یونٹ 6

قالب

6.1 تعارف

میٹرکس (Matrix) لاطینی لفظ ہے۔ جسے ہم قالب کہیں گے۔ ریاضی میں قالب (Matrix) اشیاء (اعداد یا متغیرات) کی ایسی ترتیب کو کہتے ہیں جسے مستطیلی شکل میں لکھا جاتا ہے۔ اس کے ارکان کو کسی مخصوص ترتیب سے بڑے خطوط وحدانی میں لکھتے ہیں۔ قالبوں کو سب سے پہلے 1858ء میں آرتھر کیلے (Arther Kelly) نے متعارف کرایا تھا۔

قالبوں کو بہت سی عملی صورت حال میں استعمال کیا جاتا ہے۔ مثلاً ایک ادارہ اپنی دو مصنوعات p_1 اور p_2 اپنے دو صارفوں c_1 اور c_2 کو مہیا کرتا ہے یہ ادارہ c_1 کو بیس عدد p_1 اور c_2 کو یہی مصنوعات تیس عدد مہیا کرتا ہے۔ مزید c_1 کو مصنوعات p_2، 25 عدد اور 15 عدد صارف c_2 کو مہیا کرتا ہے۔ اِسے ذیل میں اِس طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 25 & 15 \end{bmatrix} \end{array}$$

مستطیلی شکل $\begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 25 & 15 \end{bmatrix}$ کو قالب کہتے ہیں۔ اِس قالب میں 30 20 اور 15 25 بالترتیب پہلی اور دوسری قطار اور $\begin{matrix} 20 \\ 25 \end{matrix}$ اور $\begin{matrix} 30 \\ 15 \end{matrix}$ بالترتیب پہلا اور دوسرا کالم (Columns) ہیں۔

اس طرح $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، $[a \quad b]$ قالبوں کی مثالیں ہیں۔

6.2 ترقیم (Notation)

قالب کو عموماً انگریزی کے بڑے حروف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مثلاً

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} ، \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} ، \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} ، \quad \mathbf{Y} = [a \quad b]$$

قالب **A** میں ہر اندراج اس کا رکن یا عنصر (Element) کہلاتا ہے۔ 3 ، 2- ، 1 اور 5 قالب **A** کے عناصر یا ارکان ہیں۔

6.3 قالب کا مرتبہ (Order of a Matrix)

اگر کسی قالب A میں r قطاریں اور c کالم ہوں، تو قالب کا مرتبہ $r \times c$ ہوتا ہے۔ جسے لکھتے ہیں:

مرتبہ $A = r \times c$ اور پڑھتے ہیں r سے c یا (r by c).

مثلاً
$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

مرتبہ $A = 2 \times 2$ (چونکہ قالب A میں دو قطاریں اور دو کالم ہیں)

اگر $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$، تو مرتبہ $B = 2 \times 1$ (چونکہ $r = 2$ اور $c = 1$)

نوٹ: (1) مرتبہ $A = 2 \times 2 \neq 4$ اور مرتبہ $B = 2 \times 1 \neq 2$

(2) کسی قالب کے مرتبہ میں (بائیں طرف سے) پہلے وہ عدد آئے گا جو قطاروں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہو۔

6.4 عناصر یا اندراج کا جائے وقوع

2×2 مرتبے والے قالب A کی عمومی شکل یہ ہے:

$$\begin{array}{ccc} & \text{پہلا کالم} & \text{دوسرا کالم} \\ A = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{پہلی قطار} \\ \text{دوسری قطار} \end{array} \end{array}$$

عنصر کے دائیں جانب نیچے لکھا ہوا عدد اس کے جائے وقوع کو ظاہر کرتا ہے۔ مثلاً a_{21} کا جائے وقوع دوسری قطار اور پہلا کالم ہے۔ a_{11} اور a_{22} وتری (Diagonal) عناصر کہلاتے ہیں۔

جس وتر میں یہ عناصر موجود ہوتے ہیں اسے وترِ خاص (Principal Diagonal) کہتے ہیں۔

6.5 قالبوں کی اقسام

6.5.1 مستطیلی قالب

اگر کسی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر نہ ہو تو ایسے قالب کو مستطیلی قالب (Rectangular Matrix) کہتے ہیں۔

اگر قالب A کا مرتبہ $r \times c$ ہو اور $r \neq c$ تو A مستطیلی قالب کہلاتا ہے۔

$A = [1 \;\; \sqrt{5}]$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ مستطیلی قالب کی مثالیں ہیں۔

مرتبہ $A = 1 \times 2$ (چونکہ $r = 1$, $c = 2$ اور $r \neq c$)

6.5.2 کالمی قالب

اگر کسی قالب میں صرف ایک کالم ہو تو اسے کالمی قالب (Column Matrix) یا کالمی سمتیہ (Column Vector) کہتے ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} c \\ 1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} a + 7 \\ b + 9 \end{bmatrix} , \quad D = [5]$$

کالمی قالب کی مثالیں ہیں۔ کیونکہ ان میں سے ہر ایک میں صرف ایک کالم ہے۔

6.5.3 قطاری قالب

اگر کسی قالب میں صرف ایک قطار ہو تو اسے قطاری قالب (Row Matrix) یا قطاری سمتیہ (Row Vector) کہتے ہیں۔

$$C = [1 \;\; 2] , \quad D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

مرتبہ $C = 1 \times 2$ ؛ مرتبہ $D = 1 \times 2$

قالب C اور D قطاری قالب یا قطاری سمتیہ ہیں کیونکہ ان میں صرف ایک قطار ہے۔

6.5.4 مربعی قالب

اگر کسی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو تو اسے مربعی قالب (Square Matrix) کہتے ہیں۔
اگر A ایک $r \times c$ قالب ہے اور $r = c$ ہے تو A ایک مربعی قالب ہے۔

$C = [100]$ اور $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$ مربعی قالب کی مثالیں ہیں۔

6.5.5 وتری قالب

اگر کسی مربعی قالب کے تمام عناصر صفر ہوں سوائے ان عناصر کے جو خاص وتر پر ہوں تو اسے وتری قالب (Diagonal Matrix) کہتے ہیں۔

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ وتری قالب کی مثالیں ہیں۔

6.5.6 اسکیلر یا میزانیہ قالب

ایک وتری قالب جس کے تمام وتری عناصر برابر ہوں اسکیلر یا میزانیہ قالب (*Scalar Matrix*) کہلاتا ہے۔

$G = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ اسکیلر قالب کی مثالیں ہیں۔

6.5.7 صفری قالب

ایک قالب جس کے تمام عناصر صفر ہوں صفری قالب (*Null Matrix or Zero Matrix*) کہلاتا ہے۔ اِسے عموماً O سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ O_{1\times 2} = [\,0\ \ 0\,],\ 0_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ O_1 = [\,0\,]$$

6.5.8 اکائی قالب

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ کی شکل کے قالب کو اکائی قالب (*Unit Matrix*) کہتے ہیں۔ چونکہ یہ 2 سے 2 قالب ہے اس لیے اِسے لیے I_2 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

پس $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اِس میں تمام وتری عناصر 1 کے برابر ہیں۔

مشق 6.1

.1 خالی جگہیں پر کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ میں .... قطاریں اور .... کالم ہے۔

(ii) $[a\ ,\ b]$ میں .... قطار اور .... کالم ہیں۔

(iii) $\begin{bmatrix} 5 & 0.5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ .... ہے۔

(iv) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} + 2 \\ 5 + 7 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ .... ہے۔

(v) [3] ایک .... قالب ہے جس کا مرتبہ .... ہے۔

(vi) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ ایک .... قالب ہے۔

(vii) اگر قالب A میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو تو A .... قالب کہلاتا ہے۔

(viii) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ میں پہلی قطار اور دوسرے کالم کا عنصر............... ہے۔

2. فیصلہ کیجیے کہ دیے ہوئے بیانات صحیح ہیں یا غلط۔ اپنے جواب کی توجیہہ کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ ایک مربعی قالب ہے۔

(ii) $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ایک میزانیہ قالب ہے۔

(iii) $[3 + 6 \quad \sqrt{5} + 2]$ کا مرتبہ 2×1 ہے۔

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ایک مستطیلی قالب ہے۔

(v) $[\,0 \quad 1\,]$ مرتبہ 2×1 والا اکائی قالب ہے۔

(vi) اگر قالب کا مرتبہ 1×2 ہے تو اس میں ایک قطار اور دو کالم ہیں۔

(vii) صفری قالب ہمیشہ مربعی قالب ہوتا ہے۔

(viii) وتری قالب ہمیشہ مربعی قالب ہوتا ہے۔

(ix) میزانیہ قالب مستطیلی قالب بھی ہو سکتا ہے۔

(x) قالب $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ میں عناصر 7 , 8 وترِ خاص میں ہیں۔

(xi) مربعی قالب ہمیشہ اسکیلر قالب ہوتا ہے۔

6.6 قالب کا بدل

کسی بھی مرتبہ کے دیے ہوئے قالب کی قطاروں کو کالموں یا کالموں کو قطاروں میں تبدیل کر دینے سے جو نیا قالب حاصل ہوتا ہے اُسے دیے ہوئے قالب کا بدل (*Transpose of a Matrix*) کہتے ہیں۔

اگر دیا ہوا قالب A ہے تو اس کا بدل A^t سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثالیں: فرض کیا قالب $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = A$ ہے۔ A کا مرتبہ 1×2 ہے۔ تو $[2 \quad 3] = A^t$ جس کا مرتبہ 2×1 ہے۔

اگر $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = B$ اور مرتبہ $B = 2 \times 2$ تو قالب B کا بدل $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = B^t$ ہوگا

اور مرتبہ $B^t = 2 \times 2$

(1) اگر قالب A قالب B کا بدل ہے تو قالب B بھی قالب A کا بدل ہوگا یعنی $A^t = B \Rightarrow B^t = A$
(2) یہ نکتہ بھی غور طلب ہے کہ $(A^t)^t = A$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

اور $(A^t)^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$= A$

6.7 مساوی قالب

دو قالب مساوی (Equal) کہلاتے ہیں اگر ان کے مرتبے برابر ہوں اور متناظرہ عناصر برابر ہوں۔

اگر A اور B دو مساوی قالب ہوں تو اِسے لکھتے ہیں: $A = B$

فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+2 \\ 1+2 & 3+2 \end{bmatrix}$

تو (i) A کا مرتبہ $= 2 \times 2 =$ B کا مرتبہ

(ii) A کے متناظرہ عناصر B کے متناظر عناصر کے برابر ہیں

اس لیے $A = B$

مثال: کیا $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 & 3 \\ 1+1 & \sqrt{25} \end{bmatrix}$ ؟

حل: نہیں $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ کیونکہ متناظرہ عناصر مساوی نہیں ہیں۔ حالانکہ مرتبے برابر ہیں۔

6.8 قالبوں کی جمع

اگر دو قالبوں کے مراتب برابر ہوں تو دونوں قالب جمع کیے جانے کے قابل کہلاتے ہیں۔ دو قالبوں کو جمع کرنا ہو تو ان کے متناظر عناصر جمع کر لیے جاتے ہیں۔

مواد کی دو رخی درجہ بندی (*Two-way classification*) میں قالب بہت معاون ثابت ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر ایک کمپیوٹر کی دوکان کا مالک جنوری اور فروری میں دو دکانوں A اور B کو سی ڈی روم (*CD Roms*) اور ہارڈ ڈسک (*Hard Disk*) مہیا کرتا ہے۔ جس کی تفصیل مندرجہ ذیل ہے۔

جنوری میں:

وہ A کو 25 سی ڈی روم اور B کو 30 سی ڈی روم اور A کو 20 ہارڈ ڈسک اور B کو 15 ہارڈ ڈسک مہیا کرتا ہے۔ قالب کی شکل میں اس مواد کو اس طرح دکھایا جاسکتا ہے۔

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} A & B \\ \begin{bmatrix} 25 & 30 \\ 20 & 15 \end{bmatrix} \end{array} & \begin{array}{l} \text{سی ڈی روم} \\ \text{ہارڈ ڈسک} \end{array} \end{array}$$

فروری میں:

وہ A اور B کو بالترتیب 30 اور 35 سی ڈی روم اور بالترتیب 25 اور 13 ہارڈ ڈسک مہیا کرتا ہے۔ اس مواد کو قالب کی شکل میں اس طرح دکھایا جاسکتا ہے۔

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} A & B \\ \begin{bmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 13 \end{bmatrix} \end{array} & \begin{array}{l} \text{سی ڈی روم} \\ \text{ہارڈ ڈسک} \end{array} \end{array}$$

دونوں مہینوں کی کل فروخت:

ہر دکان کو دونوں مہینوں میں فروخت شدہ سی ڈی روم اور ہارڈ ڈسک کا حساب لگایا جاسکتا ہے جو درج ذیل ہے۔

$$\begin{array}{cc} A & B \\ \begin{bmatrix} 25+30 & 30+35 \\ 20+25 & 15+13 \end{bmatrix} \end{array} \text{ یا } \begin{array}{cc} A & B \\ \begin{bmatrix} 55 & 65 \\ 45 & 28 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{سی ڈی روم} \\ \text{ہارڈ ڈسک} \end{array}$$

قالب کی ترقیم میں فرض کیجیے:

$$D = \begin{bmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 13 \end{bmatrix} \text{ (فروری میں فروخت) اور } C = \begin{bmatrix} 25 & 30 \\ 20 & 15 \end{bmatrix} \text{ (جنوری میں فروخت)}$$

دونوں قسم کے ہارڈ ویر کی دونوں مہینوں میں کل فروخت درج ذیل ہے۔

$$C + D = \begin{bmatrix} 25 & 30 \\ 20 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25+30 & 30+35 \\ 20+25 & 15+13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 & 65 \\ 45 & 28 \end{bmatrix}$$

پس صرف وہی قالب جمع کیے جاسکتے ہیں جن کے مرتبے ایک جیسے ہوں۔

اسی طرح فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$

چونکہ مرتبہ A = مرتبہ B

اس لیے A اور B جمع کے لیے سازگار یا قابل (*Confomable*) ہیں اور

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 & 3+6 \\ 5+9 & 6+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 14 & 16 \end{bmatrix}$$

عمومی اصول:

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ تو

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

6.9 جمعی ذاتی قالب

تمام حقیقی اعداد a کے لیے $a + 0 = a = 0 + a$

اسی طرح قالبوں کی جمع میں $A + O = A = O + A$

جبکہ "O" ایک صفری قالب ہے جسے جمعی ذاتی قالب (*Additive Identity Matrix*) بھی کہا جاتا ہے۔

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ اور $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ تو

$$A + O = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0 & 3+0 \\ 5+0 & 6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = A \ \ldots \ (i)$$

اور

$$O + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+2 & 0+3 \\ 0+5 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = A \ldots \text{(ii)}$$

(i) اور (ii) سے یہ واضح ہو جاتا ہے کہ $A + O = A = O + A$

6.10 قالب کا جمعی معکوس

حقیقی اعداد کے لیے ہمارے علم میں ہے کہ

(i) تفریق کا عمل جمع کے عمل کا معکوس ہے۔

(ii) اگر دو حقیقی اعداد کا مجموعہ صفر ہو تو وہ اعداد ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔ مثلاً 3 اور 3- ایک دوسرے کے جمع معکوس ہیں۔

اسی طرح دو قالب A اور B ایسے ہوں کہ ان مجموعہ A + B صفری قالب ہو تو A اور B ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔

مثلاً $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہیں کیونکہ

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & +4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

قالب A کے جمعی معکوس کو A- لکھا جاتا ہے جو A کے تمام عناصر کی علامات (*Signs*) کو تبدیل کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثلاً اگر $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ تو $-B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ ثابت کیجیے کہ $B = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$، A کا جمع معکوس ہے۔

حل: $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-7 & -8+8 \\ 6-6 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس ثابت ہوا کہ A کا جمعی معکوس B ہے۔ ہم B کو A- اور A کو B- لکھ سکتے ہیں۔

6.11 خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع

حقیقی اعداد a اور b کے لیے ہمارے علم میں ہے کہ

$a+b=b+a$ (خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع)

اسی طرح اگر قالبوں A اور B کے مرتبے ایک ہی ہوں تو $A+B=B+A$ یعنی قالبوں کی جمع بھی خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع رکھتی ہے۔

فرض کیجیے: $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 6\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}4 & 6\\9 & 10\end{bmatrix}$

چونکہ مرتبہ A = مرتبہ B

اس لیے

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 6\\9 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+4 & 3+6\\5+9 & 6+10\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}5 & 9\\14 & 16\end{bmatrix}\quad\ldots\quad(i)$$

اب

$$B+A=\begin{bmatrix}4 & 6\\9 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+2 & 6+3\\9+5 & 10+6\end{bmatrix}$$

$$B+A=\begin{bmatrix}6 & 9\\14 & 16\end{bmatrix}\quad\ldots\quad(ii)$$

(i) اور (ii) کے حوالے سے یہ واضح ہوتا ہے کہ $A+B=B+A$

6.12 خاصیت تلازم بلحاظ جمع

اگر قالبوں A, B اور C کے مرتبے ایک ہی ہوں تو

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

لہٰذا قالبوں کی جمع خاصیت تلازم رکھتی ہے

نوٹ: طلباء اس کی پڑتال بطور مشق خود کریں۔

6.13 قالبوں کی تفریق

اگر قالبوں A اور B کے مرتبے ایک ہی ہوں تو ہم اِن کی تفریق A − B کی اس طرح تعریف کرتے ہیں:

$$A - B = A + (-B)$$

جبکہ B− قالب B کا جمعی معکوس ہے۔

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ تو

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-2 & 3-1 \\ 9-0 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

عمومی اصول:

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ تو

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{bmatrix}$$

مشق 6.2

مندرجہ ذیل قالبوں میں کون سے مساوی ہیں؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

.1 $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 6-1 & 18-9 \\ 5+1 & 2+2 \end{bmatrix}$ .2 $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 3-0 & 2+5 \end{bmatrix}$

.3 $\begin{bmatrix} 5+2 & 19 \\ 13 & 7-1 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 7 & 9+10 \\ 11+2 & 6 \end{bmatrix}$

x اور y کی وہ قیمت معلوم کیجیے جن سے قالبوں کی مساوات درست ہو جائے۔

.4 $\begin{bmatrix} x \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ y \end{bmatrix}$ .5 $\begin{bmatrix} 0.2x & 5 \\ 0.3y & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6-1 \\ 3 & 2+4 \end{bmatrix}$

.6 $\begin{bmatrix} \sqrt{5}\,x & \sqrt{5}\,y \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{bmatrix}$

مختصر کیجیے اگر ممکن ہو:

7. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ 　 8. $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 \\ 0.9 & 0.4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ 　 10. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

مندرجہ ذیل قالبوں میں سے ہر ایک کے جمعی معکوس معلوم کیجیے۔

11. $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$ 　 12. $\begin{bmatrix} -7 \\ 8 \end{bmatrix}$ 　 13. $\begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -7 & 12 \end{bmatrix}$ 　 14. $\begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}$

اگر $X = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -7 & 12 \end{bmatrix}$ ، $Y = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}$ ، $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

تو ثابت کیجیے کہ:

15. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + (Z + Y)$ 　 16. $(Y + Z) + O = Y + (Z + O)$

6.14 قالب کی حقیقی عدد سے ضرب

ایک عنصر والے قالب کا مرتبہ 1×1 ہوتا ہے۔ اس لیے قالبوں کے مطالعہ میں 1×1 قالب اور حقیقی عدد میں پہچان کے لیے حقیقی عدد کو میزانیہ (Scalar) کہتے ہیں۔ کسی قالب $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ کی عدد k سے ضرب کی تعریف یہ ہے:

$k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$ ، یہ واضح رہے کہ قالب کے ہر عنصر کو k سے ضرب دی گئی ہے۔

اس ضرب کو میزانیہ ضرب (*Scalar Multiplication*) کہتے ہیں۔

مثال 1.

$$3 \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 16 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 15 & 3 \times 10 \\ 3 \times 16 & 3 \times 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 30 \\ 48 & 51 \end{bmatrix}$$

مثال 2.

$$\frac{5}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \times 1 \\ \frac{5}{4} \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{10}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

6.15 قالبوں کی ضرب

دو قالبوں کی ضرب اسی وقت ممکن ہے جب پہلے قالب (یا بائیں طرف والے قالب) کے کالموں کی تعداد اور دوسرے قالب (یا دائیں طرف والے قالب) کی قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔

اگر قالب A کا مرتبہ $m \times n$ اور قالب B کا مرتبہ $n \times p$ ہو تو $A \times B$ یا AB معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اگر مطلوبہ قالب C ہو تو C کا مرتبہ $m \times p$ ہوگا یعنی (دوسرے قالب میں قطاروں کی تعداد × پہلے قالب میں کالموں کی تعداد)۔

قالبوں کے ضرب کو سمجھنے کے لیے مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

مثال 1. فرض کیجیے۔ $A = [3 \quad 2]$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ یہاں A کا مرتبہ $= 2 \times 1$ ، اور B کا مرتبہ $= 1 \times 2$

چونکہ A میں کالموں کی تعداد = B میں قطاروں کی تعداد = 2 اس لیے AB معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مندرجہ ذیل طریقے سے حاصل ضرب معلوم کر سکتے ہیں۔

$$AB = [3 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C = [3 \times 1 + 2 + 5]$$ (چونکہ C = AB جیسا کہ اوپر بیان کیا گیا ہے)

$$= [3 + 10] = [13]$$

C کا مرتبہ $= 1 \times 1$

مثال 2. فرض کیجیے۔ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ یہاں A کا مرتبہ $= 2 \times 2$ ، اور B کا مرتبہ $= 2 \times 2$

چونکہ A کا مرتبہ $= 2 \times 2$ اور B کا مرتبہ 2×2 لہٰذا A میں کالموں کی تعداد = B میں قطاروں کی تعداد پس AB حاصل ہو سکتا ہے یا A اور B ضرب کے قابل ہیں۔

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

A کی پہلی قطار × B کا پہلا کالم $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & \\ & \end{bmatrix}$ ، $1 \times 7 + 2 \times 5$

A کی پہلی قطار × B کا دوسرا کالم $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 21 \\ & \end{bmatrix}$ ، $1 \times 9 + 2 \times 6$

B کا پہلا کالم × A کی دوسری قطار $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 9\\ 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 21\\ 41 & \end{bmatrix}$، $3\times 7+4\times 5$

B کا دوسرا کالم × A کی دوسری قطار $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 9\\ 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 21\\ 41 & 51\end{bmatrix}$، $3\times 9+4\times 6$

پس $$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 9\\ 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 21\\ 41 & 51\end{bmatrix}$$

نوٹ: عام طور پر $AB \neq BA$

مثال 3. اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 0\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$، مرتبہ $A = 2\times 2$ اور مرتبہ $B = 2\times 1$

چونکہ: A میں کالموں کی تعداد = B میں قطاروں کی تعداد، لہٰذا AB ممکن ہے۔

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times 3+1\times 4\\ 5\times 3+0\times 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6+4\\ 15+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 15\end{bmatrix}$$ اور AB کا مرتبہ $= 2\times 1$

جبکہ BA حاصل نہ ہوسکے گا اس لیے کہ B میں کالموں کی تعداد $\neq$ A میں قطاروں کی تعداد

مثال 4. ساجد اور عابد پنسل اور پنسل تراش خریدنا چاہتے تھے۔ انھوں نے دو مختلف دوکانداروں سے ان کے نرخ معلوم کیے۔ انھوں نے مندرجہ ذیل انداز سے دو جدول تیار کیں ایک جدول اشیاء کی مقدار کو ظاہر کرتی تھی اور دوسری نرخوں کو جو دکانداروں نے بتائے تھے۔

	پنسل کی تعداد	پنسل تراش کی تعداد
ساجد	8	2
عابد	4	6

جدول 1

	پہلا دکاندار	دوسرا دکاندار
پنسلوں کے نرخ	3 روپے فی پنسل	4 روپے فی پنسل
پنسل تراشوں کے نرخ	4 روپے فی پنسل تراش	5 روپے فی پنسل تراش

جدول 2

(ہم دیکھتے ہیں کہ جدول 1 میں کالموں کی تعداد جدول 2 میں قطاروں کی تعداد کے برابر ہے)

پہلے دکاندار سے ساجد نے 8 پنسلیں فی پنسل 3 روپے اور 2 پنسل تراش فی پنسل تراش 4 روپے کے حساب سے خریدے جن کی قیمت ہوئی: $8 \times 3 + 2 \times 4 = 32$ روپے

دوسرے دکاندار سے 8 پنسلیں فی پنسل 4 روپے اور 2 پنسل تراش فی پنسل تراش 5 روپے کے حساب سے خریدے جن کی قیمت ہوئی: $8 \times 4 + 2 \times 5 = 42$ روپے

اس طرح عابد نے پہلے دکاندار سے 4 پنسلیں فی پنسل 3 روپے اور 6 پنسل تراش فی پنسل تراش 4 روپے کے حساب سے خریدے جن کی قیمت ہوئی: $4 \times 3 + 6 \times 4 = 36$ روپے

دوسرے دکاندار سے 4 پنسلیں فی پنسل 4 روپے اور 6 پنسل تراش فی پنسل تراش 5 روپے کے حساب سے خریدے جن کی قیمت ہوئی: $4 \times 4 + 6 \times 5 = 46$ روپے

اشیاء کی قیمت معلوم کرنے کے لیے جدول 1 کے قطاری عناصر یا اندراج $\begin{array}{|c|c|}\hline 8 & 2 \\ \hline 4 & 6 \\ \hline\end{array}$ کو جدول 2 کے متناظر کالمی عناصر $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline\end{array}$ سے ضرب دے کر حاصل ضرب کو جمع کیا جاتا ہے۔

جیسے مندرجہ ذیل جدول میں دکھایا گیا ہے۔

$$\boxed{\begin{array}{cc} 8 \times 3 + 2 \times 4 & 8 \times 4 + 2 \times 5 \\ 4 \times 3 + 6 \times 4 & 4 \times 4 + 6 \times 5 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 32 & 42 \\ 36 & 46 \end{array}}$$

مندرجہ بالا بحث دو قالبوں کی ضرب کے طریقے کی طرف رہنمائی کرتی ہے۔

$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ کا حاصل ضرب مندرجہ ذیل ہے۔

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \times 3 + 2 \times 4 & 8 \times 4 + 2 \times 5 \\ 4 \times 3 + 6 \times 4 & 4 \times 4 + 6 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 42 \\ 36 & 46 \end{bmatrix}$$

6.16 قالبوں کے ضرب کی خصوصیات

6.16.1 قالبوں کی خاصیت تلازم بلحاظ ضرب

فرض کیجیے A, B اور C تینوں قالب ضرب کے قابل ہیں۔ تو $A(BC) = (AB)C$

اِسے قالبوں کی خاصیت تلازم بلحاظ ضرب کہتے ہیں۔

یہ تب ہی ممکن ہے جب AB اور BC دونوں حاصل ہوسکیں۔

مثال: فرض کیجیے۔ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

تو ثابت کیجیے کہ $(AB)C = A(BC)$

پڑتال: $L.H.S = (AB)C$

لہٰذا
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times1+3\times3 & 1\times0+3\times(-1) \\ 2\times1+4\times3 & 2\times0+4\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 14 & -4 \end{bmatrix}$$

پس
$$(AB)C = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 14 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10\times(-1)+(-3)\times2 & 10\times(-2)+(-3)\times4 \\ 14\times(-1)+(-4)\times2 & 14\times(-2)+(-4)\times(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10-6 & -20-12 \\ -14-8 & -28-16 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} -16 & -32 \\ -22 & -44 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (1)$$

$R.H.S = A(BC)$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times(-1)+0\times2 & 1\times(-2)+0\times4 \\ 3\times(-1)+(-1)\times2 & 3\times(-2)+(-1)\times4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0 & -2+0 \\ -3-2 & -6-4 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times(-1)+3\times(-5) & 1\times(-2)+3\times(-10) \\ 2\times(-1)+4\times(-5) & 2\times(-2)+4\times(-10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-15 & -2-30 \\ -2-20 & -4-40 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} -16 & -32 \\ -22 & -44 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (2)$$

(1) اور (2) سے واضح ہوتا ہے کہ $(AB)\,C = A(BC)$

6.16.2 قالبوں کی ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع

اگر A , B اور C کسی بھی مرتبے کے قالب ہوں تو $A(B + C) = AB + AC$ بشرطیکہ AB، BC اور AB + AC حاصل ہوسکیں۔

اسی طرح $(B + C) A = BA + CA$ بشرطیکہ BA , CA اور BA + CA حاصل ہوسکیں۔

6.16.3 قالبوں کی ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق

اگر A , B اور C کسی بھی مرتبے کے قالب ہوں تو $A(B - C) = AB - AC$ اور $(B - C) A = BA - CA$

بشرطیکہ B − C , AB , BA , AC اور CA حاصل ہوسکیں۔

مثال 1. فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

تو ثابت کیجیے کہ $A(B + C) = AB + AC$

پڑتال: $L.H.S = A(B + C)$

لہٰذا
$$B + C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-2 \\ 0+3 & 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

پس
$$A(B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 3 \times 3 & 1 \times 1 + 3 \times 6 \\ 2 \times 1 + 4 \times 3 & 2 \times 1 + 4 \times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+9 & 1+18 \\ 2+12 & 2+24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 19 \\ 14 & 26 \end{bmatrix} \quad \dots \text{(i)}$$

$$R.H.S = AB + AC$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 3 \times 0 & 1 \times 3 + 3 \times 1 \\ 2 \times 2 + 4 \times 0 & 2 \times 3 + 4 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times(-1)+3\times3 & 1\times(-2)+3\times5 \\ 2\times(-1)+4\times3 & 2\times(-2)+4\times5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 10 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 19 \\ 14 & 26 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) اور (ii) سے یہ واضح ہوتا ہے کہ $A(B + C) = AB + AC$

طلباء $(B + C)\,A = BA + CA$ کی پڑتال خود کریں۔

مثال 2. فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

تو ثابت کیجیے کہ $A(B - C) = AB - AC$

پڑتال:

$$L.H.S = A(B - C)$$

لہٰذا

$$B + (-C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2-3 \\ 0-1 & -1-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$

پس

$$A(B - C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+3\times(-1) & 1\times(-1)+3\times(-6) \\ 2\times1+4\times(-1) & 2\times(-1)+4\times(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & -1-18 \\ 2-4 & -2-24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -19 \\ -2 & -26 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$R.H.S = AB - AC$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+3\times0 & 1\times2+3\times(-1) \\ 2\times1+4\times0 & 2\times2+4\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

اور

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 0 + 3 \times 1 & 1 \times 3 + 3 \times 5 \\ 2 \times 0 + 4 \times 1 & 2 \times 3 + 4 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 18 \\ 4 & 26 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB - AC = AB + (-AC)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -18 \\ -4 & -26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & -1-18 \\ 2-4 & 0-26 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -19 \\ -2 & -26 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \text{(ii)}$$

(i) اور (ii) سے یہ واضح ہوتا ہے کہ $\mathbf{A(B-C) = AB - AC}$

طلبا خود پڑتال کریں کہ: $\mathbf{(B-C)A = BA - CA}$

مشق 6.3

اگر ممکن ہو تو حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **9.** $3 \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

10. $10 \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.9 & 0.3 \end{bmatrix}$

.11 فرح 5 کتابیں اور 4 سی ڈی خریدنا چاہتی ہے۔ کتابیں اور سی ڈی بالترتیب فی کتاب 50 روپے اور فی سی ڈی 30 روپے میں فروخت ہو رہی ہیں۔

(a) کتابوں اور سی ڈی کی تعداد کو قطاری قالب سے ظاہر کیجیے۔

(b) قیمتوں کو ظاہر کرنے کے لیے کالمی قالب استعمال کیجیے۔

(c) قالبوں کی ضرب کے ذریعے 5 کتابوں اور 4 سی ڈی کی کل قیمت معلوم کیجیے۔

.12 ایک کمپنی دو طرح کے مشروب بناتی ہے۔ جن کی فروری اور مارچ کی فروخت مندرجہ ذیل جدول میں دی گئی ہے۔

دوسری قسم	پہلی قسم	مشروب کی قسم / مہینہ
6	4	فروری
7	4.5	مارچ

اہم بات: فروخت فی ہزار میں دی گئی ہے۔ فروخت میں 50% اضافہ کمپنی کا ہدف ہے۔

(a) جدول میں دیے گئے مواد کو قالب کی شکل میں لکھیے۔

(b) ہدف کو ظاہر کرنے والا قالب لکھیے۔ (اشارہ: ہر اندراج کو 1.5 سے ضرب دیجیے)۔

.13 ایک بڑی کارپوریشن کی فروخت، فی اکائی کل منافع اور ٹیکس درج ذیل جدول میں دیے گئے ہیں۔

جدول 1

مصنوعات II	مصنوعات I	فروخت / مہینہ
2	4	جون
1	6	دسمبر

جدول 2

ٹیکس	منافع	مصنوعات
1.5	3.5	مصنوعات I
1	2	مصنوعات II

ہر مہینے کے نفع اور ٹیکس کو ایک قالب کی صورت میں ظاہر کیجیے۔

.14 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ تو ثابت کیجیے:

(i) $AB \neq BA$ (ii) $(AB)C = A(BC)$ (iii) $(BA)C = B(AC)$

(iv) $A(B + C) = AB + AC$ (v) $A(C + B) = AC + AB$ (vi) $A(C - B) = AC - AB$

(vii) $B(A - C) = BA - BC$ (viii) $AC \neq CA$

6.17 ضربی ذاتی قالب

ضربی ذاتی قالب (*Multiplicative Identity Matrix*) کو I سے ظاہر کیا جاتا ہے جسے اکائی قالب بھی کہتے ہیں، ایک مربعی قالب ہوتا ہے جس کے خاص وتر کا ہر اندراج 1 ہوتا ہے اس کے علاوہ تمام اندراجات صفر ہوتے ہیں مثلاً

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، ایک 2×2 ضربی ذاتی قالب ہے۔

$I_1 = [1]$، ایک 1×1 ضربی ذاتی قالب ہے۔

نوٹ: اگر 2×2 مرتبے کا کوئی قالب A ہے تو $AI_2 = I_2A = A$ اسی وجہ سے I کو ضربی ذاتی قالب اور اکائی قالب بلحاظ ضرب کہتے ہیں۔

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ اور $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ تو ثابت کیجیے کہ $AI_2 = I_2A = A$

پڑتال:

$$AI_2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 1 + 4 \times 0 & 5 \times 0 + 4 \times 1 \\ 2 \times 1 + 3 \times 0 & 2 \times 0 + 3 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

پس $AI_2 = A \quad \ldots (1)$

اب

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 0 \times 2 & 1 \times 4 + 0 \times 3 \\ 0 \times 5 + 1 \times 2 & 0 \times 4 + 1 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

پس $I_2A = A \quad \ldots (2)$

(1) اور (2) سے یہ واضح ہوتا ہے کہ $AI_2 = I_2A = A$

6.18 قالب کا مقطع

مربعی قالب سے منسوب عدد اس کا مقطع یا مشخص (*Determinant*) کہلاتا ہے اگر A کوئی مربع قالب ہو تو اسے کے مقطع کو det A یا |A| سے ظاہر کرتے ہیں۔

اس کی تعریف یوں کرتے ہیں:

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال: فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تو

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 3 \times 2 = 4 - 6 = -2$$

6.19 نادر اور غیر نادر قالب

اگر کسی قالب کا مقطع صفر ہو تو اِسے نادر قالب (*Singular Matrix*) کہتے ہیں۔ اور اگر مقطع صفر نہ ہو تو اسے غیر نادر قالب (*Non-Singular Matrix*) کہتے ہیں۔

مثال1. فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ تو

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times 3 - 4 \times 2 = 15 - 8 = 7$$

چونکہ $|A| \neq 0$ اس لیے A غیر نادر قالب ہے۔

مثال2. فرض کیجیے: $B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ تو

$$|B| = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \times 2 - 4 \times 3 = 12 - 12 = 0$$

چونکہ $|B| = 0$ اس لیے B نادر قالب ہے۔

6.20 قالب کا مُتّصِل (*Adjoint of a Matrix*)

مرتبہ 2×2 کے قالب A پر غور کرتے ہیں۔

فرض کیجیے $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو A کے متصل (Adjoint) کو جسے Adj A لکھا جاتا ہے، قالب A کے خاص وتر کے ارکان کو آپس میں تبدیل کر کے اور دوسرے عناصر کی علامات بدل کر حاصل کیا جاتا ہے۔

پس
$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

6.21 قالب کا ضربی معکوس

حقیقی اعداد کے سیٹ میں اگر دو اعداد کا حاصل ضرب "1" ہو تو ان اعداد کو ایک دوسرے کا ضربی معکوس کہا جاتا ہے۔

اسی طرح اگر دو قالبوں A اور B کے لیے $AB = I = BA$

تو A, B کا ضربی معکوس *(Multiplicative Inverse)* کہلاتا ہے A کے ضربی معکوس کو A^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ "I" ضربی ذاتی قالب ہے۔

پس $$A\,A^{-1} = I = A^{-1}\,A$$

واضح رہے کہ اگر کوئی قالب A غیر نادر قالب ہے تو اس کا ضربی معکوس معلوم کیا جاسکتا ہے اور اُسے معکوس *(Invertible)* پذیر کہتے ہیں۔ نادر قالب کا ضربی معکوس معلوم نہیں کیا جاسکتا ہے لہٰذا اُسے غیر معکوس پذیر *(Non-Invertible)* کہا جاتا ہے۔

اگر A غیر نادر قالب ہو تو اس کا ضربی معکوس ہوگا۔ $\boxed{A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{|A|}}$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ تو A^{-1} معلوم کیجیے اگر ممکن ہو۔

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 5 \times 2 = 12 - 10 = 2$$

چونکہ $|A| \neq 0$ اس لیے A^{-1} معلوم کیا جاسکتا ہے۔

اب $$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

اس امر کی تصدیق کی جاسکتی ہے کہ $A\,A^{-1} = I = A^{-1}\,A$

مشق 6.4

1. مندرجہ ذیل قالبوں کے مقطع (Determinants) معلوم کیجیے۔

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 8 & -\sqrt{2} \\ 5 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \sqrt{64} & 8 \\ 8 & \sqrt{64} \end{bmatrix}$

2. مندرجہ ذیل میں کون سے قالب غیر نادر ہیں؟

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 8 & -10 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & \sqrt{9} \end{bmatrix}$

3. سوال نمبر 2 میں دیے گئے قالبوں کے متصل (Adjoint) معلوم کیجیے۔

4. اگر ممکن ہو تو مندرجہ ذیل قالبوں کے ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0.5 & 5 \\ 0.2 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

5. مندرجہ ذیل کی پڑتال کیجیے:

(a) اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ تو $A\,A^{-1} = I = A^{-1}A$

(b) اگر $B = \begin{bmatrix} 16 & 20 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}$ تو $BI = B = IB$

(c) اگر $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ اور $D = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ تو $CD = I = DC$ آپ C اور D کے بارے میں کیا کہتے ہیں ؟

(d) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ تو $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ اس سوال میں A^{-1} کا مقطع A کے مقطع کا ضربی معکوس ہے۔ کیا عام طور پر یہ درست ہے؟

(e) اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ تو $|AB| = |A|\ |B|$

(ب) اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ اور

(i) $B = 2A$ تو $|B| = 4|A|$ (ii) $B = 3A$ تو $|B| = 9|A|$ (iii) $B = 4A$ تو $|B| = 16|A|$

کیا آپ ایک عمومی نتیجہ لکھ سکتے ہیں۔

6. x کی قیمت معلوم کیجیے اگر:

(i) A ایک نادر قالب ہے جبکہ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ اور $B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

(iii) $\begin{bmatrix} x \\ x+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 14 \end{bmatrix}$ (iv) $[x \quad 5]\begin{bmatrix} 6 \\ x \end{bmatrix} = [132]$

6.22 دو ہمزاد یک درجی مساواتوں کا حل بذریعہ قالب

قالبوں کی مدد سے دو یک درجی مساواتیں ساتھ ساتھ حل کی جا سکتی ہیں۔

فرض کیجیے:

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \quad \dots (1)$$

انھیں قالب کی شکل میں اسطرح لکھ سکتے ہیں:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ اور $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ تو

$$AX = B \; \dots\dots (i)$$

اگر $|A| = ad - bc \neq 0$ تو A^{-1} حاصل کیا جا سکتا ہے۔ (i) کو A^{-1} سے ضرب دینے سے

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

یا $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$

یا $I_2X = A^{-1}B$

یا $X = A^{-1}B$

لیکن
$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} ، \quad \mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc}\\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{bmatrix} \text{ اور } \mathbf{B}=\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}$$

پس
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc}\\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{de-bf}{ad-bc}\\ \frac{af-ce}{ad-bc}\end{bmatrix}$$

دو قالبوں کے مساوی ہونے کی رو سے

$$x=\frac{de-bf}{ad-bc} \quad , \quad y=\frac{af-ce}{ad-bc} \quad \ldots \text{(ii)}$$

پس (i) کا واحد حل ہے جو کہ (ii) میں دیا گیا ہے۔

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

مثال 1. حل کیجیے: $5x-2y=1,$
$2x-y=0$

حل: پہلا مرحلہ: دی گئی مساواتوں کو قالب کی شکل میں ڈھالیے۔

$$\begin{bmatrix}5x-2y\\2x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}5 & -2\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

نوٹ: $\begin{bmatrix}5 & -2\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5x & -2y\\2x & -y\end{bmatrix}$

دوسرا مرحلہ: قالبوں کو نام دیجیے۔

فرض کیجیے: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & -2\\2 & -1\end{bmatrix} ، \mathbf{X}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} ، \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

پس $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$

تیسرا مرحلہ: ہمیں $|\mathbf{A}|$ معلوم کرنا چاہیے۔

$$|\mathbf{A}|=5(-1)-2(-2)=-5+4=-1\neq 0$$

اس لیے A^{-1} معلوم کیا جا سکتا ہے اور دی گئی مساواتیں حل پذیر ہیں جو کہ یہ ہے:

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \ldots (1)$$

چوتھا مرحلہ:
$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

لہٰذا مساوات (1) میں X ، A^{-1} اور B کی جگہ قالب رکھنے سے

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + (-2) \times 0 \\ 2 \times 1 + (-5) \times 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

یا $x = 1 , \ y = 2$

حل سیٹ = $\{(1 , 2)\}$

مثال 2. اگر ممکن ہو، حل کیجیے: $2x + 3y = 8$

$6x + 9y = 24$

حل: پہلا مرحلہ: دی گئی مساواتوں کو قالب کی شکل میں ڈھالیے۔

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 6x + 9y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$$

دوسرا مرحلہ: قالبوں کو نام دیجیے۔

فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$

پس $AX = B$

$$\Rightarrow X = A^{-1} B$$

تیسرا مرحلہ: ہمیں |A| معلوم کرنا چاہیے۔

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \times 9 - 6 \times 3 = 18 - 18 = 0$$

لہٰذا A^{-1} معلوم نہیں کیا جا سکتا، اس لیے یہ ممکن نہیں ہے کہ دی گئی مساواتوں کا حل معلوم کیا جا سکے۔

6.23 اصولِ کریمر

مساواتوں کے نظام کا حل ایک اور طریقے سے بھی معلوم کیا جاتا ہے۔ اسے کریمر کا اصول (Cramer's Rule) کہتے ہیں جس کی وضاحت ذیل میں کی گئی ہے۔

دو متغیرات x اور y میں دو یک درجی مساواتوں کے عمومی نظام پر غور کیجیے۔

$$\text{(i)} \ldots \qquad a_1x + b_1y = c_1$$

$$\text{(ii)} \ldots \qquad a_2x + b_2y = c_2$$

جبکہ a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 اور c_2 حقیقی اعداد ہیں مساواتوں (i) اور (ii) سے y حذف کرنے کے لیے مساوات (i) کو b_2 سے اور مساوات (ii) کو b_1 سے ضرب دینے سے:

$$\text{(iii)} \ldots \qquad a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1$$

$$\text{(iv)} \ldots \qquad a_2b_1x + b_1b_2y = b_1c_2$$

(iv) کو (iii) میں سے تفریق کرنے سے:

$$a_1b_2x - a_2b_1x = b_2c_1 - b_1c_2$$

یا $(a_1b_2 - a_2b_1)\,x = b_2c_1 - b_1c_2$

یا $x = \dfrac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$, (جبکہ $b_2a_1 - a_2b_1 \neq 0$)

(v) ... یا

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

اسی طرح سے y کی قیمت معلوم کرنے کے لیے x کو حذف کیا جا سکتا ہے۔

$$a_2b_1y - a_1b_2y = a_2c_1 - a_1c_2$$

یا $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $(a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0)$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{یا} \quad \ldots \text{(vi)}$$

مساواتیں (v) اور (vi) مطلوبہ حل فراہم کرتی ہیں جبکہ $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

مندرجہ ذیل بالا تین مقطع کو نام دینے سے:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad Dx = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad Dy = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

اصول کریمر: دو متغیرات کی دو یک درجی مساواتوں کے نظام

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad ; \quad a_2x + b_2y = c_2$$

جیسا کہ

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad Dx = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad Dy = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

مساواتوں کا حل ہوگا:

$$x = \frac{Dx}{D}, \quad y = \frac{Dy}{D} \quad \text{جبکہ} \quad D \neq 0$$

مثال: 1. کریمر کے اصول پر نظام کو حل کیجیے۔

$$5x - 2y = 1$$
$$2x - y = 0$$

حل: پہلے D معلوم کرتے ہیں۔

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 4 = -1$$

چونکہ $D \neq 0$ اس لیے ان کا حل ممکن ہے۔

اب ہم D_x اور D_y معلوم کرتے ہیں۔

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - (0) \times (-2) = 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \times 0 - 2 \times 1 = -2$$

کریمر کے اصول کے مطابق

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1}{-1} = 1 \ , \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{-1} = 2$$

حل سیٹ $\{(1, 2)\}$

طلباء اس مثال کی پڑتال بطور مشق خود کریں۔

مثال 2. اگر ممکن ہو حل کیجیے۔

$$2x - 4y = 8$$
$$x - 2y = 4$$

حل: پہلے D معلوم کرتے ہیں۔

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 1 \times (-4) = -4 + 4 = 0$$

چونکہ $D = 0$ اس لیے مندرجہ بالا نظام کا حل ممکن نہیں۔

مشق 6.5

اگر ممکن ہو قالبوں کے ذریعے اور کریمر کے اصول کا استعمال کرتے ہوئے حل کیجیے۔

1. $2x + 5y = 9$, $4x - 2y = 1$
2. $8x - 4y = 2$, $x + 2y = 4$
3. $4x + y = 2$, $7x + 2y = 3$
4. $2x - 3y = -7$, $3x + 2y = -4$
5. $3x + 6y = 5$, $4x + 8y = 9$
6. $y = 2x + 2$, $x = 3 - 2y$
7. $2x + 3y = -3$, $4x + 3y = 5$
8. $-72x + y = 6$, $26x + 18y = 2$
9. $3x + y = 1$, $30x + 10y = 4$
10. $x + 2y = 6$, $2x + 7y = 3$

متفرق مشق VI

.1 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ تو ثابت کیجیے کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

.2 سوال نمبر 1 میں دیئے ہوئے قالبوں کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے۔

(i) $A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$ (ii) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

(iii) $(A-B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$

مندرجہ بالا کلیے قالبوں کے لیے کیوں درست نہیں۔ وضاحت کیجیے۔

.3 مندرجہ ذیل بیانات میں جو صحیح ہوں ان کے لیے T لکھیے جو غلط ہوں F لکھیے۔

(i) $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ کا مرتبہ 1×2 ہے۔

(ii) $[3 \;\; 2]$ اور $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ ضرب کے لیے سازگار ہیں۔

(iii) اگر A اور B ، 2×2 مرتبے والے قالب ہوں اور K کوئی مستقل ہو تو $K(A+B) = KA + KB$

(iv) 2×2 کے قالبوں کے سیٹ میں $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ جمعی ذاتی قالب (*Additive Identity*) ہے۔

(v) اگر قالب A کا مرتبہ 1×2 اور B کا 2×1 ہے تو حاصل ضرب قالب AB کا مرتبہ 1×1 ہوگا۔

(vi) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ ، $B = [7 \;\; 9]$ ، $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ تو

(*a*) AB کا مرتبہ 2×2 ہے (*b*) $CA = AC$

(*c*) $BC = [50 \;\; 66]$ (*d*) $AB = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 42 & 54 \end{bmatrix}$

(*e*) $BA = [61]$

مندرجہ ذیل مساواتوں کے نظام کو قالبی مساوات کی شکل $AX = B$ میں تحریر کیجیے۔

(i) $2x - 4y = 3$
$4x - 2y = -5$

(ii) $5x + 3y = 6$
$2x + 4y = -7$

(iii) $-2x + 3y = -2$
$5x - 6y = 8$

(iv) $5x + 2 = 2y$
$3x = 5 - 3y$

(v) $5y = 7$
$2y + 6x = 3$

(vi) $2 - 3y = 2x$
$6 + 2x = 6y$

5. مندرجہ ذیل ہر ایک قالبی مساوات کو مساواتوں کے نظام کی صورت میں لکھیے۔

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. مندرجہ ذیل جوڑوں میں کون سے قالب ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

(i) $|A|$ ، $|B|$ اور $|AB|$ معلوم کیجیے۔کیا $|AB| = |A|\,|B|$ ہے؟

(ii) A^{-1} اور $|A^{-1}|$ معلوم کیجیے۔کیا $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ ہے؟

(iii) $|-3B|$ معلوم کیجیے کیا $|-3B| = -3\,|B|$ ہے؟

(iv) $|2B|$ معلوم کیجیے کیا $|2B| = 2\,|B|$ ہے؟

خالی جگہیں پر کیجیے۔

(i) اگر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو $ad - bc$ .... کہلاتا ہے۔

(ii) اگر $|A| = 0$ تو قالب A .... کہلاتا ہے۔

(iii) نادر قالب کا .... معلوم نہیں کیا جا سکتا۔

(iv) $\begin{bmatrix} 0 & 5b \\ 3c & -1 \end{bmatrix}$ کا جمعی معکوس .... ہے۔

(v) اگر دو قالب برابر ہوں تو اُن کے مرتبے .... ہیں۔

(vi) وتری قالب میں خاص وتر کے ارکان کے علاوہ تمام ارکان .... ہوتے ہیں۔

(vii) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ .... قالب ہے۔

(viii) دو قالب ضرب کے قابل ہوں گے اگر پہلے میں کالموں کی تعداد = دوسرے میں .... کی تعداد

(ix) اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ تو $A^t =$ ....

(x) قالب A کے ضربی معکوس کو .... لکھتے ہیں۔