یونٹ 2

حقیقی اعداد کا نظام، قوت نما اور جذر

2.1 ناطق اعداد کی خصوصیات

ہم سابقہ جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں کہ ہر صحیح عدد یا کسر جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھی جاسکے ناطق عدد (Rational Number) ہے۔ بشرطیکہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0$ ہو۔

ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ناطق اعداد جمع اور ضرب کے لحاظ سے مندرجہ ذیل خصوصیات رکھتے ہیں۔

اگر a، b اور c کوئی بھی ناطق اعداد ہوں تو

(i) $a + b$ اور ab بھی ناطق ہیں۔ (خاصیت بندش)

(ii) $a + b = b + a$ اور $ab = ba$ (خاصیت مبادلہ)

(iii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ اور $a\,(bc) = (ab)\,c$ (خاصیت تلازم)

(iv) $a + 0 = a = 0 + a$ اور $a \times 1 = a = 1 \times a$ (خاصیت ذاتی عناصر)

(v) $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ اور $a \neq 0, a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$ (خاصیت معکوس)

(vi) $a\,(b + c) = ab + ac\ ;\ (b + c)\,a = ba + ca$ (خاصیت تقسیمی)

2.2 کسورِ اعشاریہ کا ناطق اعداد یا غیر ناطق اعداد ہونا

کسی کسرِ اعشاریہ کو ناطق یا غیر ناطق عدد قرار دینے کے لیے کسورِ اعشاریہ کی مختلف اقسام کا جاننا ضروری ہے۔ جو مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) مختتم کسرِ اعشاریہ

ایسی کسرِ اعشاریہ جس کے کسری حصے میں ہندسوں کی تعداد محدود ہو، مختتم کسرِ اعشاریہ (Terminating Decimal Fraction) کہلاتی ہے۔ ایسی کسورِ اعشاریہ آسانی سے $\frac{p}{q}$ کی شکل میں تبدیل کی جاسکتی ہیں۔ جبکہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0$ ہو۔ پس تمام مختتم کسورِ اعشاریہ ناطق ہوتی ہے۔

مثلاً $0.2458 = \frac{2458}{10000}$ ، $25.01 = \frac{2501}{100}$ وغیرہ

(ii) متوالی کسرِ اعشاریہ

ایسی کسرِ اعشاریہ جو غیر مختتم ہو اور جس کے کسری حصے میں چند ہندسے بار بار ایک ہی ترتیب میں آتے ہوں، متوالی کسر اعشاریہ (Recurring Decimal Fraction) کہلاتی ہے۔

ایسی تمام کسور $\frac{p}{q}$ شکل میں بدلی جا سکتی ہیں جبکہ $p, q \in \mathbf{Z}$ اور $q \neq 0$

پس تمام متوالی کسورِ اعشاریہ ناطق اعداد ہوتی ہیں۔

مثال کے طور پر

$$0.3333 \ldots = \frac{1}{3} \quad , \quad 0.142857142 \ldots = \frac{1}{7}$$
$$0.16666 \ldots = \frac{1}{6} \quad , \quad 0.0909090 \ldots = \frac{1}{11}$$

(iii) غیر مختتم غیر متوالی کسر اعشاریہ

ایسی کسر اعشاریہ جو غیر مختتم ہو اور اس کے کسری حصے میں چند ہندسوں کی تکرار ایک ہی ترتیب سے نہ ہو، غیر مختتم غیر متوالی کسر اعشاریہ (Non-Recurring, Non-Terminating Decimal Fraction) کہلاتی ہے۔ ایسی کسور کو $\frac{p}{q}$ شکل میں نہیں لکھا جا سکتا جبکہ $p, q \in \mathbf{Z}\ , q \neq 0$ ہو۔ پس تمام غیر مختتم غیر متوالی کسورِ اعشاریہ غیر ناطق اعداد (Irrational Numbers) ہوتی ہیں۔

مثال 1. ہر نامکمل مربع عدد کا جذر غیر ناطق عدد ہے۔ مثلاً

$$\sqrt{2} = 1.4142135 \ldots\ldots, \sqrt{3} = 1.7320508 \ldots\ldots , \sqrt{5} = 2.2360679 \ldots\ldots$$

مثال 2. $\frac{\text{محیط}}{\text{قطر کی لمبائی}} = \pi = 3.1415926 \ldots\ldots$ بھی ایک غیر ناطق عدد ہے۔

نوٹ: π کی بالکل ٹھیک قیمت معلوم کرنا ممکن نہیں البتہ اس کی تقریباً قیمت لی جا سکتی ہے۔ مثلاً $\frac{22}{7}$ ، $\frac{157}{50}$ وغیرہ π کی چند تقریباً قیمت ہیں۔

مثال 3. $0.0200200020002 \ldots\ldots$ غیر مختتم غیر متوالی کسر اعشاریہ ہے۔ اس لیے کہ 0 اور 2 ایک ہی ترتیب سے اس کسر میں وارد نہیں ہوئے ہیں۔

> **(i)** ناطق اعداد ایسے اعداد ہیں جنھیں مختتم یا متوالی کسر اعشاریہ میں لکھا جا سکتا ہے۔
>
> **(ii)** غیر ناطق اعداد ایسے اعداد ہیں جنھیں صرف غیر مختتم غیر متوالی کسر اعشاریہ میں لکھا جا سکتا ہے۔

2.3 حقیقی اعداد کا سیٹ

ناطق اعداد کے سیٹ Q اور غیر ناطق اعداد کے سیٹ 'Q کے اتصال کو حقیقی اعداد (*Real Number*) کا سیٹ کہا جاتا ہے اور اسے R سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

یعنی $R = Q \cup Q'$ یا $R = \{x \mid x \in Q \vee x \in Q'\}$

Q اور 'Q غیر مشترک سیٹ ہیں یعنی $Q \cap Q' = \varnothing$

2.4 حقیقی اعداد کے خواص

2.4.1 حقیقی اعداد کے خواص بلحاظ جمع

(i) خاصیت بندش

کسی بھی دو حقیقی اعداد کا مجموعہ ایک حقیقی عدد ہوتا ہے۔

علامتی طور پر $x, y \in R \Rightarrow x + y \in R$

مثالیں: .1 $16, 24 \in R \Rightarrow 16 + 24 = 40 \in R$

.2 $\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \in R \Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \in R$

.3 $7, \sqrt{5} \in R \Rightarrow 7 + \sqrt{5} = 7 + 2.236 \ldots\ldots = 9.236 \ldots\ldots \in R$

(ii) خاصیت مبادلہ

کوئی سے دو حقیقی اعداد x اور y کے لیے $x + y = y + x$

علامتی طور پر $x + y = y + x, \forall x, y, \in R$ (علامت $\forall$ کے معنی ہیں سب کے لیے یا" ہر ایک کے لیے")

مثالیں: .1 $2.6 + 7.2 = 9.8 = 7.2 + 2.6$

.2 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

(iii) خاصیت تلازم

کوئی سے تین حقیقی اعداد x , y اور z کے لیے $x + (y + z) = (x + y) + z$

علامتی طور پر $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in R$

مثالیں: .1 $5 + (7 + 8) = 20 = (5 + 7) + 8$

.2 $\sqrt{3} + (\sqrt{6} + \sqrt{7}) = (\sqrt{3} + \sqrt{6}) + \sqrt{7}$

(iv) جمعی ذاتی عنصر

حقیقی اعداد میں عدد "0" ایک ایسا عدد ہے کہ

$$x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in R$$

اس لیے عدد "0" حقیقی اعداد کے سیٹ R میں جمعی ذاتی عنصر (*Additive Identity*) کہلاتا ہے۔

مثالیں: .1 $0.4 + 0 = 0 + 0.4 = 0.4$
.2 $\sqrt{2} + 0 = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$

(v) جمعی معکوس

ہر حقیقی عدد x کے لیے ایک ایسا حقیقی عدد x' ہوتا ہے کہ

$$x + x' = x' + x = 0$$

ایسا حقیقی عدد x'، حقیقی عدد x کا جمعی معکوس (*Additive Inverse*) کہلاتا ہے۔اسے "$-x$" سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثالیں: .1 $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$ یعنی -2 ، 2 کا جمعی معکوس ہے۔
.2 $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0$ یعنی $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ کا جمعی معکوس ہے۔

نوٹ: $-x$ کا جمعی معکوس x ہے یعنی

$$-(-x) = x, \ \forall x \in \mathbf{R}$$

2.4.2 حقیقی اعداد کے خواص بلحاظ ضرب

(i) خاصیت بندش

کسی بھی دو حقیقی اعداد کا حاصل ضرب ایک حقیقی عدد ہوتا ہے۔

علامتی طور پر $x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow xy \in \mathbf{R}$

مثالیں: .1 $0.6, 0.4 \in \mathbf{R} \Rightarrow (0.6)(0.4) = 0.24 \in \mathbf{R}$
.2 $\frac{2}{9}, \frac{6}{11} \in \mathbf{R} \Rightarrow \frac{2}{9} \times \frac{6}{11} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33} \in \mathbf{R}$
.3 $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \in \mathbf{R}$

(ii) خاصیت مبادلہ

کوئی سے دو حقیقی اعداد x اور y کے لیے $xy = yx$

علامتی طور پر $xy = yx, \ \forall x, y \in \mathbf{R}$

مثلاً $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$

(iii) خاصیت تلازم

کوئی سے تین حقیقی اعداد x , y اور z کے لیے $x(yz) = (xy)z$

علامتی طور پر $x(yz) = (xy)z, \ \forall x, y, z \in \mathbf{R}$

مثالیں: .1 $0.2 \times (\sqrt{3} \times \frac{5}{7}) = (0.2 \times \sqrt{3}) \times \frac{5}{7}$
.2 $0.2 \times (1.5 \times 4) = 1.2 = (0.2 \times 1.5) \times 4$

(iv) ضربی ذاتی عنصر

حقیقی اعداد میں عدد "1" ایک ایسا عدد ہے کہ

$$x \times 1 = 1 \times x = x \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

اس لیے عدد "1" حقیقی اعداد کے سیٹ $\mathbf{R}$ میں ضربی ذاتی عنصر *(Multiplicative Identity)* کہلاتا ہے۔

مثلاً $0.2387 \times 1 = 0.2387 = 1 \times 0.2387$ اور $\sqrt{5} \times 1 = \sqrt{5} = 1 \times \sqrt{5}$

مثال: کیا سیٹ $A = \{0, 1\}$ اور $B = \{1, -1\}$ میں سے ہر ایک جمع اور ضرب کے لحاظ سے خاصیت بندش رکھتے ہیں؟

حل: سیٹ A میں خاصیت بندش بلحاظ جمع جانچتے ہیں۔

$$1+1=2 \notin A; \quad 0+1=1 \in A; \quad 1+0=1 \in A; \quad 0+0=0 \in A$$

چونکہ $2 \notin A$, اس لیے A بلحاظ جمع خاصیت بندش نہیں رکھتا۔

اب سیٹ A میں خاصیت بندش بلحاظ ضرب جانچتے ہیں۔

$$0 \times 0=0 \in A; \quad 0 \times 1=0 \in A; \quad 1 \times 0=0 \in A; \quad 1 \times 1=1 \in A$$

اس لیے سیٹ A بلحاظ ضرب خاصیت بندش رکھتا ہے۔

اب سیٹ B میں بلحاظ جمع خاصیت بندش جانچتے ہیں۔

$1 + (-1) = 0 \notin B$ اس لیے B بلحاظ جمع خاصیت بندش نہیں رکھتا۔

سیٹ B میں ضرب کے لحاظ سے خاصیت بندش جانچتے ہیں۔

$$1 \times 1 = 1 \in B; \quad 1(-1) = -1 \in B; \quad (-1)(1) = -1 \in B; \quad (-1)(-1) = 1 \in B$$

اس لیے سیٹ B ضرب کے لحاظ سے خاصیت بندش رکھتا ہے۔

نوٹ: اگر کوئی بھی دو حقیقی اعداد x اور y ہوں تو

(i) $x + (-y) = x - y$ **(ii)** $x \div y = \frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}, \ (y \neq 0)$

(v) ضربی معکوس

ہر غیر صفر حقیقی عدد x کے لیے ایک ایسا حقیقی عدد x^* موجود ہوتا ہے کہ

$$x \times x^* = x^* \times x = 1$$

ایسے عدد x^* کو x کا ضربی معکوس کہتے ہیں۔ اِسے x^{-1} یا $\frac{1}{x}$ بھی لکھتے ہیں۔

پس $x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$ یا $x \times \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1$

مثالیں: 1. $5 \times \frac{1}{5} = 1 = \frac{1}{5} \times 5$ یعنی $\frac{1}{5}$، 5 کا ضربی معکوس ہے اور 5 عدد $\frac{1}{5}$ کا ضربی معکوس ہے۔

2. $\sqrt{7} \times \frac{1}{\sqrt{7}} = 1 = \frac{1}{\sqrt{7}} \times \sqrt{7}$ اس لیے $\frac{1}{\sqrt{7}}$، $\sqrt{7}$ کا ضربی معکوس ہے اور $\sqrt{7}$، $\frac{1}{\sqrt{7}}$ کا ضربی معکوس ہے۔

نوٹ: x^{-1} کا ضربی معکوس x ہے یعنی $x = (x^{-1})^{-1}$ جبکہ $x \in R$

2.4.3 ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع

کوئی سے تین حقیقی اعداد x , y اور z کے لیے

$$x(y+z) = xy + xz \quad \text{اور} \quad (y+z)x = yx + zx$$

مثالیں: 1. $\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right) = \sqrt{2} \times \frac{1}{3} + \sqrt{2} \times \frac{2}{5}$

2. $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\sqrt{2} = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} + \frac{2}{5} \times \sqrt{2}$

2.4.4 خاصیت ثلاثی *(Trichotomy Property)*

کسی بھی دو حقیقی اعداد x اور y کے ملیے مندرجہ ذیل صورتوں میں ایک اور صرف ایک صورت ممکن ہے۔

(i) $x < y$ **(ii)** $x = y$ **(iii)** $x > y$

2.5 حقیقی اعداد کی برابری کے خواص

حقیقی اعداد کے سیٹ R میں مساوی کا ربط تعریف شدہ ہے اسے علامت '=' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ تعلق مندرجہ ذیل خواص رکھتا ہے۔

(i) خاصیت عکسی *(Reflexive Property)*

کسی حقیقی عدد x کے لیے $x = x$

(ii) خاصیت تشاکل *(Symmetric Property)*

کوئی سے بھی دو حقیقی اعداد x اور y کے لیے

$$x = y \Rightarrow y = x$$

(iii) خاصیت متعدیت *(Transitive Property)*

کوئی سے حقیقی اعداد x , y اور z کے لیے

$$x = y,\ y = z \Rightarrow x = z,\ \forall\, x, y, z \in R$$

(iv) جمعی خاصیت *(Additive Property)*

کوئی سے حقیقی اعداد x , y اور z کے لیے

$$x = y \Rightarrow \text{(i)}\ x+z = y+z \quad \text{(ii)}\ z+x = z+y$$

یعنی مساوی کے ربط کی دونوں جانب ایک ہی عدد جمع کیا جائے تو اس میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔

مثلاً $\frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

(v) ضربی خاصیت *(Multiplicative Property)*

کوئی سے حقیقی اعداد x ، y اور z کے لیے

$x = y \Rightarrow$ (i) $xz = yz$ (دائیں طرف ضرب)

(ii) $zx = zy$ (بائیں طرف ضرب)

یعنی مساوی کے ربط کی دونوں جانب ایک ہی عدد سے ضرب کیا جائے تو اس میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔

مثلاً $\frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \frac{6}{2} \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

(vi) خاصیت تنسیخ بلحاظ جمع *(Cancellation Property w.r.t. Addition)*

$\forall\ x, y, z \in \mathbf{R}, z \neq 0$

(a) $x + z = y + z \Rightarrow x = y$ (دائیں تنسیخ)

(b) $z + x = z + y \Rightarrow x = y$ (بائیں تنسیخ)

مثلاً $0.2 + 0.3 = \frac{1}{5} + 0.3 \Rightarrow 0.2 = \frac{1}{5}$

(vii) خاصیت تنسیخ بلحاظ ضرب *(Cancellation Property w.r.t. Multiplication)*

$\forall\ x, y, z \in \mathbf{R}, z \neq 0$

(a) $xz = yz \Rightarrow x = y$ (دائیں تنسیخ)

(b) $zx = zy \Rightarrow x = y$ (بائیں تنسیخ)

مثلاً $2x = 2y \Rightarrow x = y\ (z = 2 \neq 0)$

نوٹ: جمعی خاصیت اور خاصیت تنسیخ بلحاظ جمع ایک دوسری کی معکوس ہیں۔ اسی طرح ضربی خاصیت اور خاصیت تنسیخ بلحاظ ضرب ایک دوسری کی معکوس ہیں۔

2.6 حقیقی اعداد کی نابرابری کے خواص

حقیقی اعداد کے سیٹ $\mathbf{R}$ میں ربط "کم ہے" جسے " $<$ " سے ظاہر کیا جاتا ہے تعریف شدہ ہے یعنی کوئی سے حقیقی اعداد x اور y کے لیے ہم لکھتے ہیں: $x < y$ اور پڑھتے ہیں: " x , y سے کم ہے یا چھوٹا ہے" $x < y$ کو $y > x$ بھی لکھا جا سکتا ہے اور اسے پڑھتے ہیں: "y , x سے بڑا ہے"۔ یہ ربط مندرجہ ذیل خواص رکھتا ہے۔

(i) خاصیت ارشمیدس (Archimidean Property)

اگر $y > x$ اور $0 < x$ تو $1 < n$ ایسا قدرتی عدد ہوتا ہے کہ $nx > y$

مثلاً $14 > 5$ کے لیے ہم $n = 3$ لیتے ہیں کہ $3 \times 5 = 15 > 14$

اور $\sqrt{2} < \sqrt{7}$ کے لیے ہم $n = 2$ لیتے ہیں کہ $2 \times \sqrt{2} > \sqrt{7}$

(ii) خاصیت متعدیت (Transitive Property)

کوئی سے حقیقی اعداد x , y اور z کے لیے

$$x < y\ ,\ y < z \Rightarrow x < z$$

مثلاً $\sqrt{2} < \sqrt{3}\ ,\ \sqrt{3} < \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{5}$

(iii) جمعی خاصیت (Additive Property)

کوئی سے حقیقی اعداد x , y اور z کے لیے

$$x < y \Rightarrow \text{(i)}\ x+z < y+z \qquad \text{(ii)}\ z+x < z+y$$

مثلاً $2 < 3 \Rightarrow 2 + \sqrt{5} < 3 + \sqrt{5}$ اور $(\sqrt{5}) + 2 < (\sqrt{5}) + 3$

نوٹ: غیر مساوی ربط میں کسی حقیقی عدد کو دونوں طرف جمع کرنے سے اس ربط میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔

(iv) ضربی خاصیت (Multiplicative Property)

کوئی سے حقیقی اعداد x , y اور z کے لیے

(a) اگر $z > 0$ تو

$x < y \Rightarrow xz < yz$ (دائیں ضرب) ; $zx < zy$ (بائیں ضرب)

(b) اگر $z < 0$ تو $x < y \Rightarrow xz > yz$

یعنی کسی غیر مساوی ربط کو مثبت حقیقی عدد سے ضرب دینے پر غیر مساوی کی علامت تبدیل نہیں ہوتی لیکن منفی حقیقی عدد کی ضرب سے غیر مساوی کی علامت تبدیل ہو جاتی ہے۔

مثالیں: 1. $3 > 2$ تو $3 \times \frac{1}{2} > 2 \times \frac{1}{2}$ جب کہ $0 < \frac{1}{2}$

پس ضرب دینے سے کوئی تبدیلی نہیں ہوئی۔

2. $3 > 2$ تو $3(-\frac{1}{2}) < 2(-\frac{1}{2})$ جب کہ $0 > -\frac{1}{2}$

پس ضرب دینے سے علامت میں تبدیلی واقع ہوئی ہے۔

نوٹ: غیر مساوی ربط " < " خواص عکسی اور تشاکل نہیں رکھتا ہے۔ یعنی $x \nless x$ اور

$$x < y \Rightarrow y \nless x$$

غیر مساوی ربط " > "، غیر مساوی ربط " < " کے تمام خواص پر پورا اترتا ہے۔

مشق 2.1

.1 مندرجہ ذیل میں حقیقی اعداد کی کون سی خصوصیات استعمال ہوئی ہیں؟ یہاں x ، y ، z حقیقی اعداد کو ظاہر کرتے ہیں۔

(i) $0.4 + 9 = 9 + 0.4$ (ii) $(x + 1) + \frac{2}{3} = x + (1 + \frac{2}{3})$

(iii) $1000 + 0 = 1000$ (iv) $\sqrt{8} + (\sqrt{3} + \sqrt{7}) = (\sqrt{8} + \sqrt{3}) + \sqrt{7}$

(v) $6.2 + (-6.2) = 0$ (vi) $x - x = 0$

(vii) $\sqrt{3} \times 11 = 11 \times \sqrt{3}$ (viii) $x(y + z) = xy + xz$

(ix) $\sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 1$ (x) $(\sqrt{3} \times 4) \times \sqrt{6} = \sqrt{3}\ (4 \times \sqrt{6})$

(xi) $(-\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0$

.2 مندرجہ ذیل میں حقیقی اعداد کی نابرابری کی کون سی خصوصیات استعمال ہوئی ہیں ؟

(i) $-5 < -4 \Rightarrow 0 < 1$ (ii) $-10 < -8 \Rightarrow 20 > 16$

(iii) $1 > -1 \Rightarrow -3 > -5$ (iv) $a < 0 \Rightarrow -a > 0$

(v) $a > b \Rightarrow -a < -b$ (vi) $7 < 8 \Rightarrow -14 > -16$

(vii) $\frac{1}{3} > \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}$ (viii) $-\frac{1}{4} > -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{4} < \frac{5}{2}$

.3 کیا مندرجہ ذیل سیٹوں میں خاصیت بندش بلحاظ جمع اور بلحاظ ضرب ہے؟

(i) $\{0, -1\}$ (ii) $\{0\}$ (iii) $\{1\}$

2.7 قوت نما

ہم جانتے ہیں کہ $3^2 = 3 \times 3$, $3^3 = 3 \times 3 \times 3$, $8^5 = 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$

اور $(-3)^8 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)$

اِس تصور کو ہم کسی بھی حقیقی عدد a اور قدرتی عدد n کے لیے یوں بیان کرسکتے ہیں: "a کا اپنے آپ سے n مرتبہ حاصل ضرب "a^n ہوتا ہے" یعنی $a^n = a \times a \times a \times .... a$, ($n$ مرتبہ)

a^n کو a کی n ویں قوت کہتے ہیں۔ a کو اساس (*Base*) اور n کو قوت نما (*Exponent*) کہتے ہیں۔

مثلاً 9^4 ، 9 کی چوتھی قوت ہے اس میں 9 اساس اور 4 قوت نما ہے۔

اسی طرح $(\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$ میں 3 اساس اور 4 - قوت نما ہے یا $\frac{1}{3}$ اساس اور 4 قوت نما ہے۔

واضح رہے کہ $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$

$-(3)^4 = -(3)(3)(3)(3) = -81$

سہولت کے لیے $(-3)^4$ کو -3^4 لکھتے ہیں۔ $-(a)^n$ کو عموماً $-a^n$ لکھتے ہیں۔

مثال: $2(3)^5$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: $2(3)^5 = 2(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= 2 \times 243 = 486$

مندرجہ ذیل نتائج ذہن نشین کر لیجیے کہ

(i) اگر a ایک مثبت حقیقی عدد ہے تو a^n مثبت ہوتا ہے۔

مثلاً $(0.5)^2 = 0.25$; $(0.5)^3 = 0.125$; $(5)^3 = 125$

(ii) اگر a ایک منفی حقیقی عدد ہے اور n جفت ہے تو a^n مثبت ہوتا ہے۔

مثلاً $(-5)^2 = 25$; $(-0.5)^2 = 0.25$; $(-5)^4 = 625$

(iii) اگر a ایک منفی حقیقی عدد ہے اور n طاق ہے تو a^n منفی ہوتا ہے۔

مثلاً $(-2)^5 = -32$; $(-0.5)^3 = -0.125$; $(-5)^3 = -125$

2.8 قوانین قوت نما

2.8.1 قوت نماؤں کے حاصل ضرب کا قانون *(Law of Product of Powers)*

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

(i) $5^3 \times 5^4 = (5 \times 5 \times 5)(5 \times 5 \times 5 \times 5) = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 5^7 = 5^{3+4}$

(ii) $(-3)^5 \times (-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= (-3)^9 = -3^{5+4}$

(iii) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^5 = (\frac{3}{5} \times \frac{3}{5})(\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5})$

$= \left(\frac{3}{5}\right)^7 = \left(\frac{3}{5}\right)^{2+5}$

(iv) $(\sqrt{3})^2 (\sqrt{3})^4 = (\sqrt{3})^{2+4} = (\sqrt{3})^6$

مندرجہ بالا مثالوں سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ ایک ہی اساس کے حقیقی اعداد جن کے قوت نما مختلف ہوں، کے حاصل ضرب میں اساس وہی رہتی ہے اور قوت نما جمع کر لیتے ہیں یعنی

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

جہاں a حقیقی عدد اور n , m قدرتی اعداد ہیں۔

اِسی طرح $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$ ، جبکہ m , n اور p قدرتی عدد ہیں۔

مثال: مختصر کیجیے: $a^5 \times b^3 \times c^8 \times b^{10} \times a^{13} \times c^4$

حل:

$$a^5 \times b^3 \times c^8 \times b^{10} \times a^{13} \times c^4 = a^5 \times a^{13} \times b^3 \times b^{10} \times c^8 \times c^4$$

$$= a^{5+13} \times b^{3+10} \times c^{8+4} = a^{18} \times b^{13} \times c^{12}$$

2.8.2 حاصل ضرب کی قوت کا قانون *(Law of Power of Product)*

مندرجہ ذیل مثال پر غور کیجیے۔

$$(a \times b)^5 = (a \times b)(a \times b)(a \times b)(a \times b)(a \times b)$$

$$= a \times a \times a \times a \times a \times b \times b \times b \times b \times b = a^5 \times b^5$$

اس سے ہم یہ اخذ کرتے ہیں کہ دو حقیقی اعداد کے حاصل ضرب کی قوت ان اعداد کی قوت کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے

یعنی $\boxed{(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n}$

جبکہ a ، b حقیقی اعداد ہیں اور n قدرتی عدد ہے۔

اس طرح یہ وضاحت بھی کی جاسکتی ہے کہ

$(abc)^n = a^n b^n c^n$ جبکہ a ، b ، c حقیقی اعداد ہیں اور n قدرتی عدد ہے۔

مشق 2.2

1. مندرجہ ذیل میں اساس اور قوت نما لکھیے۔

(i) 7^{15} (ii) $(-189)^{10}$ (iii) $(108)^{64}$

2. بتایئے مندرجہ ذیل میں کون سے مثبت اور کون سے منفی حقیقی عدد ہیں؟

(i) $(8)^4$ (ii) $(-113)^{107}$ (iii) $(-912)^{108}$

3. $38\,(83)^9$ کی قیمت معلوم کرنے کا صحیح طریقہ کیا ہے؟

(i) ہم پہلے 38 اور 83 کو ضرب کرتے ہیں پھر حاصل ضرب کی 9 ویں قوت معلوم کرتے ہیں؟

(ii) ہم پہلے 83 کی 9 ویں قوت معلوم کرتے ہیں پھر اسے 38 سے ضرب دیتے ہیں۔

مندرجہ ذیل کو مختصر کیجیے۔ (a، b ، اور c حقیقی اعداد ہیں)۔

.4 $(-91)^4$ .5 $5^4 \times 5^2$ .6 $a^4 \times a^3 \times a^8$

.7 $a \times b^2 \times c^3 \times b^3 \times a^5 \times c^2$ .8 $(8 \times 3)^4$

.9 $(-4 \times -5)^3$ .10 $(a \times b)^{13}$ .11 $(3 \times y)^5$ .12 $(3 \times 5 \times xy)^{14}$

2.8.3 قوت کی قوت کا قانون *(Law of Power of a Power)*

مندرجہ ذیل مثالیں ملاحظہ کیجیے۔

$$\text{(i)} \quad (3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{2+2+2+2} = 3^8 = 3^{2\times 4}$$

$$\text{(ii)} \quad (a^5)^2 = a^5 \times a^5 = a^{5+5} = a^{10} = a^{5\times 2}$$

$$\text{(iii)} \quad (b^3)^4 = b^3 \times b^3 \times b^3 \times b^3 = b^{3+3+3+3} = b^{12} = b^{3\times 4}$$

ان مثالوں سے ہم یہ اخذ کرتے ہیں کہ کسی حقیقی عدد کی اساس کی قوت کی قوت دونوں قوتوں کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے۔ مگر اساس میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔

یعنی $\boxed{(a^m)^n = a^{m\times n}}$

جبکہ a حقیقی عدد اور m , n قدرتی اعداد ہیں۔

اسی طرح $[(6)^5]^4 = (6)^{5\times 4} = (6)^{20} = 6^{20}$

اور $[(-5)^7]^2 = (-5)^{7\times 2} = (-5)^{14} = 5^{14}$

نیز یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$[(a^m)^n]^p = (a^{mn})^p = a^{mnp}$$

2.8.4 قوتوں کے حاصل تقسیم کا قانون (Law of Quotient of Powers)

مندرجہ ذیل اظہاریوں کو مختصر کرتے ہیں۔

(i) $$\frac{a^7}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a \times a \times a$$
$$= a^4 = a^{7-3}$$

(ii) $$6^5 \div 6^3 = \frac{6^5}{6^3} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{6 \times 6 \times 6}$$
$$= 6 \times 6 = 6^2 = 6^{5-3}$$

ان سے ہم یہ نتیجہ کرتے ہیں کہ قوتوں کے حاصل تقسیم میں، جبکہ اساس ایک ہی ہو، شمارکنندہ کے قوت نما میں سے مخرج کے قوت نما کو تفریق کیا جاتا ہے اور اساس میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی ہے۔

یعنی $$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

جبکہ a کوئی غیر صفر حقیقی عدد ہے اور m , n کوئی سے قدرتی اعداد ہیں۔

نوٹ: (i) اگر $m = n$ تو

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{a^n}{a^n} = 1$ اس لیے $a^0 = 1$

مثلاً $(1001)^0 = 1$, $(225)^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$, $(.25)^0 = 1$

(ii) $$a^n \times a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ اور $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

پس $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ اور $a^{-1} = \frac{1}{a}$

مثال 1. مختصر کیجیے: $\frac{(xy)^6}{(xy)^2}$

حل: $$\frac{(xy)^6}{(xy)^2} = (xy)^{6-2} = (xy)^4 = x^4y^4$$

مثال 2. مختصر کیجیے: $\frac{20x^6y^{10}}{4x^4y^6}$

حل: $$\frac{20x^6y^{10}}{4x^4y^6} = \frac{20}{4} \times \frac{x^6}{x^4} \times \frac{y^{10}}{y^6} = 5x^{6-4}y^{10-6} = 5x^2y^4$$

مثال3. مختصر کیجیے: $\dfrac{(3m+4n)^8\ (l-p)^5}{(3m+4n)^3\ (l-p)^2}$

حل:
$$\frac{(3m+4n)^8\ (l-p)^5}{(3m+4n)^3\ (l-p)^2} = (3m+4n)^{8-3}(l-p)^{5-2}$$
$$= (3m+4n)^5(l-p)^3$$

مشق 2.3

مختصر کیجیے:

1. $[(10)^3]^2$
2. $[(2)^3]^2$
3. $[(3^2)]^2$
4. $[(-2)^2]^2$
5. $\dfrac{3^7}{3^2}$
6. $\dfrac{(-4)^4}{(-4)^2}$
7. $\dfrac{a^9}{a^2}$
8. $\dfrac{8a^3b^5}{4ab}$
9. $\dfrac{-21x^6y^9}{3x^2y^5}$
10. $\dfrac{(m+n)^7\ (p+q)^5}{(m+n)^6\ (p+q)^2}$
11. $\dfrac{-20\ (2p-3q)^{12}\ (4-3r)^3}{-4\ (2p-3q)^9\ (4-3r)}$
12. $\dfrac{8(2l+3m)^5\ (4n-2p)^6}{4(2l+3m)^3\ (4n-2p)^4}$
13. $\dfrac{(6a+b)^6\ (3c+d)^5\ (5e-f)^2}{(6a+b)^4\ (3c+d)^2\ (5e-f)}$

2.8.5 کسر کی قوت کا قانون (Law of Power of Quotient)

مثالیں (1)
$$\left(\frac{7}{9}\right)^7 = \left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)$$
$$= \frac{7\times7\times7\times7}{9\times9\times9\times9} = \frac{(7)^4}{(9)^4}$$

(2)
$$\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$$
$$= \frac{a\times a\times a\times a\times a}{b\times b\times b\times b\times b} = \frac{a^5}{b^5}$$

اس طرح کسی قدرتی عدد n کے لیے

$$\left(\frac{a}{b}\right)^7 = \left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)\times\cdots\cdots\times\left(\frac{a}{b}\right)\ (n \text{ مرتبہ})$$
$$= \frac{a\times a\times a\times\ \cdots\cdots\times a\ (n \text{ مرتبہ})}{b\times b\times b\times\ \cdots\cdots\times b\ (n \text{ مرتبہ})} = \frac{a^n}{b^n},\ n\in \mathrm{N}$$

پس ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ کسی بھی دو حقیقی اعداد a اور b جبکہ $b \neq 0$ اور کسی بھی قدرتی عدد n کے لیے

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

اسے کسر کی قوت کا قانون کہتے ہیں۔

نوٹ: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^n}$ (کیونکہ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$)

یعنی $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

مثلاً $\left(\frac{7x^2 y^5 z^6 t^4}{u^4 v^3}\right)^5 = \frac{(7x^2 y^5 z^6 t^4)^5}{(u^4 v^3)^5} = \frac{7^5 x^{10} y^{25} z^{30} t^{20}}{u^{20} v^{15}}$

مشق 2.4

مختصر کیجیے:

1. $\left(\frac{3}{12}\right)^6$ 2. $\left(\frac{-12}{5}\right)^5$ 3. $\left(\frac{a}{b}\right)^6$ 4. $\left(\frac{l}{m}\right)^{-3}$

5. $\left(\frac{8a^2b}{3cd}\right)^{-2}$ 6. $\left(\frac{-3x^3y^2}{2ut}\right)^4$ 7. $\left(\frac{2a^2b^3c^4}{3l^2vw^3}\right)^6$ 8. $\left(\frac{17b^7c^5}{7x^3y^2}\right)^2$

9. $\left(\frac{18x^4y^3z^2}{6ab^2c^5}\right)^3$ 10. $\left(\frac{-30x^{10}y^8}{-5x^3y^2}\right)^2$ 11. $\left(\frac{3a^3b^2c^6}{xyz}\right)^{-5}$ 12. $\left(\frac{12m^4n^3p^2}{6m^2n^2p}\right)^2$

2.9 جذر کا تصور اور مثبت حقیقی عدد کا جذر المربع

پچھلی جماعتوں سے ہم نے قدرتی اعداد کے جذر المربع کو معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں۔ مثلاً 4 کا جذر المربع 2 یا 2- ہے کیونکہ $4 = 2^2$ اور $4 = (-2)^2$ یہاں ہم صرف مثبت جذر المربع لے رہے ہیں۔ اسے خاص جذر المربع (Principal Square Root) کہتے ہیں، عام طور پر کسی مثبت حقیقی عدد q کے لیے q کا جذر المربع $\sqrt{q}$ ہوتا ہے۔

$\sqrt{q}$ کی ترقیم میں $\sqrt{\ }$ کو جذری علامت (Radical Sign) اور q کو مجذور (Radicand) کہتے ہیں۔ پس $\sqrt{q}$ سے مراد کوئی مثبت عدد x ہے جس کا مربع q ہو۔ یعنی $q = x^2$

جذر المربع کی چند خصوصیات یہ ہیں۔

(i) $\sqrt{a} = x \Rightarrow a = x^2,\ a \geq 0$ (ii) $\sqrt{a}\ \sqrt{a} = a,\ a \geq 0$

(iii) $\sqrt{a}\ \sqrt{b} = \sqrt{ab};\ a, b \geq 0$ (iv) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1,\ a > 0$

(v) $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a},\ a > 0$ (vi) $\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}},\ a > 0$

(vii) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}},\ b > 0$ (viii) $a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a+c)\sqrt{b},\ b \geq 0$

نوٹ:۔ ان خصوصیات کو طلباء قوانین قوت نما کی مدد سے ثابت کریں۔

مثال 1. مختصر کیجیے: $2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$

حل: $2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = (2+6)\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

مثال 2. مختصر کیجیے: $\sqrt{8} \times \sqrt{12}$

حل: $\sqrt{8} \times \sqrt{12} = \sqrt{8 \times 12} = \sqrt{96}$

$= \sqrt{\ } \times \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

مشق 2.5

مختصر کیجیے:

1. $\sqrt{169}$ 2. $\sqrt{180}$ 3. $\sqrt{12} \times \sqrt{12}$ 4. $\sqrt{16} \times \sqrt{12}$

5. $\sqrt{14} \times \sqrt{21}$ 6. $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$ 7. $\frac{\sqrt{76}}{\sqrt{76}}$ 8. $\frac{18}{\sqrt{18}}$

9. $\frac{2\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$ 10. $3\sqrt{5} + 8\sqrt{5}$ 11. $5\sqrt{8} - 2\sqrt{8}$ 12. $34\sqrt{23} + 38\sqrt{23}$

2.10 کسی مثبت حقیقی عدد کا n واں جذر

کسی بھی دو حقیقی اعداد x اور y اور قدرتی عدد n کے لیے اگر $x = y^n$ تو y , x کا خاص n واں جذر کہلاتا ہے۔ اور اسے ظاہر کرتے ہیں۔ $y = \sqrt[n]{x}$

جبکہ " $\sqrt[n]{\ }$ " خاص n ویں جذر کی علامت ہے اور n واں خاص جذر مثبت جذر ہے۔ x "مجذور" اور n جذر کا اشاریہ (*Index*) کہلاتا ہے۔

خیال رہے کہ n ایک مثبت صحیح عدد ہے اور ہم نے ایک مثبت حقیقی عدد کے n ویں جذر کی تعریف کی ہے۔

$\sqrt[n]{x}$ کو $x^{\frac{1}{n}}$ بھی لکھا جاتا ہے۔

مثلاً $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[4]{81} = 3$ اور $\sqrt[6]{64} = 2$ بالترتیب 16 , 8 , 81 اور 64 کی خاص جذر المربع، جذر المکعب، چوتھی جذر اور چھٹی جذر ہیں۔

n ویں جذر کے لیے مندرجہ ذیل نتائج بہت اہمیت کے حامل ہیں۔

کسی بھی دو مثبت حقیقی اعداد x اور y اور قدرتی عدد $n > 1$ کے لیے

1. $\sqrt[n]{x} = y \Rightarrow x = y^n$
2. $(\sqrt[n]{x})^n = x$
3. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$
4. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}} = 1, \ (x \neq 0)$

مثال1. مختصر کیجیے: $\sqrt[5]{243}$

حل:

$$243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

$$\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3^{5 \times \frac{1}{5}} = 3^1 = 3$$

مثال2. مختصر کیجیے: $\sqrt[4]{625 \times x^8 y^{12}}$

حل:

$$\sqrt[4]{625 \times x^8 y^{12}} = (5^4)^{\frac{1}{4}} \times (x^8)^{\frac{1}{4}} \times (y^{12})^{\frac{1}{4}}$$

$$= 5^{4 \times \frac{1}{4}} \times x^{8 \times \frac{1}{4}} \times y^{12 \times \frac{1}{4}} = 5x^2y^3$$

مثال3. مختصر کیجیے: $\sqrt[3]{\dfrac{216\, x^3 y^6}{125\, x^6 z^9}}$

حل:

$$\sqrt[3]{\frac{216\, x^3 y^6}{125\, x^6 z^9}} = \frac{\sqrt[3]{216\, x^3 y^6}}{\sqrt[3]{125\, x^6 z^9}} = \frac{(216 x^3 y^6)^{\frac{1}{3}}}{(125\, x^6 z^9)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{6xy^2}{5x^2z^3} = \frac{6y^2}{5xz^3}$$

مشق 2.6

مندرجہ ذیل کے لیے مجذور (*Radicand*) اور اشاریہ (*Index*) لکھیے۔

1. $\sqrt[4]{35}$
2. $\sqrt[5]{\dfrac{xyz}{t}}$
3. $\sqrt[6]{\dfrac{8}{17}}$
4. $\sqrt[n]{\dfrac{p}{q}}$
5. $\sqrt[5]{\dfrac{3xyz}{ut}}$

مختصر کیجیے:

6. $\sqrt[3]{27}$
7. $\sqrt[4]{625}$
8. $\sqrt[8]{a^8 b^8}$
9. $\sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^2}$
10. $\left(\sqrt[p]{mn}\right)^p$
11. $\sqrt[3]{\dfrac{81}{125}}$
12. $\dfrac{\sqrt[n]{q}}{\sqrt[m]{q}}$
13. $\sqrt[4]{256a^4 b^4}$
14. $\sqrt[3]{\dfrac{64\,a^3 b^9}{216\,c^6 d^{18}}}$

2.11 ناطق قوت نما

کسی حقیقی عدد x اور قدرتی اعداد m , n $(m > 1\ ,\ n > 1)$ کے لیے $x^{\frac{m}{n}}$ کی تعریف یوں کی جا سکتی ہے۔

$$\boxed{x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}}$$

بہ الفاظ دیگر $x^{\frac{m}{n}}$ سے مراد x^m کا n واں جذر ہے۔

صفر اور منفی ناطق قوت کے لیے مندرجہ ذیل تعریف ہے۔

$$x^0 = 1$$

اور $$x^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^{-m}}$$

ناطق قوت نما کے لیے مندرجہ ذیل نتائج اہم ہیں۔

اگر x ، y دو مثبت حقیقی اعداد ہیں اور $\frac{m}{n}$ ، $\frac{k}{l}$ ناطق ہیں۔

جبکہ m, n, k, l صحیح اعداد ہوں مگر $n \neq 0$ اور $l \neq 0$ تو

(i) $x^{\frac{m}{n}}\ x^{\frac{k}{l}} = x^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}$ **(ii)** $\dfrac{x^{\frac{m}{n}}}{x^{\frac{k}{l}}} = x^{\frac{m}{n}-\frac{k}{l}}$ **(iii)** $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{k}{l}} = x^{\frac{mk}{nl}}$

(iv) $(xy)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}}\ y^{\frac{m}{n}}$ **(v)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{x^{\frac{m}{n}}}{x^{\frac{m}{n}}}$

مثال 1. مختصر کیجیے۔ $(27x^{-\frac{7}{8}})^{\frac{8}{3}}$ جبکہ x مثبت حقیقی عدد ہے۔

حل:
$$\begin{aligned}(27x^{-\frac{7}{8}})^{\frac{8}{3}} &= (27)^{\frac{8}{3}} \times (x^{-\frac{7}{8}})^{\frac{8}{3}}\\ &= (3^3)^{\frac{8}{3}} \times (x^{-\frac{7}{8}})^{\frac{8}{3}}\\ &= 3^{3\times\frac{8}{3}} \times x^{-\frac{7}{8}\times\frac{8}{3}}\\ &= 3^8 \times x^{-\frac{7}{3}}\\ &= \frac{3^8}{x^{\frac{7}{3}}}\end{aligned}$$

مثال 2. مختصر کیجیے۔ $12^{\frac{3}{4}} \times 18^{\frac{4}{5}} \times 24^{\frac{5}{6}}$

حل:
$$12^{\frac{3}{4}} \times 18^{\frac{4}{5}} \times 24^{\frac{5}{6}} = (2\times2\times3)^{\frac{3}{4}} \times (2\times3\times3)^{\frac{4}{5}} \times (2\times2\times2\times3)^{\frac{5}{6}}$$

$$= (2^2\times 3)^{\frac{3}{4}} \times (2\times 3^2)^{\frac{4}{5}} \times (2^3\times 3)^{\frac{5}{6}}$$
$$= 2^{2\times\frac{3}{4}}\times 3^{\frac{3}{4}}\times 2^{\frac{4}{5}}\times 3^{2\times\frac{4}{5}}\times 2^{3\times\frac{5}{6}}\times 3^{\frac{5}{6}}$$
$$= 2^{\frac{3}{2}}\times 3^{\frac{3}{4}}\times 2^{\frac{4}{5}}\times 3^{\frac{8}{5}}\times 2^{\frac{5}{2}}\times 3^{\frac{5}{6}}$$
$$= 2^{\frac{3}{2}+\frac{4}{5}+\frac{5}{2}}\times 3^{\frac{8}{5}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}$$
$$= 2^{\frac{24}{5}}\times 3^{\frac{191}{60}}$$

مثال 3. مختصر کیجیے۔ $\sqrt[4]{\frac{x^a}{x^b}} \times \sqrt[4]{\frac{x^b}{x^c}} \times \sqrt[4]{\frac{x^c}{x^a}}$

حل:
$$\sqrt[4]{\frac{x^a}{x^b}} \times \sqrt[4]{\frac{x^b}{x^c}} \times \sqrt[4]{\frac{x^c}{x^a}} = \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{x^{\frac{a}{4}}}{x^{\frac{b}{4}}}\times\frac{x^{\frac{b}{4}}}{x^{\frac{c}{4}}}\times\frac{x^{\frac{c}{4}}}{x^{\frac{a}{4}}} = 1$$

مشق 2.7

مختصر کیجیے۔

1. $8^{\frac{1}{3}}\times 36^{\frac{1}{2}}$
2. $(64)^{-\frac{1}{6}}$
3. $\left(\frac{256}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$
4. $(81x^{-8}z^4)^{\frac{1}{4}}$
5. $\frac{(27)^{\frac{2n}{3}}\times(8)^{-\frac{n}{3}}}{(18)^{-\frac{n}{2}}}$
6. $\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{-q-p}\times\left(\frac{a^q}{a^r}\right)^{-r-q}\times\left(\frac{a^r}{a^p}\right)^{-p-r}$
7. $\sqrt[4]{\frac{a^x}{a^y}}\times\sqrt[4]{\frac{a^y}{a^r}}\times\sqrt[4]{\frac{a^r}{a^x}}$
8. $\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}\times\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n}\times\left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l}$
9. $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a+b-c}\times\left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b+c-a}\times\left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{a+c-b}$
10. $\left(\frac{(125)^2\times(8)}{(64)^2}\right)^{\frac{1}{3}}$
11. $\frac{4^m\times 15^{4m-2n+1}\times 9^{n-2m}}{10^{2m}\times 25^{m-n}}$
12. $\sqrt{\frac{(216)^{\frac{2}{3}}(25)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}}}$
13. $\frac{2^{\frac{1}{3}}.\ 12^{\frac{1}{2}}.\ 27^{\frac{1}{3}}.\ 5^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{2}}.\ 4^{-\frac{1}{3}}.\ 18^{\frac{1}{2}}.\ 81^{\frac{1}{4}}}$
14. $4^{3^2}\div 4^{2^3}$

2.12 اَصَم (Surds)

ایسا اظہاریہ جس کی کم از کم ایک رقم میں جذری علامت ہو اصم یا مقدار اصم کہلاتا ہے۔

مثلاً $\sqrt{a}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{3}{8}}$ اصم ہیں۔

نکات:

1. اگر $\sqrt[n]{a}$ ایک غیر ناطق عدد ہو اور 'a' مکمل n ویں قوت نہ ہو ایسی صورت میں اسے n درجی اصم کہیں گے۔
مثلاً $\sqrt{3}$ دو درجی اصم ہے۔ $\sqrt[4]{9}$ ایک 4 درجی اصم ہے۔
$\sqrt[3]{27} = 3$ اصم نہیں ہے اس لیے کہ $27 = 3^3$

2. دو رقمی اظہاریہ جس میں کم از کم ایک رقم اصم ہو 'دو رقمی اصم' (Binomial Surds) کہلاتا ہے۔
مثلاً $2 + \sqrt{3}$, $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ دو رقمی اصم ہیں۔

3. اگر $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ 'x' , y مکمل مربع نہ ہوں تو $a\sqrt{x} - b\sqrt{y}$ اور $a\sqrt{x} + b\sqrt{y}$ دونوں مزدوج دو رقمی اصم (Conjugate Binomial Surds) کہلاتے ہیں۔ ان میں سے ہر ایک دوسرے کا زوج کہلاتا ہے۔

4. زوج جوڑے کا حاصل ضرب ناطق عدد ہوتا ہے۔
مثلاً $(a\sqrt{x}+b\sqrt{y})(a\sqrt{x}-b\sqrt{y}) = a^2x - b^2y$

مثال 1. $\frac{1}{5-\sqrt{3}}$ کو ایسی شکل میں لکھیے کہ مخرج میں جذری علامت نہ ہو۔

حل:

$$\frac{1}{5-\sqrt{3}} = \frac{1}{5-\sqrt{3}} \times \frac{5+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} \quad \left(\text{مخرج کے زوج سے ضرب اور تقسیم کیا}\right)$$

$$= \frac{5+\sqrt{3}}{(5)^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{5+\sqrt{3}}{25-3} = \frac{5+\sqrt{3}}{22} = \frac{5}{22} + \frac{\sqrt{3}}{22}$$

نوٹ: وہ عمل جس میں کسی اظہاریے کے مخرج میں جذری علامت ختم کی جائے یعنی مخرج کو ناطق بنانے کا عمل ناطقانہ (Rationalization) کہلاتا ہے۔

مثال 2. اگر $x = 7 + 4\sqrt{3}$ تو $x - \frac{1}{x}$ ، $x + \frac{1}{x}$ ، $x^2 - \frac{1}{x^2}$ اور $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

کیونکہ $x = 7 + 4\sqrt{3}$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}} \times \frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}} \quad (\text{مخرج کو ناطق بنانے کا عمل})$$

$$= \frac{7-4\sqrt{3}}{(7)^2-4^2(\sqrt{3})^2} = \frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}$$

$$= \frac{7-4\sqrt{3}}{1} = 7-4\sqrt{3}$$

اب $x-\frac{1}{x} = (7+4\sqrt{3})-(7-4\sqrt{3})$

یا $x-\frac{1}{x} = 7+4\sqrt{3}-7+4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \quad \ldots(1)$

$x+\frac{1}{x} = (7+4\sqrt{3})+(7-4\sqrt{3}) = 14 \quad \ldots(2)$

(1) کے دونوں اطراف مربع کرنے سے

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = \left(8\sqrt{3}\right)^2$$

یا $x^2+\frac{1}{x^2}-2 = 192$

یا $x^2+\frac{1}{x^2} = 192+2$

یا $x^2+\frac{1}{x^2} = 194 \quad \ldots(3)$

مساوات **(1)** اور **(2)** کو ضرب دینے سے

$$x^2-\frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$= 14\ (8\sqrt{3})$$

$$= 112\sqrt{3} \quad \ldots(4)$$

مشق 2.8

.1 مندرجہ ذیل کے مخرج کو ناطق بنایئے۔

(i) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ **(ii)** $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ **(iii)** $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$

.2 اگر $x = 2+\sqrt{3}$ تو $x+\frac{1}{x}$ اور $x^2+\frac{1}{x^2}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

.3 اگر $p = 3+2\sqrt{2}$ تو $p+\frac{1}{p}$ اور $p^2+\frac{1}{p^2}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

.4 اگر $q = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ تو $q-\frac{1}{q}$ اور $q^2+\frac{1}{q^2}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

.5 اگر $y = \sqrt{5} - 2$ تو $y + \frac{1}{y}$ ، $y - \frac{1}{y}$ اور $y^2 - \frac{1}{y^2}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

.6 اگر $a = \sqrt{10} + 3$ تو $a + \frac{1}{a}$ ، $a - \frac{1}{a}$ اور $a^2 - \frac{1}{a^2}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

.7 اگر $\frac{1}{x} = 7 + 4\sqrt{3}$ تو $x^2 + \frac{1}{x^2}$ اور $x^2 - \frac{1}{x^2}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

.8 اگر $\frac{1}{b} = 2 + \sqrt{3}$ تو $b^4 + \frac{1}{b^4}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

.9 اگر $x = \sqrt{5} + 2$ تو $x^4 + \frac{1}{x^4}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

.10 اگر $q = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

(*a*) $q^4 + \frac{1}{q^4}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(*b*) q کا زوج معلوم کیجیے اور تصدیق کیجیے کہ q اور اس کے زوج کا حاصل ضرب ناطق عدد ہے۔

.11 اصم کا درجہ معلوم کیجیے۔

$$\sqrt[3]{\frac{5}{7}} \text{ ، } \sqrt[4]{\frac{4}{9}} \text{ ، } \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \text{ ، } \sqrt[4]{25} \text{ ، } \sqrt[3]{25}$$

متفرق مشق II

.1 مندرجہ ذیل سیٹوں میں سے کون سے خاصیت بندش رکھتے ہیں بلحاظ:

(i) جمع (ii) تفریق (iii) ضرب (iv) تقسیم

(*a*) **N** (*b*) **Z** (*c*) **Q** (*d*) **R**

(*e*) جفت اعداد کا سیٹ (*f*) طاق اعداد کا سیٹ

.2 مندرجہ ذیل میں حقیقی اعداد کی کون سی خاصیت استعمال ہوئی ہے۔

(i) $4 > 2 \Rightarrow 12 > 6$ (ii) $\frac{1}{8} > \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$

(iii) $9 > 7 \Rightarrow -7 > -9$ (iv) $\sqrt{3} < \sqrt{5} \Rightarrow 2\sqrt{3} < 2\sqrt{5}$

.3 مندرجہ ذیل بیانات میں کون سے صحیح ہیں؟

(i) $a^2 > 0 \ , \ a \in \mathbf{R}, \ \forall a \neq 0$ (ii) $a^3 < 0 \ , \ \forall a < 0 \ , \ a \in \mathbf{R}$

(iii) $(-3)^7 > 0$ (iv) $(-3)^8 < 0$

(v) $a\,a\,a = a + a + a,\ a \in \mathbf{R}$ (vi) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\left(\frac{1}{a}\right)^3,\ a \neq 0$

(vii) $a^{-1} = \frac{1}{a}\ ,\ a \neq 0$

.4 مختصر کیجیے:

(i) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^4$ (ii) $\left(\frac{a}{b^2}\right)^3,\ a, b \in \mathbf{R}$ اور $b \neq 0$

(iii) $(a^3)^4$ (iv) $[(-8)^4]^6$

(v) $(-x)^2\ (-x)^3\ (-x)^4$ (vi) $\left(-\frac{m}{t}\right)^2\left(-\frac{m}{t}\right)\ m, t \in \mathbf{R}$ اور $t \neq 0$

.5 مندرجہ ذیل کو مختصر کیجیے۔

(i) $\sqrt{3}\,(\sqrt{3} + 2\sqrt{12})$ (ii) $\sqrt{7}\ \sqrt{6}\ \sqrt{42}$

(iii) $\sqrt{6}\,(4\sqrt{24} - \sqrt{2}\,\sqrt{3})$

.6 مندرجہ ذیل کے مخرج سے جذری علامت کو ختم کرتے ہوئے مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{2}\,(4+\sqrt{3})}{\sqrt{8}}$

.7 مندرجہ ذیل بیانات میں کون سے صحیح اور کون سے غلط ہیں؟

(i) $\sqrt{-25} = -5$

(ii) چونکہ $(-8)\ 8 = -64$ اس لیے $\sqrt{-64} = -8$

(iii) اگر $x = 0$ ہے تو $\sqrt{x} = 0$

(iv) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

(v) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\ \sqrt{b}$

.8 مختصر کیجیے:

(i) $\left(\frac{x^{2a}}{x^{a+b}}\right)\left(\frac{x^{2b}}{x^{b+c}}\right)\left(\frac{x^{2c}}{x^{c+a}}\right),\ x \neq 0,\ x \in \mathbf{R}$

(ii) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2}\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2}\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2},\ x \neq 0,\ x \in \mathbf{R}$

(iii) $\sqrt{\frac{x^a}{x^b}} \times \sqrt{\frac{x^b}{x^c}} \times \sqrt{\frac{x^c}{x^a}}\ ,\ a, b, c \in \mathbf{Z}$ اور $x \neq 0,\ x \in \mathbf{R}$

9. مخرج کو ناطق بنایئے۔

(i) $\frac{1}{3+\sqrt{10}}$ (ii) $\frac{1}{4+3\sqrt{2}}$

10. اگر $y = 3 - 2\sqrt{2}$ تو $y^2 + y^{-2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

11. مختصر کیجیے:

(i) $\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$ (ii) $\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}$, $(a \neq 0)$

(iii) $\frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}}$; $(x \neq 0)$