یونٹ 4

الجبری اظہاریے

4.1 متغیر اور مستقل

متغیر ایک علامت ہے جو کسی غیر خالی سیٹ کے ہر رُکن کو ظاہر کرتی ہے۔ دیئے ہوئے سیٹ کو متغیر کا حلقہ اثر (*Domain*) کہتے ہیں۔ اسکے ارکان کو انگریزی حرفِ تہجی کے چھوٹے حرف x، y، z وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مستقل ایک علامت ہے جو صرف ایک شے کو متعین کرتی ہے۔

مثال: اظہاریے $x + 5$ کی قیمت معلوم کیجیے اگر (i) $x = 4$ (ii) $x = 7$

حل: (i) $x + 5$ میں x کی جگہ اس کی قیمت 4 رکھنے پر

$$x + 5 = 4 + 5 = 9$$

(ii) اگر اسی اظہاریے میں x کی قیمت 7 ہو تو

$$x + 5 = 7 + 5 = 12$$

یوں اظہاریے $x + 5$ کی قیمت 9 ہے اگر $x = 4$ ہو اور 12 ہے اگر $x = 7$ ہو یعنی x کی مختلف قیمتیں رکھنے سے اظہاریے کی قیمت تبدیل ہوتی رہتی ہے۔ اس لیے اس اظہاریے میں x کو متغیر (*Variable*) کہا جاتا ہے اور 12,9,5 جو تبدیل نہیں ہوتے مستقل (*Constant*) کہلاتے ہیں۔

4.2 عددی سر

ایک مستقل عدد جو کسی متغیر سے ضرب دیا گیا ہو متغیر کا عددی سر (*Coefficient*) کہلاتا ہے پس رقم $5x^2$ میں x^2 کا عددی سر 5 ہے۔ $3x^2 - 4x$ میں x^2 کا عددی سر 3 اور x کا عددی سر -4 ہے۔

4.3 الجبری اظہاریے

مستقلات اور متغیرات کا ایسا مجموعہ جو بنیادی عوامل $(+, -, \times, \div)$ ، جذر اور قوت سے جوڑا گیا ہو الجبری اظہاریہ (*Algebric Expression*) کہلاتا ہے۔

پس $3a + 5b$ ، $4x^2 - \frac{2}{x} + 7$ ، $4a \times 3b$ ، اور $4x^2 + xy - y^2 \div 4$ الجبری اظہاریے ہیں۔

کسی الجبری اظہاریے کے مختلف حصے جو + یا − کی علامتوں سے مربوط کیے گئے ہوں اظہاریے کی رقوم (*Terms*) کہلاتی ہیں۔

الجبری اظہاریے $2x + 3y + 4z$ میں تین رقوم یعنی $2x$، $3y$ اور $4z$ ہیں۔

4.4 الجبری اظہاریے کی اقسام

الجبری اظہاریے تین اقسام کے ہوتے ہیں۔

(i) کثیر رقمی اظہاریے یا کثیر رقمی (ii) ناطق اظہاریے (iii) غیر ناطق اظہاریے

(i) کثیر رقمی اظہاریہ (*Polynomial*)

ایک متغیر x میں کثیر رقمی اظہاریے کو عموماً $P(x)$ سے ظاہر کرتے ہیں اور یہ ذیل کی قسم کا اظہاریہ ہوتا ہے۔

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \ \ldots \quad (1)$$

جبکہ n ایک مثبت صحیح عدد یا صفر ہو $a_n \neq 0$ اور عددی سر $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ حقیقی اعداد ہیں۔

اظہاریہ (1) کو ایک متغیر x میں n درجہ کی کثیر رقمی کہتے ہیں۔

(الف) جب $n = 0$ اور $a_0 \neq 0$ ، ہو تو $P(x) = a_0 n^0 = a_0$ (کیونکہ $x^0 = 1$)

معلوم ہوا کہ a_0 جو کہ ایک مستقل ہے۔ صفر درجہ کی کثیر رقمی ہے۔

(ب) اگر کسی کثیر رقمی میں تمام عددی سر صفر ہوں یعنی

$$P(x) = 0.x^n + 0.x^{n-1} + 0.x^{n-2} + \ldots + 0.x,$$

تو $P(x) = 0$ یعنی جو کہ مستقل کثیر رقمی ہے جس کے ساتھ کوئی خاص درجہ مربوط نہیں کیا جاتا۔

اگر کثیر رقمی (1) میں $n = 1,2,3$ درج کریں تو اس طرح ملنے والی کثیر رقمیاں یک درجی، دو درجی اور سہ درجی کثیر رقمیاں کہلاتی ہیں، مثلاً $7x - 4$, $3x^2 + 2x + 5$ اور $5x^3 - x^2 + 2x - 1$ بالترتیب ایک متغیر میں 1 ,2 اور 3 درجے کی کثیر رقمیاں ہیں۔

نوٹ: کسی کثیر رقمی کا درجہ اُس میں موجود ایسی غیر صفر رقم کا درجہ ہوتا ہے جس کا درجہ کثیر رقمی میں سب سے زیادہ ہو۔

دو متغیرات پر مشتمل کثیر رقمیاں

دو متغیرات x اور y میں کثیر رقمی کی ہر رقم اس شکل کی ہوتی ہے:

$$ax^m y^n \quad \ldots\ldots (2)$$

جبکہ n, m غیر منفی صحیح اعداد ہیں اور $a \neq 0$

مثلاً $4x^2 - 3y^3, ax^2y , ax^2y^3 + xy^2 - y - c$ دو متغیرات x اور y میں کثیر رقمیاں ہیں

واضح رہے کہ $x + \frac{1}{y}$ کثیر رقمی نہیں ہے کیونکہ اسے (2) کی شکل میں نہیں لکھا جاسکتا۔

(ii) ناطق اظہاریہ (Rational Expression)

ایسا اظہاریہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں لکھا ہو (جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں اور $q(x) \neq 0$) ناطق اظہاریہ کہلاتا ہے۔

مثلاً $\frac{x^2 + 1}{x}$ جبکہ $x \neq 0$ متغیر x میں ناطق اظہاریہ ہے۔ چونکہ ہر کثیر رقمی کو $\frac{p(x)}{1}$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے لہٰذا ہر کثیر رقمی ناطق اظہاریہ ہے مگر اس کا اُلٹ عموئی طور پر درست نہیں ہے۔

(iii) غیر ناطق اظہاریہ (Irrational Expression)

ایسا الجبری اظہاریہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں نہ لکھا جاسکے جبکہ $q(x) \neq 0$ اور $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں۔ غیر ناطق اظہاریہ کہلاتا ہے مثلاً $\sqrt{x}$ ، $\sqrt[3]{yz^2}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ غیر ناطق اظہاریے ہیں۔

4.5 کثیر رقمیوں کی جماعت بندی

کثیر رقمی اظہاریوں کی جماعت بندی بلحاظ رقوم کی جاسکتی ہے۔

(i) یک رقمی: ایسی کثیر رقمی جس میں ایک رقم ہو یک رقمی (Monomial) کہلاتی ہے۔

مثلاً $3x^2yz$, $5x^3y^4$ یک رقمیاں ہیں۔

(ii) دو رقمی: ایسی کثیر رقمی جس کی دو رقوم ہوں، دو رقمی (*Binomial*) کہلاتی ہے۔ مثلاً $3x - 4y$, $7x^3 - 7xy^2z^3$ دو رقمیاں ہیں۔

(iii) سہ رقمی: ایسی کثیر رقمی جس میں تین رقوم ہوں، سہ رقمی (*Trinomail*) کہلاتی ہے۔

$x^3 - 3xy - 4x^3z^5$, $3x - 7y + 3z$, $2x^2 + 5x - 2$ سہ رقمیاں ہیں۔

نوٹ: $10x^2y^3 + 20xy + 50$ ایک 5 درجی کثیر رقمی ہے کیونکہ $10x^2y^3$ سب سے زیادہ درجے والی رقم ہے۔

مشق 4.1

1. مندرجہ ذیل میں کثیر رقمی، ناطق اور غیر ناطق اظہاریے الگ کیجیے۔

(i) $3x - \frac{1}{3}$ **(ii)** 5 **(iii)** $\frac{4}{x}$ **(iv)** 0 **(v)** $x^2 + y - 3$

(vi) $\frac{1}{y} - y$ **(vii)** $\frac{1}{x^2 + 2}$ **(viii)** $\frac{\sqrt{1}}{4}$ **(ix)** $\sqrt[3]{(x-y)^2}$

2. مندرجہ ذیل میں کثیر رقمی اور غیر کثیر رقمی علیحدہ کیجیے۔ کثیر رقمی ہونے کی صورت میں متغیرات کی تعداد لکھیے۔

(i) $\frac{3-x}{x}$ **(ii)** $5xy^3$ **(iii)** $3xt^3 - 4xyt$ **(iv)** $16 - \frac{1}{x^2}$ **(v)** $x^4 - x^2 + 1$

(vi) $5^3 + \frac{4}{x}$ **(vii)** $x - 1$ **(viii)** $\frac{3}{4}xyz$ **(ix)** $x^2 + 2x + 1$

3. مندرجہ ذیل کثیر رقمیوں میں رقوم کے لحاظ سے ان کی قسمیں معلوم کیجیے۔

(i) $x - 3y$ **(ii)** $-\frac{1}{4} + 2x + 5$ **(iii)** $3x - \frac{1}{4}y - 5$ **(iv)** $x^2 + 7x + 3$

(v) $4x^2 - y$ **(vi)** x **(vii)** $\frac{4}{13}$ **(viii)** $(a-b)^2 - b^2$

4 مندرجہ ذیل کثیر رقمیوں کے درجے معلوم کیجیے۔

(i) $x + y^2$ **(ii)** $x^4y + y^2 + y^3$ **(iii)** 5^3 **(iv)** $x^2y^2 + y^2$ **(v)** $x^2y^2z^2$

(vi) $x + y + xy^2$ **(vii)** $x^6 + x^2y^5$ **(viii)** π **(ix)** $\sqrt[3]{(a^2-b)^3}$

4.6 الجبری اظہاریوں کی ترتیب

جب کسی ایک متغیر کے الجبری اظہاریے میں متغیر کے قوت نما، بائیں سے دائیں بتدریج کم ہوتے جائیں تو ایسا اظہاریہ ترتیب نزولی (*Descending Order*) میں کہلاتا ہے۔ مثلاً $x^4 - 5x^3 - x^2 + 1$ ترتیب نزولی میں ہے۔

جب کسی ایک متغیر کے الجبری اظہاریے میں متغیر کے قوت نما، بائیں سے دائیں بتدریج زیادہ ہوتے جاتے ہیں تو ایسا اظہاریہ ترتیب صعودی (*Ascending Order*) میں کہلاتا ہے۔ مثلاً $1 - x^2 - 5x^3 + x^4$ ترتیب صعودی میں ہے۔

نوٹ: الجبری اظہاریوں کی ضرورت کے مطابق ترتیب تبدیل کی جاسکتی ہے بشرطیکہ رقموں کے قوت نما اور علامت تبدیل نہ ہوں۔

مشق 4.2

.1 a کے لحاظ سے مندرجہ ذیل الجبری اظہاریوں کو ترتیب صعودی لکھیے۔

(i) $2a^3y + 4ay^2 - 5a^2y^3$ (ii) $3x^2 - ay^2 - 2a^4 + 4a^2z^2$

(iii) $x^2 + 4ay^2 - 5a^4 + 2a^2xy - 2a^3x^3$ (iv) $2 - 3x^3a + 4x^2a^3 - \frac{1}{4}a^5 + a^4z^6$

(v) $-\frac{1}{2}a - \frac{3}{7}a^4 + \frac{1}{3}xyz + \frac{2}{5}a^2$

.2 دیئے گئے متغیرات کے لحاظ سے مندرجہ ذیل الجبری اظہایوں کو ترتیب نزولی میں لکھیے۔

(i) $x^2 + x^3 - 2x - 1$ (ii) $y - 4y^2 - 7 + y^3 - 5y^5$

(iii) $\frac{3}{4} - t - \frac{2}{3}t^3 + t^6$ (iv) $z^5 + 2z - \frac{1}{3} + z^3$ (v) $4y^3 - 2y + 5y^4 + 7$

(vi) $y^4 + \frac{4}{y^2} + \frac{9}{y^4} + 4y - \frac{12}{y^3} + 6,$ $(y \neq 0)$

(vii) $x^2 - 10 - \frac{9}{x^2} + 4x + \frac{12}{x},$ $(x \neq 0)$

(viii) $4y^4 - 96 - 32y^2 - \frac{64}{y^4} - \frac{128}{y^2},$ $(y \neq 0)$

(ix) $\frac{1}{a^4} + \frac{4}{a^2} - 6 + 4a^2 + a^4,$ $(a \neq 0)$

(x) $9 - 4x^2 - \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^4} + 4x^4$ $(x \neq 0)$

4.7 الجبری اظہاریوں کی قیمت

اگر ہم کسی الجبری اظہاریے میں کسی متغیر کی جگہ کچھ متعین قیمتیں رکھ دیں تو مختصر کرنے کے بعد ہمیں ایک حقیقی عدد حاصل ہوگا جسے اس الجبری اظہاریہ کی قیمت کہتے ہیں۔

مثال1. اگر $x = 2$ تو $p(x) = 3x + 2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: $p(2) = 3(2) + 2 = 6 + 2 = 8$

مثال2. اگر $a = 2$, $b = -2$, اور $c = -1$ تو $a^2 - ab + 2c^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: دی ہوئی کثیر رقمی میں c, b, a کی قیمت رکھنے سے

$$a^2 - ab + 2c^2 = (2)^2 - (2)(-2) + 2(-1)^2$$
$$= 4 + 4 + 2 = 10$$

مشق 4.3

.1 مندرجہ ذیل الجبری اظہاریوں میں ہرایک کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $2x^2 - 3yz$ جبکہ $x = 2,\ y = -1,\ z = 3$

(ii) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 3$ جبکہ $x = 3$

(iii) $4a^2 - 3ab + bc$ جبکہ $a = 0, b = 4, c = 1$

(iv) $\dfrac{5xy + 3z}{2a^3 - c^2}$ جبکہ $x = 2,\ y = -1,\ z = 3,\ a = 4,\ c = \dfrac{1}{3}$

(v) $\dfrac{3x^2y}{z} - \dfrac{bc}{x+1}$ جبکہ $x = 2,\ y = -1,\ z = 3,\ b = 4,\ c = \dfrac{1}{3}$

(vi) $\dfrac{4x^2y(z-1)}{a + b - 3c}$ جبکہ $x = 2,\ y = -1,\ z = 3,\ a = 0,\ b = 4,\ c = \dfrac{1}{3}$

.2 اگر $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - x - 5$ ہو تو $p(-2)$ معلوم کیجیے۔

.3 اگر $q = \dfrac{pf}{p-6}$ تو q کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $p = 10$ ، $f = 30$

.4 اگر $s = \dfrac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$ تو s کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $a = 2, n = 5$ اور $d = 3$

.5 اگر $s = v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$ تو s کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $v_0 = 0$ ، $t = 4$ اور $a = 5$

4.8 الجبری اظہاریوں پر بنیادی عوامل

4.8.1 الجبری اظہاریوں کی جمع

الجبری اظہایوں کوجمع کرتے وقت ایک جیسی رقوم (*Like Terms*) کو خاصیت مبادلہ یا خاصیت تلازم یا ضرب کی خاصیت تقسیمی کا استعمال کرتے ہوئے یکجا کیا جاتا ہے اس عمل کو عمودی یا اُفقی کسی بھی طریقے سے کیا جاسکتا ہے۔

مثال: $2xy - 5x + 6y^3$ اور $3x - 2y^3 + 7xy, 7x + 3y^3 - 4xy$ کو جمع کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} 7x + 3y^3 - 4xy \\ 3x - 2y^3 + 7xy \\ -5x + 6y^3 + 2xy \\ \hline 5x + 7y^3 + 5xy \\ \hline \end{array}$$

مجموعہ: $5x + 7y^3 + 5xy$

4.8.2 الجبری اظہاریوں کی تفریق

الجبری اظہاریوں میں تفریق اس طرح کرتے ہیں کہ جس اظہاریے کو تفریق کرنا ہو اس کی رقموں کی علامت بدل کر دوسرے اظہاریے میں جمع کر دیتے ہیں۔

مثال 1. $2y^2 - 3yz + 5z^2$ کو $10y^2 - 2yz - 3z^2$ میں سے تفریق کیجیے۔

حل: اُفقی طریقہ

$$(10y^2 - 2yz - 3z^2) - (2y^2 - 3yz + 5z^2)$$
$$= 10y^2 - 2yz - 3z^2 - 2y^2 + 3yz - 5z^2$$
$$= 10y^2 - 2y^2 - 2yz + 3yz - 3z^2 - 5z^2$$
$$= (10 - 2)y^2 + (-2 + 3)yz + (-3 - 5)z^2$$
$$= 8y^2 + yz - 8z^2$$

عمودی طریقہ

$$\begin{array}{r} 10y^2 - 2yz - 3z^2 \\ \underset{-}{+} 2y^2 \underset{+}{-} 3yz \underset{-}{+} 5z^2 \\ \hline 8y^2 + yz - 8z^2 \\ \hline \end{array}$$

مثال 2. اگر $A = x^2 + y^2 - z^2$ ، $B = 3x^2 - 2y^2 + 5z^2$ اور $C = 3y^2 - 5x^2 - z^2$

تو $2A - 3B + 4C$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: B, A اور C کی قیمتیں $2A - 3B + 4C$ میں درج کرنے سے

$$2A - 3B + 4C = 2(x^2 + y^2 - z^2) - 3(3x^2 - 2y^2 + 5z^2) + 4(3y^2 - 5x^2 - z^2)$$
$$= 2x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 9x^2 + 6y^2 - 15z^2 + 12y^2 - 20x^2 - 4z^2$$
$$= 2x^2 - 9x^2 - 20x^2 + 2y^2 + 6y^2 + 12y^2 - 2z^2 - 15z^2 - 4z^2$$
$$= -27x^2 + 20y^2 - 21z^2$$

4.8.3 الجبری اظہاریوں کی ضرب

ضربی عمل میں قوانین قوت نما، اصول علامات اور مبادلی، تلازمی، ضرب کی جمع پر تقسیمی خصوصیات استعمال ہوتی ہیں۔ اس کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. $2a^4b, -3a^2b^3c$ اور $-4ab^4c^2$ کو ضرب دیجیے۔

حل: ایک جیسے متغیر کو یکجا کرتے ہوئے اور ضرب کی خاصیت تلازم اور قوانین قوت نما کا استعمال کرتے ہوئے:

$$\begin{aligned}(-3a^2b^3c)(2a^4b)(-4ab^4c^2) &= (-3\times 2\times -4)(a^2\times a^4\times a)(b^3\times b\times b^4)(c\times c^2)\\ &= 24a^{2+4+1}\,b^{3+1+4}\,c^{1+2}\\ &= 24a^7\,b^8\,c^3\end{aligned}$$

مثال 2: $x^2 - 3x - 9$ کو $x + 3$ سے ضرب دیجیے۔

حل: **افقی طریقہ** x کے قوت نماؤں کو ترتیب نزولی میں ترتیب دینے سے

$$\begin{aligned}&(x^2-3x-9)(x+3)\\ &= x^2(x+3) - 3x(x+3) - 9(x+3)\\ &= x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 9x - 9x - 27\\ &= x^3 - 18x - 27\end{aligned}$$

عمودی طریقہ

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x - 9 \\ x + 3 \\ \hline x^3 - 3x^2 - 9x \qquad \\ + 3x^2 - 9x - 27 \\ \hline x^3 \qquad\quad - 18x - 27 \end{array}$$

4.8.4 الجبری اظہاریوں کی تقسیم

اِس عمل کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. $2x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 2$ کو $x^2 - 3x + 2$ سے تقسیم کیجیے۔

حل: پہلے x کے لحاظ سے کثیر رقمیوں کو ترتیب نزولی میں لکھیے اور عملِ تقسیم کو ذیل میں ملاحظہ کیجیے۔

$$\begin{array}{r l} & 2x^2 + 3x + 6 \\ x^2 - 3x + 2 \,\big) & 2x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 2 \\ & \underline{\mp 2x^4 \pm 6x^3 \mp 4x^2} \\ & 3x^3 - 3x^2 + x - 2 \\ & \underline{\mp 3x^3 \pm 9x^2 \mp 6x} \\ & 6x^2 - 5x - 2 \\ & \underline{\mp 6x^2 \pm 18x \mp 12} \\ & 13x - 14 \end{array}$$

پس حاصل تقسیم یا خارج قیمت $= 2x^2 + 3x + 6$

اور باقی $= 13x - 14$

مثال 2. $6x^3 + 13x^2 + 4x + 20$ میں کیا جمع کیا جائے کہ $x^2 + 2$ سے پورا پورا تقسیم ہو جائے؟

حل:

$$\begin{array}{r|l} & 6x + 13 \\ x^2 + 2 & 6x^3 + 13x^2 + 4x + 20 \\ & \underline{\pm 6x^3 \quad \pm 12x} \\ & 13x^2 - 8x + 20 \\ & \underline{\pm 13x^2 \quad \pm 26} \\ & -8x - 6 \end{array}$$

چونکہ باقی صفر نہیں ہے لہٰذا مکمل تقسیم کے لیے اگر $8x + 6$ کو دیے ہوئے اظہاریے میں جمع کر دیا جائے تو صفر باقی بچے گا۔

باقی $= (-8x - 6) + (8x + 6)$

$= -8x + 8x - 6 + 6$

$= 0$

مشق 4.4

1. جمع کیجیے:

(i) $a^2 - ab + 2bc + 3c^2$, $2ab + b^2 - 3bc - 4c^2$ اور $ab - 4bc + c^2 - a^2$

(ii) $4x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 2$, $2x - y^2 + 3x^2 - 4y + 3$ اور $-6x^2 - 2y^2 - 1$

(iii) $5a^2 - 7ab + 3b^2 + 8$, $-4b^2 - 3ab - 2a^2 - 3$ اور $-a^2 - b^2 + 6ab - 7$

2. تفریق کیجیے:

(i) $4x^5 + 3x^3 + x^4 - 6x^2$ کو $6x^2 - 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6$ میں سے

(ii) $a^4 - 7a^3b + 6a^2b^2 + 5ab^3 + 6b^4$ کو $5ab^3 + 6b^4 - a^4 + 7a^3b - 8a^2b^2 + 7$ میں سے

(iii) $7x - 8y + 4z - 5t$ کو $x^2 + y^2 + z^2 - 7x + 8y - 5z + 5t$ میں سے

.3 $P + Q + R$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $P = a^4 - 3a^3b + 4a^2b^2 - 5b^3$,
$Q = 3a^4 - 4ab^3 + 7a^3b - 2a^2b^2$ اور $R = 2a^2b^2 - 2a^3b - 6a^4 + 3ab^3$

.4 $3X - 4Y - 2Z$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $X = 3x^3 - 7x^2 - 9x + 7$, $Y = 12x^3 + 3x^2 - 13x + 1$ اور
$Z = 6x^3 - 5x^2 - 6x + 4$

.5 دوالجبری اظہاریوں کا مجموعہ $3x^3 + 3x + 7y + 4xy$ ہے اگر ایک الجبری اظہاریہ $4xy - 3x^3$ ہو تو دوسرا معلوم کیجیے۔

.6 دو الجبری اظہاریوں کا مجموعہ $4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - a$ ہے اگر ان میں سے ایک $2x^4 + x^3 - x^2 + 2a$ ہو تو دوسرا معلوم کیجیے۔

.7 حاصل معلوم کیجیے۔

(i) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)$ **(ii)** $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

(iii) $(x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$

.8 عملِ تقسیم کیجیے۔

(i) $(5x^2 - 16xy + 3y^2) \div (x - 3y)$ **(ii)** $(x^3 - 19x - 30) \div (x^2 - 3x - 10)$

(iii) $(a^4 - 3a^2b^2 + b^4) \div (a^2 - ab - b^2)$

.9 $2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1$ میں سے کیا تفریق کیا جائے کہ یہ $(x - 2)$ سے پورا پورا تقسیم ہو سکے؟

.10 اگر دو اظہاریوں کا حاصل ضرب $12x^4 - 34x^3 + 37x^2 - 17x + 5$ ہو اور ایک اظہاریہ $3x^2 - 7x + 5$ ہو تو دوسرا معلوم کیجیے؟

.11 a کی کس قیمت کے لئے $2a^4 + 3a^3 - 4a^2 + 14a + 11$ اظہاریہ $a^2 - 2a + 3$ سے پورا پورا تقسیم ہو جائے گا؟

.12 $x^3 + x^2 - 14x - k$ میں k کی کیا قیمت ہو کہ یہ $x + 2$ سے پورا پورا تقسیم ہو جائے؟

4.9 مسئلہ باقی (Remainder Theorem)

مسئلہ باقی ذیل میں بیان کیا جاتا ہے:

اگر کثیر رقمی $p(x)$ جس کا درجہ n جبکہ $(n \geq 1)$ ہو، کو یک درجی کثیر رقمی $x - a$ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو باقی $r = p(a)$ حاصل ہوتا ہے۔

ثبوت: تقسیم کی تعریف کے لحاظ سے اگر $p(x)$ کو کسی کثیر رقتی $d(x)$ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت $q(x)$ اور باقی $r(x)$ حاصل ہوتا ہے تو

(a) $p(x) = d(x)\ q(x) + r(x)$ اور

(b) $r(x)$ کا درجہ $d(x)$ کے درجہ سے کم ہوتا ہے۔

چونکہ مقسوم علیہ $(x - a)$ ہے جس کا درجہ 1 ہے اس لیے باقی کا درجہ یقیناً صفر ہوگا یعنی کوئی مستقل ہوگا اس لیے

$$p(x) = (x - a)\ q(x) + r \quad (\text{جبکہ } r \text{ مستقل ہے}) \quad \ldots \quad (1)$$

چونکہ (1) ایک تطبیق (Identity) ہے اس لیے x کی ہر قیمت کے لیے صحیح ہے۔ اسطرح بالخصوص $x = a$ کے لیے بھی صحیح ہے۔

چنانچہ (1) میں $x = a$ رکھنے پر $p(a) = (a - a)\ q(x) + r$

$$\Rightarrow p(a) = 0.q\ (x) + r = r,$$

اور یہی ثابت کرنا تھا۔

خاص نکات:

(1) اگر $r = 0$ تو $(x - a)$ جز و ضربی یا عاد ہے $p(x)$ کا کیونکہ

$$p(x) = (x - a)\ q\ (x)$$

اس طرح ہمیں ذیل میں مسئلہ باقی سے ایک نتیجہ اور ملتا ہے۔

(2) اگر $(x - a)$ جز و ضربی یا عاد ہے $p(x)$ کا تو $p(x) = 0$ کی اصل (root) a, ہے اور اس کا معکوس بھی صحیح ہے۔

(3) اگر $p(x)$ کثیر رقتی ہو اور a حقیقی عدد ہو جبکہ $p(a) = 0$ تو a ، کثیر رقتی مساوات $p(x) = 0$ کا حل یا اصل (Root) ہے۔

مثال 1. اگر $x^4 - x^3 - 9x + 5$ کو $x - 1$ سے تقسیم کیا جائے تو عمل تقسیم کے بغیر باقی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے۔

$$p(x) = x^4 - x^3 - 9x + 5$$

$$p(1) = (1)^4 - (1)^3 - 9(1) + 5 \quad (\because a = 1)$$

$$= 1 - 1 - 9 + 5 = -4$$

پس باقی $= -4$

مثال 2. ثابت کیجیے کہ اگر $x^3 + 4x^2 - 7x - 3$ کو $(x - 2)$ سے تقسیم کیا جائے تو 7 باقی حاصل ہوتا ہے۔

حل:

$$p(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 3$$

$$p(2) = (2)^3 + 4(2)^2 - 7(2) - 3$$

$$= 8 + 16 - 14 - 3 = 7$$

پس باقی = 7

مثال 3. ثابت کیجیے کہ اگر $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ کی اصل 2 ہے۔

حل: ہمارے علم میں ہے کہ حقیقی عدد a کثیر رقمی مساوات $p(x) = 0$ کا اصل ہے یعنی $p(a) = 0$

فرض کیجیے $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

تو $p(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6$

$= 8 - 24 + 22 - 6$

$= 0$

پس $p(x) = 0$ کی ایک اصل 2 ہے۔

نوٹ: $x + 2$ کو $x-(-2)$ لکھا جاسکتا ہے اس لیے $x - a$ کی شکل میں $a = -2$ ہے۔

مشق 4.5

.1 مسئلہ باقی کی مدد سے باقی معلوم کیجیے جبکہ

(i) $x^3 - 2x^2 + x - 3$ کو $x - 2$ سے تقسیم کیا جائے۔

(ii) $x^3 + x - 1$ کو $x + 1$ سے تقسیم کیا جائے۔

(iii) $x4 - 2x^2 + 3x + 3$ کو $x - 3$ سے تقسیم کیا جائے۔

.2 مسئلہ جزوضربی کی مدد سے فیصلہ کیجیے کہ مندرجہ ذیل بیانات صحیح یا غلط ہیں؟

(i) $2x^3 - 6x^2 - 5x + 15$ کا عاد یا جز ضربی $x - 3$ ہے۔

(ii) $3x^3 - x^2 - 22x + 24$ کا جزو ضربی $x + 3$ ہے۔

(iii) $x^4 - 16$ کا جزو ضربی $x - 2$ ہے۔

(iv) $x^3 - 8$ کا جزو ضربی $x + 2$ ہے۔

.3 ثابت کیجیے:

(i) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ کی اصل 2 ہے۔

(ii) $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$ کی اصل 3 ہے۔

4.10 کلیات اوران کا استعمال

الجبری اظہاریوں کو مختصر کرنے یا اجزائے ضربی بنانے میں کلیات مددگار ثابت ہوتے ہیں آٹھویں جماعت میں ہم مندرجہ ذیل کلیات حقیقی اعداد a , b اور c کے لیے سیکھ چکے ہیں۔

کلیہ .1	$a(c + d) = ac + ad$
کلیہ .2	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
کلیہ .3	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
کلیہ .4	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
کلیہ .5	$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

مثال 1. $(4x - 5y)(4x + 5y)(16x^2 + 25y^2)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل:

$$(4x - 5y)(4x + 5y)(16x^2 + 25y^2) = [(4x - 5y)(4x + 5y)](16x^2 + 25y^2)$$

$$= [(4x)^2 - (5y)^2](16x^2 + 25y^2)$$

$$= (16x^2 - 25y^2)(16x^2 + 25y^2)$$

$$= (16x^2)^2 - (25y^2)^2$$

$$= 256x^4 - 625y^4$$

مثال 2. ثابت کیجیے $(x+y-z-t)(x+y+z+t) = x^2+y^2-z^2-t^2+2xy-2zt$

حل:

$$(x+y-z-t)(x+y+z+t) = [(x+y)-(z+t)]\,[(x+y)+(z+t)]$$
$$= (x+y)^2-(z+t)^2$$
$$= (x^2+2xy+y^2)-(z^2+2zt+t^2)$$
$$= x^2+y^2-z^2-t^2+2xy-2zt$$

مشق 4.6

مندرجہ ذیل کا حاصل ضرب معلوم کیجیے:

1. $(abc-d^2)(abc+d^2)(a^2b^2c^2+d^4)$ **2.** $(x+y+z)(x+y-z)$

3. $(2-x^3)(2+x^3)(4+x^6)(16+x^{12})$ **4.** $(a+b-c+d)(a+b+c-d)$

5. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2)$

مناسب کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے:

6. $(107)^2$ **7.** (67×67) **8.** (1104×1104)

9. $(98)^2$ **10.** 989×989

کلیہ 6. $\boxed{(a+b)^2=(a-b)^2+4ab}$

پڑتال:

$$\text{R.H.S.} = (a-b)^2+4ab$$
$$= a^2-2ab+b^2+4ab$$
$$= a^2+2ab+b^2$$
$$= (a+b)^2 = \text{L.H.S.}$$

کلیہ 7. $\boxed{(a-b)^2=(a+b)^2-4ab}$

پڑتال:

$$\text{R.H.S.} = (a+b)^2-4ab$$
$$= a^2+2ab+b^2-4ab$$
$$= a^2-2ab+b^2$$
$$= (a-b)^2 = \text{L.H.S.}$$

کلیہ 8. $\boxed{(a+b)^2-(a-b)^2=4ab}$

پڑتال:
$$\text{L.H.S.}=(a+b)^2-(a-b)^2$$
$$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^3)$$
$$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$$
$$=4ab=\text{R.H.S.}$$

کلیہ 9. $\boxed{(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)}$

پڑتال:
$$\text{L.H.S.}=(a+b)^2+(a-b)^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2$$
$$=2a^2+2b^2$$
$$=2(a^2+b^2)=R.H.S.$$

مثال 1. اگر $x-\frac{1}{x}=2$ تو (i) $x^2+\frac{1}{x^2}$ اور (ii) $x^4+\frac{1}{x^4}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

(i) $x^2+\frac{1}{x^2}$

کیونکہ $x-\frac{1}{x}=2$

دونوں طرف مربع لینے سے

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(2)^2$$
$$\Rightarrow x^2-2+\frac{1}{x^2}=4$$
$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=4+2=6$$

(ii) $x^4+\frac{1}{x^4}$

کیونکہ $x^2+\frac{1}{x^2}=6$

دونوں طرف مربع لینے سے

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=(6)^2$$
$$\Rightarrow x^4+2+\frac{1}{x^4}=36$$
$$\Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=36-2=34$$

مثال 2. اگر $a+b=5$, $ab=3$ تو a^2+b^2 کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:
$$a+b=5$$
دونوں طرف مربع لینے سے $(a+b)^2=(5)^2$

یا $a^2+2ab+b^2=25$

یا $a^2+2(3)+b^2=25 \quad (\because ab=3)$

یا $a^2+b^2=25-6=19$

مثال 3. اگر $a+b=5$ اور $a-b=3$ تو مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) a^2+b^2 **(ii)** $4ab$ **(iii)** $16\,ab(a^2+b^2)$

حل: **(i)** a^2+b^2 کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم مندرجہ ذیل کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2\,(a^2+b^2)$$

$a+b$ اور $a-b$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$2(a^2+b^2)=(5)^2+(3)^2=25+9=34$$

یا $(a^2+b^2)=\frac{34}{2}=17$

(ii) $4ab$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے مندرجہ ذیل کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

$a+b$ اور $a-b$ کی قیمتیں رکھنے سے

$$4ab=(5)^2-(3)^2=25-9$$

یا $4ab=16$

(iii) $16ab(a^2+b^2)$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم مندرجہ ذیل کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$16ab\,(a^2+b^2)=4(4ab)\,(a^2+b^2)$$

(i) اور **(ii)** سے a^2+b^2 اور $4ab$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$16ab\,(a^2+b^2)=4\,(16)\,(17)$$

یا $16ab(a^2+b^2)=1088$

مثال 4. اگر $a+b=7$ اور $ab=11$ تو $a-b$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ: $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

یا $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$

یا $(a-b)^2=(a+b)^2-4\,ab$

$a+b$ اور ab کی قیمتیں درج کرنے سے

$$(a-b)^2=(7)^2-4\,(11)=49-44=5$$

دونوں اطراف کا جذر المربع لینے سے $(a-b)=\pm\sqrt{5}$

مشق 4.7

.1 $a^2 + b^2$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ

(i) $a + b = 4, \quad ab = 3$
(ii) $a - b = 7, \quad ab = 13$
(iii) $a - b = 5, \quad a + b = -9$
(iv) $a + b = -8, \quad a - b = -6$

.2 $4ab$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ

(i) $a + b = 9$ اور $a - b = -5$
(ii) $a - b = 8$ اور $a + b = -7$

.3 $8ab(a^2 + b^2)$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ

(i) $a + b = -5$ اور $a - b = 5$
(ii) $a - b = 6$ اور $a + b = 4$

.4 $x - y$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ

(i) $xy = 20$ اور $x + y = -9$
(ii) $xy = 10$ اور $x + y = 7$

.5 مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ جبکہ $x + \frac{1}{x} = 3 + \sqrt{2}$

(ii) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ جبکہ $x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$

(iii) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ جبکہ $x + \frac{1}{x} = 3$

(iv) $x^4 + \frac{1}{x^4}$ جبکہ $x + \frac{1}{x} = 7$

(v) $x^4 + \frac{1}{x^4}$ جبکہ $x + \frac{1}{x} = 3$

کلیہ 10. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

پڑتال:

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c)$$

$$= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c)$$

$$= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2$$

یا $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = \text{R.H.S}$

مثال 1. $(2a + 4b - 3c)^2$ کو کھولیے۔

حل: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ کا استعمال کرتے ہوئے:

$$(2a + 4b - 3c)^2 = (2a)^2 + (4b)^2 + (-3c)^2 + 2(2a)(4b) + 2(4b)(-3c) + 2(-3c)(2a)$$

$$= 4a^2 + 16b^2 + 9c^2 + 16ab - 24bc - 12ca$$

مثال 2. $(x - 2y - 3z)^2$ کو کھولیے۔

حل: $(x - 2y - 3z)^2 = (x)^2 + (-2y)^2 + (-3z)^2 + 2(x)(-2y) + 2(-2y)(-3z) + 2(-3z)(x)$

$$= x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 12yz - 6zx$$

مثال 3. اگر $a + b + c = 8$ اور $ab + bc + ca = 17$ تو $a^2 + b^2 + c^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: $a + b + c = 8$ دونوں اطراف مربع لینے سے

$$(a + b + c)^2 = (8)^2$$

یا $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 64$

یا $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 64$

یا $a^2 + b^2 + c^2 = 64 - 2(ab + bc + ca)$

$= 64 - 2(17) \quad (\because ab + bc + ca = 17)$

$= 64 - 34$

یا $a^2 + b^2 + c^2 = 30$

مثال 4. اگر $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ اور $ab + bc + ca = 11$ تو $a + b + c$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$a^2 + b^2 + c^2$ اور $ab + bc + ca$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$(a + b + c)^2 = 14 + 2(11) = 14 + 22 = 36$$

$$a + b + c = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$

مشق 4.8

.1 مندرجہ ذیل کو کھولیے:

(i) $(x + 3y + 2z)^2$ **(ii)** $(4x - 3y + 5z)^2$

(iii) $(7x - 2y - 3z)^2$ **(iv)** $(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b + \frac{3}{4})^2$

.2 مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $p^2 + q^2 + r^2$ جبکہ $p + q + r = \sqrt{7}$ اور $pq + qr + rp = 2$

(ii) $a^2 + b^2 + c^2$ جبکہ $a + b + c = \frac{5}{3}$ اور $ab + bc + ca = -\frac{1}{9}$

(iii) $x^2 + y^2 + z^2$ جبکہ $x + y + z = 12$ اور $xy + yz + zx = 17$

(iv) $pq + qr + rp$ جبکہ $p + q + r = \sqrt{17}$ اور $p^2 + q^2 + r^2 = 9$

(v) $xy + yz + zx$ جبکہ $x + y + z = 9$ اور $x^2 + y^2 + z^2 = 81$

(vi) $ab + bc + ca$ جبکہ $a + b + c = 13$ اور $a^2 + b^2 + c^2 = 69$

کلیہ .11 $\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)}$

پڑتال:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2\\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2\\ &= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)\end{aligned}$$

کلیہ .12 $\boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)}$

پڑتال:

$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= (a - b)(a - b)^2\\ &= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)\\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3\\ &= a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2\\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)\end{aligned}$$

مثال 1. $(3x + 5y)$ کا مکعب معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(3x + 5y)^3 = (3x)^3 + (5y)^3 + 3(3x)(5y)(3x + 5y)$$

$$= 27x^3 + 125y^3 + 45xy(3x + 5y)$$

$$= 27x^3 + 125y^3 + 135x^2y + 225xy^2$$

مثال 2. $2x - 7y$ کا مکعب معلوم کیجیے۔

حل:

$$(2x - 7y)^3 = (2x)^3 - (7y)^3 - 3(2x)(7y)(2x - 7y)$$

$$= 8x^3 - 343y^3 - 42xy(2x - 7y)$$

$$= 8x^3 - 343y^3 - 84x^2y + 294xy^2$$

مثال 3. $x^3 + y^3$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $x + y = 4$ اور $xy = 5$

حل:

$$x + y = 4$$

دونوں اطراف کا مکعب لینے سے

$$(x + y)^3 = (4)^3$$

یا $x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 64$

$x + y$ اور xy کی قیمتیں درج کرنے سے

$$x^3 + y^3 + 3(5)(4) = 64$$

یا $x^3 + y^3 = 64 - 60 = 4$

مثال 4. $27x^3 - \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $3x - \frac{1}{x} = 2$

حل:

$$3x - \frac{1}{x} = 2$$

دونوں اطراف کا مکعب لینے سے

$$(3x - \frac{1}{x})^3 = (2)^3$$

یا $(3x)^3 - (\frac{1}{x})^3 - 3(3x)(\frac{1}{x})(3x - \frac{1}{x}) = 8$

یا $27x^3 - \frac{1}{x^3} - 9(2) = 8 \quad (\because 3x - \frac{1}{x} = 2)$

یا $27x^3 - \frac{1}{x^3} = 8 + 18 = 26$

مشق 4.9

.1 مندرجہ ذیل کا مکعب معلوم کیجیے۔

(i) $3x+4$ (ii) $5x+2y$ (iii) $4a+3b$

(iv) $x-\frac{1}{x}$ (v) $3x-\frac{1}{3y}$ (vi) $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$

.2 مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) x^3+y^3 جبکہ $x+y=-5$ اور $xy=8$

(ii) x^3-y^3 جبکہ $x-y=6$ اور $xy=10$

(iii) y^3-z^3 جبکہ $y-z=4$ اور $yz=-5$

(iv) $b^3+\frac{1}{b^3}$ جبکہ $b+\frac{1}{b}=3$ (v) $x^3-\frac{1}{x^3}$ جبکہ $x-\frac{1}{x}=4$

(vi) $8x^3-\frac{1}{27x^3}$ جبکہ $2x-\frac{1}{3x}=5$ (vii) $a^3+\frac{1}{8a^3}$ جبکہ $a+\frac{1}{2a}=6$

.3 اگر $x-y=2\sqrt{2}$ تو ثابت کیجیے: $x^3-y^3-6\sqrt{2}\,xy=16\sqrt{2}$

.4 اگر $a+b=4$ تو ثابت کیجیے: $a^3+b^3+12\,ab=64$

.5 اگر $a+\frac{1}{a}=2$ تو ثابت کیجیے: $a^2+\frac{1}{a^2}=a^4+\frac{1}{a^4}=a^3+\frac{1}{a^3}$

کلیہ .13 $\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

پڑتال:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$

$$=a^3+b^3$$

اس کلیہ کو دو مکعبوں کے مجموعے کا کلیہ کہتے ہیں۔

کلیہ .14 $\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

پڑتال:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$$

$$=a^3-b^3$$

اس کلیہ کو دو مکعبوں کے فرق کا کلیہ کہتے ہیں۔

مثال 1. عمل ضرب کے بغیر $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ کا استعمال کرتے ہوئے

$$(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)=(2a-3b)[(2a)^2+(2a)(3b)+(3b)^2]$$
$$=(2a)^3-(3b)^3$$
$$=8a^3-27b^3$$

مثال 2. مختصر کیجیے: $(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$

حل: $(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$

$$=(x+2)[(x)^2-(x)(2)+(2)^2](x-2)[(x)^2+(x)(2)+(2)^2]$$
$$=[(x)^3+(2)^3][(x)^3-(2)^3]$$
$$=(x^3+8)(x^3-8)$$
$$=(x^3)^2-(8)^2$$
$$=x^6-64$$

کلیہ 15. $$\boxed{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc}$$

اس کلیہ کی پڑتال $a+b+c$ کی $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ سے عام ضرب کرنے سے کی جاسکتی ہے

مثال 1. عمل ضرب کے بغیر $(3a-2b-c)(9a^2+4b^2+c^2+6ab-2bc+3ca)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل: کلیے کے مطابق ترتیب دیتے ہوئے:

$$(3a-2b-c)\{(3a)^2+(-2b)^2+(-c)^2-(3a)(-2b)-(-2b)(-c)-(-c)(3a)\}$$
$$=(3a)^3+(-2b)^3+(-c)^3-3(3a)(-2b)(-c)$$
$$=27a^3-8b^3-c^3-18abc$$

مثال 2. $a^3+b^3+c^3-3abc$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $a^2+b^2+c^2=88$ اور $a+b+c=10$

حل: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a^2 + b^2 + c^2$ اور $a + b + c$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (10)\ \{88 - (ab + bc + ca)\} \quad \ldots \text{(i)}$$

اب ہم $ab + bc + ca$ کی قیمت معلوم کریں گے۔

$$\because \quad a + b + c = 10$$

$$(a + b + c)^2 = (10)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 100$$

$$\Rightarrow 88 + 2\,(ab + bc + ca) = 100 \quad (\because a^2 + b^2 + c^2 = 88)$$

$$\Rightarrow 2(ab + bc + ca) = 100 - 88 = 12$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = \frac{12}{2} = 6$$

اب $ab + bc + ca$ کی قیمت (i) میں درج کرنے سے

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 10\,(88 - 6) = 10\,(82) = 820$$

مشق 4.10

کلیات کی مدد سے مختصر کیجیے:

.i $(y + \frac{1}{y})(y^2 - 1 + \frac{1}{y^2})$ .2 $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)$

کلیات کی مدد سے ثابت کیجیے:

.3 $(a + 2)(a - 2)(a^2 - 2a + 4)(a^2 + 2a + 4) = a^6 - 64$

.4 $(3x + 2y)(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)(9x^2 - 6xy + 4y^2) = 729x^6 - 64y^6$

کلیات کی مدد سے حاصل ضرب معلوم کیجیے:

.5 $(l + m - 2n)\ (l^2 + m^2 + 4n^2 - lm + 2mn + 2nl)$

.6 $(2x - 3y - 4y)\ (4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 6xy - 12yz + 8zx)$

$l^3 + m^3 + n^3 - 3lmn$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ

.7 $l + m + n = 15$ اور $lm + mn + nl = 74$

.8 $l + m + n = 4$ اور $lm + mn + nl = 7$

.9 $l^2 + m^2 + n^2 = 3$ اور $l + m + n = 7$

متفرق مشق IV

1. مندرجہ ذیل میں سے کثیر رقمی، ناطق اور غیر ناطق اظہاریے علیحدہ علیحدہ کیجیے۔

(i) $x+\sqrt{3}$ (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ (iii) $\frac{a+b}{3}$ (iv) $y+\frac{1}{\sqrt{y}}$

(v) x^2-xy-y^2 (vi) $\frac{1}{p}-p$ (vii) $\frac{1}{2}$ (viii) π

2. مندرجہ ذیل میں متغیرات کی تعداد لکھیے۔

(a) $x^2+y^2-2^2$ (b) $x+xy+2$ (c) $xyz+x-2$

(d) $a^2+b^2+c^2$ (e) $\frac{1}{x}+x$ (f) $\frac{\pi}{xyz}$

3. مندرجہ ذیل میں متغیرات کے عددی سر اور مستقل رقم لکھیے۔

(a) $x+y-\frac{1}{2}$ (b) $6-3x-\frac{1}{2}y-3y^2$

(c) $\frac{1}{4}x^2-\sqrt{3}\,y+2z^2-1$ (d) $2xyz-k$

4. مندرجہ ذیل کثیر رقمیوں کا درجہ معلوم کیجیے۔

(a) $x+y^{\frac{1}{2}}+z$ (b) xy^2+2 (c) $x+xyz-4$

(d) 2 (e) $t^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}.y^{\frac{3}{2}}.z^{\frac{1}{2}}+1$ (f) $x+5^3$

5. مندرجہ ذیل اظہاریوں کی قیمت معلوم کیجیے:

(i) x^2-xy+y^2 جبکہ $x=-2\,,\ y=2$;

(ii) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a+b}$ جبکہ $a=0\,,\ b=-2$;

(iii) $6-3x-\frac{1}{3}y-3y^2$ جبکہ $x=1\,,\ y=3$;

(iv) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ جبکہ $a=2\,,\ b=3$;

6. a کی کس قیمت کے لیے $9x^3-6x^2+3x-a$ کو x^2-2x+3 پورا پورا تقسیم کرے گا؟

7. مندرجہ ذیل کو مکمل کیجیے:

(i) $(7a+5)(7a-5) = -----$ (ii) $(a+3b)^2 = a^2+6ab+-----$

(iii) $(3a-2b)^2 = 9a^2 ----- +4b$ (iv) $(3a^3+b^3)^3 = -----$

(v) $(p-q)^3 = p^3 ---- + ---- q^3$ (vi) $(2a^2-5y^2-3z^2)^2 = -----$

(vii) $(x+2)(x+5) = x^2 + --- + 10$ (viii) $(2l+3m^2)^2-(2l-3m^2)^2 = -----$

8. اگر $x-\frac{1}{x}=3$ تو $x^2+\frac{1}{x^2}$ اور $x^4+\frac{1}{x^4}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

9. $8ab(a^2+b^2)$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $a+b=15$ اور $a-b=-5$

10. $(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y-\frac{3}{2}z)^2$ کو کھولیے۔

11. c^3+d^3 کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $c+d=-4$ اور $cd=-5$

12. مندرجہ ذیل بیانات کو غور سے پڑھیے اور درست جواب کو منتخب کیجیے۔

(i) کثیر رقمی x^2+7x+3 بلحاظ رقوم ———— کہلاتا ہے۔

(a) دو رقمی (b) سہ رقمی (c) یک رقمی (d) اِن میں سے کوئی نہیں

(ii) کثیر رقمی x^2+xy^2+y کا درجہ ——— ہے۔

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 1

(iii) الجبری اظہاریہ $2a^3y+4ay^2-5a^2y^3$ بلحاظ y ترتیب نزولی میں ———— ہے۔

(a) $-5a^2y^3+4a^2y+2a^3y$ (b) $4ay^2-5a^2y^3+2a^3y$

(c) $2a^3y-5a^2y^3+4ay^2$ (d) $2a^3y+4ay^2-5a^2y^3$

(iv) اگر $x=1$ اور $y=1$ تو $x-y+xy$ کی قیمت ——— ہے۔

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) -1

(v) $x^3 + 4x^2 - 7x + 3$ کو $x - 1$ سے تقسیم کرنے سے باقی ---------- حاصل ہوتا ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) -1

(vi) $(a - b + c)^2 =$ ---------

(a) $a^2 - b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$ (b) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

(c) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc + 2ca$ (d) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

(vii) $(x - 6)(x - 4) =$ ---------

(a) $x^2 - 10x - 24$ (b) $x^2 + 10x - 24$ (c) $x^2 - 24x + 24$ (d) $x^2 - 10x + 24$

(viii) اگر $a + b = 2$ اور $a - b = 2$ تو $a^2 + b^2$ کی قیمت ------- ہے۔

(a) 2 (b) $\frac{3}{2}$ (c) -1 (d) 4

(ix) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) =$ ---------

(a) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ (b) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ (c) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ (d) $x - y$

(x) $(x - y)^3 =$ ---------

(a) $x^3 - y^3 - 3xy$ (b) $x^3 + y^3 - 3xy$ (c) $x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ (d) $x^3 - y^3 + 3x^2y - 3xy^2$