یونٹ 3

لوگرتھم

3.1 تعارف

عظیم مسلمان ریاضی داں ابو محمد موسیٰ الخوارزمی نے لوگرتھم کو متعارف کرایا تھا۔ ان کے بعد سترہویں صدی عیسوی میں جان نیپئر (*John Napier*) نے لوگرتھم کے تصور کو مزید واضح کیا اور اس کے لیے جدول تیار کیے۔ ان جدول میں بنیاد ''e'' استعمال کی گئی۔ "e" ایک غیر ناطق عدد ہے جس کی تقریباً قیمت ...2.71828 ہے۔ عظیم ریاضی داں ایولر (*Euler*) نے عدد "e" کی خصوصیات دریافت کی تھیں اس لیے اس عدد کو ان کے نام کے پہلے حرف ''e'' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ پروفیسر ہنری برگس (*Henry Briggs*) نے 1631ء میں 10 کی بنیاد والے جدول تیار کیے۔ لوگرتھم کے استعمال نے طویل اور دشوار حسابی عمل کو مختصر اور بہت آسان کر دیا ہے۔

لوگرتھم کی تعریف کرنے سے پہلے ہم اعداد کے لکھنے کی سائنسی ترقیم پر بحث کرتے ہیں۔

3.2 سائنسی ترقیم

بہت بڑے اور بہت چھوٹے اعداد کو مختصر طریقہ سے لکھنا سائنسی ترقیم ہے۔ دیئے گئے اعداد کی تقریباً قیمتیں عموماً سائنسی ترقیم میں لکھی جاتی ہیں۔ ریاضی اور سائنس کی دیگر شاخوں میں انتہائی چھوٹے اور بڑے اعداد سے واسطہ پڑتا ہے مثلاً

(1) 0.00000057

(2) 56,78,93,00,15,759

(3) زمین کا وزن 6,000,000,000,000,000,000,000,000 کلوگرام ہے۔

(4) الیکٹران کا وزن 0.000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,910,905 کلوگرام ہے۔

سہولت کی خاطر ایسے اعداد کو ہم ایک خاص ترقیم میں لکھتے ہیں جسے سائنسی ترقیم کہا جاتا ہے۔اس ترقیم میں دیے ہوئے عدد کو دو اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔جس میں پہلا عدد ایک یا ایک سے بڑا لیکن دس سے چھوٹا ہوتا ہے اور دوسرا 10 کی کوئی قوت ہوتا ہے۔یعنی اگر دیا ہوا عدد 'n' ہو تو اس کی سائنسی ترقیم $n = s \times 10^m$ جبکہ $1 \leq s < 10$ اور m ایک صحیح عدد ہے۔ مندرجہ ذیل مثال سے اس کی وضاحت کی جاتی ہے۔

مثال 1. 7,530,000 کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

حل: 7,530,000 کو سائنسی ترقیم میں لکھنے کے لیے اس کو دو اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔عدد میں بائیں طرف سے پہلے غیر صفر ہند۔سے کے بعد نقطۂ اعشاریہ لگا کر پہلا جز وضربی حاصل کیا جاتا ہے۔دوسرا جز وضربی 10 کی قوت ہوتا ہے جبکہ قوت نما ان ہندسوں کی تعداد کے برابر ہوتا ہے جو نقطۂ اعشاریہ کے اصل مقام سے نئے مقام کے درمیان ہوتے ہیں واضح ہو کہ یہاں نقطۂ اعشاریہ اس کے اصل مقام کے بائیں جانب ہے تو اس صورت میں قوت نما مثبت لیا جاتا ہے اور اگر اصل مقام کے دائیں جانب ہو تو قوت نما منفی لیا جاتا ہے۔

$$\underleftarrow{7.530,000} = 7.53 \times 10^6$$

یا

$$\begin{aligned} 7530000 &= 753 \times 10000 \\ &= 75.3 \times 10 \times 10000 \\ &= 7.53 \times 10^1 \times 10^1 \times 10^4 \\ &= 7.53 \times 10^{1+1+4} \\ &= 7.53 \times 10^6 \end{aligned}$$

مثال 2. 0.000000953 کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

حل: اس صورت میں نقطۂ اعشاریہ اصل مقام سے دائیں جانب لگایا جائے گا اس لیے قوت نما منفی لیا جائے گا۔

$$\underrightarrow{0.000000953} = 9.53 \times 10^{-7}$$

یا

$$\begin{aligned} 0.000000953 &= \frac{953}{1000000000} \\ &= \frac{95.3 \times 10}{10^9} \\ &= \frac{9.53 \times 10^1 \times 10^1}{10^9} \\ &= 9.53 \times 10^{1+1-9} \\ &= 9.53 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

مثال 3. الیکٹران کی کمیت کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

حل: الیکٹران کی کمیت = 0,0000000000000000000000000000911 کلوگرام ہوتا ہے جس کی سائنسی ترقیم 9.11×10^{-28} ہے۔

یاد رکھیے:

(1) 10 کا قوت نما نقطۂ اعشاریہ کے اصل مقام سے نئے مقام کے درمیان ہندسوں کی تعداد گن کر حاصل کیا جاتا ہے۔

(2) اگر نقطۂ اعشاریہ اس کے اصل مقام سے بائیں جانب لگایا جائے تو قوت نما مثبت ہوتا ہے۔

(3) اگر نقطۂ اعشاریہ اس کے اصل مقام سے دائیں جانب لگایا جائے تو قوت نما منفی ہوتا ہے۔

(4) اگر کوئی عدد سائنسی ترقیم میں ہو تو اسے معیاری شکل میں لکھا ہوا بھی کہتے ہیں۔

مثال 4. سورج سے زمین کا فاصلہ 15,00,00,000 کلومیٹر ہے۔ اسے سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

حل: $15,00,00,000 = 15 \times 10000000 = 1.5 \times 10^1 \times 10^7 = 1.5 \times 10^{1+7} = 1.5 \times 10^8$

پس سورج سے زمین کا فاصلہ سائنس ترقیم میں 1.5×10^8 کلومیٹر ہے۔

اگر کوئی عدد سائنسی ترقیم میں لکھا ہوا ہو تو اسے سادہ یا عام شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ اس کے لیے پہلے جز و ضربی میں نقطۂ اعشاریہ کو 10 کے قوت نما کے برابر ہندسوں کے بعد لگایا جاتا ہے۔ اگر قوت نما مثبت ہے تو نقطۂ اعشاریہ دائیں جانب حرکت کرتا ہے اور اگر قوت نما منفی ہے تو اس کی حرکت بائیں جانب ہوتی ہے۔ اس کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 5. مندرجہ ذیل کو عام صورت میں لکھیے۔

(i) 5.375×10^8 **(ii)** 6.75×10^{-9}

حل:

(i) $5.375 \times 10^8 = 537500000$

یا $5.375 \times 10^8 = 5375 \times 10^{-3} \times 10^8$

$= 5375 \times 10^{-3+8}$

$= 5375 \times 10^5$

$= 5375 \times 100000$

$= 537500000$

(ii) $6.75 \times 10^{-9} = 0.00000000675$

یا $6.75 \times 10^{-9} = 675 \times 10^{-2} \times 10^{-9}$

$= 675 \times 10^{-11}$

$= 0.00000000675$

مشق 3.1

مندرجہ ذیل اعداد کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

(1) 68.75 (2) 5373.458 (3) 756837 (4) 0.053

(5) 0.0007689 (6) 7000000 (7) 89000000 (8) 0.000000015

مندرجہ ذیل اعداد کو عام صورت میں لکھیے۔

(9) 2.576×10^{7} (10) 7.0056×10^{-8} (11) 1.3×10^{-9} (12) 1×10^{13}

(13) چاند کے قطر کی پیائش 3500 کلومیٹر ہے اسے سینٹی میٹر میں تبدیل کر کے سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

(14) سورج کے مرکز میں 15,000,000 ڈگری سینٹی گریڈ درجہ حرارت ہوتا ہے۔ اسے سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

3.3 لوگرتھم کی تعریف

فرض کیجیے a , x اور y حقیقی اعداد ہوں جبکہ $a > 0$ اور $a \neq 1$ اگر $x = a^y$ تو x کا لوگرتھم اساس a پر y ہوتا ہے اور اسے لکھتے ہیں $\log_a x = y$

اس سے واضح ہوتا ہے کہ $x = a^y$ اور $\log_a x = y$ مترادف مساواتیں ہیں۔ $x = a^y$ دیے ہوئے بیان کی قوت نمائی شکل ہے اور $\log_a x = y$ اسی بیان کی لوگرتھمی شکل ہے۔

مثالیں:

(1) $3^4 = 81$ کی لوگرتھمی شکل یہ ہے $\log_3 81 = 4$ یعنی 81 کا لوگرتھم اساس 3 پر 4 ہے۔

(2) $10 = 10^1$، $100 = 10^2$، $1000 = 10^3$ وغیرہ لہٰذا $\log_{10} 10 = 1$ ، $\log_{10} 100 = 2$ ، $\log_{10} 1000 = 3$ وغیرہ

واضح رہے کہ اگر $a = 1$ تو مساوات $x = a^y$ کا کوئی ایک حل نہیں ہوتا ہے۔ مثلاً $1 = 1^2$ ، $1 = 1^3$ ، $1 = 1^4$ وغیرہ یعنی y کی کوئی بھی قیمت یعنی 1 یا 2 یا 3 وغیرہ ہو سکتی ہے۔ شرط $a > 0$ یہ بتاتی ہے کہ x ہمیشہ حقیقی ہوگا۔

اگر $x = 1$ تو a کی تمام قیمتوں کے لیے $a^0 = 1$ لہٰذا کسی اساس a کے لیے $\log_a 1 = 0$

1 کا لوگرتھم کسی اساس پر صفر ہوتا ہے

اگر $x = a$ تو $a = a^1$ ، لہٰذا $\log_a a = 1$

اساس کا لوگرتھم خود پر 1 ہوتا ہے

مثال 1. مندرجہ ذیل کو لوگرتھمی شکل میں لکھیے۔

(i) $2^2 = 4$ (ii) $4^3 = 64$ (iii) $4^{-2} = \frac{1}{16}$ (iv) $(\frac{1}{5})^{-2} = 25$

حل: (i) چونکہ $2^2 = 4$ لہٰذا $\log_2 4 = 2$ (ii) چونکہ $4^3 = 64$ لہٰذا $\log_4 64 = 3$

(iii) چونکہ $4^{-2} = \frac{1}{16}$ لہٰذا $\log_4 \frac{1}{16} = -2$ (iv) چونکہ $(\frac{1}{5})^{-2} = 25$ لہٰذا $\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$

مثال 2. مندرجہ ذیل کو قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

(i) $\log_3 27 = 3$ (ii) $\log_{10} 100 = 2$ (iii) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

(iv) $\log_6 \frac{1}{36} = -2$ (v) $\log_{10} \frac{1}{1000} = -3$

حل: (i) چونکہ $\log_3 27 = 3$ لہٰذا $3^3 = 27$ (ii) چونکہ $\log_{10} 100 = 2$ لہٰذا $10^2 = 100$

(iii) چونکہ $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ لہٰذا $(\frac{1}{2})^{-2} = 4$ (iv) چونکہ $\log_6 \frac{1}{36} = -2$ لہٰذا $6^{-2} = \frac{1}{36}$

(v) چونکہ $\log_{10} \frac{1}{1000} = -3$ لہٰذا $10^{-3} = \frac{1}{1000}$

مثال 3. اگر $\log_7 x = 2$ تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ $\log_7 x = 2$

لہٰذا $7^2 = x$

یا $x = 49$

مثال 4. اگر $\log_a 625 = 4$ تو a کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ $\log_a 625 = 4$

لہٰذا $625 = a^4$

یا $5^4 = a^4$

پس $a = 5$ (قوت نما مساوی ہیں)

مثال 5. اگر $\log_{10} 1000 = y$ تو y کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ $\log_{10} 1000 = y$

لہٰذا $10^y = 1000$

یا $10^y = 10^3$

پس $y = 3$ (اساس مساوی ہیں)

مثال 6. $32\sqrt[5]{4}$ کا لوگرتھم اساس $2\sqrt{2}$ پر معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ $\log_{2\sqrt{2}}(32\sqrt[5]{4}) = x$

تو $\left(2\sqrt{2}\right)^x = 32\sqrt[5]{4}$

$$\Rightarrow \left(2 \times 2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 32\,(4)^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow \left(2^{1+\frac{1}{2}}\right)^x = 32\,(2^2)^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^x = 2^5 . 2^{\frac{2}{5}}$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{3}{2}x} = 2^{5+\frac{2}{5}}$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{3}{2}x} = 2^{\frac{27}{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x = \frac{27}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{18}{5} \Rightarrow x = 3.6$$

مشق 3.2

مندرجہ ذیل میں سے ہرایک کولوگرتھمی شکل میں لکھیے:

(1) $2^5 = 32$ **(2)** $2^{-7} = \frac{1}{128}$ **(3)** $10^{-2} = 0.01$

(4) $36^{\frac{3}{2}} = 216$ **(5)** $10^5 = 100000$

مندرجہ ذیل میں سے ہرایک کوقوت نمائی شکل میں لکھیے:

(6) $\log_5 25 = 2$ **(7)** $\log_{27} 81 = \frac{4}{3}$ **(8)** $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

(9) $\log_{10} 1 = 0$ **(10)** $\log_{10} 0.001 = -3$

مندرجہ ذیل میں x کی قیمت معلوم کیجیے:

(11) $\log_{32} x = -\frac{1}{5}$ **(12)** $\log_4 x = -\frac{3}{2}$ **(13)** $\log_{10} x = -4$

مندرجہ ذیل میں a کی قیمت معلوم کیجیے:

(14) $\log_a 3 = \frac{1}{2}$ **(15)** $\log_a \frac{1}{25} = -\frac{2}{3}$ **(16)** $\log_a 1 = 0$

مندرجہ ذیل میں y کی قیمت معلوم کیجیے:

(17) $\log_{\sqrt{5}} 25 = y$ **(18)** $\log_{10} 100 = y$ **(19)** $\log_{55} 55 = y$

لوگرتھم معلوم کیجیے:

(20) 1728 کا اساس $2\sqrt{3}$ پر (21) 125 کا اساس $5\sqrt{5}$ پر (22) 0.0001 کا اساس 0.001 پر

مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے:

(23) $\log_8 128$ (24) $\log_{27}\frac{1}{81}$ (25) $\log_{343} 49$

3.4 لوگرتھم کے قوانین

ہم لوگرتھم کے تین قوانین بیان اور ثابت کریں گے جن کا استعمال طویل حسابی عمل کو مختصر کر دے گا۔

پہلا قانون: حقیقی اعداد m , n اور a جبکہ $a > 0$, $a \neq 1$ کے لیے

$$\log_a mn = \log_a m + \log_a n$$

ثبوت: فرض کیجیے۔ $\log_a m = x$ اور $\log_a n = y$ تو $m = a^x$ اور $n = a^y$

> دو حقیقی اعداد کے حاصل ضرب کا لوگرتھم اُن کے لوگرتھم کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

اب $mn = a^x \ a^y$

$= a^{x+y}$ (قانونِ قوت نما)

$= \log_a mn = x + y$

پس $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$

دوسرا قانون: حقیقی اعداد m , n اور a جبکہ $a > 0$ اور $a \neq 1$ کے لیے

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

ثبوت: فرض کیجیے۔ $\log_a m = x$ اور $\log_a n = y$ تو $m = a^x$ اور $n = a^y$

> دو حقیقی اعداد کے حاصل تقسیم کا لوگرتھم ان کے لوگرتھم کے فرق کے برابر ہوتا ہے۔

$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y}$

$= a^{x-y}$ (قانونِ قوت نما)

$\Rightarrow \log_a \frac{m}{n} = x - y$

لہٰذا $\Rightarrow \log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

تیسرا قانون: حقیقی اعداد m , n اور a جبکہ $a > 0$ اور $a \neq 1$ کے لیے

$$\log_a m^n = n \log_a m$$

ثبوت: فرض کیجیے۔ $\log_a m = x$ تو $m = a^x$

اب $m^n = (a^x)^n$

(قانون قوت نما) $= a^{nx}$

$\Rightarrow \log_a m^n = nx$

پس $\log_a m^n = n\log_a m$

کسی حقیقی عدد جس کا قوت نما n ہو، کا لوگرتھم اُس کے لوگرتھم اور قوت نما n کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔

مثال 1. $\log_a x^3 z^{\frac{4}{5}}$ کو $\log_a x$ اور $\log_a z$ میں تحویل کیجیے۔

حل:

$$\log_a x^3 z^{\frac{4}{5}} = \log_a x^3 + \log_a z^{\frac{4}{5}} \qquad (\because \log_a mn = \log_a m + log_a n)$$

$$= 3\log_a x + \frac{4}{5}\log_a z \qquad (\because \log_a m^n = n\log_a m)$$

مثال 2. مختصر کیجیے۔ $\log_a \frac{75}{16} - 2\log_a \frac{5}{9} + \log_a \frac{32}{243}$

حل:

$$\log_a \frac{75}{16} - 2\log_a \frac{5}{9} + \log_a \frac{32}{243} = \log_a \frac{75}{16} - \log_a \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \log_a \frac{32}{243}$$

$$= \log_a \left(\frac{75}{16} \times \frac{32}{243}\right) - \log_a \left(\frac{5}{9}\right)^2$$

$$= \log_a \left(\frac{\frac{75}{16} \times \frac{32}{243}}{\frac{25}{81}}\right) = \log_a 2$$

مثال 3. $d^x . c^{-2x} = b^{3x+1}$ تو x معلوم کیجیے۔

حل: $d^x . c^{-2x} = b^{3x+1}$

دونوں اطراف لوگرتھم اساس a پر لینے سے

$$\log_a (d^x . c^{-2x}) = \log_a b^{3x+1}$$

$$\Rightarrow \log_a d^x + \log_a c^{-2x} = \log_a b^{3x+1}$$

$$\Rightarrow x\log_a d - 2x\log_a c = (3x+1)\log_a b$$

$$\Rightarrow x\log_a d - 2x\log_a c = 3x\log_a b + \log_a b$$

$$\Rightarrow x\log_a d - 2x\log_a c - 3x\log_a b = \log_a b$$

$$\Rightarrow x(\log_a d - 2\log_a c - 3\log_a b) = \log_a b$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log_a b}{\log_a d - 2\log_a c - 3\log_a b)} = \frac{\log_a b}{\log_a \frac{d}{c^2 b^3}}$$

3.5 لوگرتھم میں اساس کی تبدیلی کا اصول

لوگرتھم میں اساس کی تبدیلی کا اصول یوں بیان کیا جاتا ہے۔

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

ثبوت: فرض کیجیے $\log_a n = x$

لہٰذا $n = a^x$

دونوں اطراف کا لوگرتھم اساس b پر لینے سے

$$\log_b n = \log_b a^x$$

$$= x \log_b a \quad (\because \log_a m^n = n \log_a m)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

پس $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$ ... (1)

3.5.1 نتیجہ صریح: $\log_a b \,.\, \log_b a = 1$

ثبوت: مساوات (1) میں $n = b$ لینے سے

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a}$$

$$= \frac{1}{\log_b a} \quad (\because \log_b b = 1)$$

پس $\log_a b \,.\, \log_b a = 1$

یہ صریح نتیجہ براہ راست بھی ثابت کیا جا سکتا ہے جیسا کہ ذیل میں ہے۔

فرض کیجیے $\log_a b = x$

تو $a^x = b$

دونوں اطراف لوگرتھم اساس b پر لینے سے

$$\log_b a^x = \log_b b$$

$$\Rightarrow \quad x \log_b a = 1 \quad (\because \log_b b = 1)$$

پس $\log_a b \,.\, \log_b a = 1$

مثال 1. ثابت کیجیے۔ $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$

ثبوت: لوگرتھم میں اساس کی تبدیلی کا اصول استعمال کرتے ہوئے ہر اساس کو ایک ہی اساس یعنی a میں تبدیل کیجیے۔

$$\text{L.H.S.} = \log_a b \times \log_b c \times \log_c a$$
$$= \log_a b \times \frac{\log_a c}{\log_a b} \times \frac{\log_a a}{\log_a c}$$
$$= \log_a a = 1 = \text{R.H.S} \quad (\because \log_a a = 1)$$

مثال 2. ثابت کیجیے $\log_a n = \log_b n \,.\, \log_a b$

ثبوت:
$$\text{L.H.S} = \log_a n$$
$$= \frac{\log_b n}{\log_b a} \qquad (\because \log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a})$$
$$= \log_b n \,.\, \log_a b \quad (\because \log_a b \,.\, \log_b a = 1)$$
$$= \text{R.H.S.}$$

مشق 3.3

مندرجہ ذیل کو $\log_a z,\ \log_a y,\ \log_a x$ میں تحویل کیجیے۔

(1) $\log_a \frac{x^3 y}{z^2}$ (2) $\log_a \sqrt{xy^2 z}$

(3) $\log_a \left(\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{y^3}} \div \sqrt{y^3\sqrt{x}}\right)$ (4) $\log_a \frac{x\sqrt{y^3}}{\sqrt[3]{z^2 x^5}}$

(5) $\log_a \left\{\left(\frac{yz^{-2}}{y^{-4} z^3}\right)^{-3} \div \left(\frac{y^{-1}z}{y^2 z^{-3}}\right)^5\right\}$ (6) $\log_a \frac{\sqrt[5]{xy^{-1}z^{-2}}}{(x^{-1}y^{-2}z^{-3})^{\frac{1}{6}}}$

ثابت کیجیے:
(7) $\log_a \frac{\sqrt[4]{5}\,.\sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\log_a 5 - \frac{11}{15}\log_a 2 - \frac{2}{3}\log_a 3$

مندرجہ ذیل کو مختصر کرکے ایک رقم میں لکھیے۔

(8) $\log_a 20 - \log_a 15 + \frac{1}{2}\log_a \frac{9}{16}$

(9) $\frac{1}{3}\log_a (x-1)^3 + \frac{10}{9}\log_a (x+1) - \frac{1}{9}\log_a (x+1)$

ثابت کیجیے:

(10) $\log_b m = \log_a m \,.\, \log_b a$ (11) $\log_b a \times \log_c b \times \frac{1}{\log_c a} = 1$

(12) $\log_a b \times \log_c a = \log_c b$

3.6 عام لوگرتھم (Common Logarithms)

اساس 10 پر لوگرتھم کو عام لوگرتھم کہتے ہیں۔ عام لوگرتھم کو برِگز لوگرتھم (*Briggs Logarithms*) بھی کہا جاتا ہے۔ انھیں ان سوالات میں جو کہ حسابی عمل سے متعلق ہوں استعمال کیا جاتا ہے۔ لیکن اعلیٰ ریاضی کی بہت سی شاخوں میں اساس 'e' پر لوگرتھم استعمال کیا جاتا ہے جسے قدرتی لوگرتھم بھی کہا جاتا ہے۔ قدرتی لوگرتھم کو نیپیرئن لوگرتھم (*Naperian Logarithms*) بھی کہا جاتا ہے کسی حقیقی عدد m کے قدرتی لوگرتھم کو $\log_e m$ لکھتے ہیں عام طور پر اِسے $ln\,m$ بھی لکھا جاتا ہے۔

اس کتاب میں صرف قدرتی لوگرتھم پر بحث ہوگی اس لیے آئندہ ہم اساس کا ذکر نہیں کریں گے اور سمجھا جائے گا کہ اساس 10 استعمال ہو رہی ہے یعنی $\log_{10} n$ کے بجائے صرف $\log n$ لکھا جائے گا۔

کسی عدد n کی سائنسی ترقیم $n = s \times 10^m$ میں جبکہ $1 \leq s < 10$ اور m ایک صحیح عدد ہے۔ n کا عام لوگرتھم معلوم کرنے کے لیے دونوں اطراف کا لوگرتھم لیتے ہیں۔

$$\log n = \log (s \times 10^m)$$
$$= \log s + \log 10^m \quad (\because \log_a mn = \log_a m + \log_a n)$$
$$= \log s + m \log 10 \quad (\because \log_a m^n = n \log_a m)$$
$$= \log s + m \quad (\because \log 10 = 1)$$
$$= m + \log s \quad \ldots (1)$$

اس مساوات سے معلوم ہوا کہ کسی عدد n کا لوگرتھم صحیح عدد m اور $\log s$ کا مجموعہ ہوتا ہے۔

مساوات (1) میں صحیح عدد m (سائنسی ترقیم میں 10 کا قوت نما) n کے لوگرتھم کا خاصہ (*Characteristic*) کہلاتا ہے اور $\log s$ جبکہ $1 \leq s < 10$ مینٹیسہ (*Mantissa*) کہلاتا ہے۔

چونکہ $1 \leq s < 10$

لہٰذا $\log 1 \leq \log s < \log 10$

پس $0 \leq \log s < 1 \; (\because \log 1 = 0 \,;\, \log 10 = 1) \quad \ldots (2)$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ عام لوگرتھم کا عشری یا مینٹیسہ (*Mantissa*) ایک غیر منفی عدد ہے جو کہ ایک سے چھوٹا ہے۔

پس خاصہ عام لوگرتھم کا صحیح عددی حصہ اور مینٹیسہ اس کا اعشاری حصہ ہوتا ہے۔

واضح رہے کہ خاصہ صحیح عدد ہے اس لیے مثبت بھی ہوسکتا ہے اور منفی بھی لیکن مینٹیسہ کیونکہ اعشاری حصہ ہے اس لیے ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔
سائنسی ترقیم میں لکھے بغیر ہم کسی عدد کے لوگرتھم کا خاصہ مندرجہ ذیل دو اُصولوں کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں۔

پہلا اُصول: خاصہ مثبت ہوتا ہے اور عددی لحاظ سے نقطہ اعشاریہ سے پہلے (بائیں طرف) ہندسوں کی تعداد سے ایک کم ہوتا ہے۔

دوسرا اُصول: خاصہ منفی ہوتا ہے اور عددی لحاظ سے نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد (دائیں طرف) صفروں کی تعداد سے ایک زیادہ ہوتا ہے۔

مینٹیسہ کو عام لوگرتھم کی جدول سے معلوم کرتے ہیں۔ اِس طریقہ کار کی وضاحت ہم مندرجہ ذیل مثالوں سے کرتے ہیں۔

مثال 1. $\log 4689$ معلوم کیجیے۔

حل: $\log 4689$ کا خاصہ معلوم کرنے کے لیے ہم پہلے دیے گئے عدد 4689 کو سائنسی ترقیم میں لکھتے ہیں۔

$$4689 = 4.6\,89 \times 10^3$$

پس $\log 4689$ کا خاصہ 3 ہے۔

عدد 4689 کو سائنسی ترقیم میں لکھے بغیر ہم مندرجہ بالا پہلے اصول کی مدد سے $\log 4689$ کا خاصہ معلوم کر سکتے ہیں۔
پہلے اُصول کے مطابق $\log 4689$ کا خاصہ 3 ہے۔

پس $\log 4689 = 3 + \log 4.689$

مینٹیسہ یعنی $\log 4.689$ معلوم کرنے کے لیے ہم نقطہ اعشاریہ کو نظر انداز کر دیتے ہیں اور یوں عدد 4689 حاصل ہوتا ہے۔ اب ہم لوگرتھم کی جدول کی (بائیں سے) پہلے کالم (*Column*) میں عدد 46 کو تلاش کرتے ہیں۔ جیسا کہ تیر کے نشان (→) سے دکھایا گیا ہے۔ اس کے بعد جدول کی (اوپر سے) پہلی سطر (*Row*) میں عدد 8 تلاش کرتے ہیں جیسا کہ تیر کے نشان (↓) سے دکھایا گیا ہے۔

لوگرتھم کی جدول

فرق والے کالم

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						4	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	15	19	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	19	22	26	30	33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	7	10	13	16	20	23	26	30
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3	6	9	11	14	16	20	23	26
						1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	24
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	5	8	11	14	17	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	16	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

وہ سطر جسے نشان ($\rightarrow$) اور وہ کالم جسے نشان ($\downarrow$) سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اُن کے سنگم پر ہمیں عدد 6702 ملتا ہے۔ وہ سطر جس میں یہ عدد ہے، اور فرق والے کالموں میں 9 والے کالم کے سنگم پر ہمیں عدد 8 ملتا ہے۔ 6702 میں 8 جمع کرنے سے ہمیں 6710 حاصل ہوتا ہے۔

لہٰذا $\log 4.689 = 0.6710$ جو کہ مطلوبہ مینٹیسہ ہے۔

پس $\log 4689 = 3 + 0.6710 = 3.6710$

مثال 2. $\log 3.8$ معلوم کیجیے۔

حل: پہلے اصول کے مطابق $\log 3.8$ کا خاصہ 0 ہے۔

لہٰذا $\log 3.8 = 0 + \log 3.800$

مینٹیسہ معلوم کرنے کے لیے نقطہ اعشاریہ کو نظر انداز کریں تو ہمیں عدد 3800 حاصل ہوتا ہے۔

لوگرتھم کی جدول کے پہلے بائیں کالم میں 38 تلاش کیا اور سب سے اوپر والی سطر میں 0 کے نیچے والے کالم اور 38 والی سطر کے سنگم پر عدد 5798 حاصل ہوا۔ فرق والے کالموں میں 0 کا کالم نہیں ہے اس لیے 5798 میں کچھ بھی جمع نہیں کریں گے۔

پس $\log 3.8 = 0 + 0.5798 = 0.5798$

مثال 3. 0.0000225 کا لوگرتھم معلوم کیجیے۔

حل: 0.0000225 کی سائنسی ترقیم 2.25×10^{-5} ہے اور دوسرے اصول کے مطابق $\log 0.0000225$ کا خاصہ

-5 ہے۔ اس لیے $\log 0.0000225 = -5 + \log 2.250$

$= -5 + 0.3522$

چونکہ خاصہ منفی ہے اس لیے اس منفی نشان کو 5 کے اوپر لگاتے ہیں یعنی اس طرح : $\bar{5}$

$\log 0.0000225 = \bar{5}.3522$ جسے پڑھتے ہیں: "بار پانچ اعشاریہ تین پانچ دو، دو"

$\bar{5}.3522$ اور -5.3522 کا فرق اچھی طرح سمجھ لینا چاہیے۔

اول الذکر کے معنٰی $-5 + 0.3522$ ہیں جو کہ -4.6478 کے برابر ہے اور موخر الذکر کے معنٰی $-5 - 0.3522$ ہیں جو کہ غلط ہے کیونکہ عشری یا مینٹیسہ (*Mantissa*) ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

مشق 3.4

مندرجہ ذیل اعداد کے لوگرتھم معلوم کیجیے۔

1. 9	**2.** 4.5	**3.** 78	**4.** 5.68	**5.** 11.89
6. 6879	**7.** 8.007	**8.** 6008	**9.** 0.6892	**10.** 0.0345
11. 0.002348	**12.** 0.06066	**13.** 70000	**14.** 0.857	**15.** 253.7

3.7 ضد لوگرتھم (*Antilogarithms*)

اگر $\log x = y$ تو x کو y کا ضد لوگرتھم کہتے ہیں۔ اِسے اس طرح لکھتے ہیں: $x = \text{antilog } y$

اگر کسی عدد x کا عام لوگرتھم y ہو یعنی اگر $\log x = y$ تو ہم عدد x کو ضد لوگرتھم کی جدول استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل دو اُصولوں کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں۔

اصول 1. اگر خاصہ مثبت n ہو تو ضد لوگرتھم میں صحیح عددی حصے میں ہندسوں کی تعداد $n + 1$ ہوتی ہے۔

اصول 2. اگر خاصہ منفی n ہو تو ضد لوگرتھم میں نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد صفروں کی تعداد $n - 1$ ہوتی ہے۔

ضد لوگرتھم معلوم کرنے کے طریقہ کار کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. اگر $\log x = 2.3835$ تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

طریقہ:

1. مینٹیسہ یعنی 0.3835 کو دیکھیے۔ اس میں ہندسوں کی تعداد چار ہے۔
2. ضد لوگرتھم کی جدول میں بائیں سے پہلے کالم میں عدد .38 کو دیکھیے جسے نشان $(\rightarrow)$ سے ظاہر کیا گیا ہے اور اوپر سے پہلی سطر میں عدد 3 کو دیکھیے جسے نشان $(\downarrow)$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔
3. نشان $(\rightarrow)$ اور $(\downarrow)$ کے سنگم پر ہمیں عدد 2415 ملتا ہے۔
4. فرق والے کالموں میں 5 والے کالم اور سطر جسے نشان $(\rightarrow)$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اُن دونوں کے سنگم پر عدد 3 ملتا ہے۔
5. عدد 3 کو عدد 2415 میں جمع کیا تو عدد 2418 حاصل ہوا۔
6. عدد 2418 میں بائیں سے تین ہندسوں کے بعد نقطہ اعشاریہ لگائیے کیونکہ خاصہ 2 ہے۔

پس $x = 241.8$ مطلوبہ عدد

ضد لوگرتھم کی جدول

فرق والے کالم

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1027	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	156[illegible]	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2103	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

مثال 2. اگر $\log x = 0.4376$ تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: عدد 0.43 والی سطر اور عدد 7 والے کالم کے سنگم پر ہمیں عدد 2735 ملتا ہے۔ اسی سطر اور فرق والے کالموں میں 6 والے کالم کے سنگم پر ہمیں عدد 4 ملتا ہے۔ 4 کو 2735 میں جمع کرنے سے ہمیں عدد 2739 حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ خاصہ 0 ہے۔

لہٰذا صحیح عددی حصے میں صرف ایک ہندسہ ہوگا۔

پس $x = \text{antilog } 0.4376 = 2.739$

مثال 3. اگر $\log x = \bar{5}.1243$ ہے تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: مندرجہ بالا مثال کے اعتبار سے۔

$$x = \text{antilog } \bar{5}.1243 = 0.00001331$$

چونکہ خاصہ 5– ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد چاروں صفروں کا اضافہ کیا گیا ہے۔

مشق 3.5

x کی قیمت معلوم کیجیے اگر:

1. $\log x = 1.7505$	**2.** $\log x = 0.6609$	**3.** $\log x = 2.2132$
4. $\log x = 1.9009$	**5.** $\log x = 0.0009$	**6.** $\log x = 3.8505$
7. $\log x = \bar{1}.6132$	**8.** $\log x = \bar{2}.7777$	**9.** $\log x = \bar{3}.3465$
10. $\log x = \bar{4}.8455$	**11.** $\log x = \bar{6}.7835$	**12.** $\log x = \bar{9}.6875$
13. $\log x = 3.4800$	**14.** $\log x = \bar{7}.0038$	

3.8 حسابی عمل میں لوگرتھم کا استعمال

حسابی عوامل میں لوگرتھم کے استعمال کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

واضح رہے کہ منفی خاصہ والے اعداد کی جمع اور تفریق کرتے وقت خصوصی احتیاط برتنی چاہیے۔

مثال 1. لوگرتھم کا استعمال کرتے ہوئے $n = (8.573)\ (28.74)$ حل کیجیے۔

حل: چونکہ $n = (8.573)\ (28.74)$

$$\log n = \log (8.573)\ (28.74)$$
$$= \log 8.573 + \log 28.74$$
$$= 0.9332 + 1.4585$$
$$= 2.3917$$

اب $n = \text{antilog } 2.3917$

پس $n = 246.4$

حل: دوسرا طریقہ:۔ سائنٹیفک کیلکیولیٹر اور لوگرتھم کا استعمال۔

فرض کیجیے

$$x = 8.573 \times 28.74$$

دراصل ہمیں یہاں دیے گئے دو اعداد کی حاصل ضرب معلوم کرنی ہے۔لیکن لوگرتھم کے استعمال سے اور سائنٹیفک کیلکیولیٹر کی مدد سے۔

اب مساوات $x = 8.573 \times 28.74$ کے دونوں طرف لوگرتھم لیتے ہیں۔

$$\log x = \log (8.573 \times 28.74)$$

لوگرتھم قوانین کے مطابق

$$\boxed{\log m\, n = \log m + \log n}$$

$$\log x = \log 8.573 + \log 28.74$$

اب سائنٹیفک کیلکیولیٹر کے ذریعے

$\log 8.573$ اور $\log 28.74$ کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔

$$\log 8.573 = 0.933132823$$
$$\log 28.74 = 1.458486764$$
$$\log x = 0.933132823 + 1.458486764$$
$$\log x = 2.391619587$$

اب مساوات کے دونوں طرف کا ضد لوگرتھم (Anti log) معلوم کرتے ہیں

$$x = \text{Anti log } 2.391619587$$

ضد لوگرتھم 2.391619587 کی قیمت معلو کرنے کے لیے سائنٹیفک کیلکیولیٹر کا استعمال کرنے سے:

$$x = 246.3880197$$
$$\text{or } x = 246.3880$$
$$\text{or } x = 246.4$$

پس دیے گئے دو اعداد کی حاصل ضرب ہے 246. 4

مثال 2. لوگرتھم کا استعمال کرتے ہوئے $n = \frac{(6.735)\,(48.27)}{(16.18)^2}$ حل کیجیے۔

پہلا طریقہ:۔ لوگرتھم جدول کا استعمال کرنے سے۔

حل: دیئے گئے عدد n کا لوگرتھم لیتے ہوئے $\log n = \frac{(6.735)\,(48.27)}{(16.18)^2}$

$$= \log (6.735)\,(48.27) - \log (16.18)^2$$
$$= \log 6.735 + \log 48.27 - 2 \log 16.18$$
$$= 0.8283 + 1.6836 - 2 \times 1.2090$$
$$= 2.5119 - 2.4180 = 0.0939$$

اب $n = \text{antilog } 0.0939$

پس $n = 1.242$

دوسرا طریقہ:۔ سائنٹیفک کیلکیو لیٹر استعمال کرنے سے

حل: فرض کیجیے۔

$$x = \frac{6.735 \times 48.27}{(16.18)^2}$$

اب مساوات کے دونوں اطراف کا لوگرتھم معلوم کرتے ہیں۔

یعنی $\log x = \log \frac{6.735 \times 48.27}{(16.18)^2}$

لوگرتھم قوانین کے مطابق

لوگرتھم قانون II: $\log \frac{m}{n} = \log M - \log n$

$$\log x = \log (6.735 \times 48.27) - \log (16.18)^2$$
$$\log x = \log 6.735 + \log 48.27 - 2 \log 16.18$$

اب سائنٹیفک کیلکیو لیٹر کے ذریعے $\log 6.735$، $\log 48.27$ اور $\log 16.18$ کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔

لوگرتھم قانون I: $\log mn = \log m + \log n$
لوگرتھم قانون III: $\log m^n = n \log m$

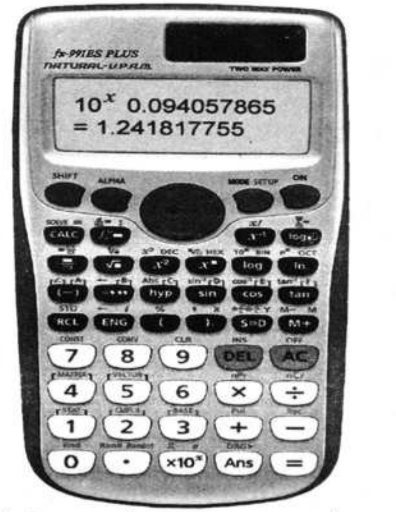
$\log 6.735 = 0.828\,3376$
$\log 48.27 = 1.683677299$
$\log 16.18 = 1.208978517$

اس طرح

$\log x = 0.8283376 + 1.683677299 - 2 \times 1.208978517$

$\log x = 2.512014899 - 2.417957034$

$\log x = 0.94057865$



اب مساوات کے دونوں اطراف کا ضدلوگرتھم معلوم کرتے ہیں۔

ضدلوگرتھم 0.94057865 کی قیمت معلوم کرنے کے لیے سائنٹفک کیلکیولیٹر کا استعمال کرتے ہیں۔

اس طرح

$x = 1.24\,1817755$

or $x = 1.2418$

or $x = 1.242$ پس دیئے گئے اظہار کی قیمت 1.242 حاصل ہوئی۔

مثال 3. 3^5 میں ہندسوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

حل: فرض $n = 3^5$

تو $\log n = \log 3^5$

$= 5 \log 3 = 5\,(0.4771)$

$= 2.3855$

پس $n = \text{antilog } 2.3855$

فصل 3.7 کے اصول I کے مطابق عدد میں ہندسوں کی تعداد، خاصہ اور 1 کے مجموعے کے برابر ہوتی ہے اس لیے 3^5 میں ہندسوں کی تعداد $2 + 1 = 3$ ہے۔

مشق 3.6

لوگرتھم کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

1. $(86)(0.45)$
2. $\dfrac{85.7 \times 2.47}{8.89}$
3. $\dfrac{0.87}{(28.9)(0.785)}$
4. $\dfrac{57.26}{\sqrt[3]{0.382}}$
5. $\dfrac{\sqrt{673.3}}{\sqrt[3]{58.4}}$
6. $(17.92)^{-\frac{1}{9}}$
7. $\dfrac{\sqrt{431.5} \times (1.2)^2}{\sqrt[3]{36.98}}$
8. $\dfrac{(780.6)^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{3.000}}{4.000}$
9. $\dfrac{(86.2)^2 \times (37.37)}{591}$
10. $\dfrac{(23.60)^{\frac{1}{2}} \times (8.719)^3}{\sqrt{693}}$

مندرجہ ذیل میں ہندسوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

11. 2^{12}
12. 3^{19}
13. 4^{75}
14. 9^{48}
15. 7^{56}

متفرق مشق III

.1 سائنسی ترقیم میں لکھیے:

(i) 4520 (ii) 26.517 (iii) 0.0023 (iv) 0.00001082 (v) 0.0130216

.2 عام صورت میں لکھیے:

(i) 7.21×10^3 (ii) 7.21×10^{-9} (iii) 5.012×10^6

.3 لوگرتھمی شکل میں لکھیے:

(i) $3^3 = 27$ (ii) $2^{-3} = \frac{1}{8}$ (iii) $7^{-2} = \frac{1}{49}$ (iv) $10^{-3} = 0.001$

.4 قیمت معلوم کیجیے:

(i) $\log_2 8$ (ii) $\log_3 81$ (iii) $\log_{125} 25$ (iv) $\log_9 729$ (v) $\log_4 64$

.5 a کی قیمت معلوم کیجیے:

(i) $\log_a 16 = 4$ (ii) $\log_a \frac{1}{27} = -\frac{3}{2}$ (iii) $\log_a 64 = 4$ (iv) $\log_a 125 = 5$

.6 مندرجہ ذیل کا لوگرتھم معلوم کیجیے:

(i) 165 (ii) 0.00347 (iii) 333.1 (iv) 6568 (v) 23.59

.7 مندرجہ ذیل کا ضد لوگرتھم معلوم کیجیے:

(i) 2.316 (ii) 0.0214 (iii) $\bar{1}.3161$ (iv) $\bar{2}.67$ (v) 1.6453

.8 قیمت معلوم کیجیے:

(i) $\log 24$ (ii) $\log 0.063$ (iii) $2\log(31.6)$ (iv) $\log(312)(450)$ (v) $\frac{\log 729}{\log 9}$