بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

یونٹ 1

# سیٹ

## 1.1 اعادہ

سیٹ کا تصور ریاضی کی تمام شاخوں میں بنیادی حیثیت رکھتا ہے۔ سیٹ مختلف اشیاء کے واضح اجتماع کو کہتے ہیں۔ اِن اشیاء کو سیٹ کے ارکان یا عناصر کہا جاتا ہے، سیٹوں کو عموماً انگریزی حروف A,B,C,....,X,Y,Z اور ارکان کو انگریزی کے چھوٹے حروف $a,b,c,.....x,y,z$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر $a$ سیٹ A کا رکن ہو تو اسے ہم $a \in A$ لکھتے ہیں اور پڑھتے ہیں "$a$ سیٹ A میں موجود ہے یا سیٹ A کا رکن ہے"۔ اگر $a$ سیٹ A کا رکن نہیں ہے تو ہم $a \notin A$ لکھتے ہیں اور پڑھتے ہیں: "$a$ سیٹ A میں موجود نہیں ہے"۔

## 1.2 اعداد کے چند اہم سیٹ

اعداد کے مختلف سیٹوں کے لیے مندرجہ ذیل علامات استعمال کی جائیں گی۔

قدرتی اعداد کا سیٹ: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, -----\}$

مکمل اعداد کا سیٹ: $\mathbf{W} = \{0, 1, 2, -----\}$

صحیح اعداد کا سیٹ: $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, -----\}$

مثبت مفرد اعداد کا سیٹ: $\mathbf{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, -----\}$

طاق اعداد کا سیٹ: $\mathbf{O} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, -----\}$

جفت اعداد کا سیٹ: $\mathbf{E} = \{0 \pm 2, \pm 4, \pm 6, -----\}$

ناطق اعداد کا سیٹ: $\mathbf{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}; p, q \in Z, q \neq 0\}$

غیر ناطق اعداد کا سیٹ: $Q' = \{x \mid x \neq \frac{p}{q}\ ; p, q \in Z, q \neq 0\}$

حقیقی اعداد کا سیٹ: $R = Q \cup Q'$

مزید یہ کہ $Z^+$ اور $Z^-$ بالترتیب مثبت اور منفی صحیح اعداد کو ظاہر کریں گے۔ اسی طرح $R^+$ اور $R^-$ بالترتیب مثبت اور منفی حقیقی اعداد کو ظاہر کریں گے۔

## 1.2.1 ترقیم

اگر $b, a$ اور $c$ سیٹ A کے ارکان ہیں تو ہم اسے اس طرح لکھتے ہیں: $A = \{a, b, c\}$

یہ سیٹ لکھنے کی اندراجی شکل (*Tabular Form*) ہے۔

سیٹ کسی بیان کی مدد سے بھی لکھا جا سکتا ہے۔ مثلاً ،

انگریزی حروف تہجی کے پہلے تین حروف کا سیٹ = A یہ سیٹ لکھنے کی بیانیہ شکل (***Descriptive Form***) ہے۔

مندرجہ بالا دو طریقوں کے علاوہ ایک اور طریقے سے بھی سیٹ کو لکھا جاتا ہے۔ اس میں ارکان کی خصوصیت یا خصوصیات بیان کی جاتی ہیں۔

مثلاً $A = \{x \mid$ $x$ ایک طاق صحیح عدد ہے $\}$

اسے پڑھتے ہیں "A تمام $x$ کا سیٹ ہے جبکہ $x$ ایک طاق صحیح عدد ہے"

سیٹ لکھنے کی اس شکل کو ترقیم سیٹ ساز (*Set builder Form*) کہتے ہیں۔

کسی سیٹ A میں عناصر کی تعداد کو $n(A)$ یا $|A|$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ جیسے اگر $A = \{a,b,c\}$ تو $n(A)=3=|A|$

## 1.2.2 خالی سیٹ

ایسا سیٹ جس میں ایک بھی رکن نہ ہے خالی سیٹ (*Null Set*) کہلاتا ہے۔

جسے $\varnothing$ یا $\{\ \}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

**مثال:** $A = \{x \mid x > 5$ اور $x < 2\} = \varnothing$

## 1.2.3 متناہی سیٹ

ایسا سیٹ جس کے ارکان محدود ہوں متناہی سیٹ (*Finite Set*) کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $B = \{a, b, c, d, e\}$ ، $A = \{1, 2, 3, 4\}$ وغیرہ

## 1.2.4 غیر متناہی سیٹ

ایسا سیٹ جو متناہی نا ہو غیر متناہی سیٹ (*Infinite Set*) کہلاتا ہے۔

ذیل میں کچھ غیر متناہی سیٹ دیئے گئے ہیں۔

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ , $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$ , $A = \{1, 3, 5, \ldots\}$

## 1.2.5 مساوی سیٹ

دوسیٹ صرف اور صرف اس صورت میں مساوی سیٹ (*Equal Set*) کہلاتے ہیں کہ دونوں کے ارکان ایک جیسے ہوں۔

مثلاً $A = \{a, b, c, d\}$ اور $B = \{b, c, a, d\}$ مساوی سیٹ ہیں کیونکہ دونوں کے ارکان ایک جیسے ہیں۔

اگر A اور B مساوی سیٹ ہوں تو انہیں اس طرح لکھتے ہیں: $A = B$

اگر $C = \{a, b\}$ تو $A \neq C$ کیوں؟

اگر $D = \{a, b, d\}$ تو $A \neq D$ کیوں؟

## 1.2.6 مترادف سیٹ

اگر A اور B کوئی دو سیٹ ہیں اور اُن کے ارکان کے درمیان میں ایک۔ایک مطابقت قائم ہو، تو سیٹ A اور B مترادف سیٹ (*Equivalent Set*) کہلاتے ہیں۔اوراسے اس طرح لکھتے ہیں: $A \sim B$

متناہی سیٹوں کی صورت میں اِس سے مراد یہ ہے کہ کسی ایک سیٹ میں ارکان کی تعداد وہی ہو جو دوسرے سیٹ کے ارکان کی تعداد ہو۔یعنی $n(A) = n(B)$

مثلاً $A = \{a, b, c, d, e\}$ ، $B = \{2, 3, 1, 5, 4\}$ اور $C = \{x, y, z, u, w\}$

چونکہ $n(A) = n(B) = n(C) = 5$

اس لیے $A \sim B,\ B \sim C,\ C \sim A$

یعنی $A \sim B \sim C$

اب مندرجہ ذیل سیٹوں کو ملاحظہ کیجیے۔

$P = \{1, 0, 3\}$ اور $Q = \{3, 2, 1, 4\}$ یہاں $1 \leftrightarrow 3$ ، $0 \leftrightarrow 2$ ، $3 \leftrightarrow 1$

لیکن $4 \in Q$ ، P کے کسی رُکن سے مطابقت نہیں رکھتا۔اس لیے سیٹ P اور سیٹ Q مترادف نہیں ہیں۔

اسے ہم $P \nsim Q$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

**نوٹ:** اگر دوسیٹ مساوی ہوں تو وہ مترادف بھی ہوتے ہیں لیکن دو مترادف سیٹ ضروری نہیں ہے کہ مساوی سیٹ بھی ہوں۔

## 1.2.7 تحتی سیٹ

اگر A اور B دوسیٹ ہوں اور A کا ہر رُکن B کا بھی رُکن ہو۔ تو سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ (*Subset*) کہلاتا ہے۔ اور اِسے $A \subseteq B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

**نوٹ:** (1) خالی سیٹ ($\varnothing$) ہر سیٹ کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

(2) ہر سیٹ خود اپنا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

## 1.2.8 واجب تحتی سیٹ

اگر A اور B دوسیٹ ہیں اور سیٹ A، سیٹ B کا تحتی سیٹ ہوا اور $A \neq B$ تو A کو B کا واجب تحتی سیٹ (*Proper Subset*) کہتے ہیں اور اسے $A \subset B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً اگر $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

تو $A \subset B$

## 1.2.9 غیر واجب تحتی سیٹ

اگر A اور B دوسیٹ ہیں اور $B \subseteq A$ اور $A \subseteq B$ تو A اور B ایک دوسرے کے غیر واجب تحتی سیٹ کہلاتے ہیں۔

- $A \subseteq B$ اور $B \subseteq A$ سے نتیجہ نکلتا ہے کہ $A = B$
- اگر $A \subset B$ تو B، سیٹ A کا فوقی سیٹ کہلاتا ہے۔ اور اِسے $B \supset A$ لکھتے ہیں۔
- $A = B$ اور $B = C$ سے نتیجہ نکلتا ہے کہ $A = C$
- $A \sim B$ اور $B \sim C$ سے نتیجہ نکلتا ہے کہ $A \sim C$

یادرہے کہ ہرسیٹ خود اپنا غیر واجب تحتی سیٹ ہوتا ہے۔ دراصل ہرسیٹ کا ایک ہی غیر واجب تحتی سیٹ ہوتا ہے اور وہ سیٹ خود ہوتا ہے۔

**نوٹ:** مندرجہ بالا شرائط بعض اوقات مساوی سیٹ کی تعریف کے طور پر بھی لی جاتی ہیں۔

**مثال 1.** اگر $A = \{1, 2\}$ تو A کے تمام تحتی سیٹ معلوم کیجیے۔

**حل:** A کے تمام تحتی سیٹ مندرجہ ذیل ہیں:

$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$

یعنی کسی سیٹ میں دوارکان ہوں تو اس کے تحتی سیٹ چار ہوتے ہیں۔

**مثال 2.** اگر $A = \{a, b, c\}$ تو A کے تمام تحتی سیٹ معلوم کیجیے۔

**حل:** A کے تمام تحتی سیٹ مندرجہ ذیل ہیں۔

$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

یعنی اگر کسی سیٹ میں تین ارکان ہوں تو اس کے تحتی سیٹ آٹھ ہوتے ہیں۔

## 1.2.10 قوت سیٹ

کسی سیٹ A کے تمام ممکنہ تحتی سیٹوں کا سیٹ اس کا قوت سیٹ (*Power Set*) کہلاتا ہے۔ اور اس کے قوت سیٹ کو P(A) سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً: اگر $A = \{a, b, c\}$ تو $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

خالی سیٹ $\emptyset$ کے لیے $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

یعنی خالی سیٹ کا قوت سیٹ خالی نہیں ہوتا کیونکہ یہ ایک رکن $\emptyset$ پر مشتمل ہوتا ہے۔

مندرجہ ذیل پر غور کیجیے۔

اگر $A = \{\ \}$ تو $P(A) = \{A\}$ یعنی اگر $n(A) = 0$ تو $n(P(A)) = 1 = 2^0$

اگر $A = \{a\}$ تو $P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$ یعنی اگر $n(A) = 1$ تو $n(P(A)) = 2 = 2^1$

اگر $A = \{a, b\}$ تو $P(A) = \{\emptyset\ \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ یعنی اگر $n(A) = 2$ تو $n(P(A)) = 4 = 2^2$

ان مثالوں سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ اگر $n(P(A)) = m$ تو A کے تمام تحتی سیٹوں کی تعداد $2^m$ ہوتی ہے۔

یعنی $\boxed{n(P(A)) = 2^m}$

## مشق 1.1

1. مندرجہ ذیل سیٹوں کو اندراجی اور ترقیم سیٹ ساز دونوں طریقوں میں لکھیے:

   (*a*) ایسے تمام مثبت صحیح اعداد کا سیٹ جو 2 بڑے اور 6 سے چھوٹے ہوں۔

   (*b*) 20 سے چھوٹے ایسے تمام مثبت صحیح اعداد کا سیٹ جو 5 سے تقسیم پذیر ہوں۔

   (*c*) 4 اور 12 کے درمیان قدرتی اعداد کا سیٹ

   (*d*) پہلے چھ مثبت مفرد اعداد کا سیٹ

2. مندرجہ ذیل سیٹوں میں سے کون سے خالی سیٹ ہیں؟

   $A = \{x \mid$ x انگریزی حروف تہجی کا ایک حروف ہے جو *a* سے پہلے آتا ہے $\}$

   $B = \{x \mid x + 5 = 5\}$

   $C = \{x \mid$ x ایسا عدد ہے جو 7 سے چھوٹا اور 8 سے بڑا ہو $\}$

   $D = \{x \mid$ x پاکستان کی سابقہ خاتون صدر ہے $\}$

3. مندرجہ ذیل میں سے کون سے سیٹ متناہی ہیں اور کون سے سیٹ غیر متناہی ہیں؟

(a) سال کے مہینے (b) سال کے دن

(c) آپ کی جماعت کے طلباء (d) $\{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

(e) ایک نقطے سے گزرنے والے خطوط کا سیٹ (f) دیئے گئے دو نقاط سے گزرنے والے خطوط کا سیٹ

4. اگر $S = \{ x \mid$ مثبت صحیح عدد ہے $x \}$ تو S کے ایسے واجب تحتی سیٹ معلوم کیجیے جو A کے بھی تحتی سیٹ ہوں جبکہ $A = \{ x \mid$ عدد ہے $x$، 3 سے چھوٹا صحیح $\}$

5. اگر $A = \{a, b, c, d\}$ تو معلوم کیجیے:

(a) A کے واجب تحتی سیٹ (b) A کا غیر واجب تحتی سیٹ

(c) A کے دو تحتی سیٹ B اور C جبکہ $B \subset C$ (d) A کے دو تحتی سیٹ B اور C جبکہ $B \subseteq C$

6. $A = \{a, b, c, d\}$ کے تمام تحتی سیٹ معلوم کیجیے نیز $|P(A)|$ معلوم کیجیے۔

7. کیا کوئی ایسا سیٹ ہے جس کا کوئی واجب تحتی سیٹ نہ ہو؟ اگر ہے تو نشاندہی کیجیے۔

8. ایک ایسا سیٹ معلوم کیجیے جس کا صرف ایک ہی واجب تحتی سیٹ ہو۔

9. اگر $n(A) = 10$ تو $n(P(A)) =$ ———

10. ترقیم سیٹ ساز کو استعمال کرتے ہوئے خالی سیٹ کی کوئی مثال دیجیے۔

11. اگر $A = \{1,2,3,4\}$ ہو تو A کا واجب تحتی سیٹ B معلوم کیجیے پھر B کا واجب تحتی سیٹ C معلوم کیجیے پھر C کا واجب تحتی سیٹ D معلوم کیجیے۔

12. مندرجہ ذیل سیٹوں میں سے کون سے مترادف سیٹ ہیں؟

(a) $A = \{ a, b, c \}, \ B = \{1, 2, 3\}$ (b) $A = \{1, 2, 3, 4\}, \ B = \{ a, b, c\}$

(c) $B = \{a, e, i, o, u\}$ $A = \{x \mid$ عدد ہے $x$، 6 سے چھوٹا مثبت صحیح $\}$

## 1.3 دو سیٹوں پر عوامل

دو سیٹوں کے درمیان مختلف طرح کے عوامل ہو سکتے ہیں۔

### 1.3.1 دو سیٹوں کا اتصال

اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو ان کا اتصال (*Union*) ایسا سیٹ ہے جس میں وہ ارکان شامل ہوتے ہیں جو A میں یا B میں یا دونوں میں موجود ہوں۔ اِسے AUB سے ظاہر کرتے ہیں۔

اگر $A = \{1,2,5,8\}$ اور $B = \{1,3,5,9\}$ تو $A \cup B = \{1,2,3,5,8,9\}$

### 1.3.2 دوسیٹوں کا تقاطع

اگر A اور B دوسیٹ ہوں تو اِن کا تقاطع (*Intersection*) ایسا سیٹ ہے جس میں وہ ارکان شامل ہوتے ہیں جو A اور B دونوں میں موجود (مشترک) ہوں۔ اسے $A \cap B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اگر $A = \{a, b, c, d\}$ اور $B = \{b, d, e, f\}$ تو $A \cap B = \{b, d\}$

### 1.3.3 دوسیٹوں کا فرق

اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو A فرق B ایسا سیٹ ہے جس میں وہ ارکان شامل ہوتے ہیں جو A میں موجود ہوں لیکن B میں نہ ہوں۔ اِسے $A-B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ اور $B = \{2, 4, 6, 8\}$ تو $A-B = \{1, 3, 5\}$ اور $B-A = \{6, 8\}$

اگر A اور B دوسیٹ ہوں تو ان کا تشاکلی فرق (*Symmetric difference*) ایسا سیٹ، ہے جس میں وہ ارکان شامل ہوتے ہیں جو A میں یا B میں موجود ہوں لیکن A اور B دونوں میں موجود (مشترک) نہ ہوں۔ اِسے $A \Delta B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

**مثال:** $A \Delta B$ معلوم کیجیے اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ اور $B = \{1, 3, 5, 7\}$

**حل:** چونکہ $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ اور $B = \{1, 3, 5, 7\}$ پس $A \Delta B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$

**نوٹ:** $A \Delta B = A \cup B - A \cap B$

### 1.3.4 کائناتی سیٹ

ایسا سیٹ جو کسی زیرِ غور مسئلے سے تعلق رکھنے والے تمام ارکان پر مشتمل ہو کائناتی سیٹ (*Universal Set*) کہلاتا ہے۔

اسے عموماً "U" سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً آپ کے اسکول کے تمام طلباء کا سیٹ، کائناتی سیٹ ہے۔ اگر اسکول کے طلباء پر مبنی اور سیٹ لیے جائیں جیسے نویں جماعت کے طلباء کا سیٹ یا دسویں جماعت کے طلباء کا سیٹ وغیرہ تو یہ اسکول کے تمام طلباء کے سیٹ یعنی کائناتی سیٹ کے تحتی سیٹ ہوں گے۔

### 1.3.5 سیٹ کا تکملہ یا کمپلیمنٹ

اگر U کائناتی سیٹ اور $A \subset U$ تو سیٹ A کا تکملہ (*Complement*) ایسا سیٹ ہے جس میں U کے وہ ارکان ہوتے ہیں۔ جو A میں موجود نہ ہوں۔ اِسے $A'$ یا $A^c$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اگر $U = \{1, 2, 3, ....,10\}$ اور $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

تو $A' = U - A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ اور $(A')' = A$

## 1.4 تین سیٹوں پر اتصال اور تقاطع کے عوامل

اگر B, A اور C تین سیٹ ہوں تو اتصال اور تقاطع کے مندرجہ ذیل عوامل کیے جاسکتے ہیں۔

(i) $A \cup (B \cup C)$ (ii) $(A \cup B) \cup C$ (iii) $A' \cap (B \cap C)$ (iv) $(A \cap B) \cap C$

(v) $A \cup (B \cap C)$ (vi) $A \cap (B \cup C)$ (vii) $(A \cup B) \cap C$ (viii) $(A \cap B) \cup C$

(ix) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ (x) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

ان عوامل میں سے چند کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہیں۔

اگر $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$, $C = \{c, d, e, f, h\}$ ، تو

(i) $A \cup (B \cup C) = \{a, b, c\} \cup (\{b, c, d, e\} \cup \{c, d, e, f, h\})$
$= \{a, b, c\} \cup \{b, c, d, e, f, h\}$
$= \{a, b, c, d, e, f, h\}$

(ii) $(A \cup B) \cup C = (\{a, b, c\} \cup \{b, c, d, e\}) \cup \{c, d, e, f, h\}$
$= \{a, b, c, d, e\} \cup \{c, d, e, f, h\}$
$= \{a, b, c, d, e, f, h\}$

(v) $A \cup (B \cap C) = \{a, b, c\} \cup (\{b, c, d, e\} \cap \{c, d, e, f, h\})$
$= \{a, b, c\} \cup \{c, d, e\}$
$= \{a, b, c, d, e\}$

(ix) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = (\{a, b, c\} \cup \{b, c, d, e\}) \cap (\{a, b, c\} \cup \{c, d, e, f, h\})$
$= \{a, b, c, d, e\} \cap \{a, b, c, d, e, f, h\}$
$= \{a, b, c, d, e\}$

## 1.5 دو یا تین سیٹوں پر اتصال اور تقاطع کی خصوصیات

اب ہم دو یا تین سیٹوں کے لیے اتصال اور تقاطع کی بنیادی خصوصیات بیان کرتے ہیں۔ طلباء ان کے ثبوت اگلی جماعتوں میں سیکھیں گے۔ یہاں مثالوں سے ان کی تصدیق کی جائے گی۔

(i) اتصال کی خاصیت مبادلہ **(Commutative Property of Union)**

کسی بھی دو سیٹوں A اور B کے لیے

$$A \cup B = B \cup A$$

مثال: اگر $A = \{a\}$ اور $B = \{a, b\}$ تو

$A \cup B = \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$

اور $B \cup A = \{a, b\} \cup \{a\} = \{a, b\}$

پس $A \cup B = B \cup A$

**(ii) تقاطع کی خاصیت مبادلہ (*Commutative Property of Intersection*)**

کسی بھی دو سیٹوں A اور B کے لیے

$$A \cap B = B \cap A$$

مثال: اگر $A = \{a\}$ اور $B = \{a, b\}$ تو

$A \cap B = \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}$

$B \cap A = \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$

پس $A \cap B = B \cap A$

**(iii) اتصال کی خاصیت تلازم (Associative Property of Union)**

کسی بھی تین سیٹوں B, A اور C کے لیے

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

مثلاً: اگر $A = \{a\}$ , $B = \{a, b\}$ اور $C = \{a, b, c\}$ تو

$A \cup (B \cup C) = \{a\} \cup (\{a, b\} \cup \{a, b, c\}) = \{a\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$

$(A \cup B) \cup C = (\{a\} \cup \{a, b\}) \cup \{a, b, c\} = \{a, b\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$

پس $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

**(iv) تقاطع کی خاصیت تلازم (*Associative Property of Intersection*)**

کسی بھی تین سیٹوں B, A اور C کے لیے

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

مثال: اگر $A = \{a\}$ , $B = \{a, b\}$ اور $C = \{a, b, c\}$ تو

$A \cap (B \cap C) = \{a\} \cap (\{a, b\} \cap \{a, b, c\}) = \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}$

$(A \cap B) \cap C = (\{a\} \cap \{a, b\}) \cap \{a, b, c\} = \{a\} \cap \{a, b, c\} = \{a\}$

پس $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(v) اتصال کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع (*Distributive Property of Union over Intersection*)

کسی بھی تین سیٹوں A ، B اور C کے لیے

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(vi) تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتصال (*Distributive Property of Intersection over Union*)

کسی بھی تین سیٹوں A ، B اور C کے لیے

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

نوٹ: خصوصیات (v) اور (vi) کی طلباء خود تصدیق کریں۔

## 1.6 ڈی مورگن کے قوانین

اگر U کائناتی سیٹ ہو اور A, B اس کے تحت سیٹ ہوں تو

$$\text{(i)}\ (A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{(ii)}\ (A \cap B)' = A' \cup B'$$

ان قوانین کو ڈی مورگن کے قوانین (*De Morgan's Laws*) کہا جاتا ہے۔ اِن کی پڑتال مندرجہ ذیل مثال سے کرتے ہیں۔

**مثال:** اگر $U = \{1, 2, 3, 4. 5, 6, 7\}$ ، $A = \{1, 3, 5, 7\}$ اور $B = \{3, 4, 5, 6\}$ تو

ڈی مورگن کے قوانین کی پڑتال کیجیے۔

**حل:** (i) $(A \cup B) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\} \Rightarrow (A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{2\}$

$A' = U - A = \{2, 4, 6\}$ اور $B' = U - B = \{1, 2, 7\}$

لہٰذا $A' \cap B' = \{2\}$

پس $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) $A \cap B = \{3, 5\} \Rightarrow (A \cap B)' = U - (A \cap B) = \{1, 2, 4, 6, 7\}$

$A' = \{2, 4, 6\}$ اور $B' = \{1, 2, 7\}$

لہٰذا $A' \cup B' = \{1, 2, 4, 6, 7\}$

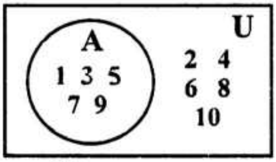
پس $(A \cap B)' = A' \cup B'$

## 1.7 وین اشکال

اشکالوں کے ذریعے بھی سیٹوں کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ جنھیں وین اشکال (*Venn Diagrams*) کہا جاتا ہے۔ انہیں یہ نام انگریز ریاضی دان جون وین (*John Venn*) کی وجہ سے دیا گیا ہے کیونکہ اس نے 1881ء میں اشکال کے ذریعہ سیٹوں کو ظاہر کرنے کا طریقہ متعارف کروایا۔ وین اشکال میں کائناتی سیٹ U کو عموماً مستطیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس مستطیل کے اندر سیٹوں کو دائرے یا دیگر ہندسی اشکال سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ سیٹوں کے آپس میں تعلق کو ظاہر کرنے کے لیے عموماً وین اشکال کو استعمال کیا جاتا ہے۔

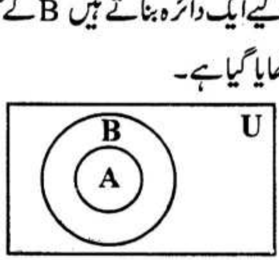
**مثال:** $U = \{1, 2, 3, ......, 10\}$ اور $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ کو ظاہر کرنے کے لیے وین شکل بنائیے۔

**حل:** ہم کائناتی سیٹ U کو ظاہر کرنے کے لیے ایک **مستطیل** بناتے ہیں۔اس **مستطیل** میں A کو ظاہر کرنے کے لیے ایک دائرہ بناتے ہیں۔اور A کے عناصر کو اس دائرے میں نقاط سے ظاہر کرتے ہیں جیسا کہ شکل 1.1 میں دکھایا گیا ہے۔




شکل 1.1

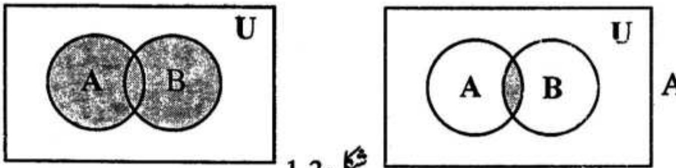
اگر کوئی سیٹ A کسی سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے تو اسے وین اشکال کی مدد سے دکھایا جا سکتا ہے۔اس کے لیے ہم کائناتی سیٹ کے لیے مستطیل بناتے ہیں جس میں B کے لیے ایک دائرہ بناتے ہیں B کے تحتی سیٹ A کے لیے ایک اور دائرہ B کے دائرے کے اندر بناتے ہیں۔اس تعلق کو شکل 1.2 میں دکھایا گیا ہے۔




شکل 1.2

شکل 1.3 میں وین اشکال سیٹ A اور B کے اتصال اور تقاطع کو ظاہر کرتے ہیں۔ دائروں کے سایہ دار حصے سیٹ A اور B کے اتصال اور تقاطع کو ظاہر کرتے ہیں۔

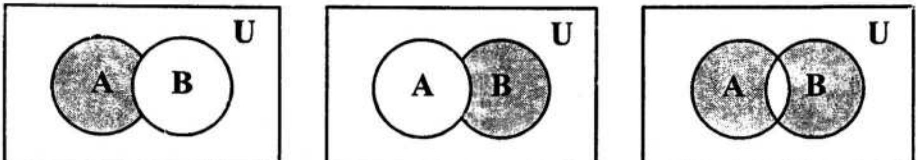
وین شکل برائے $A \cup B$




وین شکل برائے $A \cap B$

شکل 1.3

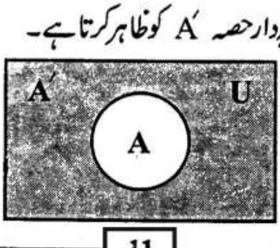
شکل 1.4 میں وین اشکال (i) $A - B$ (ii) $B - A$ (iii) $A \Delta B$ کو ظاہر کرتے ہیں۔




شکل 1.4

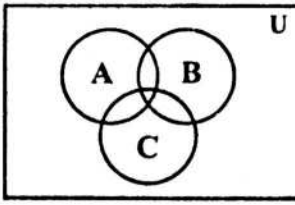
(i) $A - B$ (ii) $B - A$ (iii) $A \Delta B$

شکل 1.5 میں دائرے کے باہر کا سایہ دار حصہ $A'$ کو ظاہر کرتا ہے۔



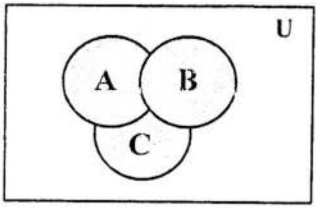

شکل 1.5

شکل 1.6 میں وین اشکال کے ذریعہ $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ اور $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$ کو دکھایا گیا ہے۔




$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

شکل 1.6




$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

## مشق 1.2

اگر $A = \{f, a, c, e\}$ اور $B = \{e, g, d, f\}$ کائناتی سیٹ $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ کے تحتی سیٹ ہیں۔ تو مندرجہ ذیل سیٹوں کے ارکان لکھیے۔

**(1)** $A'$  **(2)** $B'$  **(3)** $A \cap B$  **(4)** $(A\cup B)'$

**(5)** $A \cap B'$  **(6)** $A' \cap B'$  **(7)** $U \cup \varnothing$  **(8)** $U \cap \varnothing$

اگر $A = \{x \mid$ x مثبت جفت صحیح عدد ہے جو 10 سے کم ہو$\}$ اور $B = \{x \mid$ x مثبت طاق صحیح عدد ہے جو 10 کم ہو$\}$ کائناتی سیٹ $U = \{x \mid$ x مثبت صحیح عدد ہے جو 10 سے کم ہو$\}$ کے تحتی سیٹ ہوں تو مندرجہ ذیل سیٹوں کے ارکان لکھیے۔

**(9)** $A \cup B'$  **(10)** $A' \cap B$  **(11)** $A' \cap B'$  **(12)** $A \Delta B$

**(13)** $A - B'$  **(14)** $A' \Delta B$  **(15)** $(A' \cap B)'$

**(16)** سوالات 9, 10, 11, 12, 13, 14 اور 15 کے سیٹوں کے وَین اشکال بنائیے۔

اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $B = \{2, 4, 6, 8\}$ تو پڑتال کیجیے۔

**(17)** $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$  **(18)** $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

**(19)** $A - B = A - (A \cap B)$

**(20)** اگر $U = \{1, 2, 3, ....., 20\}$، $A = \{1, 2, 4, 8, 10, 16, 20\}$ اور $B = \{2, 6, 8, 10, 14, 18\}$ ہوتو ڈی مورگن کے قوانین کی پڑتال کیجیے۔

**(21)** مندرجہ ذیل سیٹوں کے لیے اتصال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ کی تصدیق کیجیے۔

*(a)* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , $B = \{3, 5, 7, 9\}$

*(b)* $A = \{x \mid x \in Z^+$ اور $x \le 5\}$ , $B = \{x \mid x \in Z^+$ اور $1 \le x \le 4\}$

**(22)** نیچے دیئے ہوئے سیٹوں کے لئے مندرجہ ذیل خصوصیات کی تصدیق کیجیے۔

(i) اتصال اور تقاطع کی خاصیت تلازم  (ii) اتصال کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع

(iii) تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتصال

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ اور $C = \{4, 8, 10, 12\}$

(b) $A = \{x \in x \in Z^+$ اور $x \leq 4\}$ ، $B = \{x \in x \in Z$ اور $0 < x < 5\}$ اور $C = \{1, 2, 3\}$

## 1.8 مترتب جوڑے

اگر ہم کسی سیٹ کے ارکان کا ایک جوڑا لیں۔ اُن ارکان میں ترتیب کا لازماً خیال رکھا جائے۔ مثلاً اگر $a$ اور $b$ سیٹ A کے ارکان ہوں اور ان میں ترتیب اس طرح ہو کہ $a$ بائیں سے پہلا اور $b$ دوسرا رکن ہو تو اس جوڑے کو مترتب جوڑا (Ordered Pair) کہتے ہیں۔ اسے $(a, b)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $a$ اور $b$ مترتب جوڑے کے اجزاء یا عناصر کہلاتے ہیں۔

مترتب جوڑے $(a, b)$ اور $(b, a)$ اسی صورت میں مساوی ہوں گے جب $a = b$ ہوگا۔

دو مترتب جوڑے $(a, b)$ اور $(c, d)$ مساوی ہوں گے اگر اور صرف اگر $a = c$ اور $b = d$

**نوٹ:** (1) سیٹ $\{2, 3\}$ اور مترتب جوڑا $(2, 3)$ مساوی نہیں ہیں کیونکہ سیٹ میں عناصر کی ترتیب ضروری نہیں ہے۔

یعنی $\{2, 3\} = \{3, 2\}$

(2) مترتب جوڑوں میں پہلے اور دوسرے اجزاء مساوی ہو سکتے ہیں۔ مثلاً $(1, 1)$ , $(2, 2)$ , $(4, 4)$ اور $(5, 5)$

لیکن سیٹ میں کوئی رُکن دہرایا نہیں جاتا۔

**مثال:** اگر $(x - 2, 6) = (4, 6)$ تو $x$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

**حل:** مترتب جوڑوں کی برابری کی شرط کے مطابق

$$x - 2 = 4$$

یا $x = 6$

## 1.9 سیٹوں کا کارتیسی حاصل ضرب

اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو اُن کی کارتیسی حاصل ضرب (Cartesian Product) سے مراد ایسا سیٹ ہے جس کے ارکان ایسے مترتب جوڑے ہیں جن کے پہلے عناصر سیٹ A کے رکن ہیں اور دوسرے عناصر سیٹ B کے رکن ہیں۔

A اور B کے کارتیسی حاصل ضرب کو $A \times B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ علامتی طور پر اسے اس طرح لکھتے ہیں:

$$A \times B = \{(a, b) \in a \in A \text{ اور } b \in B\}$$

**مثالیں:** (i) اگر $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{a, b\}$ تو

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

(ii) اگر $A = B = Z$ تو

$$A \times B = Z \times Z = \{(m, n) \quad m, n \in Z\}$$

**قابل توجہ امور:**

(i) اگر A یا B میں سے کوئی خالی سیٹ ہو تو $A \times B = \emptyset$

(ii) $A \times B \neq B \times A$ جب تک کہ $A = B$

(iii) اگر A یا B میں ارکان کی تعداد بالترتیب $m$ اور $n$ ہو تو $A \times B$ میں عناصر کی تعداد $m \times n$ ہوتی ہے۔

## 1.10 ثنائی ربط

اگر A اور B کوئی سے دوسیٹ ہوں تو $A\times B$ کے کسی بھی تحتی سیٹ کو A سے B میں ثنائی ربط (Binary Relation) کہتے ہیں۔
یعنی $A \times B$ کا ہر تحتی سیٹ A سے B میں ثنائی ربط ہے۔
اسی طرح $A \times A$ کا کوئی بھی تحتی سیٹ A میں ثنائی ربط ہوتا ہے۔

**مثال 1.** اگر $A = \{x, y\}$ اور $B = \{-1, 0, 1\}$ تو

$$A \times B = \{(x, -1), (x, 0), (x, 1), (y, -1), (y, 0), (y, 1)\}$$

اگر $R_1 = \{(x, 0), (y, 0)\}$ تو $A \times B$ میں $R_1$ ثنائی ربط ہے۔
اسی طرح $R_2 = \{(x, -1), (y, -1)\}$ بھی $A \times B$ میں ثنائی ربط ہے۔

**مثال 2.** اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ تو

$$A \times A = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1) (2, 2), (2, 3), (2, 4)$$
$$(3, 1), (3, 2) (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

**(i)** $R_1 = \{(x, y) \mid x, y \in A$ اور $y > x\} = \{(1, 2),(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

**(ii)** $R_2 = \{(x, y) \mid x, y \in A$ اور $y = x\} = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

چونکہ $R_1, R_2 \subseteq A \times A$ لہذا $R_1$ اور $R_2$ A میں ثنائی روابط ہیں۔

نوٹ: $(a, b) \in R$ کا مطلب ہے رکن $a$ رکن $b$ سے R کے تحت وابستہ ہے اسے $aRb$ لکھتے ہیں۔

**مثال 3.** $A = \{a, b\}$ کے تمام ثنائی روابط لکھیے۔

حل: $A \times A = \{ (a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

چونکہ $A \times A$ کے تمام تحتی سیٹ A میں ثنائی روابط ہیں۔ انھیں ذیل میں بیان کیا گیا ہے۔

| | | |
|---|---|---|
| $R_1 = \varnothing$ | $R_7 = \{(a, a), (b, a)\}$ | $R_{12} = \{(a, a), (a, b), (b, a)\}$ |
| $R_2 = \{(a, a)\}$ | $R_8 = \{(a, a), (b, b)\}$ | $R_{13} = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$ |
| $R_3 = \{(a, b)\}$ | $R_9 = \{(a, b), (b, a)\}$ | $R_{14} = \{(a, a), (b, a), (b, b)\}$ |
| $R_4 = \{(b, a)\}$ | $R_{10} = \{(a, b), (b, b)\}$ | $R_{15} = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$ |
| $R_5 = \{(b, b)\}$ | $R_{11} = \{(b, a), (b, b)\}$ | $R_{16} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ |
| $R_6 = \{(a, a), (a, b)\}$ | | |

یہ بات آپ کے علم میں آئی ہوگی اگر کوئی سیٹ دو ارکان پر مشتمل ہے تو اس کے ثنائی روابط کی تعداد 16 ہوتی ہے۔ کسی مخصوص مثال میں ہمیں کسی سیٹ کے تمام ثنائی روابط کی ضرورت نہیں ہوتی بلکہ اِن میں سے چند ایک کو ہم استعمال کرتے ہیں۔

### 1.10.1 ثنائی ربط کا حلقہ اثر (Domain) اور زد (Range)

سیٹ A سے سیٹ B میں ثنائی ربط R کے تمام مترتب جوڑوں کے پہلے اجزاء کا سیٹ، ثنائی ربط کا حلقہ اثر (*Domain*) کہلاتا ہے۔ اِسے Dom R سے ظاہر کرتے ہیں۔ ثنائی ربط R کے تمام مترتب جوڑوں کے دوسرے اجزاء کا سیٹ، ثنائی ربط کا زد (*Range*) کہلاتا ہے۔ اِسے **Range R** سے ظاہر کرتے ہیں۔

**مثال 1.** اگر $A = \{x, y, z\}$ , $B = \{1, 2, 5)$ تو $R = \{ (x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)\}$

A سے B میں ثنائی ربط ہے۔

لہٰذا $\text{Dom } R = \{x, y\}$ , $\text{Range } R = \{1, 2\}$

**مثال 2.** اگر $A = \{ 1, 2, 3, 4\}$ تو

$$R_1 = \{ (1, 2). (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$$
$$R_2 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \}$$

A میں روابط ہیں۔

لہٰذا $\text{Dom } R_1 = \{1, 2, 3\}$ , $\text{Range } R_1 = \{2, 3, 4\}$

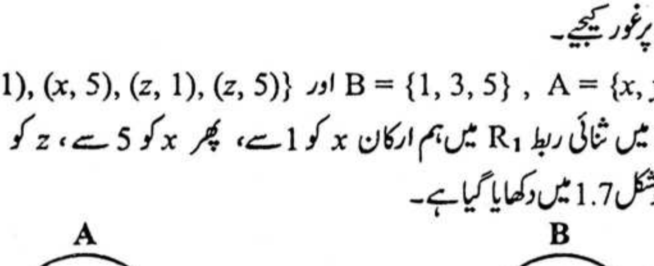
اور $\text{Dom } R_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ , $\text{Range } R_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

### 1.11 تفاعل (Function)

مندرجہ ذیل مثال پر غور کیجیے۔

اگر $A = \{x, y, z\}$ , $B = \{1, 3, 5\}$ اور $R_1 = \{(x, 1), (x, 5), (z, 1), (z, 5)\}$

یہاں A سے B میں ثنائی ربط $R_1$ میں ہم ارکان $x$ کو 1 سے، پھر $x$ کو 5 سے، $z$ کو 1 سے اور پھر $z$ کو 5 سے وابستہ کرتے ہیں، اس تعلق کو شکل 1.7 میں دکھایا گیا ہے۔

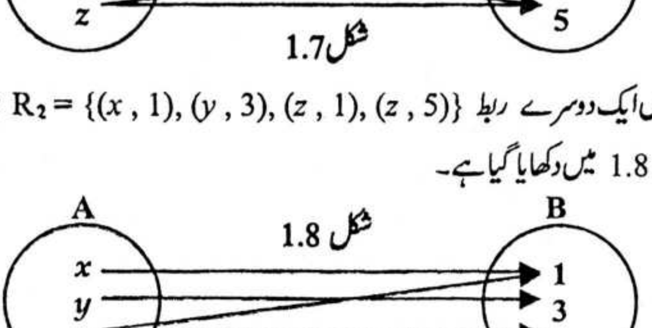



شکل 1.7

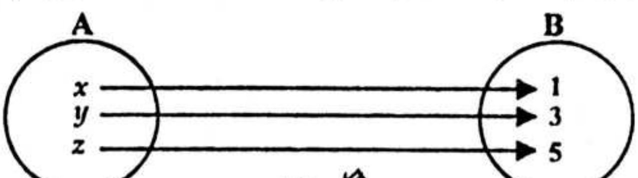
اب A × B میں ایک دوسرے ربط $R_2 = \{(x , 1), (y , 3), (z , 1), (z , 5)\}$ پر غور کیجیے۔

اس تعلق کو شکل 1.8 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.8



آخر میں ربط $R_3 = \{(x , 1), (y , 3), (z , 5)\}$ پر غور کیجیے۔ اِسے شکل 1.9 میں دکھایا گیا ہے۔




شکل 1.9

ربط $R_1$ میں $\text{Dom } R_1 = \{x, z\} \neq A$ مزید برآں سیٹ A کے ارکان x اور z کو سیٹ B کے دو ارکان سے وابسطہ کیا گیا۔

ربط $R_2$ میں $\text{Dom } R_2 = \{x, y, z\}$ لیکن سیٹ A کے رُکن z کو سیٹ B کے دو ارکان سے وابستہ کیا گیا ہے۔

ربط $R_3$ میں $\text{Dom } R_3 = A$ اور سیٹ A کا ہر رُکن ، سیٹ B کے صرف ایک رُکن سے وابستہ کیا گیا ہے۔

یہ مثالیں ہمیں مندرجہ ذیل تعریف تک لے جاتی ہیں۔

## 1.11.1 تفاعل کی تعریف

اگر A اور B دو سیٹ ہوں اور R سیٹ A سے سیٹ B میں ثنائی ربط ہو تو R، سیٹ A سے سیٹ B میں تفاعل کہلاتا ہے اگر:

(i) $\text{Dom } R = A$

(ii) سیٹ A کا ہر رُکن سیٹ B کے صرف اور صرف ایک رُکن سے R کے تحت وابستہ ہو یعنی اگر $(a, b) \in R$ , اور $(a, b') \in R$ تو $b = b'$

شرط (ii) کے مطابق R کے کوئی بھی دو مترتب جوڑوں کے پہلے رکن برابر نہیں ہوتے۔

**مثال 1.** اگر $A = \{x, y, z\}$ , $B = \{1, 3, 5\}$ اور $R_3 = \{(x, 1), (y, 3), (z, 5)\}$

یہاں $\text{Dom } R_3 = A$ اور سیٹ A کا ہر رُکن ،سیٹ B کے صرف ایک رُکن سے وابستہ کیا گیا ہے

چونکہ $R_3$ شرائط (i) اور (ii) کو پوری کرتا ہے لہٰذا $R_3$ ، A سے B میں تفاعل ہے۔

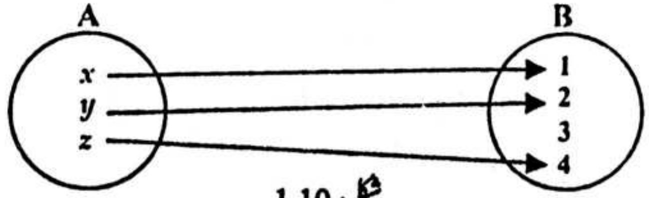
اگر کوئی ربط تفاعل ہو تو اسے عموماً f, g وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اگر f تفاعل ہو A سے B میں تو اِسے لکھتے ہیں: $f : A \rightarrow B$

اور اسے پڑھتے ہیں۔ f, A سے B میں تفاعل ہے۔

اگر $f : A \rightarrow B$, A سے B میں تفاعل ہے اور جوڑا $(a, b)$, f میں ہے جب کہ $a \in A$ , $b \in B$ تو b کو f کے تحت a کی شبیہ (*Image*) کہتے ہیں۔ اس کو $f(a) = b$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

**مثال 2.** اگر $A = \{x, y, z\}$ , $B = \{1, 2, 3, 4\}$ تو $f = \{(x, 1), (y, 2), (z, 4)\}$




شکل 1.10

چونکہ $x$ , 1 سے وابستہ ہے اس کو ہم لکھتے ہیں: $f(x) = 1$ اسی طرح $f(y) = 2$ اور $f(z) = 4$

لہٰذا $x$ کی شبیہ 1 , $y$ کی 2 اور $z$ کی 4 ہے۔

نوٹ کیجیے کہ $f$ کے تحت 3 سیٹ A کے کسی رُکن کی شبیہ نہیں ہے۔

## 1.11.2 تفاعل کی اقسام

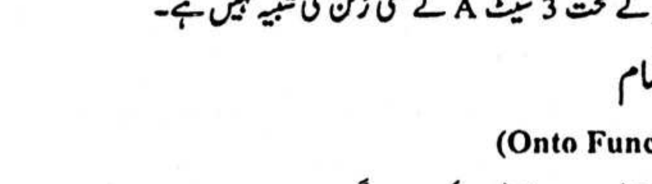
**(1) پرتفاعل (Onto Function)**

A سے B میں تفاعل $f$ "پرتفاعل" کہلاتا ہے اگر $\text{Range } f = B$

**مثال:** فرض کیجیے۔ $A = \{x, y, z\}$ , $B = \{1, 2\}$ اور $f = \{(x, 1), (y, 1), (z, 2)\}$

چونکہ $f$ ،تعریف تفاعل کی شرائط (i) اور (ii) پوری کرتا ہے اس لیے A سے B میں $f$ ایک تفاعل ہے مزید یہ کہ $\text{Range } f = \{1, 2\} = B$ اس لیے $f$ ایک "پرتفاعل" ہے۔

**نوٹ:** اس مثال میں A کے دو ارکان کی شبیہ ایک ہی ہے۔




شکل 1.11

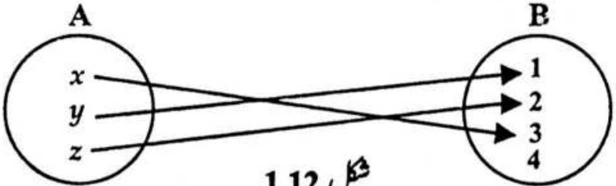
**(2) ایک-ایک تفاعل (One-One Function)**

A سے B میں تفاعل، ایک-ایک تفاعل کہلاتا ہے اگر سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کے ایک رکن سے وابستہ ہو۔ یعنی سیٹ B کا ہر رکن سیٹ A کے ایک سے زیادہ ارکان کی شبیہ نہ ہو۔

**مثال:** فرض کیجیے۔ $A = \{x, y, z\}$ , $B = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $f = \{(x, 3), (y, 1), (z, 2)\}$

چونکہ $f$ ،تعریف تفاعل کی شرائط (i) ، (ii) کو پوری کرتا ہے اس لیے $f$ ایک تفاعل ہے۔

اس مثال میں $x$ کی شبیہ 3 ، $y$ کی 1 اور $z$ کی 2 ہے۔یعنی سیٹ B کا کوئی رکن سیٹ A کے ایک سے زیادہ رکن کی شبیہ نہیں ہے اس لیے $f$ ایک۔ایک تفاعل ہے۔



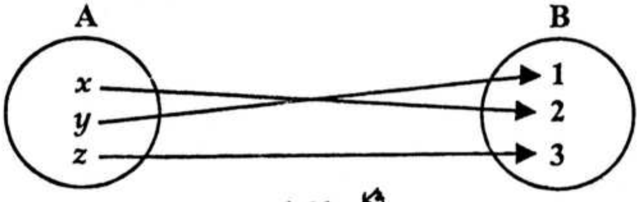

شکل 1.12

(3) ایک۔ ایک 'پر' تفاعل (One-One and Onto Function)

سیٹ A سے B میں تفاعل $f$ ، ایک۔ایک 'پر' تفاعل کہلاتا ہے اگر $f$ ، ایک۔ایک تفاعل کے ساتھ ساتھ 'پر' تفاعل بھی ہو۔

**مثال:** فرض کیجیے۔ $A = \{x, y, z\}$ , $B = \{1, 2, 3\}$ اور $f = \{(x, 2), (y, 1), (z, 3)\}$

چونکہ $f$ ،ایک۔ایک تفاعل کے ساتھ ساتھ 'پر' تفاعل کی شرائط بھی پوری کرتا ہے یعنی $f(x) = 2$, $f(y) = 1$, $f(z) = 3$ اور $\text{Range} f = \{1, 2, 3\}$ لہٰذا $f$ ایک۔ایک پر تفاعل ہے۔




شکل 1.13

## مشق 1.3

.1 اگر $A = \{a, b, c, d\}$ اور $B = \{y, z\}$ تو مندرجہ ذیل معلوم کیجیے۔

(i) $A \times B$ (ii) $B \times A$ (iii) $A \times A$ (iv) $B \times B$ اور واضح کیجیے کہ عموماً $A \times B \neq B \times A$

.2 اگر $(x + y , 2) = (4, x - y)$ تو $x$ اور $y$ معلوم کیجیے۔

.3 اگر $A = \{a, b\}$ ، $B = \{2, 3\}$ اور $C = \{3, 4\}$ تو مندرجہ ذیل معلوم کیجیے۔

(i) $A \times (B \cup C)$ (ii) $(A \times B) \cup (A \times C)$ (iii) $A \times (B \cap C)$ (iv) $(A \times B) \cap (A \times C)$

.4 سوال نمبر 3 میں دیئے گئے سیٹوں کے لیے مندرجہ ذیل معلوم کیجیے۔

(i) $A \times (B - C)$ (ii) $A \times (C - B)$ (iii) $A \times (B \Delta C)$

.5 اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{2, 4, 5, 6\}$ اور $C = \{2, 3, 6, 8\}$ تو مندرجہ ذیل معلوم کیجیے۔

**(i)** $(A - B) \times (B - C)$ **(ii)** $(A \cap B) \times (B \cap C)$ **(iii)** $(A \times B) \cap (B \times C)$

**(iv)** $(A \times B) - (B \times C)$ **(v)** $(A \Delta B) \times (B \cap C)$ **(vi)** $(B \times C) \Delta (C \times A)$

.6 اگر $A = \{a, b, c\}$ اور $B = \{x, y\}$ تو مندرجہ ذیل لکھیے۔

**(i)** $A \times B$ میں دو روابط **(ii)** $B \times A$ میں دو روابط

**(iii)** $A$ میں تین روابط **(iv)** $B$ میں تمام روابط

.7 اگر سیٹ A کے چار اور سیٹ B کے تین ارکان ہوں تو $A \times B$ کے ثنائی روابط کتنے ہوں گے؟

.8 $A = \{1,2,3,4\}$ سے $B = \{0, 1, 2, 3\}$ میں ربط R کے مترتب جوڑے لکھیے جبکہ $(a,b) \in R$ اگر اور صرف اگر:

**(i)** $a = b$ **(ii)** $a + b = 4$ **(iii)** $a > b$ **(iv)** $a$ تقسیم کرتا ہے $b$ کو۔

.9 اگر $a$ اور $b$ مثبت صحیح اعداد ہوں تو Z میں مندرجہ ذیل روابط کے حلقہ اثر (Domain) اور زد (Range) معلوم کیجیے۔

$R_1 = \{(a, b) \mid 2a + b = 10\}$ , $R_2 = \{(a, b) \mid a + b = 8\}$ , $R_3 = \{(a, b) \mid a - b = 8\}$

.10 صحیح اعداد کے سیٹ Z میں $R = \{(a, b) \mid b = 2a\}$ ایک ایسا ربط ہے جس کا حلقہ اثر $\{-1, 0, 1, 2\}$ ہے تو اس کی زد معلوم کیجیے۔

.11 $\{(x, y) \mid y = x^2\}$ ، Z میں ایک ربط ہے جس کا حلقہ اثر $Z^+$ ہے تو اس کی زد معلوم کیجیے۔

.12 سیٹ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ میں مندرجہ ذیل روابط ہیں۔ معلوم کیجیے کہ یہ تفاعل ہیں یا نہیں۔ اگر ہیں تو کس قسم کے؟

$R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ $R_2 = \{(1, 2), (3, 4), (4, 1)\}$

$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ $R_4 = \{(2, 1), (4, 4), (3,1), (2,3)\}$

.13 سیٹ $\{0, 1\}$ کے 16 مختلف ثنائی روابط لکھیے۔ ان میں سے کتنے روابط میں مترتب جوڑا $(0, 1)$ موجود ہوگا؟

.14 اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $A \times B$ میں روابط $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ اور $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

**(a)** $R_1 \cup R_2$ **(b)** $R_1 \cap R_2$ **(c)** $R_1 - R_2$ **(d)** $R_2 - R_1$ **(e)** $R_1 \Delta R_2$

.15 اگر $\{a, b, c, d\}$ سے $\{1, 2, 3\}$ میں $f = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\}$ ایک تفاعل ہے تو کیا $f$ "پر تفاعل" ہے؟ کیا $f$ ایک۔ایک تفاعل ہے؟

.16 اگر $\{a, b, c, d\}$ سے $\{1, 2, 3, 4,\}$ میں $f = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\}$ ایک تفاعل ہے تو کیا $f$ ایک۔ایک پر تفاعل ہے؟

17. اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ہو تو مندرجہ ذیل معلوم کیجیے:

(i) A سے A میں تفاعل $f$ جو کہ ایک۔ایک تفاعل ہو۔

(ii) A سے A میں تفاعل $g$ جو کہ پر تفاعل ہو۔

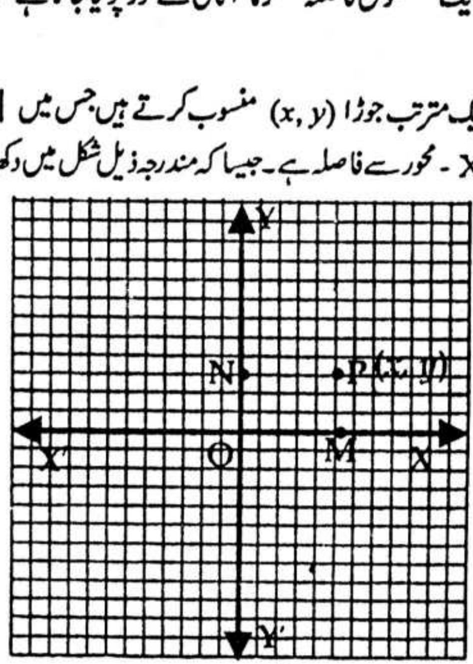
(iii) A سے A میں تفاعل $h$ جو کہ ایک۔ایک پر تفاعل ہو۔

(iv) A سے A میں تفاعل $k$ جو کہ نہ ایک۔ایک ہو اور نہ پر تفاعل ہو۔

## 1.12 مستوی میں کارتیسی محددی نظام

اس نظام میں دو خطوط اس طرح لیے جاتے ہیں کہ ایک افقی ہو دوسرا عمودی۔ جس نقطہ پر یہ (ایک دوسرے کو) قطع کرتے ہیں مبداء کہلاتا ہے اور O سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ افقی خط X - محور اور عمودی خط Y - محور کہلاتا ہے۔ جنہیں عموماً بالترتیب X'OX اور Y'OY سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وہ مستوی جس پر یہ محور واقع ہوں XY - مستوی یا کارتیسی مستوی (Cartesian Plane or $xy$-plane) کہلاتی ہے۔ ان محوروں پر ایک مخصوص فاصلہ عموماً اکائی کے طور پر لیا جاتا ہے جس کے حوالہ سے ان محوروں سے نقاط کے فاصلوں کی پیمائش کی جاتی ہے۔

مستوی کے ہر نقطہ P سے ہم ایک مترتب جوڑا $(x, y)$ منسوب کرتے ہیں جس میں $x = |\overline{OM}|$ ,Y - محور سے نقطہ P کا فاصلہ ہے اور $y = |\overline{MP}|$ ,X - محور سے فاصلہ ہے۔ جیسا کہ مندرجہ ذیل شکل میں دکھایا گیا ہے۔




شکل 1.14

اگر نقطہ P، کو مترتب جوڑے $(x, y)$ سے ظاہر کیا جائے تو اسے $P(x, y)$ لکھتے ہیں۔

$P(x, y)$ میں $x$ اور $y$ نقطہ P کے کارتیسی محددات (*cartesian coordinates*) کہلاتے ہیں۔ $x$ نقطہ P کا $x$- محدد یا فصلہ (*abscissa*) کہلاتا ہے اور $y$ نقطہ P کا $y$- محدد یا معینہ (*ordinate*) کہلاتا ہے۔

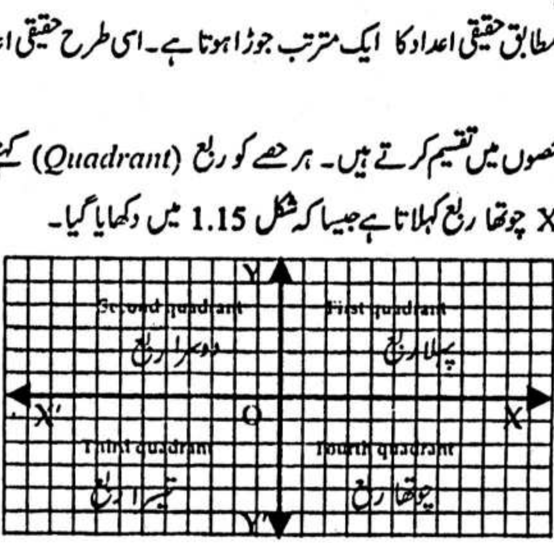
مبداء (*origin*) کے محددات $(0, 0)$ ہوتے ہیں۔

اگر نقطہ P ، Y- محور کے دائیں طرف ہوتو $x$ مثبت ہوتا ہے۔اگر نقطہ P ، Y- محور کے بائیں طرف ہوتو $x$ منفی ہوتا ہے۔اگر نقطہ P ، Y- محور پر ہو تو $x = 0$ ہوتا ہے۔

اگر نقطہ P ، X- محور سے اوپر ہوتو $y$ مثبت ہوتا ہے۔اگر نقطہ P ، X- محور سے نیچے ہو تو $y$ منفی ہوتا ہے۔ اگر نقطہ P، X- محور پر ہو تو $y = 0$ ہوتا ہے۔

مستوی میں ہر نقطہ کے مطابق حقیقی اعداد کا ایک مترتب جوڑا ہوتا ہے۔اسی طرح حقیقی اعداد کے مترتب جوڑے کے لیے مستوی میں ایک نقطہ ہوتا ہے۔

دونوں محور مستوی کو چار حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہر حصے کو ربع (*Quadrant*) کہتے ہیں۔ XOY پہلا، X'OY دوسرا، X'OY' تیسرا اور XOY' چوتھا ربع کہلاتا ہے جیسا کہ شکل 1.15 میں دکھایا گیا۔




شکل 1.15

نقطہ $P(x, y)$ کے محددات کی علامات مندرجہ ذیل جدول 1.1 میں دی گئی ہیں۔

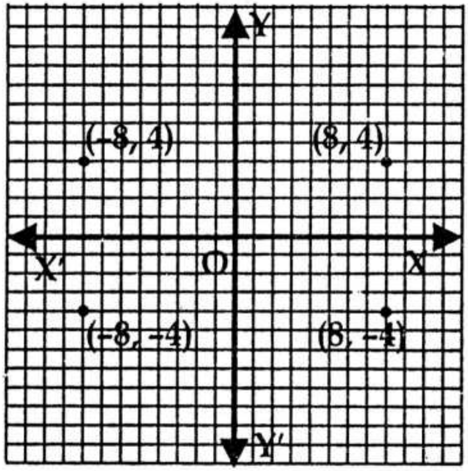
| ربع | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| I | + | + |
| II | – | + |
| III | – | – |
| IV | + | – |

جدول 1.1

نقاط کے محددات کی ترسیم مندرجہ ذیل مثال میں دکھائی گئی ہے۔

**مثال:** گراف کاغذ پر نقاط $(8, 4)$ ، $(-8, 4)$ ، $(-8, -4)$ اور $(8, -4)$ کی ترسیم کیجیے۔

**حل:** ان نقاط کو سامنے دیئے گئے گراف میں دکھایا گیا ہے یہاں نقطہ $(8, 4)$ پہلے ربع میں نقطہ $(-8, 4)$ دوسرے ربع میں نقطہ $(-8, -4)$ تیسرے ربع میں اور نقطہ $(8, -4)$ چوتھے ربع میں واقع ہے۔




شکل 1.16

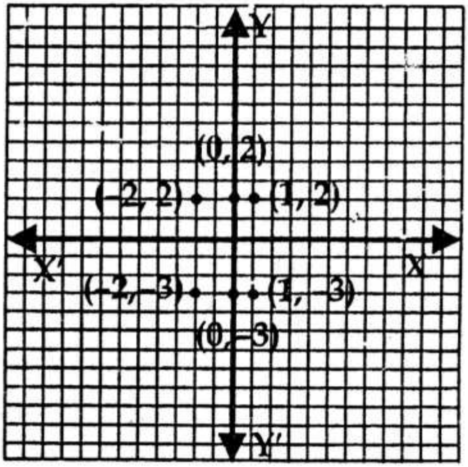
## 1.13 کارتیسی حاصل ضرب کوگراف کے ذریعے ظاہر کرنا

کسی دو متناہی سیٹوں کے کارتیسی حاصل ضرب کو مرتسم کرنے کی وضاحت مندرجہ ذیل مثال سے جاتی ہے۔

**مثال:** فرض کیجیے۔ $A = \{-2, 0, 1\}$ ، $B = \{2, -3\}$ تو

$A \times B = \{(-2, 2), (-2, -3), (0, 2), (0, -3), (1, 2), (1, -3)\}$

یہ نقاط شکل 1.17 میں مرتسم کیے گئے ہیں۔




شکل 1.17

اس ترسیم سے یہ بات سامنے آتی ہے کہ دو متناہی سیٹوں کے کارتیسی حاصل ضرب کو گراف کاغذ پر مرتسم کیا جاسکتا ہے۔ یہ ترسیم ہمیں یہ سمجھنے میں مدد کرتی ہے کہ کارتیسی حاصل ضرب کے مترتب جوڑوں کو کس طرح ترتیب دیا جاتا ہے۔ اسی طرح ہم کوئی دو غیر متناہی سیٹوں کے کارتیسی حاصل ضرب کو مرتسم کر سکتے ہیں۔ اس حاصل ضرب کی ترسیم ہمیں کارتیسی حاصل ضرب کے نقاط کے عمومی رویے کو سمجھنے میں مدد دیتی ہے۔

# مشق 1.4

**(1)** مندرجہ ذیل ہر نقطہ کے ربع کا تعین کیجیے۔

$(1, 6)$ ، $(\frac{1}{7}, \frac{4}{9})$ ، $(-1.7, 3)$ ، $(\sqrt{3}, -4)$ ، $(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ ، $(-7, -\frac{3}{2})$ ، $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$

$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1.7)$ ، $(3, 57)$ ، $(\sqrt{5}, -6.54)$ ، $(27, -72)$ ، $(1.7, -2.7)$ ، $(-1, -11)$ ، $(\sqrt{3}, -1.3)$

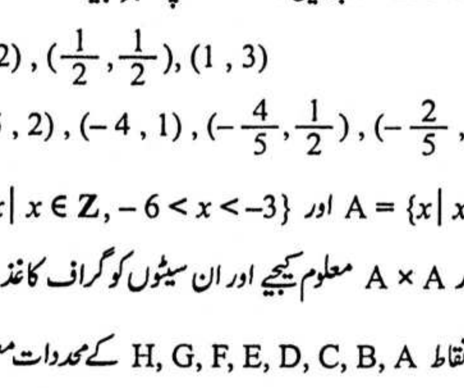
**(2)** مناسب اکائی کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کو گراف کاغذ پر ظاہر کیجیے۔

**(i)** $(4, 6), (6, 2), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 3)$

**(ii)** $(-3, 4), (-5, 2), (-4, 1), (-\frac{4}{5}, \frac{1}{2}), (-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

**(3)** اگر $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 2 \le x \le 5\}$ اور $B = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, -6 < x < -3\}$
تو $A \times B$ , $B \times A$ اور $A \times A$ معلوم کیجیے اور ان سیٹوں کو گراف کاغذ پر مرتسم کیجیے۔

**(4)** نیچے دی ہوئی شکل میں نقاط A, B, C, D, E, F, G, H کے محددات معلوم کیجیے۔ مبداء 'O' کے محددات کیا ہوں گے؟




شکل 1.18

# متفرق مشق 1

1. مندرجہ ذیل سیٹوں کو اندراجی شکل میں لکھیے۔

(a) $\{x \mid x$ ایک ناطق عدد ہے جبکہ $x^2 = 1\}$

(b) $\{x \mid x$ ایک مثبت صحیح عدد ہے جو 12 سے چھوٹا ہے$\}$

2. اگر $A = \{2, 4, 6\}$، $B = \{2, 6\}$، $C = \{4, 6\}$ اور $D = \{4, 6, 8\}$ تو معلوم کیجیے کہ ان میں سے کون کس کا تحتی سیٹ ہے۔

3. مندرجہ ذیل میں ہر سیٹ کے بارے میں بتائیے کہ کیا وہ کسی سیٹ کا قوت سیٹ ہے۔

(a) $\varnothing$ (b) $\{\varnothing, \{a\}\}$ (c) $\{\varnothing, \{a\}, \{\varnothing, a\}\}$ (d) $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

4. اگر $A = \{a, b, c, d\}$ اور $B = \{y, z\}$ تو معلوم کیجیے:

(a) $A \times B$ (b) $B \times A$ (c) $A \times A$ (d) $B \times B$

5. اگر کسی نقطے کے محددات (i) دونوں مثبت ہوں (ii) دونوں منفی ہوں تو وہ کارتیسی مستوی کے کس ربع میں واقع ہوگا؟

6. (a) اُس نقط کا $y$- محدد کیا ہوگا جو $X$- محور پر ہو؟

(b) اُس نقط کا $x$- محدد کیا ہوگا جو $Y$- محور پر ہو؟

7. اگر $A = \{-1, 1\}$ اور $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ تو مندرجہ ذیل لکھیے۔

(a) A سے B میں دو ثنائی روابط (b) B سے A میں تین ثنائی روابط

(c) A سے A کے تمام ثنائی روابط (d) B سے B میں چار ثنائی روابط

8. اگر $S = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $T = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}\}$ تو مندرجہ ذیل لکھیے۔

(a) S سے T میں ایک-ایک تفاعل (b) S سے T میں پر تفاعل

(c) S سے T میں ایک-ایک پر تفاعل (d) S سے T میں تفاعل جو نہ ایک۔ایک ہو اور نہ پر تفاعل ہو۔

9. اگر $U = \{x \mid x$ انگریزی حروف تہجی کا ایک حروف ہے$\}$

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$، $B = \{a, e, i, o, u\}$ اور $C = \{u, v, w, x, y, z\}$

تو مندرجہ ذیل سیٹوں کے ارکان لکھیے۔

(a) $A \cap (B \cap C)$ (b) $A \cap (B \cup C)$ (c) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(d) $A \cap (B \cup C)'$ (e) $A \cap B \cap C'$ (f) $(A \cup B)' \cup C$

مندرجہ بالا ہر سیٹ کی وضاحت وین اشکال سے بھی کیجیے۔

**10.** مندرجہ ذیل بیانات میں کون سے صحیح ہیں اور کون سے غلط ہیں؟

(i) اگر $A = \{x, y\}$ اور $B = \{y, z, t\}$ تو $A \subseteq B$

(ii) اگر $A = \{1, 2, 3\}$ اور $U = N$ تو $A \cup A = N$

(iii) سیٹ $\{1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, ..., \frac{1}{10^{20}}\}$ ایک غیر متناہی سیٹ ہے۔

(iv) دو غیر مشترک سیٹوں کا تقاطع خالی سیٹ ہوتا ہے۔

(v) 40 اور 42 کے درمیان قدرتی اعداد کا سیٹ خالی سیٹ ہے۔

(vi) $A \cup B = AB$ (vii) $A \times B = B \times A$

(viii) $(2, -3) = (-3, 2)$ (ix) $\varnothing = \{\varnothing\}$

(x) اگر سیٹ A کے $m$ ارکان اور سیٹ B کے $n$ ارکان ہوں تو $A \times B$ میں $m \times n$ مترتب جوڑے ہیں۔

**11.** جملوں کو مکمل کیجیے۔

(i) $A \cap (B \cup C) =$ .................. (ii) $A \Delta B = \{x \mid$ ............$\}$

(iii) $(a, b)$ ................ $(b, a)$ (iv) $(A \cup B)' =$ ....................

(v) اگر $(x + 2, 3y - 6) = (2x, y)$ تو $x =$ .................. اور $y =$ ....................

(vi) اگر $f$, A سے B میں ایک۔ایک پر تفاعل ہو تو $n(B)$ ............... $n(A)$

(vii) $(-3, -2)$ ...................... ربع میں ہے۔

(viii) $A = \{2, 4, 8\}$ اور $B = \{2^1, 2^2, 2^3\}$ ...................... سیٹ ہیں۔

(ix) مستوی کے ہر .................. سے حقیقی اعداد کا مترتب جوڑا منسوب کرتے ہیں۔

(x) اگر $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ تو $\text{Dom } R =$ ......... اور $\text{Range } R =$ ............

**12.** دیئے گئے جوابات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے اور اسے دائرہ لگائیے۔

(i) سیٹ A سے B کے کارتیسی حاصل ضرب کو لکھتے ہیں:

(*a*) $A \cdot B$ (*b*) $A \times B$ (*c*) $A \Delta B$ (*d*) $B \times A$

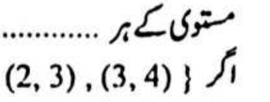
(ii) $\{2, 4, 6, 8, ..., 50\}$ کو ترقیم سیٹ ساز میں لکھتے ہیں:

(*a*) $\{x \mid x \in N, x \leq 50\}$ (*b*) $\{x \mid x \in E, x \leq 50\}$

(*c*) $\{x \mid x \in E, 2 \leq x \leq 50\}$ (*d*) $\{x \mid x \in Q, x \leq 50\}$

(iii) $\{0, 1, 2, 3, .....\}$, .................... کا سیٹ ہے۔

(*a*) مفرد اعداد (*b*) صحیح اعداد (*c*) مکمل اعداد (*d*) جفت اعداد

(iv) 

...................... تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔