یونٹ 5

عملِ تجزی، عادِ اعظم، ذُو اضعاف اقل اَلجبری کسور اور جذرالمرُبع

5.1 اعادہ

گذشتہ جماعتوں میں ہم مندرجہ ذیل کلیات پڑھ چکے ہیں۔

1. $Ka + Kb + Kc \;=\; K(a+b+c) \;=\; (a+b+c)K$
2. $a^2 \pm 2ab + b \;=\; (a \pm b)^2$
3. $a^2 - b^2 \;=\; (a-b)(a+b) \;=\; (a+b)(a-b)$
4. $x^2 + px + q \;=\; (x+a)(x+b)$، جبکہ $p = (a+b)$ اور $q = ab$

مثال 1. تجزی کیجیے۔ $a(x+2y) - b(x+2y)$

حل: $a(x+2y) - b(x+2y) = (x+2y)(a-b)$

مثال 2. تجزی کیجیے۔ $a^n(x-2z) + b^{n-1}(x-2z) - c^{n-2}(x-2z)$

حل: $a^n(x-2z) + b^{n-1}(x-2z) - c^{n-2}(x-2z) = (a^n + b^{n-1} - c^{n-2})(x-2z)$

مثال 3. تجزی کیجیے۔ $100m^4 + 20m^2n + n^2$

حل: $100m^4 + 20m^2n + n^2 = (10m^2)^2 + 2(10m^2)(n) + (n)^2$

کیونکہ، $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

لہٰذا $100m^4 + 20m^2n + n^2 = (10m^2 + n)^2$

مثال 4. تجزی کیجیے۔ $16x^2 - 72xy^2 + 81y^4$

حل: $16x^2 - 72xy^2 + 81y^4 = (4x)^2 - 2(4x)(9y^2) + (9y^2)^2$

کیونکہ، $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

لہٰذا $16x^2 - 72xy^2 + 81y^4 = (4x - 9y^2)^2$

مثال 5. تجزی کیجیے۔ $81x^4 - 625y^8$

حل:

$$81x^4 - 625y^8 = (9x^2)^2 - (25y^4)^2$$

کیونکہ،

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

لہٰذا

$$81x^4 - 625y^8 = (9x^2 - 25y^4)(9x^2 + 25y^4)$$
$$= \{(3x)^2 - (5y^2)^2\}(9x^2 + 25y^4)$$
$$= \{(3x - 5y^2)(3x + 5y^2)(9x^2 + 25y^4)$$

مثال 6. تجزی کیجیے۔ $x^2 + 15x + 36$

حل:

$$x^2 + 15x + 36 = x^2 + (3+12)x + 36$$
$$= x^2 + 3x + 12x + 36$$
$$= x(x+3) + 12(x+3) = (x+3)(x+12)$$

مشق 5.1

مندرجہ ذیل کی تجزی کیجیے۔

1. $3t^{2n} - 6t^{2n-3} + 9t^{2n-5}$
2. $3(a+3)^2(x-2) + 6(a+3)(x-2)^2$
3. $(ab+cd)^2 - (ac-bd)^2$
4. $2x^2y^3 + 2x^4y - 3x^3y^2 - 3xy^4$
5. $a^3b^2c + a^2b^3c + ab^4c + a^4bc$
6. $al(pq+qr) + bm(pq+qr) + cn(pq+qr)$

مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

7. $a^2c^2 + 4ac + 4$
8. $x^2y^4 + 18xy^2 + 81$
9. $(a-b)^2 + 18(a-b) + 81$
10. $m^{2n}t^{2n} + 8m^nt^nz^n + 16z^{2n}$
11. $x^2y^2 + 0.1xy + 0.0025$
12. $\frac{4}{9}x^2 + 2xy^2 + \frac{9}{4}y^4$

تجزی کیجیے۔

13. $a^2b^2 - 6ab + 9$
14. $x^2y^2z^2 - 4xyz + 4$
15. $x^4y^2 - 2 + \frac{1}{x^4y^2}$
16. $a^4 - 0.4a^2 + 0.04$
17. $9 - 6(a-3b)^2 + (a-3b)^4$
18. $625 - 50a^2b + a^4b^2$

مندرجہ ذیل کی تجزی کیجیے۔

19. $ax^4 - \frac{a}{16}$
20. $a^4b^6 - 144c^2$
21. $(a-b)^2 - 9c^2$
22. $s^{2n} - t^{2n}$
23. $(a-b)^2 - (c+d)^2$
24. $4(x+2y)^2 - 9(x-y)^2$

مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

25. $x^2 + 15x + 36$
26. $x^2 + 15x - 100$
27. $z^4 - 2z^2 - 15$
28. $r^6 - 10r^3 + 16$
29. $a^2x^4 - 20ax^2y^2 - 96y^4$
30. $(a+b)^2 + 20(a+b) + 36$

5.2 $a^2 - b^2$ کی صورت میں تحویل ہونے والے اظہاریوں کی تجزی

اب ہم ان اظہاریوں کی عمل تجزی پر بحث کریں گے جو $a^2 - b^2$ کی صورت میں تحویل کیے جاسکتے ہوں۔ہم جانتے ہیں کہ $(a - b)$ اور $(a + b)$, $a^2 - b^2$ کے اجزائے ضربی ہیں۔

مندرجہ ذیل مثالوں کوملاخط کیجیے۔

مثال 1. تجزی کیجیے۔ $9x^2 - y^2 + z^2 + 6xz$

حل:

$$\begin{aligned}
9x^2 - y^2 + z^2 + 6xz &= (9x^2 + z^2 + 6xz) - y^2 \\
&= \{(3x)^2 + 2(3x)(z) + (z)^2\} - y^2 \\
&= (3x + z)^2 - y^2 \\
&= \{(3x + z) + y\}\{(3x + z) - y\} \\
&= (3x + y + z)(3x - y + z)
\end{aligned}$$

مثال 2. تجزی کیجیے۔ $(x^2 + y^2 - z^2)^2 - 4x^2y^2$

حل:

$$\begin{aligned}
(x^2 + y^2 - z^2)^2 - 4x^2y^2 &= (x^2 + y^2 - z^2)^2 - (2xy)^2 \\
&= \{(x^2 + y^2 - z^2) + 2xy\}\{(x^2 + y^2 - z^2) - 2xy\} \\
&= \{(x^2 + 2xy + y^2) - z^2\}\{(x^2 - 2xy + y^2) - z^2\} \\
&= \{(x + y)^2 - z^2\}\{(x - y)^2 - z^2\} \\
&= \{(x + y + z)(x + y - z)\}\{(x - y + z)(x - y - z)\} \\
&= (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z)
\end{aligned}$$

مثال 3. تجزی کیجیے۔ $x^4 + 4y^4$

حل:

$$x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2$$

$2(x^2)(2y^2)$ کو $x^4 + 4y^4$ میں جمع کرنے سے مکمل مربع بناسکتے ہیں۔

اب $2(x^2)(2y^2)$ کو جمع اور تفریق کرنے سے

$$\begin{aligned}
x^4 + 4y^4 &= \{(x^2)^2 + 2(x^2)(2y^2) + (2y^2)^2\} - 2(x^2)(2y^2) \\
&= (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 \\
&= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\
&= \{(x^2 + 2y^2) + 2xy\}\{(x^2 + 2y^2) - 2xy\} \\
&= (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)
\end{aligned}$$

مشق 5.2

.1 مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) a^2-b^2-2a+1 (ii) $1-x^2-y^2+2xy$ (iii) $y^4+2y^3z-2yz^3-z^4$

(iv) $4a^2-9b^2-2a+\frac{1}{4}$ (v) $x^2-y^2-x+\frac{1}{4}$ (vi) $a^2-b^2+9c^2+6ac$

(vii) $(x^2+y^2+z^2)^2-4x^2y^2$ (viii) $x^2+y^2+2xy-49z^2$ (ix) $s^2-16+8t-t^2$

.2 مندرجہ ذیل کی تجزی کیجیے۔

(i) $4a^4+625b^4$ (ii) $1+4b^4$ (iii) a^4+a^2+1

(iv) a^8+a^4+1 (v) $64x^8+y^8$ (vi) r^4+4s^4

(vii) $16a^4-97a^2b^2+81b^4$ (viii) $9x^4-28x^2z^2+16z^4$

(ix) $x^2-y^2-z^2-2yz+x+y+z$

5.3 ax^2+bx+c کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

ہم پہلے سیکھ چکے ہیں کہ x^2+px+q کے اجزائے ضربی $(x+a)$ اور $(x+b)$ ہیں۔ جبکہ $p=a+b$ اور $q=ab$، ax^2+bx+c جبکہ a ، b اور c صحیح اعداد ہوں، کی طرز کے اظہاریے کو دو رقمیوں (Binomials) میں تحویل کر سکتے ہیں۔ اس طرح کہ دیئے ہوئے اظہاریے کی پہلی اور تیسری رقوم کے حاصل ضرب کے اجزائے ضربی سے درمیانی رقم حاصل ہو۔

طریقہ: .1 x^2 کا عددی سر "a"، x کا عددی سر "b" اور مستقل رقم c معلوم کیجیے۔

.2 دو اعداد p اور q معلوم کیجیے اس طرح کہ $p+q=b$ اور $pq=ac$

.3 ax^2+bx+c کے اجزائے ضربی $(ax+p)$ اور $(x+\frac{q}{a})$ ہیں۔

مندرجہ ذیل مثالوں میں اس کی وضاحت کی جاتی ہے۔

مثال .1 $7x^2-12x+5$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: یہاں $a=7\ ,\ b=-12\ ,\ c=5$

ہمیں p اور q معلوم کرنا ہے جبکہ $p+q=-12$ اور $pq=ac=7\times 5=35$

اگر $p=-7$ اور $q=-5$ ہو تو دونوں شرائط پوری ہوتی ہیں۔ لہٰذا

$$7x^2 - 12x + 5 = 7x^2 - 7x - 5x + 5$$
$$= 7x(x-1) - 5(x-1)$$
$$= (x-1)(7x-5)$$

مثال 2. $15h^2x^2 - 22hx + 8$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: $15h^2x^2 - 22hx + 8 = 15(hx)^2 - 22hx + 8$

یہاں $a = 15 \ , \ b = -22 \ , \ c = 8$

$b = -22$ کو $-10 - 12$ اور $ac = 120$ کو $(-12) \times (-10)$ لکھیے یعنی

$$p = -10 \ , \ q = -12$$

$$15h^2x^2 - 22hx + 8 = 15h^2x^2 - 10hx - 12hx + 8$$
$$= 5hx(3hx-2) - 4(3hx-2)$$
$$= (3hx-2)(5hx-4)$$

مشق 5.3

1. اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $2a^2 + a - 1$　(ii) $6a^2 + 11a - 10$　(iii) $25b^2 - 15b + 2$

(iv) $12x^2 - 13x + 3$　(v) $5x^2 - 13x - 6$　(vi) $18y^2 + 9y - 20$

2. مندرجہ ذیل کی تجزی کیجیے۔

(i) $24x^2 - 81x + 27$　(ii) $36x^2 + 154x - 36$　(iii) $7y^2 - 14y - 21$

3. تجزی کیجیے۔

(i) $6xy^2z - x^2y^2z - 2x^3y^2z$　(ii) $-3x^{2n} + 11x^n + 4$　(iii) $6(xy)^{2n} + 7(xy)^n - 5$

4. مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $2(s-t)^2 + (s-t) - 1$　(ii) $25(s+t)^2 - 15(s+t) + 2$

(iii) $5(2x+y)^4 - 13(2x+y)^2 - 6$　(iv) $12(x-2y)^4 - 11(x-2y)^2 + 2$

5.4 $a^3 \pm b^3$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

اگر a اور b دو حقیقی اعداد ہوں تو

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

اور
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

پس اظہاریے $a^3 + b^3$ کے اجزائے ضربی $(a + b)$ اور $(a^2 - ab + b^2)$ ہیں۔

اسی طرح $a^3 - b^3$ کے اجزائے ضربی $(a - b)$ اور $(a^2 + ab + b^2)$ ہیں۔

$a^3 + b^3$ اور $a^3 - b^3$ کی طرز کے اظہاریوں کی عمل تجزی مندرجہ ذیل مثالوں سے واضح کی جاتی ہے۔

مثال 1. $8x^3 + 27$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل:
$$8x^3 + 27 = (2x)^3 + (3)^3$$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ جبکہ $a = 2x$ اور $b = 3$ کا استعمال کرنے سے:

$$8x^3 + 27 = (2x + 3)\{(2x)^2 - (2x)(3) + (3)^2\}$$
$$= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$$

مثال 2. $a^6 - 64b^6$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: ہم پہلے دیے ہوئے اظہاریے کو $a^2 - b^2$ کی صورت میں لکھیں گے۔ اس کے بعد اس کی تجزی کریں گے۔ $a^2 - b^2$ کی صورت کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے بعد ہمیں ایک جزو ضربی $a^3 + b^3$ کی صورت میں اور دوسرا جزو ضربی $a^3 - b^3$ کی صورت میں حاصل ہوتا ہے۔ آخر میں ہم $a^3 + b^3$ اور $a^3 - b^3$ کی طرز کے اظہاریوں کے اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔

$$a^6 - 64b^6 = (a^3)^2 - (8b^3)^2$$
$$= (a^3 + 8b^3)(a^3 - 8b^3)$$
$$= \{(a)^3 + (2b)^3\}\{(a)^3 - (2b)^3\}$$
$$= [(a + 2b)\{(a)^2 - (a)(2b) + (2b)^2\}][(a - 2b)\{(a)^2 + (a)(2b) + (2b)^2\}]$$
$$= (a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$$
$$= (a + 2b)(a - 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)(a^2 + 2ab + 4b^2)$$

دوسرا طریقہ:

$$a^6 - 64b^6 = (a^2)^3 - (4b^2)^3$$
$$= (a^2 - 4b^2)\{(a^2)^2 + (a^2)(4b^2) + (4b^2)^2]$$
$$= \{(a)^2 - (2b)^2\}[\{(a^2)^2 + (4b^2)^2 + 2(a^2)(4b^2)\} - (a^2)(4b^2)]$$

$= (a + 2b)(a - 2b)\{(a^2 + 4b^2)^2 - 4a^2b^2\}$

$= (a + 2b)(a - 2b)\{(a^2 + 4b^2)^2 - (2ab)^2\}$

$= (a + 2b)(a - 2b)(a^2 + 4b^2 + 2ab)(a^2 + 4b^2 - 2ab)$

$= (a + 2b)(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)(a^2 - 2ab + 4b^2)$

مثال 3. $64r^6 - \frac{r^3}{s^3t^3}$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: r^3 کو مشترک لینے سے $64r^6 - \frac{r^3}{s^3t^3} = r^3(64r^3 - \frac{1}{s^3t^3})$

$= r^3\{(4r)^3 - (\frac{1}{st})^3\}$

$= r^3(4r - \frac{1}{st})\{(4r)^2 + (4r)(\frac{1}{st}) + (\frac{1}{st})^2\}$

$= r^3(4r - \frac{1}{st})(16r^2 + \frac{4r}{st} + \frac{1}{s^2t^2})$

مشق 5.4

.1 اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $8a^3 + 27y^3$ (ii) $x^3y^6 + 8z^3$ (iii) $x^6 + 64t^3$

(iv) $2x^3 + 2y^6$ (v) $t^5 + t^2y^3$ (vi) $\frac{x^4y}{3} + \frac{xy^4}{81}$

.2 اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $x^3 - 64y^3$ (ii) $8x^3 - 27y^6$ (iii) $2x^3 - 250t^3$

(vi) $y^5 - y^2z^3$ (v) $\frac{a^4b}{81} - \frac{ab^4}{3}$ (vi) $a^3b^3c^3 - \frac{1}{a^3b^3c^3}$

.3 تجزی کیجیے۔

(i) $x^6 - y^6$ (ii) $x^6y^6 - \frac{64}{z^6}$ (iii) $x^{12} - y^{12}$

(iv) $x^6 + 64y^6$ (v) $a^6 + b^9y^9$ (vi) $ax^{12} + ay^{12}$

.4 مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $a^3 - a^2 + 2$ [اشارہ: $a^3 - a^2 + 2 = (a^3 + 1) - (a^2 - 1)$]

(ii) $x^3 - x - 2y + 8y^3$ (iii) $a^6 - 9a^3 + 8$ (iv) $8x^6 + 7x^3 - 1$

(v) $(x - 2y)^3 - 64z^3$ (vi) $125r^3 - (s + at)^3$ (vii) $r^5t^2 + r^2t^8$

5.5 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

ہم جانتے ہیں کہ

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

پس $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ کے اجزائے ضربی $(a + b + c)$ اور $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ ہیں۔

مثال 1. $8a^3 + b^3 + 27c^3 - 18abc$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل:

$$8a^3 + b^3 + 27c^3 - 18abc = (2a)^3 + (b)^3 + (3c)^3 - 3(2a)(b)(3c)$$
$$= (2a + b + 3c)\{(2a)^2 + (b)^2 + (3c)^2 - (2a)(b) - (b)(3c) - (3c)(2a)\}$$
$$= (2a + b + 3c)(4a^2 + b^2 + 9c^2 - 2ab - 3bc - 6ca)$$

مثال 2: $x^3 + \frac{1}{x^3} - y^3 + 3y$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} - y^3 + 3y$$
$$= (x)^3 + (\frac{1}{x})^3 + (-y)^3 - 3(x)(\frac{1}{x})(-y) \quad [\text{As } -3(x)(\frac{1}{x})(-y) = 3y]$$
$$= (x + \frac{1}{x} - y)\{(x)^2 + (\frac{1}{x})^2 + (-y)^2 - (x)(\frac{1}{x}) - (\frac{1}{x})(-y) - (-y)(x)\}$$
$$= (x + \frac{1}{x} - y)(x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 - 1 + \frac{y}{x} + yx)$$

مشق 5.5

ذیل میں دیے گئے اظہاریوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(1) $a^3 - 8b^3 + 27c^3 + 18abc$

(2) $a^6 - 27b^3 - 8c^6 - 18a^2bc^2$

(3) $27x^3 - 1 + 8y^6 + 18xy^2$

(4) $64y^6 + \frac{64}{y^6} - 8y^9 + 96y^3$

(5) $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 - 3(x - y)(y - z)(z - x)$

(6) $(x + y)^3 - (y + z)^3 + (z + x)^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x)$

(7) $a^3 - 2 + \frac{1}{a^3}$ [اشارہ: $a^3 - 2 + \frac{1}{a^3} = a^3 + 1 + \frac{1}{a^3} - 3$]

(8) ثابت کیجیے کہ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ کو ایسے بھی لکھ سکتے ہیں:

$$\frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$$

5.6 $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

ایسے اظہاریے جو $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ کی طرح کے ہوں یعنی چکردار ترتیب میں ہوں، کے اجزائے ضربی بھی معلوم کیے جاسکتے ہیں۔ جس کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$$= a^2b - a^2c + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2$$

[رقوم کو اس طرح ترتیب دیا کہ دیئے ہوئے اظہاریے کے اجزائے ضربی معلوم کیے جاسکیں]

$$= a^2b - ab^2 - a^2c + b^2c + ac^2 - bc^2$$
$$= ab(a-b) - c(a^2-b^2) + c^2(a-b)$$
$$= ab(a-b) - c(a-b)(a+b) + c^2(a-b)$$
$$= (a-b)\{ab - c(a+b) + c^2\}$$
$$= (a-b)(ab - ac - bc + c^2)$$
$$= (a-b)\{a(b-c) - c(b-c)\}$$
$$= (a-b)(b-c)(a-c)$$

مشق 5.6

مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

1. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$
2. $r^2(s-t)+s^2(t-r)+t^2(r-s)$
3. $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$
4. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$
5. $4a^2(3b-4c)+9b^2(4c-2a)+16c^2(2a-3b)$
6. $x^2(3y-5z)+9y^2(5z-x)+25z^2(x-3y)$

5.7 مسئلہ باقی کے ذریعہ تجزی کرنا

اگر $p(x)$ ایک کثیر رقمی ہے تو اسے $(x-a)$ سے تقسیم کرنے پر ایک اور کثیر رقمی $q(x)$ بطور خارج قسمت (*Quotient*) اور باقی r حاصل ہوتا ہے۔

یعنی $p(x) = q(x) \times (x-a) + r$

جس میں r ایک مستقل ہے کیونکہ اس کا درجہ $(x-a)$ کے درجے سے کم ہے۔

اگر $x = a$ ہو تو: $p(a) = q(a) \times (a-a) + r$

$$= q(a) \times 0 + r$$
$$= r$$

مسئلہ باقی:

اگر کثیر رقمی $p(x)$ کو $(x-a)$ سے تقسیم کیا جائے تو باقی $p(a)$ حاصل ہوتا ہے۔

صریح نتیجہ:

اگر $p(a)$ صفر ہو تو $x-a$ کثیر رقمی $p(x)$ کا عاد یا جزو ضربی ہوتا ہے۔

دی گئی کثیر رقمی $p(x)$ کے جزو ضربی معلوم کرنے کے لیے مستقل رقم کے عاد کی مدد لی جاتی ہے۔ مسئلہ باقی کی مدد سے کثیر رقمی کی تجزی کرنے کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. مسئلہ باقی استعمال کرتے ہوئے $x^3+8x^2+19x+12$ کی تجزی کیجیے۔

حل: فرض کیجیے: $p(x)=x^3+8x^2+19x+12$

12 کے عاد ہیں: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

اگر $x=-1$ تو: $p(-1)=(-1)^3+8(-1)^2+19(-1)+12$

$$=-1+8-19+12=20-20=0$$

اس لیے $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(x+1)$ ہے۔ اب $p(x)$ کو $(x+1)$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l} & x^2+7x+12 \\ \hline x+1 & x^3+8x^2+19x+12 \\ & \underline{\pm x^3 \pm x^2} \\ & \quad 7x^2+19x+12 \\ & \quad \underline{\pm 7x^2 \pm 7x} \\ & \qquad 12x+12 \\ & \qquad \underline{\pm 12x \pm 12} \\ & \qquad\quad 0 \end{array}$$

اس طرح $p(x)=(x+1)(x^2+7x+12)$

$$=(x+1)(x^2+3x+4x+12)$$

$$=(x+1)[(x)(x+3)+4(x+3)]$$

$$=(x+1)(x+3)(x+4)$$

خیال رہے کہ کثیر رقمی کی مستقل رقم کے عاد $p(x)$ میں x کے بجائے رکھے جاتے ہیں۔ اب اگر $x=a$ رکھنے پر $p(x)$ صفر ہو جائے تو $p(x)$ کا ایک عاد یا جزو ضربی $(x-a)$ ہوتا ہے۔

مثال 1 میں مستقل رقم 12 ہے اور 12 کے عاد ہیں:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

$x = -1$ رکھنے پر باقی صفر بچتا ہے اس لیے $(x + 1)$ دی ہوئی کثیر رقمی کا ایک جزوِ ضربی ہے۔

مثال 2. مسئلہ باقی کی مدد سے $x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے : $p(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$

30 کے عاد ہیں: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$

اگر $x = 1$ تو:

$$\begin{aligned} p(1) &= (1)^3 - 10(1)^2 + 31(1) - 30 \\ &= 1 - 10 + 31 - 30 \\ &= 32 - 40 = -8 \neq 0 \end{aligned}$$

اسی طرح اگر $x = -1$ تو $p(-1) \neq 0$

اگر $x = 2$ تو،

$$\begin{aligned} p(2) &= (2)^3 - 10(2)^2 + 31(2) - 30 \\ &= 8 - 40 + 62 - 30 \\ &= 70 - 70 = 0 \end{aligned}$$

لہٰذا $p(x)$ کا ایک جزوِ ضربی $x - 2$ ہے۔

اب،

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 8x + 15 \\ \hline x - 2 & x^3 - 10x^2 + 31x - 30 \\ & \underline{\pm x^3 \mp 2x^2} \\ & -8x^2 + 31x - 30 \\ & \underline{\mp 8x^2 \pm 16x} \\ & 15x - 30 \\ & \underline{\pm 15x \mp 30} \\ & 0 \end{array}$$

پس

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 2)(x^2 - 8x + 15) \\ &= (x - 2)(x - 3)(x - 5) \end{aligned}$$

مشق 5.7

مسئلہ باقی کے ذریعے مندرجہ ذیل کی تجزی کیجیے۔

1. $x^3 + x^2 - 2$
2. $x^3 + 3x^2 + 4x - 28$
3. $x^3 - x^2 - 14x + 24$
4. $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$
5. $x^3 - 21x + 20$
6. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
7. $x^3 - 7x + 6$
8. $x^3 - 5x + 12$
9. $x^3 - 11x^2 + 36x - 36$
10. $x^6 - 7x^2 + 6$ [$y = x^2$ رکھیں]

5.8 مشترک عاد اعظم

مشترک عاد اعظم کو بڑے سے بڑا مشترک جز وضربی (Highest Common Factor) بھی کہا جاتا ہے۔ مشترک عاد اعظم یا صرف عاد اعظم دو یا دو سے زیادہ کثیر رقمیوں کے مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔ یہ ہر کثیر رقمی کو پورا پورا تقسیم کرتا ہے۔

مشترک عاد اعظم معلوم کرنے کے مندرجہ ذیل دو طریقے ہیں۔

(i) اجزائے ضربی کا طریقہ (ii) تقسیم کا طریقہ

5.8.1 اجزائے ضربی کا طریقہ

مندرجہ ذیل مثالوں سے اس طریقہ کی وضاحت کی جاتی ہے۔

مثال 1. $8x^3y^2$ اور $12x^2y$ کا عاد اعظم معلوم کیجیے۔

حل:

$$8x^3y^2 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times x \times y \times y$$
$$12x^2y = 2 \times 2 \times 3 \times x \times x \times y$$

یہاں مشترک اجزائے ضربی 2 ، 2 ، x ، x اور y ہیں۔

اس لیے عاد اعظم $= 2 \times 2 \times x \times x \times y$

$= 4x^2y$

مثال 2. $a^6 - b^6$ اور $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ کا عاد اعظم معلوم کیجیے۔

حل:

$$\begin{aligned}
a^6 - b^6 &= (a^3)^2 - (b^3)^2 \\
&= (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) \\
&= (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2) \\
&= (a + b)(a - b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^4 - 2a^2b^2 + b^4 &= (a^2)^2 - 2(a^2)(b^2) + (b^2)^2 \\
&= (a^2 - b^2)^2
\end{aligned}$$

$= [(a+b)(a-b)]^2 = (a+b)(a-b)(a+b)(a-b)$

یہاں مشترک اجزائے ضربی $(a+b)$ اور $(a-b)$ ہیں۔

اس لیے عادِ اعظم $= (a+b)(a-b)$

$= a^2 - b^2$

مثال 3. $4a^2 + 4ab - 15b^2$ ، $2a^2 + 7ab - 15b^2$ اور $6a^2 + ab - 15b^2$ کا عادِ اعظم معلوم کیجیے۔

حل: دی گئی کثیر رقموں کے اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}4a^2 + 4ab - 15b^2 &= 4a^2 + 10ab - 6ab - 15b^2\\ &= 2a(2a+5b) - 3b(2a+5b)\\ &= (2a-3b)(2a+5b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2a^2 + 7ab - 15b^2 &= 2a^2 + 10ab - 3ab - 15b^2\\ &= 2a(a+5b) - 3b(a+5b)\\ &= (2a-3b)(a+5b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6a^2 + ab - 15b^2 &= 6a^2 - 9ab + 10ab - 15b^2\\ &= 3a(2a-3b) + 5b(2a-3b)\\ &= (2a-3b)(3a+5b)\end{aligned}$$

تینوں کثیر رقمیوں میں $(2a-3b)$ مشترک ہے۔

پس عادِ اعظم $= 2a - 3b$

مشق 5.8

مندرجہ ذیل کثیر رقمیوں کا عادِ اعظم اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

1. $5a^2b^3$, $60a^4c^2$
2. $111a^5b^3c^4$, $148a^8b^6c^2$
3. $x^3 - y^3$, $x^4 - y^4$
4. $x^4 + x^2y^2 + y^4$, $x^6 - y^6$
5. $2x^3 - 2x^2 - 4x + 4$, $x^3 - 1$
6. $2x^3 - 54$, $2x^4 + 18x^2 + 162$
7. $6x^3 + 24x^2 + 6x - 36$, $4x^3 - 8x^2 - 20x + 24$
8. $y^2 + y - 2$, $y^2 + 3y + 2$, $y^3 + 2y^2 + y + 2$
9. $12x^2 - 16xy + 5y^2$, $30x^2 + 11xy - 30y^2$, $6x^2 + xy - 5y^2$
10. $9x^2 + 63x + 108$, $9x^2 - 45x - 216$, $18x^2 + 45x - 27$

5.8.2 تقسیم کا طریقہ

اس طریقے میں ہم بڑے درجے والی کثیر رقمی کو چھوٹے درجے والی کثیر رقمی سے تقسیم کرتے ہیں۔ کثیر رقمیوں کا عاد اعظم بھی اعداد کے عاد اعظم کی طرح معلوم کیا جاتا ہے۔

اس طریقے کی وضاحت ذیل کی مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. $x^3 - 6x^2 + 8x$ اور $x^2 + 3x - 28$ کا عاد اعظم تقسیم کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

حل: $x^3 - 6x^2 + 8x$ کا درجہ 3 ہے۔ جبکہ $x^2 + 3x - 28$ کا درجہ 2 ہے۔

اس لیے $x^3 - 6x^2 + 8x$ کو $x^2 + 3x - 28$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l}
 & x - 9 \\
x^2 + 3x - 28 & x^3 - 6x^2 + 8x \\
 & \underline{\pm x^3 \pm 3x^2 \mp 28x} \\
 & -9x^2 + 36x \\
 & \underline{\mp 9x^2 \mp 27x \pm 252} \\
 & 63x - 252
\end{array}$$

باقی $= 63(x-4)$ یا

غور کیجیے کہ باقی کا درجہ مقسوم علیہ سے کم ہے۔

اب 63 کو نظر انداز کرتے ہوئے $x^2 + 3x - 28$ کو $x - 4$ سے تقسیم کیجیے۔

(63 بہر حال دی ہوئی کثیر رقمیوں کا مشترک جزو ضربی نہیں ہے)۔

$$\begin{array}{r|l}
 & x + 7 \\
x - 4 & x^2 + 3x - 28 \\
 & \underline{-x^2 \mp 4x} \\
 & 7x - 28 \\
 & \underline{-7x \mp 28} \\
 & 0
\end{array}$$

یعنی $x^2 + 3x - 28$ کو $x - 4$ پورا پورا تقسیم کرتا ہے۔

پڑتال: اب ہم یہ دیکھتے ہیں کہ $x^3 - 6x^2 + 8x$ کو بھی $x - 4$ تقسیم کرتا ہے۔

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x \\ x-4 \overline{\smash{\big)}\, x^3 - 6x^2 + 8x} \\ \underline{\overset{-}{}x^3 \mp 4x^2} \\ -2x^2 + 8x \\ \underline{\mp 2x^2 \pm 8x} \\ 0 \end{array}$$

پس مطلوبہ عاداعظم $= x - 4$

مثال 2. $6y^3 + 5y^2 - 34y + 15$, $6y^3 - 37y^2 + 57y - 20$ اور $3y^3 - 8y^2 - 31y + 60$ کا تقسیم کے طریقے سے عاداعظم معلوم کیجیے۔

حل: اگر تین کثیر رقمیوں کا عاداعظم معلوم کرنا ہے تو پہلے کسی دو کا عاداعظم معلوم کیجیے۔ پھر اس عاداعظم اور تیسری کثیر رقمی کا عاداعظم معلوم کیجیے جو تینوں کثیر رقمیوں کا عاداعظم ہوگا۔

پہلے $6y^3 + 5y^2 - 34y + 15$ اور $6y^3 - 37y^2 + 57y - 20$ کا عاداعظم معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 6y^3 - 37y^2 + 57y - 20 \overline{\smash{\big)}\, 6y^3 + 5y^2 - 34y + 15} \\ \underline{-6y^3 \mp 37y^2 \pm 57y \mp 20} \\ 42y^2 - 91y + 35 \\ 7(6y^2 - 13y + 5) \end{array}$$

یا

اب

$$\begin{array}{r} y - 4 \\ 6y^2 - 13y + 5 \overline{\smash{\big)}\, 6y^3 - 37y^2 + 57y - 20} \\ \underline{\pm 6y^3 \mp 13y^2 \pm 5y} \\ -24y^2 + 52y - 20 \\ \underline{\mp 24y^2 \pm 52y \mp 20} \\ 0 \end{array}$$

اس طرح ان کثیر رقمیوں کا عاداعظم $6y^2 - 13y + 5$ ہے۔

اب $3y^3 - 8y^2 - 31y + 60$ اور $6y^2 - 13y + 5$ کا عاداعظم معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \\ 6y^2 - 13y + 5 \overline{\smash{\big)}\, 3y^3 - 8y^2 - 31y + 60} \\ \underline{-3y^3 \mp \frac{13}{2}y^2 \pm \frac{5}{2}y} \\ -\frac{3}{2}y^2 - \frac{67}{2}y + 60 \\ \underline{\mp \frac{3}{2}y^2 \pm \frac{13}{4}y \mp \frac{5}{4}} \\ -\frac{147}{4}y + \frac{245}{4} \\ -\frac{49}{4}(3y - 5) \end{array}$$

یا

اب $6y^2 - 13y + 5$ کو $3y - 5$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l} & 2y - 1 \\ 3y - 5 & 6y^2 - 13y + 5 \\ & \pm 6y^2 \mp 10y \\ \hline & \quad - 3y + 5 \\ & \quad \mp 3y \pm 5 \\ \hline & \quad\quad 0 \end{array}$$

اس طرح دی ہوئی تینوں کثیر رقمیوں کا عاداعظم $(3y - 5)$ ہے۔

مشق 5.9

تقسیم کے طریقے سے مندرجہ ذیل کثیر رقمیوں کا عاداعظم معلوم کیجیے۔

1. $x^3 - y^3 , x^4 - y^4$
2. $x^3 - 1 , 2x^3 - 2x^2 - 4x + 4$
3. $x^2 + x - 2 , x^3 + 2x^2 + x + 2$
4. $(x + y)^2 , x^2 + 2xy + y^2$
5. $y^2 + y - 2 , y^2 + 3y + 2 , y^3 + 2y^2 + y + 2$
6. $x^2 + xy - 2y^2 , x^2 + 3xy + 2y^2 , x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2y^3$
7. $x^3 - 8x^2 - 31x - 22 , x^3 - 4x^2 + x + 6 , 2x^3 + 9x^2 + 10x + 3$
8. $6x^2 + x - 5 , 12x^2 - 16x + 5 , 30x^2 + 11x - 30$
9. $a^2 - x^2 - y^2 - 2xy , y^2 - a^2 - x^2 - 2ax , x^2 - y^2 - a^2 - 2ay$

5.9 کثیر رقمیوں کا مشترک ذواضعاف اقل

اگر ایک کثیر رقمی دوسری سے پوری پوری تقسیم ہوتی ہو تو پہلی کثیر رقمی دوسری کی اضعاف کہلاتی ہے۔ مثلاً $x^2 + 4x + 4$ کو $(x + 2)$ پوری پوری تقسیم کرتی ہے اس لیے $x + 2$ کا اضعاف $x^2 + 4x + 4$ ہے۔

اگر ایک کثیر رقمی دو یا دو سے زیادہ کثیر رقمیوں سے پوری پوری تقسیم ہوتی ہو تو اسے دی ہوئی کثیر رقمیوں کا مشترک اضعاف کہتے ہیں۔

مثلاً $x^2 + 3x + 2$ ، $x + 1$ اور $x + 2$ دونوں سے پوری پوری تقسیم ہو جاتی ہے اس لیے $x + 1$ اور $x + 2$ کا مشترک اضعاف $x^2 + 3x + 2$ ہے۔

دی ہوئی کثیر رقمیوں کے بہت سے مشترک اضعاف ہو سکتے ہیں۔ ان مشترک اضعاف میں سے وہ کثیر رقمی جو سب سے کم درجہ کی ہو مشترک ذواضعاف اقل یا صرف ذواضعاف اقل کہلاتی ہے۔

دو یا زیادہ کثیر رقمیوں کا ذو اضعاف اقل معلوم کرنے کے مندرجہ ذیل دو طریقے ہیں۔

(i) تجزی کے ذریعے (ii) عاد اعظم کے ذریعے

5.9.1 تجزی کے ذریعے

سب سے پہلے دی ہوئی کثیر رقمیوں کے اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔ پھر مشترک و غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب لیتے ہیں۔ جو کثیر رقمیوں کا ذو اضعاف اقل کہلاتا ہے۔

اس طریقے کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. $6a^3b^2c$ اور $8a^4b^3c^2$ کا ذو اضعاف اقل معلوم کیجیے۔

حل: سب سے پہلے دی ہوئی کثیر رقمیوں کے اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔

$$6a^3b^2c = 2 \times 3 \times a \times a \times a \times b \times b \times c$$

$$8a^4b^3c^2 = 2 \times 2 \times 2 \times a \times a \times a \times a \times b \times b \times b \times c \times c$$

اب مشترک اور غیر مشترک اجزائے ضربی لکھتے ہیں۔

مشترک اجزائے ضربی = $2, a, a, a, b, b, c$

غیر مشترک اجزائے ضربی = $3, 2, 2, a, b, c$

پس ذو اضعاف اقل = (مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب) × (غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب)

$$= (12abc) \times (2a^3b^2c)$$

$$= 24a^4b^3c^2$$

واضح رہے کہ $6a^3b^2c$ اور $8a^4b^3c^2$ کا عاد اعظم $2a^3b^2c$ ہے اور $24a^4b^3c^2$ ذو اضعاف اقل ہے۔

عاد اعظم × ذو اضعاف اقل = $(24a^4b^3c^2) \times (2a^3b^2c) = 48a^7b^5c^3$

دی ہوئی کثیر رقمیوں کا حاصل ضرب = $6a^3b^2c \times 8a^4b^3c^2 = 48a^7b^5c^3$

اس طرح یہ مشاہدہ ہمیں ایک اور نتیجہ فراہم کرتا ہے۔

عاد اعظم × ذو اضعاف اقل = (پہلی کثیر رقمی) × (دوسری کثیر رقمی)

مثال 2. $x^2 + x - 6$ ، $2x^2 + 9x + 9$ اور $x^2 + 7x + 12$ کا ذو اضعاف اقل معلوم کیجیے۔

حل:

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

$$2x^2 + 9x + 9 = (x+3)(2x+3)$$

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

مشترک اجزائے ضربی : $x + 3$

غیر مشترک اجزائے ضربی : $x - 2$, $2x + 3$, $x + 4$

پس مطلوبہ ذواضعاف اقل $= (x + 3)(x - 2)(2x + 3)(x + 4)$

5.9.2 عاداعظم کے ذریعے

چونکہ عاداعظم × ذواضعاف اقل = (پہلی کثیر رقتی) × (دوسری کثیر رقتی)

لہٰذا ذواضعاف اقل = $\dfrac{\text{(پہلی کثیر رقتی)} \times \text{(دوسری کثیر رقتی)}}{\text{عاداعظم}}$

واضح رہے کہ مندرجہ بالا نتیجہ صرف دو کثیر رقمیوں کے لیے ہے۔

یہ بھی یاد رہے کہ

ذواضعاف اقل = (مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب) × (غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب)

مثال1. کثیر رقمیوں $2x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 7x + 15$ اور $2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24$ کا ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔

حل: پہلے دی ہوئی کثیر رقمیوں کا عاداعظم بذریعہ تقسیم معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24 & 2x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 7x + 15 \\
 & \pm 2x^4 \pm x^3 \mp 20x^2 \mp 7x \pm 24 \\ \hline
 & 2x^3 + 7x^2 - 9
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
2x^3 + 7x^2 - 9 & 2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24 & x - 3 \\
 & \pm 2x^4 \pm 7x^3 \qquad \mp 9x & \\ \hline
 & -6x^3 - 20x^2 + 2x + 24 & \\
 & \mp 6x^3 \mp 21x^2 \qquad \pm 27 & \\ \hline
 & x^2 + 2x - 3 &
\end{array}$$

اب

$$\begin{array}{r|l|l}
x^2 + 2x - 3 & 2x^3 + 7x^2 - 9 & 2x + 3 \\
 & \pm 2x^3 \pm 4x^2 \mp 6x & \\ \hline
 & 3x^2 + 6x - 9 & \\
 & \pm 3x^2 \pm 6x \mp 9 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

لہٰذا عاداعظم $= x^2 + 2x - 3$

پس ذواضعاف اقل $= \dfrac{(2x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 7x + 15)\ (2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24)}{(x^2 + 2x - 3)}$

$$= \frac{(x^2 + 2x - 3)\ (2x^2 - x - 5)\ (2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24)}{(x^2 + 2x - 3)}$$

$$= (2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24)\ (2x^2 - x - 5)$$

نوٹ: اگر $2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24$ کو $(x^2 + 2x - 3)$ سے تقسیم کیا جائے۔ تو $(2x^2 - 3x - 8)$ حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح

$(2x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 7x + 15)\ (2x^2 - 3x - 8)$ مطلوبہ ذواضعاف اقل ہے۔

دونوں طرح سے حاصل ہونے والے ذواضعاف اقل کو مختصر کرنے سے ایک ہی جواب آئے گا۔

مثال 2. اگر دو کثیر رقمیوں کے عاد اعظم اور ذواضعاف اقل بالترتیب $(x - 3)$ اور $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ ہوں اور ایک کثیر رقمی $x^2 - 5x + 6$ ہو تو دوسری معلوم کیجیے۔

حل: عاد اعظم $= x - 3$

ذواضعاف اقل $= x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

پہلی کثیر رقمی $= x^2 - 5x + 6$

دوسری کثیر رقمی $= \mathrm{B}(x)$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{دوسری کثیر رقمی} = \frac{\text{ذواضعاف اقل} \times \text{عاد اعظم}}{\text{پہلی کثیر رقمی}}$$

$$\mathrm{B}(x) = \frac{(x-3)\ (x^3 - 9x^2 + 26x - 24)}{x^2 - 5x + 6}$$

$$= \frac{(x-3)\ (x^3 - 9x^2 + 26x - 24)}{(x-2)\ (x-3)}$$

$$= \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{x - 2}$$

اب،

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 7x + 12 \\ \hline x - 2 & x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \\ & \underline{-x^3 \mp 2x^2} \\ & -7x^2 + 26x - 24 \\ & \underline{\mp 7x^2 \pm 14x} \\ & 12x - 24 \\ & \underline{-12x \mp 24} \\ & 0 \end{array}$$

پس دوسری کثیر رقمی $= x^2 - 7x + 12$

مشق 5.10

مندرجہ ذیل کثیر رقمیوں کا تجزی کے ذریعے ذو اضعاف اقل معلوم کیجیے۔

1. $15a^2x^3y^2\ ,\ 16a^2x^2y^3\ ,\ 12a^2x^3y^2$
2. $x^2 - y^2 - z^2 - 2yz,\ y^2 - z^2 - x^2 - 2xz$
3. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6,\ x^3 - x^2 + 24x + 26$
4. $a^3 - b^3\ ,\ a^6 + b^6\ ,\ a^{12} - b^{12}$
5. $6x^2 + 11x + 3,\ 2x^2 - 5x - 12\ ,\ 3x^2 - 11x - 4$
6. $x - y,\ x^2 - y^2\ ,\ x^3 - y^3\ ,\ x^4 + x^2y^2 + y^4$

عاداعظم کی مدد سے مندرجہ ذیل کثیر رقمیوں کا ذو اضعاف اقل معلوم کیجیے۔

7. $4x^3 + 8x^2 - 3x - 9\ ,\ 12x^3 + 28x^2 + 13x - 3$
8. $x^4 - 15x + 14\ ,\ x^4 - 22x + 21$
9. $3x^3 + 9x^2 - 84x\ ,\ 4x^4 - 24x^3 + 32x^2$
10. $1 - x^2 - x^4 + x^5,\ 1 + 2x + x^2 - x^4 - x^5$

سوالات 11 تا 13 میں دوسری کثیر رقمی معلوم کیجیے جبکہ۔

11. پہلی کثیر رقمی $x^2 - 5x + 6$ ہے۔ عاداعظم اور ذو اضعاف اقل بالترتیب $(x - 3)$ اور $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ ہیں۔
12. پہلی کثیر رقمی $= x^2 - 5x - 14$ ، عاداعظم $= x - 7$ اور ذو اضعاف اقل $= x^3 - 10x^2 + 11x + 70$
13. پہلی کثیر رقمی $= 3x^2 + 14x + 8$ ، عاداعظم $= 3x + 2$ اور ذو اضعاف اقل $= 6x^3 + 25x^2 + 2x - 8$
14. اگر دو کثیر رقمیوں کا جن کا درجہ دو ہو، عاداعظم اور ذو اضعاف اقل بالترتیب $3x - 2$ اور $3x^3 + 7x^2 - 4$ ہو تو دونوں کثیر رقمیاں معلوم کیجیے۔
15. دو سہ درجی کثیر رقمیوں کا عاداعظم اور ذو اضعاف اقل بالترتیب $x^2 + x + 5$ اور $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x - 10$ ہو تو دونوں کثیر رقمیاں معلوم کیجیے۔

5.10 الجبری کسور کو مختصر کرنا

$\frac{P}{Q}$ طرز کا اظہاریہ الجبری کسر کہلاتا ہے۔ جبکہ P اور Q الجبری اظہاریے ہوں۔

اور $Q \neq 0$

ہر ناطق اظہاریہ الجبری کسر ہے لیکن اس کا معکوس صحیح نہیں ہے۔

5.10.1 مترادف کسور

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots$ مترادف کسور ہیں۔

اسی طرح $\frac{p(x)}{q(x)}, \frac{p(x)\ r(x)}{q(x)\ r(x)}, \frac{p(x)\ s(x)}{q(x)\ s(x)}, \ldots$ مترادف کسور ہیں۔

مثلاً $\frac{1}{x-1}, \frac{x+1}{x^2-1}, \frac{x^2+x+1}{x^3-1}$ مترادف کسور ہیں۔

نوٹ: کسور کی مختصر کرنے سے مراد دی ہوئی کسر کے مترادف ایسی کسر معلوم کرنا ہے جس کے مخرج کا درجہ کم سے کم ہو۔

مثال 1. مختصر کیجیے: $\frac{a^5b - ab^5}{a^3b + ab^3}$

حل:

$$\frac{a^5b - ab^5}{a^3b + ab^3} = \frac{ab\,(a^4 - b^4)}{ab\,(a^2 + b^2)}$$

$$= \frac{(a^2+b^2)\,(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)} = (a^2 - b^2)$$

5.10.2 الجبری کسور کی جمع اور تفریق

اس طرح کے سوالوں کو حل کرنے کا آسان طریقہ یہ ہے کہ ان کے مخرجوں کا ذو اضعاف اقل لے لیا جائے۔ مندرجہ ذیل مثالوں سے اس کی وضاحت کیجاتی ہے۔

مثال 1. مختصر کیجیے: $\frac{2ab}{a^3 - b^3} + \frac{2a}{a^2+ab+b^2}$

حل:

$$\frac{2ab}{a^3-b^3} + \frac{2a}{a^2+ab+b^2} = \frac{2ab}{(a-b)\,(a^2+ab+b^2)} + \frac{2a}{(a^2+ab+b^2)}$$

$$= \frac{2ab + 2a\,(a-b)}{(a-b)\,(a^2+ab+b^2)}$$

$$= \frac{2ab + 2a^2 - 2ab}{(a-b)\,(a^2+ab+b^2)}$$

پس

$$\frac{2ab}{a^3-b^3} + \frac{2a}{a^2+ab+b^2} = \frac{2a^2}{(a-b)\,(a^2+ab+b^2)}$$

مثال 2. مختصر کیجیے: $\dfrac{x+2}{x^2+4x+3} - \dfrac{2x-6}{x^2-x-2} + \dfrac{x-1}{x^2+x-6}$

حل: پہلے ہر مخرج کے اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x^2+4x+3 &= x^2+x+3x+3 \\
&= x(x+1)+3(x+1) \\
&= (x+1)(x+3) \\
x^2-x-2 &= x^2-2x+x-2 \\
&= x(x-2)+1(x-2) = (x-2)(x+1) \\
x^2+x-6 &= x^2+3x-2x-6 \\
&= x(x+3)-2(x+3) = (x+3)(x-2)
\end{aligned}$$

پس مخرجوں کا ذواضعاف اقل $= (x+1)(x+3)(x-2)$

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x^2+4x+3} - \frac{2x-6}{x^2-x-2} + \frac{x-1}{x^2+x-6} &= \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} - \frac{2(x-3)}{(x+1)(x-2)} + \frac{x-1}{(x+3)(x-2)} \\
&= \frac{(x+2)(x-2)-2(x-3)(x+3)+(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+3)(x-2)} \\
&= \frac{x^2-4-2x^2+18+x^2-1}{(x+1)(x+3)(x-2)} \\
&= \frac{2x^2-2x^2-5+18}{(x+1)(x+3)(x-2)} \\
&= \frac{13}{(x+1)(x+3)(x-2)}
\end{aligned}$$

5.10.3 الجبری کسور کی ضرب

اگر P, Q ، R اور S کثیر رقمیاں ہیں جبکہ Q اور S صفر نہیں ہیں تو

$$\frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}$$

جبکہ $\dfrac{PR}{QS}$ کو مختصر ترین صورت میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

مثال 1. $\dfrac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a}$ اور $\dfrac{b^2-6b+9}{b^3+2b}$ کو ضرب دیجیے جبکہ

$$\forall\, a,b : ab-6+2b-3a \neq 0 \text{ اور } b^3+2b \neq 0$$

حل:

$$\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b} = \frac{a(b^2+2)}{ab+2b-3a-6} \times \frac{(b-3)^2}{b(b^2+2)}$$

$$= \frac{a(b^2+2)}{b(a+2)-3(a+2)} \times \frac{(b-3)^2}{b(b^2+2)}$$

$$= \frac{a(b^2+2)}{(a+2)(b-3)} \times \frac{(b-3)^2}{b(b^2+2)}$$

$$= \frac{a(b^2+2)(b-3)^2}{(a+2)(b-3)(b^2+2)b} = \frac{a(b-3)}{b(a+2)}$$

5.10.4 الجبری کسور کی تقسیم

فرض کیجیے P , Q , R اور S غیر صفر کثیر رقمیاں ہیں۔ تو ایک الجبری کسر $\frac{P}{Q}$ کو $\frac{R}{S}$ سے تقسیم کا مطلب ہے کہ $\frac{P}{Q}$ کو $\frac{R}{S}$ کے ضربی معکوس سے ضرب دیا جائے یعنی $\frac{S}{R}$ سے۔

پس $\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R}$

اس کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. مختصر کیجیے: $\frac{y^2}{x^2-5x+6} \div \frac{xy}{x^2y-2xy}$

حل:

$$\frac{y^2}{x^2-5x+6} \div \frac{xy}{x^2y-2xy} = \frac{y^2}{x^2-5x+6} \times \frac{x^2y-2xy}{xy}$$

$$= \frac{y^2}{(x-2)(x-3)} \times \frac{xy(x-2)}{xy}$$

$$= \frac{y^2}{x-3}$$

مثال 2. مختصر کیجیے: $\left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}\right) \div \left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}\right)$

حل:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right) \div \left(\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}\right) = \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)\times(a+b)} \div \frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)\times(a-b)}$$

$$= \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} \times \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2-(a+b)^2}$$

$$= \frac{2(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}{(a-b)(a+b)\quad(-4ab)}$$

$$= -\frac{a^2+b^2}{2ab}$$

الجبری کسور میں بعض اوقات قوسین استعمال کیے جاتے ہیں۔ ان قوسین کو مختصر کرنے کا وہی طریقہ ہے جو اعداد میں ہوتا ہے۔

مشق 5.11

مختصر کیجیے۔

1. $\dfrac{a^3-8a^2+11a+20}{a^3-6a^2-7a+60}$, $\forall\ a : a^3-6a^2-7a+60 \neq 0$

2. $\dfrac{4}{a^2-4a-5}+\dfrac{8}{a^2-1}$, $\forall\ a : a^2-4a-5 \neq 0$, $a \neq \pm 1$

3. $\dfrac{b^2+2}{b^3-8}+\dfrac{9}{b-2}$, $\forall\ b : b \neq 2$

4. $\dfrac{4xy}{x^3+y^3}-\dfrac{x}{x^2-xy+y^2}$, $\forall\ x, y : x^3+y^3 , x^2-xy+y^2 \neq 0$

5. $\dfrac{1}{4a^2-b^2}-\dfrac{1}{2a-b}+\dfrac{1}{2a+b}$, $\forall\ a, b : 4a^2-b^2 , 2a-b, 2a+b \neq 0$

6. $\dfrac{x^2}{(x-y)\,(y-z)}+\dfrac{y^2}{(z-x)\,(x-y)}+\dfrac{z^2}{(y-z)\,(z-x)}$, $\forall\ x, y, z : x-y, y-z, z-x \neq 0$

7. $\dfrac{3}{x+6}+\dfrac{4}{x+3}-\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{4}{x+5}$, $\forall\ x \neq -6, -3, -2, -5$

8. $\dfrac{x^2\,(y-z)}{(x+y)\,(x+z)}-\dfrac{y^2\,(z-x)}{(y+z)\,(y+x)}+\dfrac{z^2\,(x-y)}{(z+x)\,(z+y)}$, $\forall\ x, y, z : x+y,\ y+z, z+x \neq 0$

9. $\dfrac{x^2-(2y-3z)^2}{(x+3z)^2-4y^2}-\dfrac{4y^2-(x-3z)^2}{(x+2y)^2-9z^2}+\dfrac{(x-2y)^2-9z^2}{(2y+3z)^2-x^2}$

$\forall\ x, y, z : (x+3z)^2-4y^2, (x+2y)^2-9z^2, (2y+3z)^2-x^2 \neq 0$

10. مختصر کیجیے:

(i) $\dfrac{(a+b)^2-3ab}{2\,(a-b)^2+4ab} \times \dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{a^3+b^3}$ (Denominator $\neq 0$)

(ii) $\dfrac{y^2+y+1}{y+1} \times \dfrac{y-1}{y+1}y \times \dfrac{y^2-1}{y^3-1}$ (Denominator $\neq 0$)

(iii) $\dfrac{x^2+xy}{y^2+xy} \times \dfrac{y^2-xy}{x^2-xy} \times \dfrac{2}{x^2-y^2}$ (Denominator $\neq 0$)

(iv) $\dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3} \times \dfrac{(x-y)^2+xy}{x^2-xy} \times \dfrac{x^3+xy^2}{(x+2y)^2-2xy}$ (Denominator $\neq 0$)

(v) $\left(\dfrac{2x+y}{2x-y} + \dfrac{2x-y}{2x+y}\right) \div \left(\dfrac{2x-y}{2x+y} + \dfrac{2x+y}{2x-y}\right)$ (Denominator $\neq 0$)

(vi) $\dfrac{2y^2-2yz}{4yz} \times \left(\dfrac{y-z}{y+z} - 1\right)$ (Denominator $\neq 0$)

.11 مختصر کیجیے:

(i) $\dfrac{x+2y}{x^2-xy} \div \dfrac{x^2+4xy+3y^2}{x(x^2-y^2)}$ (Denominator $\neq 0$)

(ii) $\dfrac{a^2+ab}{a^2-ab} \div \dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}$ (Denominator $\neq 0$)

(iii) $\dfrac{a^2-b^2}{a^3-b^3} \times \dfrac{(a-b)^2 \times ab}{(a+b)^2-4ab} \div \dfrac{a^3b-ab^3}{a^3-b^3}$ (Denominator $\neq 0$)

(iv) $\dfrac{x^2-2x+4}{x-4} \div \dfrac{x^3+4x^2-5x}{x-2x+1} \times \dfrac{x^2+x-2}{x(x^3+8)}$ (Denominator $\neq 0$)

.12 مختصر کیجیے:

(i) $\left[\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3} \times \dfrac{(a-b)^2+ab}{(a+2b)^2-2ab}\right] \div \left(\dfrac{a^2-ab}{a^3-8b^3}\right)$ (Denominator $\neq 0$)

(ii) $\left(\dfrac{x+5}{x^2-2x+4} \div \dfrac{x^2-2x+1}{x^3+4x^2-5x}\right) \times \dfrac{x^4+8x}{x^2+x-2}$ (Denominator $\neq 0$)

(iii) $\dfrac{4x^2-4xy}{2xy} \div \left[\left(1-\dfrac{x-y}{x+y}\right) \div \left(1+\dfrac{x-y}{x+y}\right)\right]$ (Denominator $\neq 0$)

5.11 الجبری کسور کا اختصار جس میں چاروں بنیادی عوامل ہوں

ایسے سوالوں کو حل کرنے کے لیے جن میں چاروں بنیادی عوامل ہوں۔ عوامل کو مندرجہ ذیل ترتیب میں حل کرتے ہیں۔

(i) تقسیم $(\div)$

(ii) ضرب $(\times)$

(iii) جمع $(+)$

(iv) تفریق $(-)$

اس کی وضاحت مندرجہ ذیل مثال سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. مختصر کیجیے: $\dfrac{x^4-y^4}{x^2+2xy+y^2} + \dfrac{x-y}{x(x+y)} \div \dfrac{x^2+y^2}{x}$

حل:
$$\frac{x^4-y^4}{x^2+2xy+y^2} + \frac{x-y}{x(x+y)} \div \frac{x^2+y^2}{x} = \frac{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)}{(x+y)^2} + \frac{(x-y)}{x(x+y)} \times \frac{x}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{(x-y)(x^2+y^2)}{(x+y)} + \frac{(x-y)}{(x+y)(x^2+y^2)}$$
$$= \frac{(x-y)(x^2+y^2)^2 + (x-y)}{(x+y)(x^2+y^2)}$$
$$= \frac{(x-y)\{(x^2+y^2)^2+1\}}{(x+y)(x^2+y^2)}$$
$$= \frac{(x-y)\{(x^4+y^4+2x^2y^2)+1\}}{(x+y)(x^2+y^2)}$$
$$= \frac{(x-y)(x^4+y^4+2x^2y^2+1)}{(x+y)(x^2+y^2)}$$

مشق 5.12

مندرجہ ذیل الجبری کسور کو مختصر کیجیے:

1. $\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2} + \dfrac{x+y}{x-y}\right) \div \left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2} - \dfrac{x+y}{x-y}\right)$

2. $\left[\dfrac{(x+y)^2}{(x+3y)^2} - \dfrac{(x-y)^2}{(x+3y)^2}\right] \div \dfrac{4xy}{x+3y} - \left(\dfrac{x}{x-y} \times \dfrac{y}{x+3y}\right) \div \dfrac{xy}{x-y}$

3. $\left[\dfrac{3+6x+12x^2}{3-3x} \div \dfrac{(1-2x)}{1-8x^3}\right] - \left[\dfrac{(1+6x)^2}{1-5x+6x^2} \times \dfrac{1-5x+6x^2}{1+6x}\right]$

4. $\left\{\left(\dfrac{1}{y^4+1} + \dfrac{1}{y^2-1}\right) \div \left(\dfrac{1}{y^2+1} + \dfrac{y^6}{y^2-1}\right)\right\} \times \dfrac{y^8+y^6+y^2-1}{2y^2}$

5. $[\{(x+y)+(x-y)\} \div \{(x+y)-(x-y)\}] \times \dfrac{2xy(x-y)}{x^2-y^2}$

5.12 الجبری اظہاریوں کا جذرالمربع

سابقہ جماعتوں میں آپ کامل مربع اعداد اور ناطق اعداد کے جذر نکالنے کا طریقہ سیکھ چکے ہیں۔ اب الجبری اظہاریے کا جذر نکالنے کا طریقہ سیکھتے ہیں۔

الجبری اظہاریوں کا جذرالمربع دو طریقوں سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(i) بذریعہ اجزائے ضربی (ii) بذریعہ تقسیم

5.12.1 جذرالمربع بذریعہ اجزائے ضربی

اس طریقہ کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. اجزائے ضربی کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے $64a^4 - 112a^2b^2 + 49b^4$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل:

$$64a^4 - 112a^2b^2 + 49b^4 = (8a^2)^2 - 2(8a^2)(7b^2) + (7b^2)^2$$
$$= (8a^2 - 7b^2)^2$$

اس لیے مطلوبہ جذر $= 8a^2 - 7b^2$

مثال 2. $(y^2 - 9y + 20)(y^2 - 11y + 30)(y^2 - 10y + 24)$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل:

$$y^2 - 9y + 20 = (y-4)(y-5)$$
$$y^2 - 11y + 30 = (y-5)(y-6)$$
$$y^2 - 10y + 24 = (y-4)(y-6)$$
$$(y^2 - 9y + 20)(y^2 - 11y + 30)(y^2 - 10y + 24) = (y-4)(y-5)(y-5)(y-6)(y-4)(y-6)$$
$$= (y-4)^2 (y-5)^2 (y-6)^2$$
$$= [(y-4)(y-5)(y-6)]^2$$

پس مطلوبہ جذر $= (y-4)(y-5)(y-6)$

مثال 3. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$ کا جذر نکالیے۔

حل:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4\right\} - 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$$
$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x - \frac{1}{x}\right) + 4$$
$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x - \frac{1}{x}\right)(2) + (2)^2$$
$$= \left\{\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2\right\}^2$$
$$= \left(x - \frac{1}{x} - 2\right)^2 = \left(x - 2 - \frac{1}{x}\right)^2$$

پس مطلوبہ جذر $= x - 2 - \frac{1}{x}$

یا

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right) = x^2+2+\frac{1}{x^2}-4x+\frac{4}{x}$$
$$= x^2+\frac{1}{x^2}+4-2+\frac{4}{x}-4x$$
$$= (x^2)+\left(-\frac{1}{x}\right)^2+(-2)^2+2(x)\left(-\frac{1}{x}\right)+2\left(-\frac{1}{x}\right)(-2)+2(-2)(x)$$

کیونکہ $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

لہٰذا

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right) = \left(x-\frac{1}{x}-2\right)^2$$
$$= \left(x-2-\frac{1}{x}\right)^2$$

پس مطلوبہ جذر $= x-2-\frac{1}{x}$

مشق 5.13

بذریعہ اجزائے ضربی مندرجہ ذیل اظہاریوں کا جذر معلوم کیجیے:

1. $25x^6+20x^3y^2+4y^4$
2. $49(x+2y)^2-28(x+2y)z^2+4z^4$
3. $\frac{4x^4}{y^4}-4+\frac{y^4}{x^4}$
4. $\frac{x^4y^6}{9}+\frac{8x^3}{3}+\frac{16x}{y^6}$
5. $\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-4\left(a-\frac{1}{a}\right)+2$
6. $\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)-10\left(y-\frac{1}{y}\right)+23$
7. $\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-4\left(y-\frac{1}{y}\right)$
8. $\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)+2\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+3$
9. $(y^2-9y+20)(y^2-8y+15)(y^2-7y+12)$
10. $(x^4+y^4)^2-(x^4-y^4)^2$
11. $(x^2+x-20)(x^2+13x+40)(x^2+4x-32)$
12. $x^2+\frac{y^2}{16}+z^2+\frac{xy}{2}-2xz-\frac{yz}{2}$
13. $\frac{y^4}{x^4}+\frac{x^4}{y^4}+3+\frac{2y^2}{x^2}+\frac{2x^2}{y^2}$
14. $\frac{x^6}{y^6}+\frac{y^6}{x^6}+3+\frac{2y^3}{x^3}+\frac{2x^3}{y^3}$

5.12.2 جذرالمربع بذریعہ تقسیم

کسی الجبری اظہاریے کا جذر نکالنا ہو تو بعض اظہاریے آسانی سے کامل مربع میں تبدیل ہو جاتے ہیں۔ بعض ایسے پیچیدہ ہوتے ہیں کہ کامل مربع کی شکل میں آسانی سے تبدیل نہیں ہو پاتے۔ ایسی صورت میں جذر معلوم کرنے کے لیے طریقہ تقسیم استعمال کیا جاتا ہے۔ اس طریقہ کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. $4a^4 + 8a^3 + 8a^2 + 4a + 1$ کا جذر تقسیم کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

حل:

	$2a^2 + 2a + 1$
$2a^2$ $+2a^2$	$4a^4 + 8a^3 + 8a^2 + 4a + 1$ $\underline{-}4a^4$
$4a^2 + 2a$ $+ 2a$	$8a^3 + 8a^2 + 4a + 1$ $\underline{-}8a^3 \underline{\pm} 4a^2$
$4a^2 + 4a + 1$ $+ 1$	$4a^2 + 4a + 1$ $\underline{-}4a^2 \underline{\pm} 4a \underline{\pm} 1$
$4a^2 + 4a + 2$	0

اس طرح مطلوبہ جذر $= 2a^2 + 2a + 1$

وضاحت:

پہلا مرحلہ: $\sqrt{4a^2} = 2a^2$ جو مطلوبہ جذر کی پہلی رقم ہے۔

دوسرا مرحلہ: جذر کی پہلی رقم کا مربع دیئے ہوئے اظہاریے سے تفریق کیا۔ اس طرح باقی $8a^3 + 8a^2 + 4a + 1$ بچا۔ $2a^2$ کو $2a^2$ میں جمع کرنے پر $4a^2$ حاصل ہوا جو نئے مقسوم علیہ کی پہلی رقم ہے۔

تیسرا مرحلہ: باقی کی پہلی رقم $8a^3$ کو $4a^2$ سے تقسیم کرنے پر $2a$ حاصل ہوا جو مطلوبہ جذر کی دوسری رقم ہے۔ $2a$ کو مطلوبہ جذر کی پہلی رقم میں جمع کیا۔ $2a$ کو نئے مقسوم علیہ میں جمع کرنے پر $4a^2 + 2a$ حاصل ہوا۔

چوتھا مرحلہ: $4a^2 + 2a$ اور $2a$ کے حاصل ضرب کو باقی میں سے تفریق کیا تو دوسرا باقی $4a^2 + 4a + 1$ بچا۔ جذر کی دوسری رقم $2a$ کو $4a^2 + 2a$ میں جمع کرنے پر $4a^2 + 4a$ حاصل ہوا جو تیسرے مقسوم علیہ کی دو رقمیں ہیں۔

پانچواں مرحلہ: دوسرے باقی کی پہلی رقم $4a^2$ کو تیسرے مقسوم علیہ کہ پہلی رقم سے تقسیم کرنے پر 1 حاصل ہوا جو مطلوبہ جذر کی تیسری رقم ہے۔ اس 1 کو تیسرے مقسوم علیہ میں جمع کیا جو $4a^2 + 4a + 1$ ہوگیا۔ اب اس مقسوم علیہ کو 1 سے ضرب دے کر دوسرے باقی میں سے تفریق کرنے پر صفر باقی بچا۔

پس عمل مکمل ہوگیا۔ یوں مطلوبہ جذر $2a^2 + 2a + 1$ ہے۔

واضح رہے کہ جذر نکالنے کے عمل سے پہلے اظہاریے کو متغیر کے لحاظ سے ترتیب نزولی میں لکھتے ہیں۔

مثال 2. $6-\frac{9}{x^4}+4x-\frac{12}{x^3}+\frac{4}{x^2}+x^4$ کا جذر نکالیے۔

حل: ترتیب نزولی میں لکھنے سے

$$x^4+\frac{4}{x^2}+\frac{12}{x^3}-4x+\frac{9}{x^4}-6 = x^4-4x-6+\frac{4}{x^2}+\frac{12}{x^3}+\frac{9}{x^4}$$

اب

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2} \\
\hline
x^2 & x^4-4x-6+\frac{4}{x^2}+\frac{12}{x^3}+\frac{9}{x^4} \\
x^2 & \underline{-}\,x^2 \\
\hline
2x^2-\frac{2}{x} & -4x-6+\frac{4}{x^2}+\frac{12}{x^3}+\frac{9}{x^4} \\
-\frac{2}{x} & \mp 4x \quad \pm\frac{4}{x^2} \\
\hline
2x^2-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2} & -6+\frac{12}{x^3}+\frac{9}{x^4} \\
-\frac{3}{x^2} & \mp 6\pm\frac{12}{x^3}\pm\frac{9}{x^4} \\
\hline
2x^2-\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2} & 0
\end{array}$$

پس مطلوبہ جذر $= x^2-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}$

مثال 3. $5 + 10x^2 + 4x^3 + x^4$ میں کیا جمع کیا جائے کہ یہ مکمل مربع بن جائے؟

حل:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+3 \\
\hline
x^2 & x^4+4x^3+10x^2+5 \\
+x^2 & \underline{-}\,x^4 \\
\hline
2x^2+2x & 4x^3+10x^2+5 \\
+2x & \underline{-}\,4x^3\pm 4x^2 \\
\hline
2x^2+4x+3 & 6x^2+0x+5 \\
3 & \underline{-}\,6x^2\pm 12x\pm 5 \\
\hline
2x^2+4x+6 & -12x-4
\end{array}$$

یعنی $(12x + 4)$ − باقی بچا۔ گویا $12x + 4$ جمع کرنے پر دیا ہوا اظہاریہ کامل مربع بن جائے گا۔

مثال 4. a اور b کی کس قیمت کے لیے $x^4+4x^3+10x^2+ax+b$ کامل مربع ہے؟

حل:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+3 \\
\hline
x^2 & x^4+4x^3+10x^2+ax+b \\
+x^2 & \underline{-}\,x^4 \\
\hline
2x^2+2x & 4x^3+10x^2+ax+b \\
+2x & \underline{-}\,4x^3\pm 4x^2 \\
\hline
2x^2+4x+3 & 6x^2+ax+b \\
+3 & \underline{-}\,6x^2\pm 12x\pm 9 \\
\hline
2x^2+4x+6 & (a-12)\,x+b-9
\end{array}$$

چونکہ دیا ہوا اظہاریہ کامل مربع ہے اس لیئے x کی ہر قیمت پر باقی صفر ہونا چاہیے۔

یعنی $(a-12)x+(b-9)=0$

یہ ممکن ہے اگر $a-12=0$ اور $b-9=0$

یا $a=12$ اور $b=9$

واضح رہے کہ

$$\text{ناطق اظہاریہ کا جذر} = \frac{\text{شمار کنندہ کا جذر}}{\text{مخرج کا جذر}}$$

مثال.5 $\dfrac{x^4y^4+2x^2y^2+1}{4z^4+8z^3+8z^2+4z+1}$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل:

$$\sqrt{\frac{x^4y^4+2x^2y^2+1}{4z^4+8z^3+8z^2+4z+1}}=\sqrt{\frac{(x^2y^2+1)^2}{(2z^2+2z+1)^2}}$$

$$=\frac{(x^2y^2+1)}{2z^2+2z+1}$$

مشق 5.14

مندرجہ ذیل اظہاریوں کا جذر المربع بذریعہ تقسیم معلوم کیجیے۔

1. $4a^4+8a^3+8a^2+4a+1$
2. $a^4+10a^3+31a^2+30a+9$
3. $\dfrac{x^4}{y^4}+\dfrac{y^4}{x^4}+3+\dfrac{2x^2}{y^2}+\dfrac{2y^2}{x^2}$
4. $y^4+\dfrac{1}{y^4}+2y^2+\dfrac{2}{y^2}+3$
5. $a^4+\dfrac{1}{a^4}+8\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)+18$
6. $y^4+\dfrac{1}{y^4}+4\left(y^2-\dfrac{1}{y^2}\right)+2$
7. $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2+4\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)$
8. $x^4+\dfrac{y^4}{16}+z^2+\dfrac{x^2y^2}{2}-2x^2z-\left(\dfrac{y^2z}{2}\right)$
9. $4a^4+4a^3+5a^2+2a+5$ میں کیا جمع کیا جائے کہ یہ مکمل مربع بن جائے؟
10. $x^4+4x^3+10x^2+14x+7$ میں کیا جمع کیا جائے کہ یہ مکمل مربع بن جائے؟
11. p کی کس قیمت کے لیے $4a^4+4a^3-3a^2-pa+1$ مکمل مربع ہوگا؟
12. q کی کس قیمت کے لیے $4x^4+12x^3+25x^2+24x+q$ مکمل مربع ہوگا؟
13. p اور q کی کن قیمتوں کے لیے $4x^4+12x^3+25x^2+px+q$ مکمل مربع ہوگا۔

14. p اور q کی کن قیمتوں کے لیے $x^4 + 4x^3 + 10x^2 + px + q$ مکمل مربع ہوگا۔

مندرجہ ذیل کا جذر معلوم کیجیے۔

15. $\dfrac{(x-\frac{1}{x})^2 - 4\,(x-\frac{1}{x}) + 4}{(y-\frac{1}{y})^2 - 4\,(y+\frac{1}{y}) + 8}$ 16. $\dfrac{4a4 + 12a^3 + 25a^2 + 24a + 16}{(b^2+\frac{1}{b^2})^2 - 8\;(b^2-\frac{1}{b^2}) + 12}$

متفرق مشق V

1. مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $d^{n+1} - d^{3n+1} - d^{5n+2}$ (ii) $r^8 - 256y^8$ (iii) $1 + 4x + 4x^2$

(iv) $(x + 2y)^{2n} + 18(x + 2y)^n + 81$ (v) $t^4 - 0.1t^2 + 0.0025$ (vi) $9a^{4n} - 36x^{2n}z^{4n}$

(vii) $9n^{4x} - 121m^{4y}$ (viii) $a^6 - 2a^3 - 15$ (ix) $-10x^4 - x^2y^2 + 24y^4$ (x) $64r^6 - s^6$

2. مندرجہ ذیل اظہاریوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $r^{12}s^{12} - y^{12}z^{12}$ (ii) $x^4y^4 - x^2y^2 + 2$

(iii) $343y^6 - 64z^6 - 7y^2 + 4z^2$ (iv) $a^6 + \frac{4}{3}a^4 + \frac{2}{7}a^3 + \frac{4}{9}a^2 + \frac{4a}{21} + \frac{1}{49}$

[اشارہ : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$]

3. مسئلہ باقی کی مدد سے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $a^6 - 7a^2 + 6$ (ii) $2a^6 - 3a^4 - 4$ { اشارہ : $a^2 = x$ رکھیں }

4. بذریعہ تقسیم مندرجہ ذیل کثیر رقمیوں کا عادِ اعظم معلوم کیجیے۔

$4x^3 - 3x^2 - 24x - 9\;,\; 8x^3 - 2x^2 - 53x - 39$

5. دو کثیر رقمیوں کے عادِ اعظم اور ذو اضعاف اقل بالترتیب $(x - 5)$ اور $2x^3 + 3x^2 - 44x - 105$ ہیں۔ اگر ایک کثیر رقمی $2x^2 - 3x - 35$ ہے تو دوسری کثیر رقمی معلوم کیجیے۔

6. مختصر کیجیے: $\left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \div \left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right)\right] \times \left[\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \div \left(\frac{y}{y^2+x^2}\right)\right]$

7. a اور b کی کس قیمت کے لیے $4y^4 + 12y^3 + 25y^2 + 4ay + b$ مکمل مربع ہوگا ؟

8. مندرجہ ذیل خالی جگہیں پر کیجیے۔

(i) $2a^2b + 2ab^2 - 8abc - 2abc = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(ii) $a^4b^2 - a^2b^4 = a^2b^2\,(\ldots\ldots\ldots)\,(\ldots\ldots\ldots)$

(iii) $x^2y^2 + xy - 2$ کے اجزائے ضربی $= (\ldots\ldots\ldots)\,(\ldots\ldots\ldots)$

(iv) $2\,(a-b)^2 - (a-b)^3 = (a-b)^2\,(\ldots\ldots\ldots)$

(v) $a^4 - 0.4a^2 + 0.04 = \ldots\ldots\ldots$

(vi) $b^2 - 14b - 72 = \ldots\ldots\ldots$

(vii) $5 - 12x + 7x^2 = \ldots\ldots\ldots$

(viii) $27x^6 - 125y^3 = \ldots\ldots\ldots$

9. مندرجہ ذیل خالی جگہیں پر کیجیے۔

(i) $x^3 + 8y^3$ اور $x + 2y$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(ii) $a^2 - 7a + 10$ اور $a^2 + a - 6$ کا ذواضعاف اقل .... ہے۔

(iii) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ کا جذرالمربع .... ہے۔

(iv) $x^2 + 5xy + 6y^2$ اور $x^2 + 3xy + 2y^2$ کا ذواضعاف اقل .... ہے۔

(v) $x^4 - 5x^2 + 6$ اور $x^4 - 4x^2 + 3$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

10. درست جواب پر نشان (✓) لگائیے۔

(i) $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1 = \ldots\ldots\ldots$

(a) $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)$ (b) $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(x-1\right)$

(c) $\left(x-1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)$ (d) $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}-1\right)$

(ii) $x^4 - 0.4x^2 + 0.04 = \ldots\ldots\ldots$

(a) $(x-2.0)^2$ (b) $(x^2-0.2)^2$ (c) $(x^2-0.2)\,(x-0.2)$ (d) $(x^2+2.0)^2$

(iii) $(a^2-b^2)^2 = \ldots\ldots\ldots$

(a) $(a+2ab+b^2)\,(a^2-2ab+b^2)$ (b) $(a^2+2ab+a^2b^2)\,(a^2-2ab+a^2b^2)$

(c) $(a^2+2ab+a^2b^2)^2$ (d) $(a^2-2ab+a^2b^2)^2$

(iv) $6ab^2 + 7ab - 5a = \ldots\ldots\ldots$

(a) $(2b-1)\,(3b+5)$ (b) $(2b+1)\,(3b-5)$

(c) $a(2b-1)\,(3b+5)$ (d) $a(2b+1)\,(3b-5)$

(v) $x^3y^6 + 125 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(a) $(xy^2 + 5)(x^2y - 5)$ (b) $(xy^2 + 5)(x^2y^4 - 5xy^2 + 25)$

(c) $(xy^2 - 5)(x^4y^2 + 5x^2y + 25)$ (d) $(x^2y^2 - 5)(x^4y^4 - x^2y^2 + 25)$

(vi) $x^3 - x^2 + 2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(a) $(x - 1)(x^2 + 2x + 2)$ (b) $(x + 1)(x^2 - 2x - 2)$

(c) $(x + 1)(x^2 + 2x - 2)$ (d) $(x + 1)(x^2 - 2x + 2)$

.11 درست جواب پرنشان (✓) لگائیے۔

(i) اگر $(x^3 - x^2 - 226x + 1410) \div (x + 17)$ تو باقی .... ہے۔

(a) 0 (b) 20 (c) 40 (d) 50

(ii) $x^4 - y^4$ اور $x^2 + y^2$ کا عادِاعظم .... ہے۔

(a) $x^4 - y^4$ (b) $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$ (c) $x^2 + y^2$ (d) $x^2 - y^2$

(iii) $8 - x^3$ اور $16 - x^4$ کا عادِاعظم .... ہے۔

(a) $(x^3 - 8)(x^4 - 4)$ (b) $x^4 - 4$ (c) $x - 2$ (d) $x + 2$

(iv) $\dfrac{21x^2 - 7xy}{14x^2y - 21xy^2}$ کی مختصر ترین صورت .... ہے۔

(a) $\dfrac{x - 3y}{(3x - 2y)\,y}$ (b) $\dfrac{3x - y}{y\,(2x - 3y)}$

(c) $\dfrac{3x + y}{y\,(2x - 3y)}$ (d) $\dfrac{(3x - y)y}{(2x - 3y)}$

(v) $y^3 - x^3$ اور $x^6 - y^6$ کا ذواضعاف اقل .... ہے۔

(a) $x^3 - y^3$ (b) $x^3 + y^3$ (c) $x^6 + y^6$ (d) $x^6 - y^6$