(vi) گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي، سوڙ هين ڪنڊن جي ماپ جو جوڙ _____ آهي.

4. درست جواب جي واسطيدار کي a, b,c ۽ d گول پايو.

(i) هينئين مان کهڙي ٻن ٽڪنڊن جي يڪسانيت لاءِ مناسب صورت نہ آهي.

(a) A.S.A ≅A.S.A (b) H.S ≅ H.S

(c) S.A.A≅ S.A.A (d) A.A.A≅ A.A.A

(ii) ٽڪنڊي ΔABC ۾ جيڪڏهن ∠B ≅ ∠A تہ _____ ڪنڊ جو اڏواڻ ڪندڙ ٽڪنڊي کي ٻن يڪسان ٽڪنڊن ۾ تقسيم ڪندو.

(a) ∠A (b) ∠B (c) ∠C (d) هنن مانڪوبہ نہ

(iii) _____ جي اريب، ان کي ٻن يڪسان ٽڪنڊن ۾ تقسيم نہ ڪندي آهي.

(a) مستطيل (b) ٽرئپيزيم

(c) پورو ڇوٽ ڇوڪندو (d) چورس

(iv) سوڙهي ڪنڊ ٽڪنڊي ۾، ڪيتريون ڪنڊون سوڙهيون هونديون آهن.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) ٻن کان وڌيڪ

خلاصو

هن يونٽ ۾ اسان هينئيان سڌيان بيان ڪري ثابت ڪيا آهن.

- جيڪڏهن ڪن بہ ڏنل مطابقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جون بہ ڪنڊون ۽ ڪو بہ هڪ پاسو ٻي ٽڪنڊي جي واسطيدارڪنڊن ۽ پاسي سان يڪسان هجن تہ ٻئي ٽڪنڊا يڪسان ٿيندا. (A.S.A. ≅ A.S.A)
- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جون بہ ڪنڊون يڪسان هجن تہ سندس سامهون وارا پاسا بہ يڪسان هوندا.
- جيڪڏهن ٻن ٽڪنڊي ڏنل موافقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جاڻئي پاسا، ٻئي ٽڪنڊي جي واسطيدار ٽنهي پاسن سان يڪسان هجن تہ، ٻئي ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان يا ساڳيا هوندا. (S.S.S ≅ S.S.S)
- جيڪڏهن ٻن گوني ڪنڊ ٽڪنڊن جي موافقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جو هئياٽينيوز ۽ هڪ پاسو، ٻي ٽڪنڊي جي واسطيدار هئياٽينيوز ۽ ٻي پاسي سان يڪسان آهن. تہ ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان هوندا.
- ٻن ٽڪنڊن کي يڪسان چئبو آهي، جيڪڏهن انهن ۾ مطابقت موجود هجي اهڙي طرح تہ سڀ مطابقت رکندڙ پاسا ۽ ڪنڊون يڪسان آهن. (S.S.S)